A.2 Fonctions affines

Définition A.1 La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$ [1] est **affine** s'il existe deux nombres réels m et p tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = mx + p$$

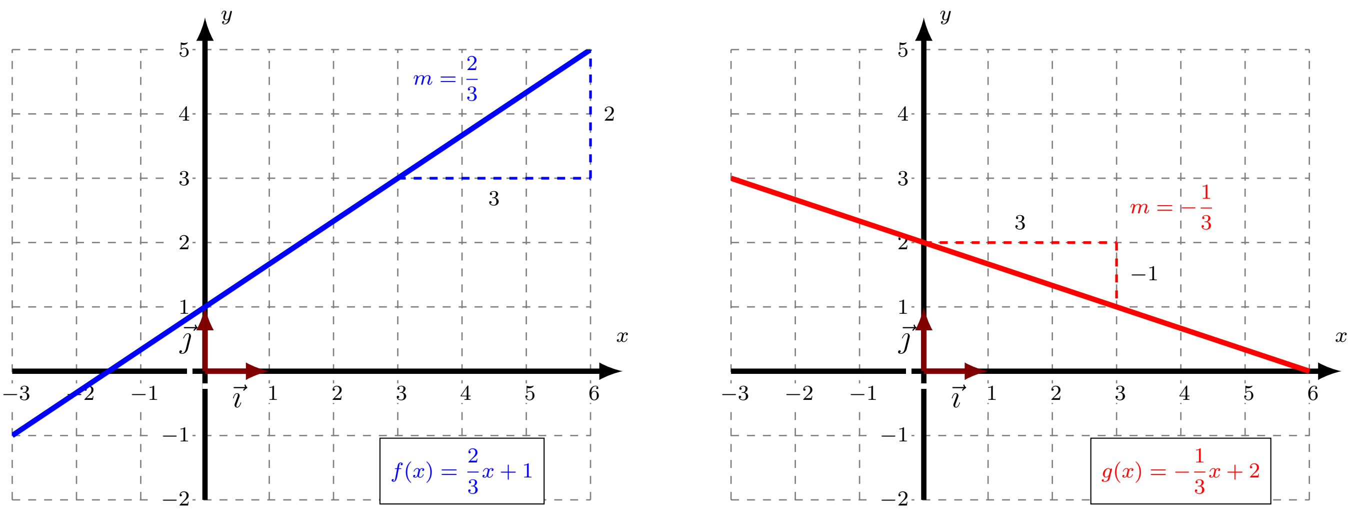
[1] à lire : « qui à tout réel x associe $y = f(x)$ »

Proposition A.1 Les écarts sur la variable image y sont proportionnels aux écarts sur la variable initiale x.
Plus précisément il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{Pour tout } x_A \text{ et } x_B \in \mathbb{R} \qquad f(x_A) - f(x_B) = m(x_A - x_B)$$

Le réel m est appelé **coefficient directeur** de f.
Si $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$ alors :

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \qquad x_A \neq x_B$$



x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f(x) = \frac{2}{3}x + 1$		0	
signe de f	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$g(x) = -\frac{1}{3}x + 2$		0	
signe de g	$+$	0	$-$

Figure A.1 – Graphiquement, m est le rapport de l'augmentation verticale sur l'augmentation horizontale. $p = f(0)$ est l'ordonnée à l'origine

Proposition A.2 Si $m > 0$ alors f est **strictement croissante**.

Si $m < 0$ alors f est une fonction **strictement décroissante**.

■ **Exemple A.1** m représente un taux d'accroissement de x_A à x_B :

$$m = \frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B}$$

Il est constant pour une fonction affine.

a) Si $f(x)$ est le coût total de x objets. m est le **coût marginal** moyen d'un objet supplémentaire lorsqu'on la production passe de x_A à x_B objets.

b) Si $f(x)$ est la position d'un objet sur un axe (em mètres) au bout de x minutes. Alors m représente la **vitesse moyenne** en mètres par minutes entre les instants x_A et x_B. Cette vitesse est constante.

Point méthode Pour déterminer l'expression réduite d'une fonction affine f tel que $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$:

- On calcule m à l'aide du taux de variation entre x_A et x_B.
- On remarque que si $y = f(x)$ alors $y - y_A = m(x - x_A)$
- $y = m(x - x_A) + y_A$
- On en déduit la forme réduite.

