Chapitre

Suites 5

5.1 Définitions

Exemple 5.1

- La suite des nombres entiers $0; 1; 2; 3 \ldots$.
- La suite des nombres pairs $0; 2; 4; 6; \ldots$.
- La suite $1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; \ldots$

Définition 5.1 Une suite numérique u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

Les antécédents n sont appelés les **rangs** (ou les indices) des termes.
Les images $u(n)$ sont les **termes** de la suite et se notent aussi u_n (on lit « u indice n »).
On note la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).

On peut représenter une suite (u_n) par un nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$, où $n \in \mathbb{N}$.

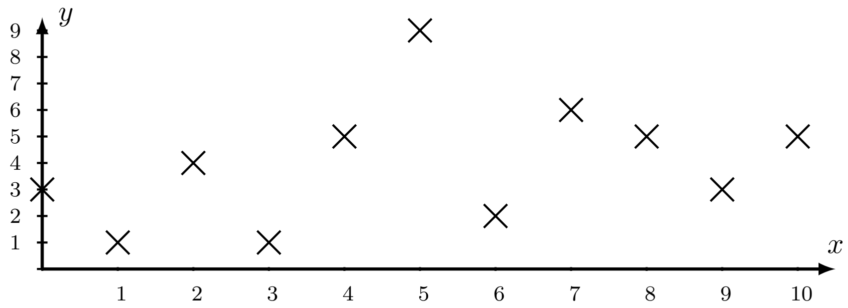


Figure 5.1 – On considère la suite (u_n) des décimales de $\pi \approx 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots$: $u_0 = 3$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4\ldots$

En général une suite (u_n) peut-être définie :
- de manière explicite : $u_n = f(n)$
- de manière récurrente : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

5.1.1 Applications : estimer des solutions d'équations cubiques par itération

Exemple 5.2 On cherche à résoudre $x^3 - 10x = 30$, inconnue x.

Une solution x^* vérifie $x^3 - 10x = 30$

$$x^3 = 10x + 30$$

$$x = \sqrt[3]{10x + 30}$$

Nous allons construire une suite de nombres qui se rapproche de x^* par itération : $x_{n+1} = \sqrt[3]{10x_n + 30}$

Une solution x^* vérifie $x^3 = 10x + 30$

$$x^2 = 10 + \frac{30}{x}$$

$$x = \sqrt{10 + \frac{30}{x}}$$

Nouveau itération possible :

$$x_{n+1} = \sqrt{10 + \frac{30}{x_n}}$$

$\begin{cases} x_0 = 4 \\ x_{n+1} = \sqrt[3]{10x_n + 30} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_{n+1} = \sqrt[3]{10x_n + 30} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x_0 = 4 \\ x_{n+1} = \sqrt{10 + \frac{30}{x_n}} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_{n+1} = \sqrt{10 + \frac{30}{x_n}} \end{cases}$

$x_0 = 4$	$x_0 = 5$	$x_0 = 4$	$x_0 = 5$
$x_1 =$	$x_1 =$	$x_1 =$	$x_1 =$
$x_2 =$	$x_2 =$	$x_2 =$	$x_2 =$
$x_3 =$	$x_3 =$	$x_3 =$	$x_3 =$
$x_5 =$	$x_5 =$	$x_5 =$	$x_5 =$
$x_9 =$	$x_9 =$	$x_9 =$	$x_9 =$
$x_{10} =$	$x_{10} =$	$x_{10} =$	$x_{10} =$

Combien d'itérations n avant que la valeur du terme x_n semble se stabiliser ? ....

Il semble que $\lim_{n\to\infty} x_n \approx$.................................. $\lim_{n\to\infty} x_n \approx$..................................

Vérifier la limite obtenue vérifie $|x^3 - 10x - 30| \leqslant 10^{-5}$.

Exemple 5.3 — à vous. On cherche la solution de $x^3 + 2x = 40$, inconnue x sur l'intervalle $[3; 4]$.

1) Montrer que la solution x^* vérifie $x = \sqrt[3]{-2x + 40}$ et $x = \sqrt{-2 + \frac{40}{x}}$.
2) Proposer deux approches différentes de résolution par itération. Choisissez une valeur initiale x_0 et la relation de récurrence.
3) Pour chaque approche :
   a) Calculer les premiers termes.
   b) Est ce que la suite x_n semble se rapprocher d'une valeur l ?
      Combien d'itérations sont nécessaires ?
   c) Vérifier si l est une valeur approchée d'une solution : $|l^3 + 2l + 40| \leqslant$
   d) Laquelle des deux approches est plus rapide ?

Exercice 1 Mêmes questions pour les solutions de cubiques suivantes.

1) $x^3 + 10x = 51$ sur $[2;3]$
2) $x^3 + 2x = 1$ sur $[0;1]$
3) $x^3 + 4x = 10$ sur $[1;2]$
4) $x^3 + 10x = 25$ sur $[1;2]$

- $x^3 - 4x = 10$ sur $[2;3]$
- $x^3 - 3x = 2$ sur $[1;3]$

Exercice 2 — Rappels Python.

```
def u(n) :
    nbr = 3
    for i in range(n) :
        nbr = nbr + 1
    return nbr
```

L'instruction `u(5)` retourne ....

❏ $3+1+1+1+1$
❏ $3+1+1+1+1+1$
❏ $3+1+1+1+1+1+1$
❏ $3+1+1+1+1+1+1+1$

```
def v(n) :
    nbr = 10
    for i in range(n) :
    nbr = 2*nbr
    return nbr
```

L'instruction `v(6)` retourne ....

❏ $10 \times 2 \times 6$
❏ $10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
❏ $10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
❏ $10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

```
def w(n) :
    nbr = 3
    for i in range(1,n) :
        nbr = i*nbr
    return nbr
```

L'instruction `w(5)` retourne ....

❏ 3×5
❏ $3 \times 1 \times 2 \times 3$
❏ $3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$
❏ $3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$

```
def f(n) :
    nbr = 0
    for i in range(1,n+1) :
        nbr = i^2 + nbr
    return nbr
```

L'instruction `f(5)` retourne ....

❏ 2×5^2
❏ $0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
❏ $0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$
❏ $0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$

Exercice 3 En vous aidant du tableau, préciser ce qu'affiche les scripts suivants :

```
n , nbr = 0 , 1
while nbr > 0.5 :
    n = n+1
    nbr = 0.88*nbr
print(n)
```

n	1	2	3	4	5	6	7
nbr							

❏ 6
❏ 5
❏ Le plus petit entier n tel que $0.88^n \geqslant 0.5$
❏ Le plus petit entier n tel que $0.88^n \leqslant 0.5$
❏ Rien car il ne s'arrête pas
❏ 0.464404

```
n , nbr = 0 , 1
while nbr < 2 :
    n = n+1
    nbr = 1.15*nbr
print(n)
```

n	1	2	3	4	5	6	7
nbr							

❏ 5
❏ Le plus petit entier n tel que $1.15^n \geqslant 2$
❏ Rien car il ne s'arrête pas
❏ 2,011 357 2

5.2 Etude d'une suite

Définition 5.2 Soit la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
u est **croissante** (à partir du rang N) lorsque :

$$\text{pour tout } n \geqslant N \qquad u_{n+1} \geqslant u_n$$

u est **décroissante** (à partir du rang N) lorsque :

$$\text{pour tout } n \geqslant N \qquad u_{n+1} \leqslant u_n$$

Méthode n° 1 La suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est la suite dérivée de la suite u.
Si les termes de v sont positifs à partir d'un certain rang N, la suite u est croissante !

