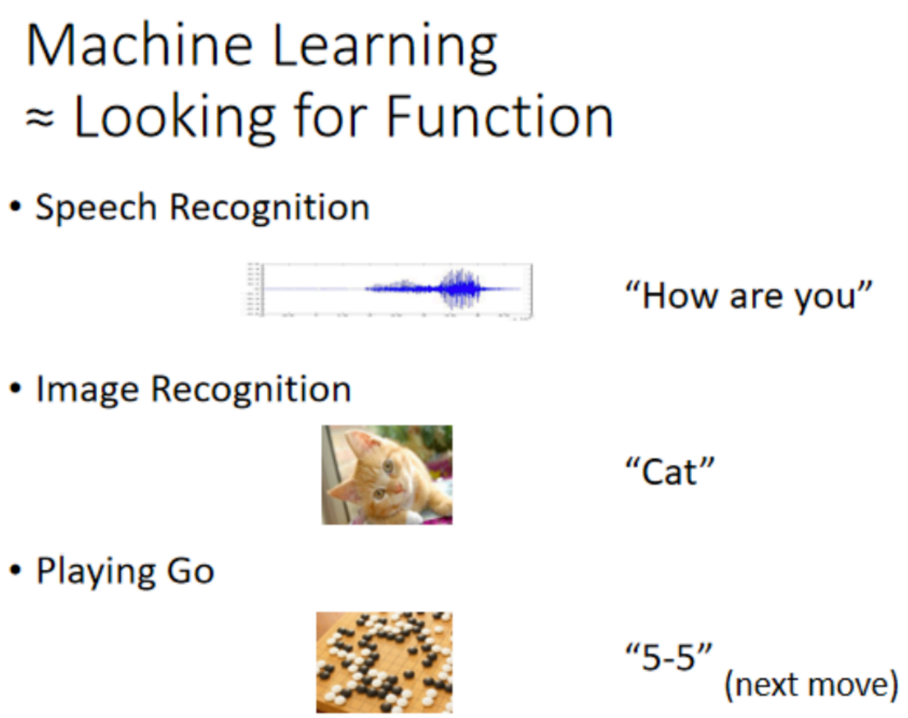
Regression

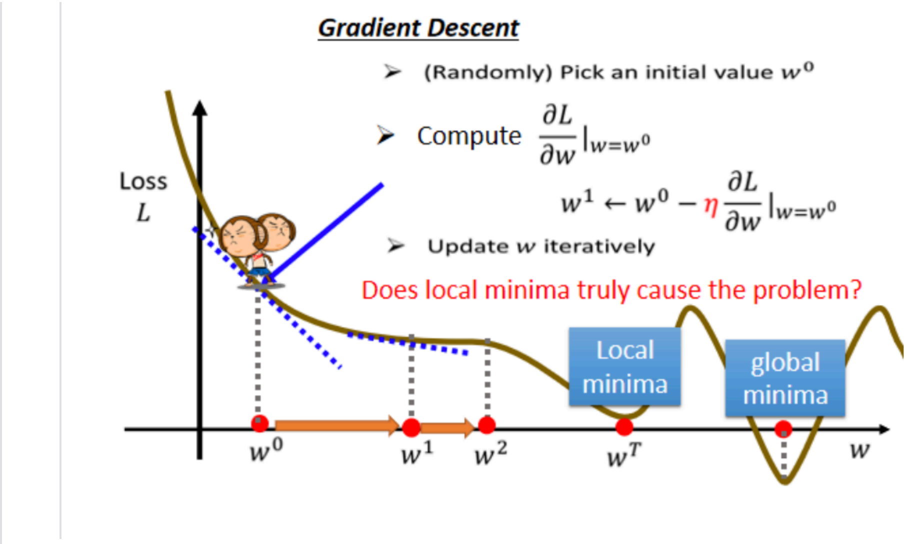
1. Machine Learning

- **机器学习就是让机器具备找函数的能力**

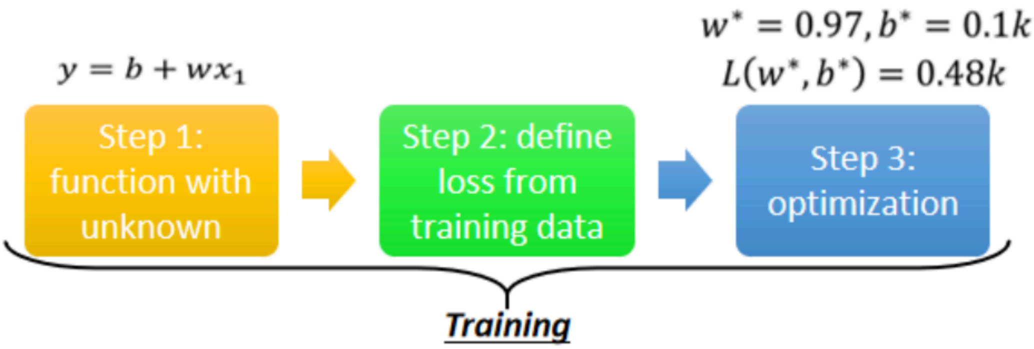


2. Case Study： Regression

- 机器学习找函数的过程可以分为**三个步骤**
  - **Function with Unknown Parameters**
  - **Define Loss from Training Data**
  - **Optimization**