■ **Exemple A.2** Soit f fonction affine tel que $f(12) = 17$ et $f(16) = 25$. Trouvez la forme réduite :

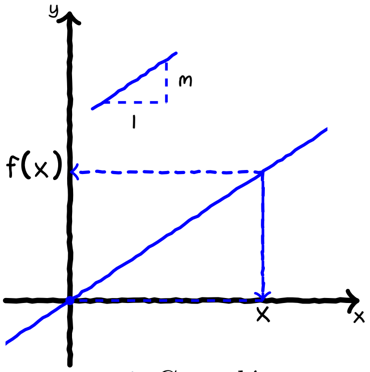
On calcule le taux de variation de 12 à 16 :

$$m = \frac{f(12) - f(16)}{12 - 16} = \frac{17 - 25}{12 - 16} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

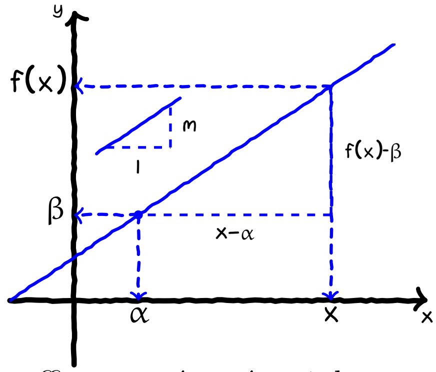
$$\begin{aligned} f(x) - f(12) &= m(x - 12) \\ f(x) &= 2(x - 12) + f(12) \\ &= 2x - 24 + 17 \\ f(x) &= 2x - 7 \end{aligned}$$

Exercices : Fonction affines et applications

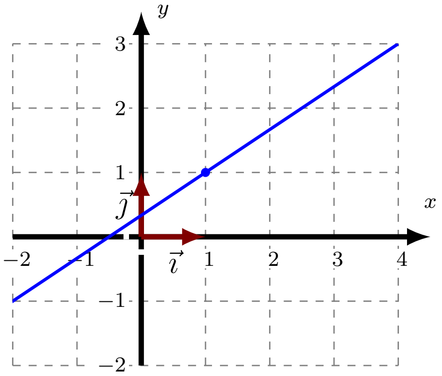


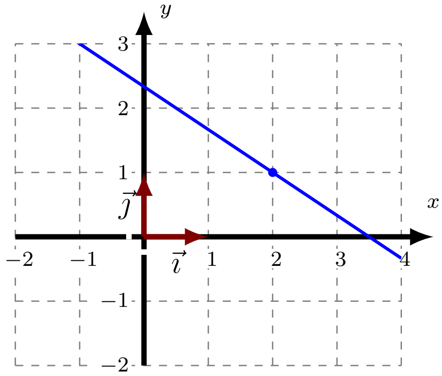
fonction f affine de taux m et $\beta = f(\alpha)$.
pour tout x :

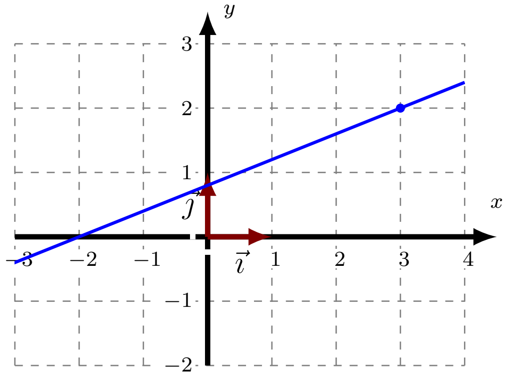
$$f(x) - \beta = m(x - \alpha)$$
$$f(x) = m(x - \alpha) + \beta$$



Exercice 1 Complétez et retrouvez l'expression réduite des fonctions affines représentées ci-dessous :