Méthode n° 2 valable uniquement si la suite u a des termes **strictement positifs**.
Si le ratio $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ à partir d'un certain rang N, la suite u est croissante.

R méthode 2 est conséquence de 1 : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$.

Méthode n° 3 Si l'on connait l'expression explicite de la suite u : $u_n = f(n)$, le sens de variation de u est celui de f sur $[0; +\infty[$.

■ **Exemple 5.4** Montrer les méthodes sur l'exemple $u_n = \dfrac{1}{3n+2}$

Notion intuitive de limite Pas de définition précise.

On dira qu'une suite u **converge vers** l si ses termes, à partir d'un certain rang, se rapprochent de l. On écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

On dira qu'une suite u **diverge vers** $+\infty$ si pour tout réel A, les termes dépassent A à partir d'un certain rang. On écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

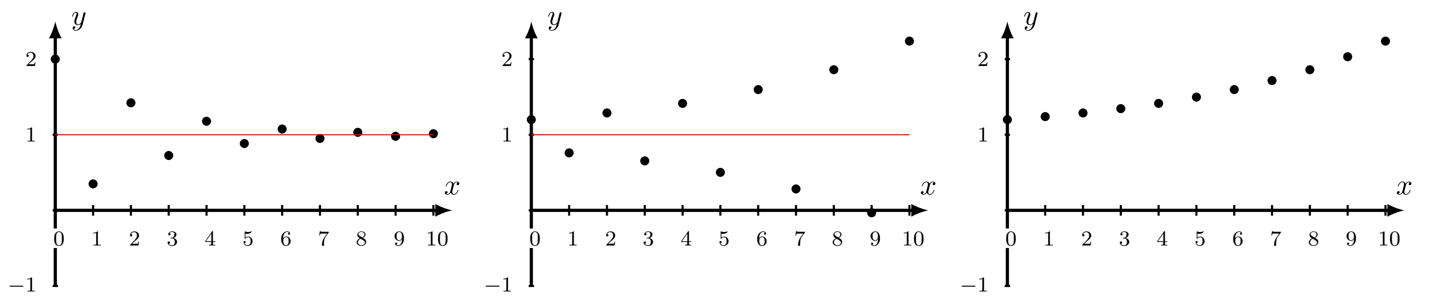


Figure 5.2 – Exemples de suites avec de gauche à droite : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, une suite sans limites, et une suite divergente vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

5.2.1 Exercices : définition de suites et sens de variation

Exercice 4 En étudiant le signe de $u_{n+1}-u_n$, étudier les variations des suites u, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1)$u_n = n^2+2n$	2)$u_n = \dfrac{4}{n+1}$	3)$u_n = -5^n$	4)$u_n = 2^n-3$

Exercice 5 En comparant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1, étudier les variations des suites u, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1)$u_n = 7\times 0,5^n$	2)$u_n = 4\times 9^n$	3)$u_n = \dfrac{2}{3^n}$	4)$u_n = 5\times\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$

Exercice 6 Soit u la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$

1) Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
2) Résoudre l'inéquation $\dfrac{2n}{n+1} > 1$
3) En déduire les variations de la suite (u_n).

Exercice 7 — entrainement. Étudier le sens de variation de la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1{,}01^n}{n}$

Exercice 8 Soit u la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2-3n+1$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-3x+1$.
2) En déduire les variations de la suite u.

Exercice 9 — suites de la forme $u_n = f(n)$.

Étudier les variations des suites u définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

1)$u_n = n^2-10n+3$	3)$u_n = \sqrt{4n+6}$	5)$u_n = \dfrac{n-3}{2n+1}$
2)$u_n = n^3-n^2+n$	4)$u_n = 7+\dfrac{5}{n}$	6)$u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

Exercice 10 — suites définies par récurrence. Étudier les variations des suites ci-dessous.

1) u_n définie par $u_0=3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1}=3u_n$
2) u_n définie par $u_0=3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1}=u_n+\sqrt{n}$
3) u_n définie par $u_0=-2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1}=u_n^2+u_n+2$
4) u_n définie par $u_0=3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1}=\dfrac{3}{u_n}$ (*exprimer u_{n+2} à l'aide de u_n*)

Exercice 11 À l'aide de la calculatrice, conjecturez la limite des suites u définies par .

1)$u_n = -3n+5$	3)$u_n = 1.5^n-100$	5)$u_n = \dfrac{n+2}{2n-1}$
2)$u_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+5$	4)$u_n = \dfrac{1}{n}$	6)$u_n = \dfrac{5n-2}{3n+1}$

Exercice 12 À l'aide de la calculatrice, conjecturez la limite des suites suivantes.

1)$u_{n+1} = 2u_n-6$, et $u_0=2$	3)$u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$, et $u_0=5$
2)$u_{n+1} = 0{,}6u_n+2$, et $u_0=1$	4)$u_{n+1} = \dfrac{-1}{3}u_n$, et $u_0=1$

5.3 Quelques suites de référence

Définition 5.3 Une suite est **arithmétique** de **raison** r si la différence entre deux termes consécutifs vaut toujours r :[1]

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

Donc $r = u_{n+1} - u_n$

[1] faire retenir différence commune

Proposition 5.1 Si $r > 0$ alors u est strictement croissante.
Si $r < 0$ alors u est strictement décroissante.

Proposition 5.2 — forme explicite.
Pour une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = rn + u_0$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = r(n-1) + u_1$
- Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$: $u_n = r(n-p) + u_p$

On a aussi $r = \dfrac{u_n - u_p}{n-p}$.

Définition 5.4 Une suite est **géométrique** de **raison** q si le quotient entre deux termes consécutifs vaut toujours r :[2]

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n$$

Si $u_n \neq 0$ alors $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

[2] faire retenir ratio commun

Proposition 5.3 Si $q > 1$ alors q^n est strictement croissante.
Si $0 < q < 1$ alors q^n est strictement décroissante.

Proposition 5.4 — forme explicite.
Pour une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = q^n u_0$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = q^{n-1} u_1$
- Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$: $u_n = q^{n-p} u_p$

R Si $q > 0$ alors $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\dfrac{u_{n+2}}{u_n}} = \sqrt[3]{\dfrac{u_{n+3}}{u_n}} = \dots$

Proposition 5.5 — comportement de la suite géométrique q^n.
- Si $q \leqslant -1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $q \geqslant 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

5.3.1 Exercices : quelques suites de référence

Une relation de récurrence permet de calculer un terme à partir des termes qui le précèdent.

