Chapitre

Calculs algébriques (2) 7

La factorisation est le procédé qui consiste à écrire une expression algébrique comme produit d'expressions (facteurs) plus simples.

7.1 Factoriser par extraction du plus grand facteur commun

L'approche la plus simple est d'**extraire le plus grand facteur commun** à tous les termes d'une somme.[1]

Pour tout nombres relatifs a,b et c :

$$(ac) + (bc) = c(a + b)$$

Pour $c \neq 0$:

$$a + b = c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$$

■ **Exemple 7.1 — Application directe.**

$$\begin{aligned} A &= 3x - 15 \\ &= 3x - 3 \times 5 \\ &= 3(x - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2xy + 3xz \\ &= x(2y + 3z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 2x(3x + 2) + 3x(2x - 1) \\ &= x\big(2(3x + 2) + 3(2x - 1)\big) \\ &= x\big(6x + 4 + 6x - 3\big) \\ &= x\,(12x + 1) \end{aligned}$$

■ **Exemple 7.2 — Puissances.** Développer les puissances :

$$\begin{aligned} A &= 3x + 3^2 \\ &= 3x - 3 \times 3 \\ &= 3(x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= x^2 + 3x \\ &= xx + 3x \\ &= x(x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (2x - 3)^2 - 5(2x - 3) \\ &= (2x - 3) \times (2x - 3) - 5(2x - 3) \\ &= (2x - 3)(2x - 3 - 5) \\ &= (2x - 3)(2x - 8) \end{aligned}$$

■ **Exemple 7.3 — règle du 1.**

$$\begin{aligned} A &= 3x + 3 \\ &= 3x + 3 \times 1 \\ &= 3(x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2(x - 3)y - (x - 3) \\ &= (x - 3)(2y - 1) \end{aligned}$$

Exercices 34 à 39 pages 77

[1] Utiliser l'exerciseur en ligne https://www.mathix.org/exerciseur_calcul_litteral/

7.1.1 Exercices factorisations et applications

Exercice 1 Complétez

1) Entourez les facteurs commun à tous les termes de $10a^3 + 5ab + 20ay^4$: 5; a ; $5a$; $5aby$

2) Extraire le facteur $2x$ de l'expression $2x^2 - 4xy + 2x$, donne le facteur :

$x - 2y$ $x - 4y + 1$ $x - 2y + 1$ $x - 2y - 1$

3) En lisant de gauche à droite, entourez les factorisations : $2(a - b) = 2a - 2b$

$x^2 - 2x + 1 = x(x - 2) + 1$ $(m + 1)(m - 1) = m^2 - 1$ $6a^2 - 8a^3 = 2a^2(3 - 4a)$

4) Le plus grand facteur commun des termes de $4x^2y + 6xy^2 - 2xy$: $2x$ $2y$ $2x^2y^2$ $2xy$

5) Le plus grand facteur commun de $20a^2bc^3 =$ .... et $30a^5b^2 =$ .... est ....

Exercice 2 Trouver le plus grand facteur commun pour chaque paire :

Paire	PGFC	Paire	PGFC
$4x$ et $6x$		$10x$ et $15x$	
$6x$ et $9x$		$12x$ et $20x^2$	
$8x$ et $12x$		$3x^2$ et $5x^2$	
18 et $12x$		$7a^2$ et $14b^2$	
$16x$ et $24x$		$24x^2$ et $30x^3$	
$7x$ et $11x$		$15x^4$ et $45x$	
$36x$ et $45x$		$27x^4$ et $45x^3$	
$8x^2$ et $14x^2$		$2x^2y^2$ et x^2y	
$12x^3$ et $15x^2$		$24x^5y^2$ et $32x^3y^3$	

Exercice 3 Factoriser au maximum les expressions suivantes : :

$x^2 + 4x =$ ....

$2x^2 + 6x =$ ....

$3x^2 - 15x =$ ....

$4x^2 + 24x =$ ....

$15x^2 - 25x =$ ....

$30x - 24x^2 =$ ....