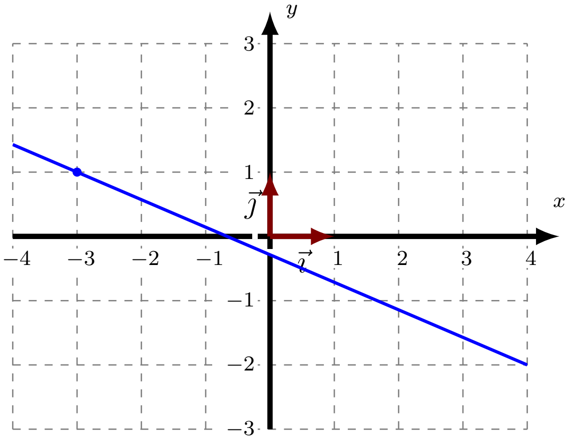


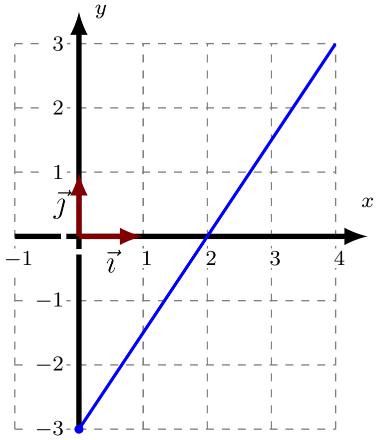


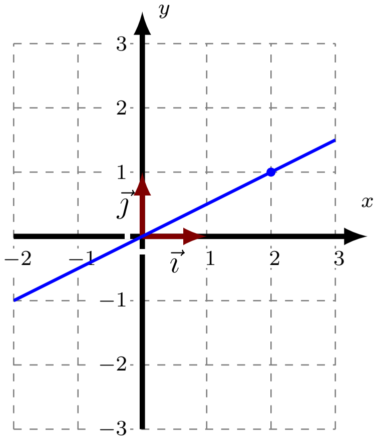
$f(x) - \ldots = \ldots(x - \ldots\ldots)$
$f(x) =$
$f(x) = \ldots m + \ldots$

$f(x) - \ldots = \ldots(x - \ldots\ldots)$
$f(x) =$
$f(x) = \ldots m + \ldots$

$f(x) - \ldots\ldots = \ldots(x - \ldots\ldots)$
$f(x) =$
$f(x) = \ldots m + \ldots$







$f(x) - \ldots = \ldots(x - \ldots\ldots)$
$f(x) =$
$f(x) = \ldots m + \ldots$

$f(x) - \ldots = \ldots(x - \ldots\ldots)$
$f(x) =$
$f(x) = \ldots m + \ldots$

$f(x) - \ldots\ldots = \ldots(x - \ldots\ldots)$
$f(x) =$
$f(x) = \ldots m + \ldots$

Exercice 2 Déterminer l'expression réduite de la fonction affine f dans les cas suivants.

1) le taux d'accroissement vaut $\frac{2}{3}$ et $f(15) = 3$
2) le taux d'accroissement vaut $\frac{-1}{2}$ et $f(-16) = \frac{11}{2}$
3) $f(-1) = 4$ et $f(2) = 3$.
4) $f(2) = -5$ et $f(7) = 3$.
5) sa courbe représentative passe par $A(-2; 3)$ et $B(3; -1)$.
6) sa courbe représentative passe par $A(3; -2)$ et $B(-1; 3)$.
7) f est linéaire et $f(-8) = 12$.
8) f est linéaire et sa courbe représentative passe par $A(-7; -21)$.

Exercice 3 Complétez les tableaux de variation et de signe des fonctions affines suivantes.

a) $f_1(x) = 3x + 2$

x	
variation de $f_1(x)$	
signe de $f_1(x)$	

b) $f_2(x) = -9x + 5$

x	
variation de $f_2(x)$	
signe de $f_2(x)$	

Exercice 4 Détérminez le signe des fonctions suivantes selon les valeurs de x.

(I_1) : $f_1(x) = 7(x + 2)(x - 3)$

(I_2) : $f_2(x) = 5(-3x + 1)(2x + 3)$

(I_3) : $f_3(x) = -3(5x - 4)(-3x - 8)$

(I_4) : $f_4(x) = -2(4x + 3)(3x + 5)$

x	$-\infty$				$+\infty$

x	$-\infty$				$+\infty$

x	$-\infty$				$+\infty$

x	$-\infty$				$+\infty$