Exercice 13 Pour chaque suite, calculer les 4 termes suivants selon la relation récurrence donnée.

a) $u_0 = 10$; $u_1 = 12$; $u_2 = 14$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_4 = \ldots\ldots$; $u_5 = \ldots\ldots$; $u_6 = \ldots\ldots$ $\boxed{u_{n+1} = u_n + 2}$

b) $u_0 = -7$; $u_1 = -2$; $u_2 = 3$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_4 = \ldots\ldots$; $u_5 = \ldots\ldots$; $u_6 = \ldots\ldots$ $\boxed{u_{n+1} = u_n + 5}$

c) $u_0 = 20$; $u_1 = 10$; $u_2 = 5$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_4 = \ldots\ldots$; $u_5 = \ldots\ldots$; $u_6 = \ldots\ldots$ $\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n}$

d) $u_0 = 5$; $u_1 = 10$; $u_2 = 20$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_4 = \ldots\ldots$; $u_5 = \ldots\ldots$; $u_6 = \ldots\ldots$ $\boxed{u_{n+1} = 2u_n}$

e) $u_0 = -12$; $u_1 = \ldots\ldots$; $u_2 = \ldots\ldots$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_4 = \ldots\ldots$; $u_5 = \ldots\ldots$ $\boxed{u_{n+1} = u_n + 3}$

f) $u_0 = 6$; $u_1 = \ldots\ldots$; $u_2 = \ldots\ldots$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_4 = \ldots\ldots$; $u_5 = \ldots\ldots$ $\boxed{u_{n+1} = u_n - 10}$

g) $u_0 = 1$; $u_1 = \ldots\ldots$; $u_2 = \ldots\ldots$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_4 = \ldots\ldots$; $u_5 = \ldots\ldots$ $\boxed{u_{n+1} = 3(u_n + 2)}$

h) $u_0 = 5$; $u_1 = \ldots\ldots$; $u_2 = \ldots\ldots$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_4 = \ldots\ldots$; $u_5 = \ldots\ldots$ $\boxed{u_{n+1} = -2u_n - 5}$

Exercice 14 Utilise l'indication pour préciser la relation de récurrence de chaque suite et le terme manquant.

arithmétique $u_0 = 0.8$; $u_1 = 0.75$; $u_2 = 0.7$; $u_3 = 0.65$; $u_4 = \ldots\ldots$; $u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

arithmétique $u_0 = -5$; $u_1 = -7$; $u_2 = -9$; $u_3 = -11$; $u_4 = \ldots\ldots$; $u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

arithmétique $u_0 = -2.6$; $u_1 = -2.4$; $u_2 = -2.2$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

arithmétique $u_0 = \frac{1}{4}$; $u_1 = \frac{2}{4}$; $u_2 = \frac{3}{4}$; $u_3 = 1$; $u_4 = \ldots\ldots$; $u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

géométrique $u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 9$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

géométrique $u_0 = 2$; $u_1 = 20$; $u_2 = 200$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

géométrique $u_0 = 2$; $u_1 = -10$; $u_2 = 50$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

géométrique $u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Fibonacci $u_0 = 1$; $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = \ldots\ldots$; $\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Fibonacci $u_0 = 2$; $u_1 = 2$; $u_2 = 4$; $u_3 = \ldots\ldots$; $\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 15 Pour les suites **arithmétiques** suivantes, déterminer la raison et calculer le terme de rang 10.

$u_0 = 12$; $u_1 = 3$; $u_2 = \ldots\ldots$; $u_3 = -15$; $u_{10} = \ldots\ldots$; $r = \ldots\ldots$

$u_0 = 4$; $u_1 = \ldots\ldots$; $u_2 = 14$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_{10} = \ldots\ldots$; $r = \ldots\ldots$

$u_0 = 7$; $u_1 = \ldots\ldots$; $u_2 = \ldots\ldots$; $u_3 = 19$; $u_{10} = \ldots\ldots$; $r = \ldots\ldots$

$u_0 = 1.3$; $u_1 = \ldots\ldots$; $u_2 = \ldots\ldots$; $u_3 = -0.8$; $u_{10} = \ldots\ldots$; $r = \ldots\ldots$

Exercice 16 Pour les suites **géométriques** de **termes positifs** déterminer la raison et le terme de rang 10.

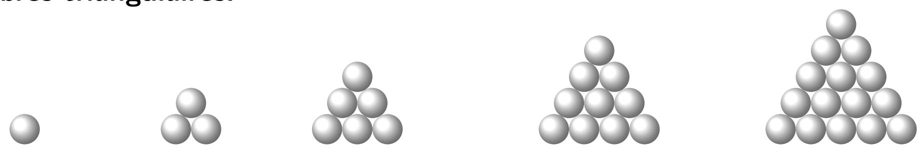
$u_0 = 3$; $u_1 = 12$; $u_2 = \ldots\ldots$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_{10} = \ldots\ldots$; $q = \ldots\ldots$

$u_0 = 12$; $u_1 = \ldots\ldots$; $u_2 = 48$; $u_3 = \ldots\ldots$; $u_{10} = \ldots\ldots$ $q = \ldots\ldots$

$u_0 = 4$; $u_1 = \ldots\ldots$; $u_2 = \ldots\ldots$; $u_3 = 108$; $u_{10} = \ldots\ldots$ $q = \ldots\ldots$

$u_0 = 6$; $u_1 = \ldots\ldots$; $u_2 = \ldots\ldots$; $u_3 = 6000$; $u_{10} = \ldots\ldots$ $q = \ldots\ldots$

Exercice 17 — Nombres triangulaires.



$u_1 = 1$ $u_2 = u_1 + 2$ $u_3 = u_2 + 3$ $u_4 = u_3 + 4$ $u_5 = u_4 + 5$

1) Complétez les relations récurrences : $u_{n+1} = u_n + \ldots\ldots\ldots$ $u_n = \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$
2) Calculer les 10 premiers nombres triangulaires.

Exercice 18 Le grand carré est d'aire 1. On note u_n les aires de la suite des carrés grisés.

1) Donner les 4 premiers terme de la suite (u) :

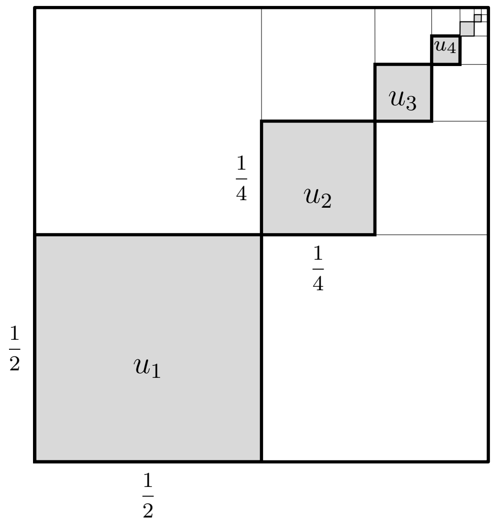
   $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2) Donner une relation de récurrence : ....
3) Complétez le script Python pour calculer

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{10} =$$

```python
def calcul() :
    nbr , u = ...   , ...
    for i in range(.......) :
        nbr = nbr + ...
        u = ...
    return nbr
```

4) Donner une valeur approchée et interprétez le résultat de :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{100} \approx$$



Exercice 19 Le grand rectangle est d'aire 1. On note u_n les aires de la suite des rectangles grisés.