$12x^3 + 8x^2 =$ ....

$20x^2 - 15x^3 =$ ....

$30x^3y^2 + 24x^2y^2 - 12x^2y =$ ....

$49x^2 - x =$ ....

Extraire le plus grand facteur commun d'une somme de terme, donne une somme de termes ayant pour facteurs communs 1 ou -1. On parle alors de **factorisation au maximum**

■ **Exemple 7.4 — Précautions.**

$A = 2x(3x+2) + 3x(2x-1)$
$= x\big(2(3x+2) + 3(2x-1)\big)$
$= x\big(6x+4+6x-3\big)$
$= x\,(12x+1)$

avec les puissances

$B = (2x-3)^2 - 5(2x-3)$
$= (2x-3) \times (2x-3) - 5(2x-3)$
$= (2x-3)(2x-3-5)$
$= (2x-3)(2x-8)$

règle du 1

$C = 3x + 3 = 3x + 3\times 1$
$= 3(x+1)$
$D = 2(x-3)y - (x-3)$
$= (x-3)(2y-1)$

Exercice 4 — Guidé. Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A(x) = 2(x+5) + (2x-3)(x+5)$

$=$

$=$

$=$

$B(x) = (2-8x)(7-x) - 3(7-x)(3-x)$

$=$

$=$

$=$

$=$

Exercice 5 Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A = (2x+3)(2x-5) + x(2x-5)$
$B = 8(x-2) + (x-2)(x-5)$
$C = (5x-2)(x+7) + (5x-2)^2$
$D = (x+3)(x-2) + (x+3)$
$E = (2x-15)(6x+1) - 3(6x+1)$
$F = (7-5x)(2+3x) - (7-5x)^2$
$G = (x+4)(2x+3) - (x+4)(x-6)$
$H = 3(x-4)(2x+3) - 2(x-4)(x+6)$

Exercice 6 Factoriser à l'aide de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$x^2 - 100 = (\ldots\ldots)^2 - (\ldots\ldots)^2 =$ ....

$9x^2 - 25 = 3^2x^2 - (\ldots\ldots)^2 = (\ldots\ldots)^2 - (\ldots\ldots)^2 =$ ....

$64 - x^2 = (\ldots\ldots)^2 - (\ldots\ldots)^2 =$ ....

$49 - x^{12} = (\ldots\ldots)^2 - (\ldots\ldots)^2 =$ ....

$(x+5)^2 - 1 = (\ldots\ldots)^2 - (\ldots\ldots)^2 =$ ....

$(x-5)^2 - 9 = (\ldots\ldots)^2 - (\ldots\ldots)^2 =$ ....

$100(x+2)^2 - 16 = 10^2(x+2)^2 - 16 = (\ldots\ldots)^2 - (\ldots\ldots)^2 =$ ....

$(4x+3)^2 - 25 =$ ....

$4(x+3)^2 - 25 =$ ....

$(3x-2)^2 - (x+1)^2 =$ ....

Exercice 7 Complétez et retenir. n désigne un entier positif.

1) $6n+3=3(\dots\dots\dots\dots)$. $6n+3$ est toujours un multiple de ……………………………………

2) $6n+3=6n+2+1=2(\dots\dots\dots\dots)+1$. Le reste de la division de $6n+3$ par 2 est ……………

   $6n+3$ est toujours un nombre impair.

3) $15n+5=5(\dots\dots\dots\dots)$. $15n+5$ est toujours un multiple de ……………………………………

4) $15n+13=5(\dots\dots\dots\dots)+\dots\dots$. Le reste de la division de $15n+5$ par 5 est ……………………

5) $15n+13=15n+12+1=3(\dots\dots\dots\dots)+\dots\dots$. Le reste de la division de $15n+5$ par 3 est …..