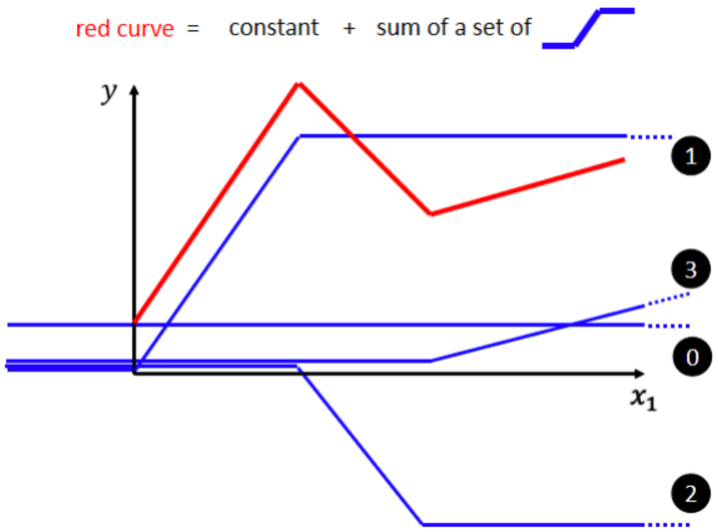


2.1 Linear Model



2. 2 Piecewise Linear Curves

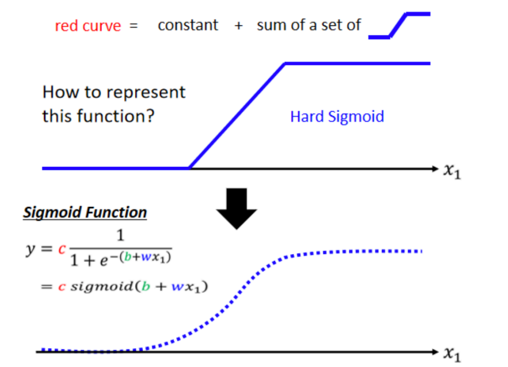
> **Linear Model 太过于简单，x与y的关系往往不是一条直线，如何拟合复杂的曲线呢?**
>
> 答案：可以用若干"Z字形"曲线来拟合，图中的红线就可以用蓝色的0、1、2、3相加得到。完全弯曲的曲线也可以通过选取点来拟合。

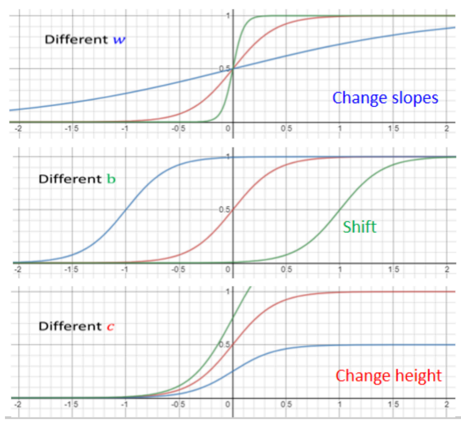


- 哪个函数可以代表这个“蓝色Z字形函数”呢？

Sigmoid Function:

$$y = \frac{c}{1 + e^{-(wx_1 + b)}}$$





多个 Sigmoid 叠加后的函数（逼近任意连续函数）：

$$y = b + \sum_i c_i \cdot \sigma(w_i x_1 + b_i)$$

2.3 New Model

2.3.1 More Feature Model

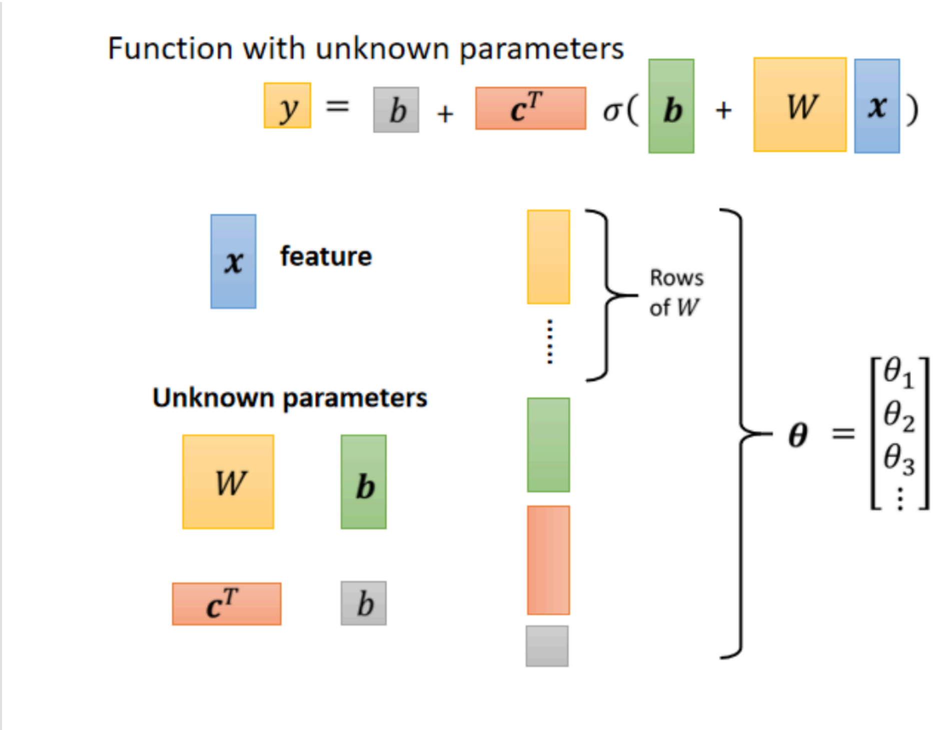
- 多个属性

$$y = b + \sum_i c_i \, \sigma \left(b_i + \sum_j w_{ij} x_j \right)$$

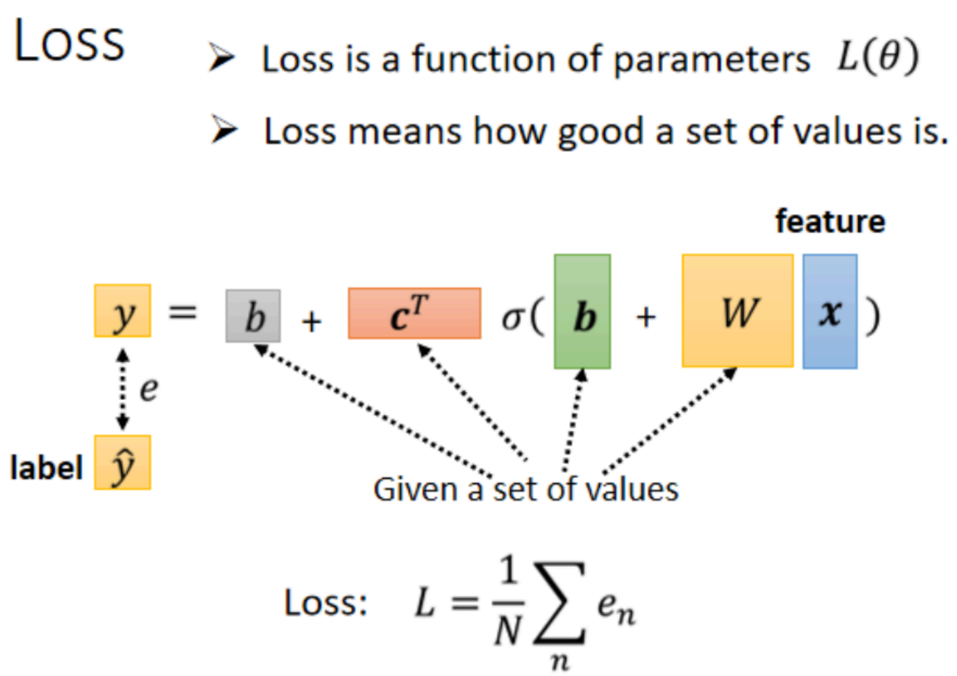
- 矩阵向量形式：

$$
\begin{aligned}
&(1)\ r_i = \sum_j w_{ij} x_j + b_i \\
&(2)\ a_i = \sigma(r_i) \\
&(3)\ y = b + \sum_i c_i a_i \\
&\quad\ \ y = b + \sum_i c_i \, \sigma \left(b_i + \sum_j w_{ij} x_j \right) \\
&(4)\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_J \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1J} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{I1} & w_{I2} & \cdots & w_{IJ} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_I \end{bmatrix} \\
&(5)\ r = Wx + b \\
&(6)\ a = \sigma(r) \\
&(7)\ c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_I \end{bmatrix}, \quad y = c^\top a + b \\
&(8)\ y = c^\top \sigma(Wx + b) + b
\end{aligned}
$$

- 函数中的未知量



2.3.2 Back to ML_Step 2 :define loss from training data



2.3.3 Back to ML_Step 3: Optimization

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \theta^* = \arg\min_{\theta} L$$

$$g = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right|_{\theta=\theta^0} \\ \left.\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right|_{\theta=\theta^0} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad g = \nabla L(\theta^0)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1^1 \\ \theta_2^1 \\ \vdots \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \theta_1^0 \\ \theta_2^0 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \eta \left.\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right|_{\theta=\theta^0} \\ \eta \left.\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right|_{\theta=\theta^0} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