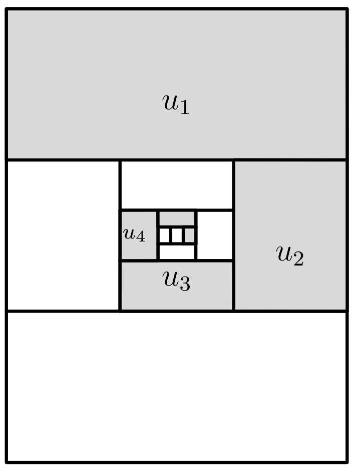
1) Donner les 4 premiers terme de la suite (u) :

   $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2) Donner une relation de récurrence : ....
3) Complétez le script Python pour calculer $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

```python
def calcul(n) :
    nbr , u =   ...   , ...
    for i in range(.......) :
        nbr = nbr + ...
        u = ...
    return nbr
```

4) Donner une valeur approchée et interprétez le résultat de :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{100} \approx$$



Dans un plan d'épargne, les intérêts sont dit **simples** lorsqu'ils sont calculés chaque année sur la base de la **somme placée au départ**.

■ **Exemple 5.5** Un placement 200 € en intérêts **simples** de 3%, rapporte 3% × 200 chaque année.
$u_0 = 200$. On a la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + 0.03u_0 = u_n + 6$"
Après 5 ans l'épargne est $u_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et après n années $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Dans un plan d'épargne, les intérêts sont dit **composés** lorsqu'ils sont calculés chaque année sur la base de la **somme totale accumulée l'année précédente**. De manière générale, les gains ou pertes d'un placement sont exprimés en pourcentage par rapport à l'année écoulée.
u_0 = placement de départ, et u_n =placement après n années.
La suite u vérifie la relation de récurrence : $u_{n+1} = CM \times u_n = (1 + TE)u_n$

■ **Exemple 5.6** Un placement 200 € en intérêts **composés** de 3%, augmente de 3% chaque année. Le placement est multiplié par 1.03 chaque année.
$u_0 = 200$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = 1.03u_n$
Après 5 ans l'épargne est $u_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, et après n années $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 20 Dans chaque cas u_n désigne le montant d'un placement après n échéances. Complétez :

	Relation de récurrence	**Forme explicite**
intérêts composés 5% $u_0 = 2000€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots u_n$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
intérêts composés 2% $u_0 = 4000€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots u_n$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
intérêts composés 1% $u_0 = 10000€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots u_n$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
intérêts simples 6% $u_0 = 100€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
intérêts simples 2% $u_0 = 3500€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
dépréciation composée de 7% $u_0 = 500€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
dépréciation composée de 12% $u_0 = 100€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
dépréciation composée de 9% $u_0 = 300€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
intérêts composés 10% $u_1 = 400€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots u_n$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
intérêts composés 4% $u_3 = 200€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots u_n$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
intérêts composés 3% $u_5 = 100€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots u_n$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
dépréciation composés de 3% $u_2 = 200€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots u_n$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$
dépréciation composés de 3% $u_{10} = 300€$	$u_{n+1} = \ldots\ldots u_n$	$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 21 Indiquer si la suite est arithmétique ou pas.

	arithmétique	non arithmétique
1/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 2$	☐	☐
2/ u définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{3}$	☐	☐
3/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n - 2$	☐	☐
4/ u définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 5$	☐	☐
5/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$	☐	☐
6/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 5$	☐	☐
7/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -n + 3$	☐	☐
8/ u définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$	☐	☐

Exercice 22 Indiquer si la suite est géométrique ou pas.

	géométrique	non géométrique
1/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4^n$	☐	☐
2/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 7 \times 0.5^n$	☐	☐
3/ u définie par $u_0 = 5$ et pour tout n, $u_{n+1} = 1{,}05u_n$	☐	☐
4/ u définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$	☐	☐
5/ u définie pour tout n, $u_{n+1} = 1{,}1n$	☐	☐
6/ u définie pour tout n, $u_{n+1} = n^4$	☐	☐
7/ u définie par $u_0 = 5$ et pour tout n, $u_{n+1} = 5u_n + 1$	☐	☐
8/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3^{-n}$	☐	☐

Exercice 23 Les suites u sont **arithmétiques** de raison r.
Donner les formes explicites des suites arithmétiques suivantes et calculer u_{100}.

1) $u_0 = -3$ et $r = -\frac{1}{2}$.
2) $u_1 = 5$ et $r = \frac{1}{10}$.
3) $u_5 = -\frac{1}{3}$ et $r = \frac{1}{2}$.
4) $u_{10} = 0$ et $r = -\frac{1}{3}$.

Exercice 24 Pour les suites **arithmétique** suivantes déterminer la raison r et déduire la forme explicite.

1) $u_0 = 3$ et $u_1 = 7$.
2) $u_0 = 3$ et $u_2 = 7$.
3) $u_1 = -4$ et $u_{10} = 38$.
4) $u_1 = 5$ et $u_{100} = -45$.
5) $u_2 = 4$ et $u_8 = -6$.
6) $u_5 = 27$ et $u_{10} = 33$.

Exercice 25 Les suites u sont **géométriques** de raison q.
Donner les formes explicites des suites arithmétiques suivantes et calculer u_{10}.

1) $u_0 = 4$ et $q = 5$.
2) $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $q = -2$.
3) $u_5 = 3$, et $q = \dfrac{1}{2}$.
4) $u_{20} = 10$, et $q = \dfrac{-1}{3}$.

Exercice 26 Pour les suites **géométriques** suivantes déterminer la raison q et déduire la forme explicite.

1) $u_0 = 6$, et $u_1 = 9$.
2) $u_0 = 1$, et $u_2 = 9$. $q > 0$
3) $u_5 = 486$, et $u_7 = 4374$. $q > 0$
4) $u_2 = -1{,}92$, et $u_4 = -1{,}23$. $q > 0$
5) $u_5 = 100$ et $u_9 = 12{,}5$. $q < 0$.
6) $u_3 = 9$ et $u_7 = 2304$. $q < 0$.

Exercice 27 Indiquer le sens de variation des suites suivantes.

	croissante	décroissante	non monotone
1/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 2$	☐	☐	☐
2/ u définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$	☐	☐	☐
3/ u définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$	☐	☐	☐
4/ u définie par $u_0 = -3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$	☐	☐	☐
5/ u définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0.5u_n$	☐	☐	☐
6/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0.95^n$	☐	☐	☐
7/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1.10^n$	☐	☐	☐
8/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n + 1$	☐	☐	☐
9/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -3^n + 1$	☐	☐	☐
10/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1.05^n + 3$	☐	☐	☐
11/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5 + 0.3^n$	☐	☐	☐
12/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 - 0.25^n$	☐	☐	☐
13/ u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 + (-0.80)^n$	☐	☐	☐

Exercice 28 Donner les limites lorsque $n \to \infty$ des suites suivantes.

