A.5.2 Savoir-faire 2 : nombre dérivé et pente de tangentes

$f'(a) = \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}$ est

— la pente de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

— le taux de variation (instantané/infinitésimal) de $f(x)$ lorsque x varie au voisinage de a.

Exercice 3

La distance parcourue d'une voiture voyageant le long d'une route est donnée par $S(t) = 2t^2 + 4t$, où t est le temp écoulé en secondes. Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ et intepréter sa signification.

Exercice 4

Le coût de fabrication et vente de x objets connectés chaque semaine est donné par $C(x) = 1785 + 3x + 0.002x^2$ €. Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$ et interpréter sa signification.

■ **Exemple A.20 — déterminer la pente de la tangente.**

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f par $f(x) = x^2 - \dfrac{4}{x}$. Déterminer la pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

solution. $f(x) = x^2 - \dfrac{4}{x}$

$D = \mathbb{R}^*$ et $D' = \mathbb{R}^*$

combinaison de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto x^2$, dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 4x^{-1}$$

$$f'(x) = 2x - 4(-x^{-2})$$

$$f'(x) = 2x + \frac{4}{x^2}$$

$f'(2) = 2(2) + \dfrac{4}{(2)^2} = 5$. La pente de la tangente est 5. ■

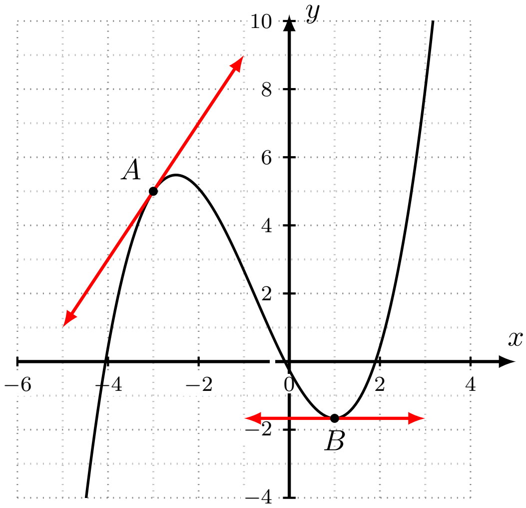
Exercice 5

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f. Déterminer la pente de la tangente au point d'abscisse x_0 dans les cas suivants :

1. f définie par $f(x) = x^2$, au point d'abscisse $x = 2$.
2. f définie par $f(x) = \dfrac{8}{x^2}$, au point d'abscisse $x = 9$.
3. f définie par $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$, au point d'abscisse $x = -1$.
4. f définie par $f(x) = 2x - \dfrac{5}{x}$ au point d'abscisse $x = 2$.
5. f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x - 8}{x^2}$ au point d'abscisse $x = -1$

Exercice 6

Ci-contre sont représentées la fonction f donnée par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}$ ainsi que les tangentes aux points $A(-3\ ;\ 5)$ et $B(1\ ;\ -\frac{5}{3})$.



1. Déterminer par lecture graphique les pentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B.
2. Déterminer par le calcul les nombres dérivés $f'(-3)$ et $f'(1)$.

■ **Exemple A.21 — déterminer le(s) points ou la pente de la tangente est connue.**

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f par $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$. En quel(s) points de la courbe $\mathscr{C}_f$ la pente de la tangente est 13.

solution. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

$D = \mathbb{R}$ et $D' = \mathbb{R}$ *combinaison de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$*

$$f'(x) = 2(2x) + 5(1) - 3(0)$$

$$f'(x) = 4x + 5$$

La tangente au point d'abscisse x vaut 13 si $f'(x) = 13$.

$$4x + 5 = 13$$

$$x = 2$$

$f(2) = 2(2)^2 + 5(2) - 3 = 15$, la pente de la tangente vaut 13 au point $A(2\ ;\ 15)$ ■

Exercice 7

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f par $f(x) = x^2 - 4x + 7$. Déterminer le(s) points de la courbe ou la pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ vaut 2.