6) $12n+2=3(\dots\dots)+\dots\dots$, le reste de la division de $15n+2$ par 3 est ……………………………

7) $12n+7=\dots\dots\dots\dots\dots\dots=3(\dots\dots)+\dots\dots$, le reste de la division de $12n+7$ par 3 est ………

8) $(2n+1)^2=(2n+1)(2n+1)=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots=4(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots)+\dots\dots$

   Le reste de la division de $(2n+1)^2$ par 4 est ……………………………………………………

> Les nombres pairs sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $2n$ avec n entier.
> Les nombres impairs sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $2n+1$ avec n entier.

Exercice 8
Montre que pour tout entier n, le nombre $(5n+1)^2-(5n-1)^2$ est toujours un multiple de 5.

Exercice 9
Montre que pour tout entier n, le nombre $(3n+1)^2-(3n-1)^2$ est toujours un multiple de 4.

Exercice 10
Montre algébriquement que pour tout entier n le nombre $(2n+3)^2-(2n-3)^2$ est un multiple de 12.

Exercice 11
Montre algébriquement que pour tout entier n le nombre $(n+1)^2+n^2$ est toujours un nombre impair.

Exercice 12
Associe pour les énoncés le mieux adaptés. Pour tout entiers p, q :

$2p+1$ et $2p+3$ sont ...	•	•	deux nombres consécutifs
$2p+1$ et $2p+2$ sont ...	•	•	deux nombres pairs consécutifs
$2p$ et $2q$ sont ...	•	•	deux nombres impairs consécutifs
$2p$ et $2p+2$ sont ...	•	•	un nombre pair et le nombre impair suivant
p et $p+1$ sont ...	•	•	un nombre impair et le nombre pair suivant
$2p$ et $2p+1$ sont ...	•	•	deux nombres impairs quelconques
$2p+1$ et $2q+1$ sont ...	•	•	deux nombres pairs quelconques

Exercice 13 n désigne un entier. Entourez les progressions de nombres qui sont toujours 3 entiers pairs consécutifs :

$n\,;\quad n+1;\quad n+2$	$2n-2;\quad 2n;\quad ,\, 2n+2$	$2n;\quad 2n+2;\quad 2n+4$
$n-1;\quad n;\quad n+1$	$2n;\quad 2n+1;\quad 2n+2$	$3n;\quad 3n+2;\quad 3n+4$

■ **Exemple 7.5** La somme de 3 nombres consécutifs impairs quelconques est toujours un multiple de 3.

solution. Soit n un entier.
3 nombres consécutifs impairs peuvent s'écrire :

matières à réflexion :
- Pourquoi $2n+1$ est nécésserement impair ?
- Pourquoi le nombre impair suivant n'est pas $2n+2$?
- Pourquoi ajouter les 3 expressions ?
- Pourquoi factoriser par 3 ?

■

■ **Exemple 7.6 — à vous.** Montrer que la somme de 4 nombres impairs consécutifs est un multiple de 8.

Exercice 14
Montre algébriquement que la somme de deux nombres entier consécutifs est un nombre impair.

Exercice 15
Montrer algébriquement que la somme de 3 nombres consecutifs est toujours un multiple de 3.

Exercice 16
Montrer algébriquement que la somme de 3 nombres pairs consécutifs est toujours un multiple de 6.

solution de l'exercice 5. $A = 3\,(x+1)\,(2x-5)$; $B = (x-2)\,(x+3)$; $C = (5x-2)\,(6x+5)$; $D = (x+3)^2$; $E = 2\,(x-9)\,(6x+1)$; $F = -\,(5x-7)\,(8x-5)$; $G = (x+4)\,(x+9)$; $H = (x-4)\,(4x-3)$; ■

solution de l'exercice 6. $A = (x-10)\,(x+10)$; $B = (3x-5)\,(3x+5)$; $C = -\,(x-8)\,(x+8)$; $D = -\left(x^6-7\right)\left(x^6+7\right)$; $E = (x+4)\,(x+6)$; $F = (x-8)\,(x-2)$; $G = 4\,(5x+8)\,(5x+12)$; $H = 8\,(x+2)\,(2x-1)$; $I = (2x+1)\,(2x+11)$; $J = (2x+1)\,(4x+3)$; ■