1) u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n^2 - 3n + 2$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ....

2) u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -n^2 + 2$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ....

3) u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n}{3n+1}$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ....

4) u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ....

5) u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -1.5^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ....

6) u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -0.5^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ....

7) u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0.25^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ....

8) u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 - 0.25^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ....

9) u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -0.7u_n$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ....

10) u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 1.25u_n$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ....

11) u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-0.8)^n + 1$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ....

12) u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1.15u_n$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ....

Exercice 29 Soit la suite u définie par $u_0 = 108$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n - 3$

1) Justifier la nature et donner la forme explicite de la suite u.
2) Déterminer u_{20}.
3) Existe-t-il un terme de la suite égal à -301. Si oui, préciser son rang.
4) À partir de quel rang les termes de la suite sont négatifs.

Exercice 30

Soit la suite u définie par la forme explicite $u_n = 4n - 3$.

1) Écrire les termes u_{n+1} et u_n et calculer $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n$
2) En déduire que u est une suite arithmétique et déterminer la raison r.

Exercice 31

Soit la suite u définie par la forme explicite $u_n = \frac{2}{3^{n+1}}$.

1) Écrire les termes u_{n+1} et u_n et calculer $\forall n \in \mathbb{N}$ le ratio $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
2) En déduire que u est une suite géométrique et préciser la raison q.

Exercice 32

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

1) Calculer u_3, u_4 à $u_1 0$.
2) Exprimer u_{n+3} à l'aide de u_n.
3) Exprimer u_{n+6} à l'aide de u_n.
4) Donner l'expression de u_{n+3k} , pour $k \in \mathbb{N}$, en fonction de u_n.
5) Calculer u_{2022} et u_{2023}

Exercice 33

La suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, avec $u_0 = 1$.

On suppose que u est aussi suite géométrique non nulle de raison q.

1) Exprimer u_{n+2} et u_{n+1} à l'aide de q et u_n.
2) Déterminer une équation vérifiée par q.
3) Déterminer les deux valeurs possibles pour q et les formes explicites de u
4) Représenter les suites par un nuage de points sur la pythonette, et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ dans chaque cas.

Exercice 34

La suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$: $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$, avec $u_0 = 1$.

On suppose que u est aussi suite géométrique non nulle de raison q.

1) Déterminer une équation vérifiée par q.
2) Déterminer les deux valeurs possibles pour q et les formes explicites possibles de u
3) Représenter les suites par un nuage de points sur la pythonette, et préciser $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ dans chaque cas.

Exercice 35

Pour ses 10 ans, les parents d'Halim lui achètent un petit coffre-fort et mettent 100€ dedans. Puis tous les ans pour son anniversaire, il lui offre 50€ à placer dans son coffre-fort. On note $u_n$la somme dans le coffre-fort n années après son dixième anniversaire. On a $u_0 = 100$.

1) Exprimer u_n en fonction de n
2) Combien Helin a-t-elle dans son coffre-fort le lendemain de son 15^e anniversaire ?
3) Déterminer à quel âge Helin aura 1000€ dans son coffre-fort.

Exercice 36 Au 1er janvier 2010, Chloé débute dans une entreprise avec un salaire mensuel de 1500€. Il est prévu dans son contrat une augmentation mensuelle de 7€ à partir du deuxième mois. On note $a_0 = 1500$ son salaire d'embauche puis pour n supérieur ou égal à 1, a_n son salaire à la fin du $(n+1)$-ième mois.

1) Déterminer le salaire a_1 du deuxième mois.
2) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, et en déduire la nature de la suite a.
3) a) Déterminer le salaire du 7e mois;
   b) Déterminer le rang du premier mois pour lequel son salaire dépassera 2000€.

Exercice 37

Une ville comptait 10000 habitants en 2018. Chaque année, le nombre d'habitants augmentent de 10% par rapport à l'année précédente. On note u_n le nombre d'habitants en $2018+n$.

1) Donner la valeur de u_0 et de u_1.
2) Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

Exercice 38

L'iode 131 est un isotope radioactif utilisé en médecine pour la radiothérapies dans les cancers de la thyroïde. Le patient doit prendre une gélule contenant $0,01$ mg d'iode 131 au début de son traitement. Chaque jour, les noyaux d'iode 131 se désintègrent et la masse de la substance radioactive diminue de 8%. On note u_n la masse diode 131 en mg présente dans la patient n jours après l'ingestion de la gélule.

1) Donner la valeur de u_0 et de u_1.
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite u_n ?
3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4) Déterminer au bout de combien de jours la masse diode 131 dans le patient devient inférieur à $0,001$mg.
5) On appelle demi-vie, le temps nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs d'iode 131 se désintègrent. Déterminer la valeur de la demi-vie de l'iode 131.

Problème 1 — Problème de Josèphe. En 67 apr. J-C, 41 soldats juifs (dont Flavius Josèphe), cernés par des soldats romains, décident de se suicider au lieu de se rendre. Ils se mettent en **cercle**, et un premier soldat est choisi au hasard. Il exécute le soldat à sa gauche, puis passe l'épée au suivant, qui exécute à son tour le soldat à sa gauche... Quelle était la place du dernier soldat vivant ?

On note n le nombre de soldats, numérotés de 0 à $n-1$. Le soldat de rang 0 exécute le soldat 1, donne l'épée à 2 qui exécute 3 ... On note u_n la position du soldat survivant.

1) Vérifiez que $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 2$, $u_4 = 0$, $u_5 = 2$ et $u_6 = 4$ ($u_7 = 6$).
2) On suppose que le nombre de soldats est $2n$. n soldats sont éliminés au 1er tour.
   a) Si p est la position d'un soldat au second tour, quelle était sa position au premier ?
   b) Quelle est la position au second tour, du premier soldat exécuté ?
   c) En déduire que $u_{2n} = 2u_n$.
3) On suppose que le nombre de soldat est $2n+1$.
   a) Sur les $n+1$ soldats du 2nd tour, montrer (par un graphique) que le rang du survivant est $1+u_n$.
   b) En déduire que $u_{2n+1} = 2u_n + 2$.
4) Complétez l'algorithme en langage Python de la fonction d'argument n et qui retourne u_n. En déduire u_{105}

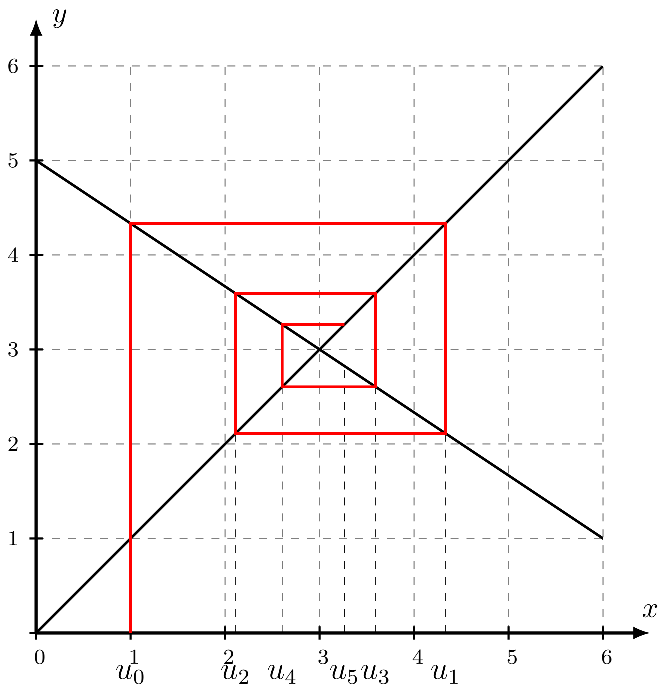
```python
def u(n) :
    if n == 0 or n == 1 :
        return ...
    if n%2 == 0 :
        return 2*u(........)
    else :
        return 2*u(........)+2
```