Exercice 8

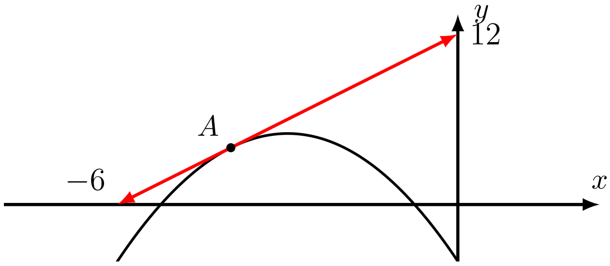
Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f par $f(x) = 3x^3 - 5x + 2$. Déterminer le(s) points de la courbe ou la pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ vaut 4.

Exercice 9

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer le(s) points de la courbe ou la tangente est horizontale.

Exercice 10

Ci-dessous est représenté la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 6x - 4$ et la tangente en A à $\mathscr{C}_f$. Déterminer les coordonnées de A.



■ **Exemple A.22 — retrouver une expression à partir d'informations sur le nombre dérivé.**

$a, b \in \mathbb{R}$. Soit $\mathscr{C}_f$ est la représentation de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - ax + b$. Sachant que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(2\ ;\ 7)$ est de pente 3, déterminer a et b.

solution. $f(x) = 2x^2 - ax + b$, $f'(x) = 4x - a$.

$$A(2\ ;\ 7) \in \mathscr{C}_f \iff f(2) = 7 \iff 2(2)^2 - a(2) + b = 7.$$

pente de la tangente en $A(2\ ;\ 7)$ est $3 \iff f'(2) = 3 \iff 4(2) - a = 3$

En résolvant le système $\begin{cases} 8 - 2a + b = 7 \\ 8 - a = 3 \end{cases}$ on a $\begin{cases} a = 5 \\ b = 9 \end{cases}$, $\therefore f(x) = 2x^2 - 5x + 9$. ■

Exercice 11

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation de la fonction f donnée par $f(x) = x^3 + ax + 5$. Déterminer a sachant que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'asbcisse 1 est de pente 10.

Exercice 12

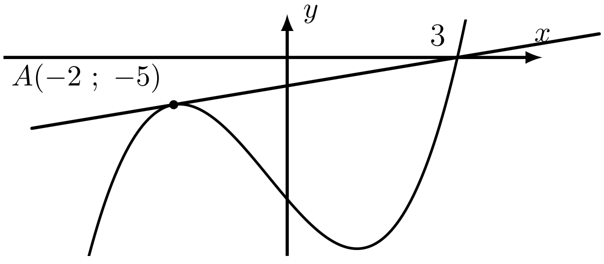
Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation de la fonction f donnée par $f(x) = -3x^3 + ax + b$. Déterminer a et b sachant que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'asbcisse $A(-3\ ;\ 8)$ est de pente 9.

Exercice 13

Soit la courbe $\mathscr{C} : y = 2x^2 + a + \dfrac{b}{x}$. Déterminer a et b sachant que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'asbcisse $A(1\ ;\ 11)$ est de pente -2.

Exercice 14

Soit la courbe $\mathscr{C} : y = x^3 + x^2 + ax + b$ et la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(-2\ ;\ -5)$ représentées ci-dessous :



1. Déterminer la pente de la tangente en A.
2. Déterminer a et b.

Exercice 15

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$.

1. Donner le domaine de dérivabilité et déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.
2. On suppose $f(2) = 0$, $f'(1) = 0$ et $f'(-2) = 0$. Écrire 3 équations vérifiées par a, b et c.
3. Résoudre le système obtenu et donner l'expression de la fonction f.

Exercice 16

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + bx + c$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
2. Donner le domaine de dérivabilité et déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.
3. On sait que $A(0;5)$ et $B(2, -\frac{23}{3}) \in \mathscr{C}_f$, et que la pente de la tangente en A est -9.

   Pour chaque question entourer l'équation vraie :

   a) (A) $f(5) = 0$ (B) $f'(5) = 0$ (C) $f(0) = 5$ (D) $f'(0) = 5$

   b) (A) $f'(-9) = 0$ (B) $f'(5) = -9$ (C) $f'(0) = -9$ (D) $f'(-9) = 5$

   c) (A) $f(2) = -\frac{23}{3}$ (B) $f'(2) = -\frac{23}{3}$ (C) $f(-\frac{23}{3}) = 5$ (D) $f'(-\frac{23}{3}) = 2$
4. Traduire les 3 affirmations précédentes par un système d'inconnues a, b et c.
5. Résoudre le système et déduire l'expression de la fonction f.