2.3.4 模型变型

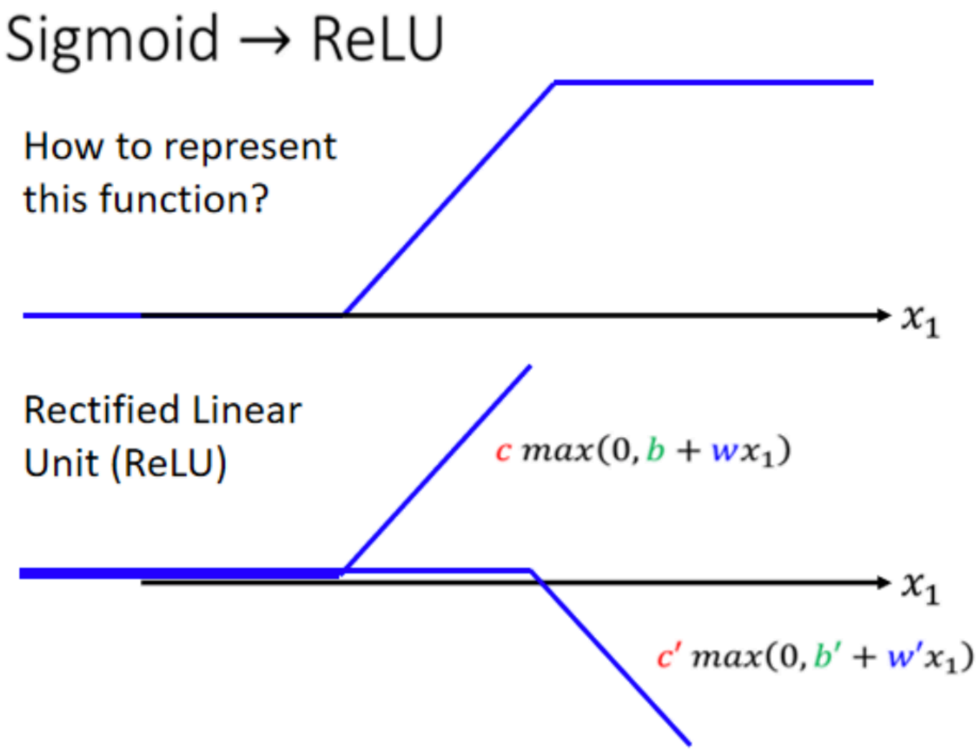
课程一开始说明：

- 我们使用 Sigmoid 是为了近似**蓝色的 Hard Sigmoid（Piecewise Linear）函数**
- 但 Sigmoid 是 S 型曲线，斜率平滑，不像 Hard Sigmoid 那样是**真正的折线**

Sigmoid 逼近 Hard Sigmoid 没问题，但：

- 计算量较大（exp 运算）
- 梯度在两侧容易变得非常小（梯度消失）

$$ReLu = max(0, b + wx_i)$$



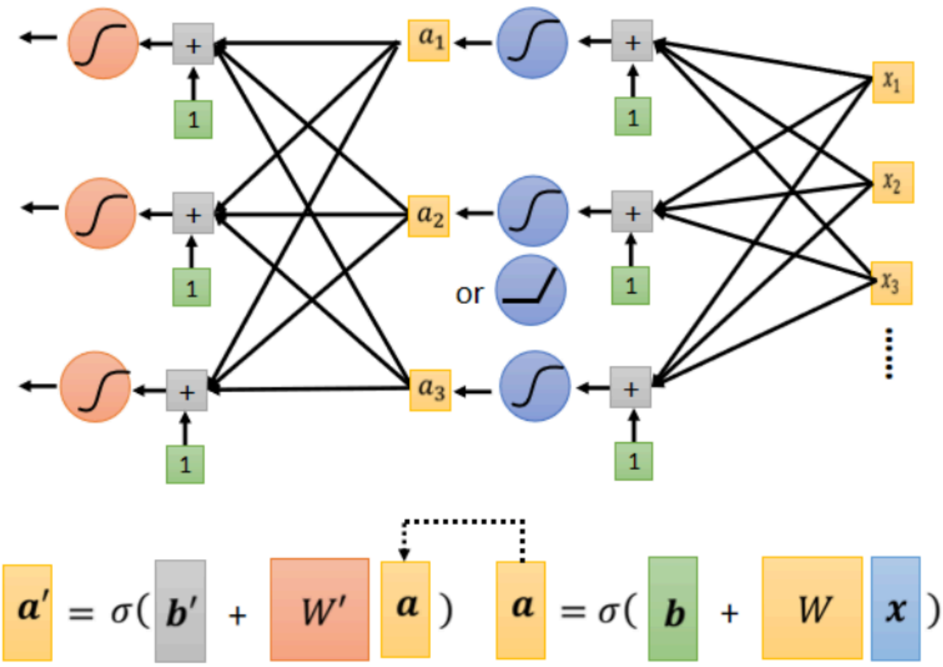
$$\text{HardSigmoid}(x) = \text{ReLU}(w_1 x + b_1) - \text{ReLU}(w_2 x + b_2)$$

2.4 Deep learning

- 单层模型做的事情：

> $$a = \text{Activation}(Wx + b)$$

- **多层 = 把“同样的运算”重复做多次：**



单层：

$$x \to (W, b) \to \text{Activation} \to a$$

如果再来一次（第二层）：

$$a' = \text{Activation}(W'a + b')$$

如果再来一次（第三层）：

$$a'' = \text{Activation}(W''a' + b'')$$

于是形成链状结构：

$$x \to a \to a' \to a'' \to \ldots$$

每一层都有自己独立的参数：

- 不同的 W, W', W''
- 不同的 b, b', b''
- 要重复多少次（层数）是一个 **Hyperparameter（超参数）**

3. Why deep learning?

> **根据所讲的内容，我们可以用很多激活函数来拟合目标曲线，那么用一层非常多的激活函数也可以做到，为什么要不断加层呢？（deep learning而不是fat learning）**
>
> （课程后续解答）