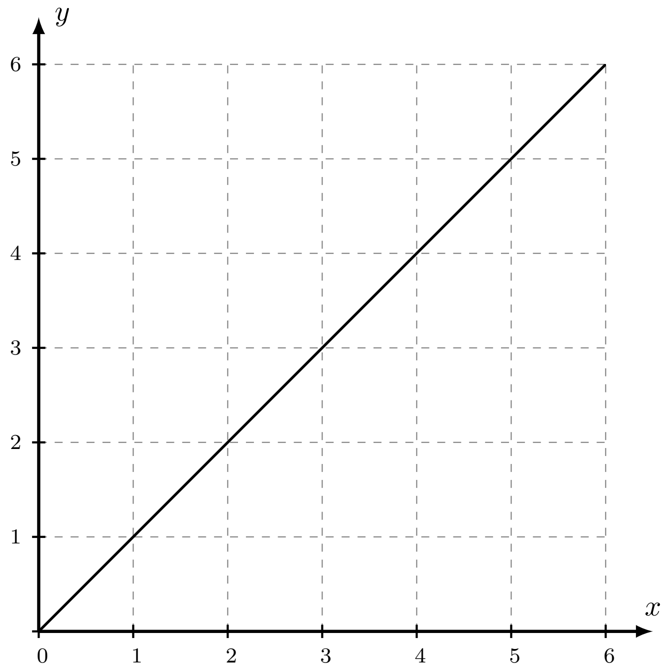
Pour représenter des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on commence par tracer la courbe $\mathscr{C}_f : y = f(x)$ et la droite $D : y = x$.

■ **Exemple 5.7** Représenter les 5 premiers termes des suites suivantes :

1) $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 5$.

2) $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.





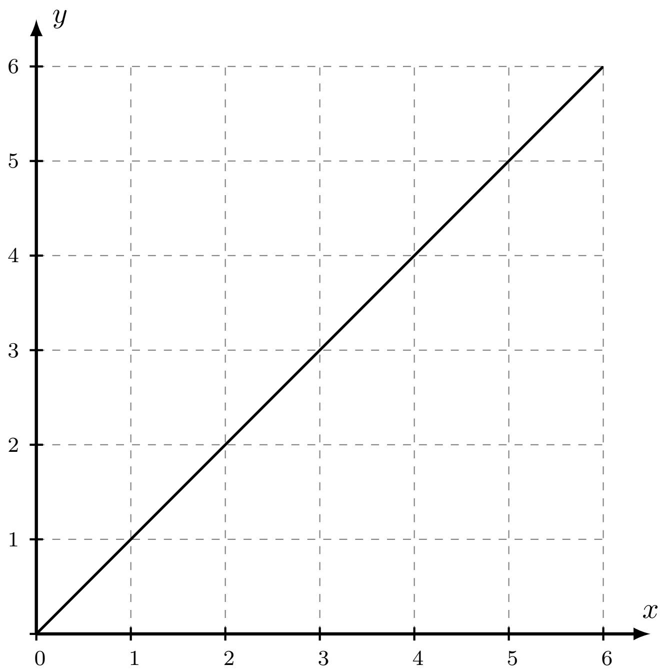
Exercice 39 Représenter les 5 premiers termes des suites suivantes et conjecturez sens de variation et limite.

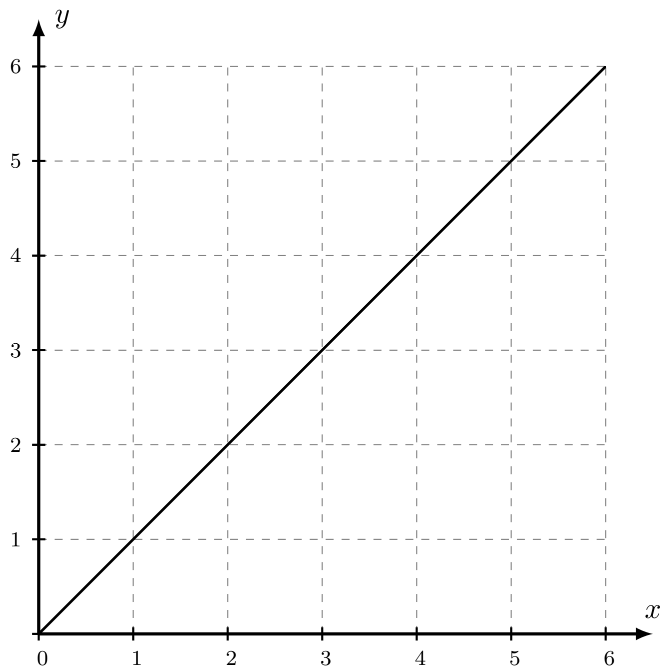
1) $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{4}{5}u_n + 6$.

2) $u_0 = \frac{10}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{4}{5}u_n + 6$.

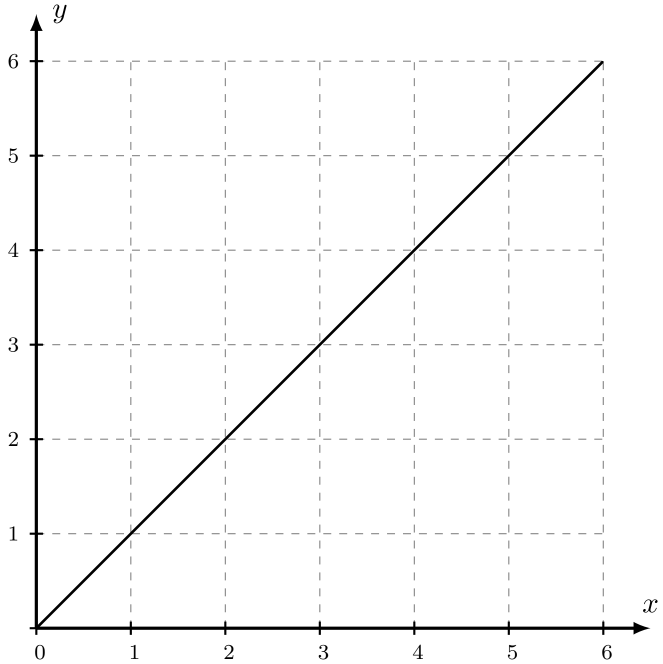
3) $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

4) $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

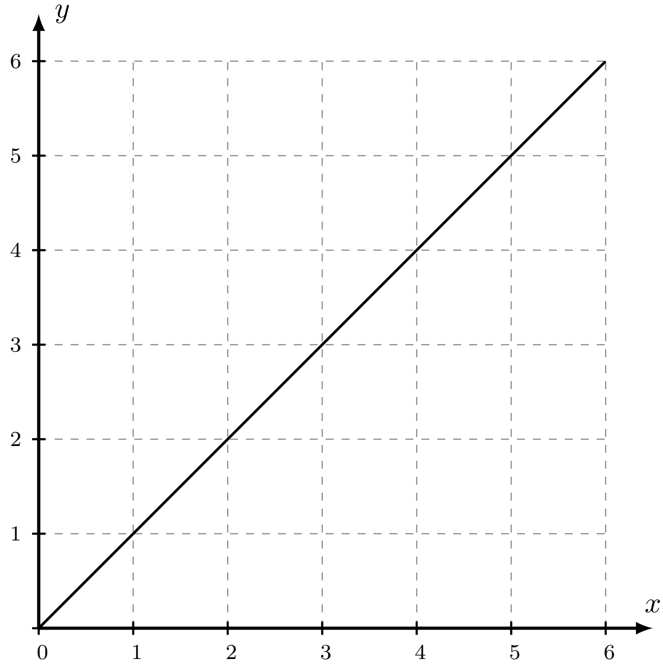




5) $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$.



6) $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5}{4}u_n + 1$.



Exercice 40 — point calculatrice. Tracer le diagramme type colimaçon des suites suivantes définies par récurrence. Conjecturer les sens de variation et l'existence de limites.

1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0.5u_n + 3$ ... (croissante/décroissante/non monotone) ... (divergente/ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ldots$)

2) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.... (croissante/décroissante/non monotone).... (divergente/ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ldots.$)

3) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 2} - 1$. .. (croissante/décroissante/non monotone) .. (divergente/ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = ..$)

4) $u_0 = \dfrac{1}{9}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$ ..(croissante/décroissante/non monotone)..(divergente/ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = ..$)

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n + r$ ($q \neq 1$, $r \neq 0$) alors u est dite suite **arithmético-géométrique**.

Exercice 41 — Grand classique. Compléter pour trouver l'expression de la suite u définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1.25u_n + 5$.

La solution de l'équation $x = 1.25x + 5$ est $l = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

On définit la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - l$.

$v_0 = u_{\ldots} - l = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$v_{n+1} - l = u_{\ldots} - l = \ldots\ldots u_n + \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots u_n - \ldots\ldots = 1.25(u_n - \ldots\ldots)$.

v est une suite .... de raison $q = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

L'expression de la suite v est : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \ldots\ldots \times (\ldots\ldots)^n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = v_n + \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 42

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n + 2$.
   a) Calculer v_0.
   b) Démontrer que v est une suite géométrique de raison 3.
   c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n

Exercice 43

Soit u la suite définie par $u_0 = 250$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,72u_n + 420$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 1500$.
   a) Calculer v_0.
   b) Démontrer que v est une suite géométrique et préciser sa raison.
   c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   d) En déduire que pout tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1500 - 1250 \times 0,72^n$
3) Étudier le sens de variation de la suite u et sa limite.

Exercice 44 — entrainement.

Soit la suite u définie par $u_0 = 15$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 0.75u_n + 3$.

En suivant la démarche des exercices précédents montrer que $u_n = 3 \times 0.75^n + 12$ et déduire la limite.

Exercice 45 — mise en situation : un roman-problème type bac.

Un parc d'attraction propose à ses visiteurs des pass annuels donnant accès illimité à l'ensemble du site. En 2019, 5000 visiteurs achètent le pass. Chaque année, le directeur de parc prévoit que 90% de ces visiteurs renouvelleront leur pass et 800 nouveaux visiteurs en achèteront un. On note u_n le nombre de visiteurs ayant un pass annuel en $2019 + n$.

1) Déterminer la valeur de u_0 et u_1.
2) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 800$.
3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 8000$.
   a) Justifier que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
   c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4) Combien peut-on prévoir qu'il y aura de visiteurs détenteur du pass annuel en 2040 ?

Problème 2 — Suite auxiliaire.

Soit la suite u définie par $u_0 = 0.5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 2u_n}$.

On pose la suite auxiliaire v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$

1) Calculer les termes v_0 à v_4.
2) Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + 3$.
3) En déduire que v est une suite arithmétique, et donner son expression.
4) En déduire la forme explicite de la suite u.

5.4 Sommes de termes consécutifs d'une suite

Proposition 5.6 — somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

Démonstration. ■

$$\begin{aligned} S &= a + (a+r) + (q+2r) + \ldots + l \\ S &= l + (l-r) + (l-2r) + \ldots + a \\ 2S &= \underbrace{(a+l) + (a+l) + (a+l) + \ldots (a+l)}_{\text{nbr de termes}} \\ S &= \text{nombre de termes } \times \frac{\text{premier terme } + \text{ dernier terme}}{2} \end{aligned}$$

Proposition 5.7 — nombres trianglulaires.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. exigible ■

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 \\ 2S &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots (n+1)}_{n \text{ termes}} \\ 2S &= n(n+1) \\ S &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Proposition 5.8 — somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} = a \times \frac{1-q^{\,n}}{1-\ q}$$

premier terme raison nbr de termes

Démonstration. exigible ■

$$\begin{aligned} S &= a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} \\ qS &= \qquad aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n \\ S - qS &= a - aq^n \\ S &= a\frac{1-q^n}{1-q} \qquad q \neq 1 \end{aligned}$$

Proposition 5.9 Soit la suite géométrique de terme q^n :

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

5.4.1 Exercices : sommes de termes consécutifs d'une suite

Exercice 46 Calculer la somme des termes de la suite arithmétique dans les cas suivants :

1) Le premier terme est 7. Le dernier terme est 61, et il y a 10 termes.
2) Le premier terme est -10. La raison de la suite est 4, et il y a 13 termes.
3) Le premier terme est 21. La raison de la suite est -6, et le dernier terme est -117.

Exercice 47 Déterminer la somme des termes des suites arithmétiques suivantes :

1) $1+2+3+4+\ldots+100 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2) $50+51+52+53+\ldots+100 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3) $1+3+5+7+\ldots+99 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4) $3+6+9+12+\ldots+198 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 48 — démonstration exigible.

Compléter pour trouver l'expression pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $S(n) = 1+2+3+\ldots+n$.

$S(n) = 1+2+3+\ldots+n$

$S(n) = n+(n-\ldots)+(n-\ldots)+\ldots+1$

$2S(n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$2S(n) = \ldots\ldots\ldots \times (\ldots\ldots+\ldots\ldots)$

$S(n) = \dfrac{\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{2}$

Exercice 49

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S(n) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

Exercice 50

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S(n) = 1+6+11+\ldots+(5n+1) = 3n^2+4n+1$

Exercice 51

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est 297. Sachant que le premier terme est 45, la raison est -3, quelle est la valeur de n ?

Exercice 52

Soit une suite arithmétique de premier termer a et de raison b.

1) Sachant que $u_9 = 48$, écrire une équation vérifiée par a et b.
2) Sachant que $u_2+u_3+u_4 = 36$, montrer que $3a+9b = 36$
3) Déterminer a et b.

Exercice 53

Soit une suite arithmétique de premier termer a et de raison b.

1) Sachant que $u_3 = 7$, écrire une équation vérifiée par a et b.
2) Sachant que $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_8 = 176$, montrer que $8a+36b = 176$
3) Déterminer a et b.

Exercice 54 Calculer la somme des termes de la suite géométrique u dans les cas suivants :

1) Le premier terme est 3, la raison est 2, et il y a 7 membres.
2) Le premier terme est 1, la raison est -3 et il y a 6 termes.
3) Le premier terme est 5, la raison est $\frac{1}{2}$ et il y a 5 termes.
4) On a $u_0 = 1000$. La raison de la suite est 0.85. On cherche $S = u_1 + u_{10} + \ldots + u_{10}$
5) On a $u_0 = 5$. La raison de la suite est 1.15. On veut $S = u_5 + u_6 + u_7 + \ldots + u_{15}$

Exercice 55

Soit les suites u et S définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ et $S(n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

1) Justifier que la suite u est géométrique.
2) Montrer que la suite S est strictement croissante.
3) Exprimer $S(n)$ à l'aide de n et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} S(n)$.

Exercice 56

Déterminer la somme des termes des suites arithmétiques suivantes :

1) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{12} = \ldots\ldots\ldots$
2) $1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + 1024 - 2048 = \ldots\ldots\ldots$
3) $4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{10} = \ldots\ldots\ldots$
4) $1 + 0.8 + 0.8^2 + 0.8^3 + \ldots + 0.8^{10} = \ldots\ldots\ldots$

Notation $\quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} j^2$

Exercice 57 Déterminer la somme des termes des suites arithmétiques suivantes :

$\sum\limits_{k=3}^{6}(2k+3) = (2\times 3+3) + (2\times \ldots + 3) + (2\times \ldots + 3) + (2\times \ldots + 3) = 9 + \ldots\ldots\ldots$

$\sum\limits_{k=1}^{5}(1) = \ldots\ldots\ldots$

$\sum\limits_{i=1}^{8}(3i+1) = \ldots\ldots\ldots$

$\sum\limits_{j=0}^{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i = \ldots\ldots\ldots$

$\sum\limits_{i=1}^{5} j(j+1) = \ldots\ldots\ldots$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum\limits_{k=\ldots}^{\ldots} \ldots\ldots\ldots$

$5 + 9 + 13 + 17 + \ldots + 41 = \sum\limits_{k=0}^{\ldots}(\ldots k + \ldots) = \ldots\ldots\ldots$

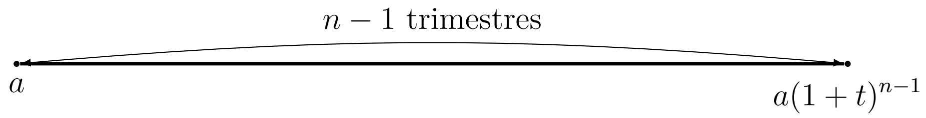
$3 + 8 + 13 + 18 + \ldots + 43 = \sum\limits_{k=0}^{\ldots}(\ldots k + \ldots) = \ldots\ldots\ldots$

Problème 3 — Capital accumulé après n mensualités.

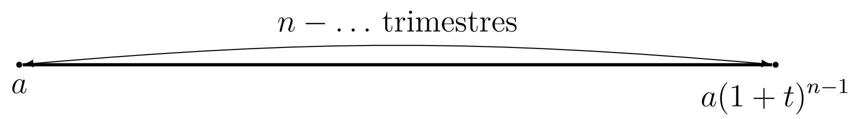
On verse une mensualité de a fixe au **début** de chaque trimestre rémunérée à taux fixe de t. On note n le nombre de trimestres écoulés, et C_n le capital en **fin** du n^{e} trimestre.
Complète pour trouver l'expression du capital C_n.

le 1^{er} versement de a , placé n trimestres, à taux d'initêret composés t rapporte .... $a(1+t)^n$.

le 2^{e} versement de a est placé $n-1$ trimestres, à taux d'initêret composés t rapporte ...... $a(1+t)^{\cdots\cdots}$.

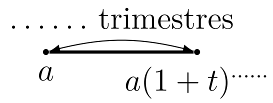


le 3^{e} versement de a est placé $n-2$ trimestres, à taux d'initêret composés t rapporte ...... $a(1+t)^{\cdots\cdots}$.

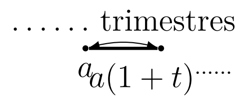


...

le $n-1^{\text{e}}$ versement de a est placé ... trimestres à taux d'initêret composés t rapporte ..... $a(1+t)^{\cdots\cdots}$.



le n^{e} versement de a est placé ... trimestre à taux d'initêret composés t rapporte .... $a(1+t)^{\cdots\cdots}$.



à la fin du n^{e} trimestre le capital accumulé C_n est :

$$C_n = a(1+t)^{\cdots\cdots} + a(1+t)^{\cdots\cdots} + \ldots + a(1+t)^{\cdots\cdots} + a(1+t)^{\cdots\cdots} + a(1+t)^n$$

$C_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 58

On effectue 10 versements chaque début d'année de 1000 € sur un compte rapportant 8% de taux d'intérêts composés par an (sans retraits possibles). Exprimer le capital accumulé à la fin de la 10^{e} année.

Problème 4

On emprunte une somme V_0 =500000 € au taux d'intêret annuel de 5%. On souhaite rembourser cet emprunt en 10 versement au début de chaque année.

1) Détérminer le capital à rembourser après 10 ans en tenant compte des intêrets composés.
2) Au terme de 10 années, l'imprunteur doit couvrir la somme précédente avec 10 versements en début d'année de a, qui rapporteraient le taux d'intérêt annuel de 5%. En déduire que a vérifie :

$$500000 \times 1.05^{10} = a\frac{1.05}{0.05}\left(1.05^{10} - 1\right)$$

3) Déduire a.

Exercice 59

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$
2) Compléter :

Si $k = 1$ alors .... $2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$

Si $k = 2$ alors .... $3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$

Si $k = 3$ alors .... $4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$

...

Si $k = n$ alors .... $(n+1)^3 - n^3 = 3 \times n^2 + 3 \times n + 1$

En ajoutant les égalités précédentes on obtient :

$(n+1)^3 - 1^3 = \ldots(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + \ldots(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + \ldots$

$\ldots(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = (n+1)^3 - \dfrac{\qquad\qquad}{2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3) En déduire que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4) Déterminer $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$ et $8^2 + 9^2 + 10^2 + \ldots + 15^2$.

Problème 5

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$
2) En suivant la démarche de l'exercice précédent, montrer que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$
3) Utiliser l'identité pour retrouver $6^3 + 7^3 + 8^3 + \ldots + 13^3$.