A.5 Stage réussite février 2024

A.5.1 Thème 1 : calcul de la fonction dérivée (1)

$f(x)$	$f'(x)$	**Nom de la règle**
$x \mapsto c$ constante	$x \mapsto 0$	dériver d'une constante
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	dériver $x \mapsto x^n$
$x \mapsto cu(x)$	$x \mapsto cu'(x)$	constante fois une fonction
$x \mapsto u(x) + v(x)$	$x \mapsto u'(x) + v'(x)$	règle d'addition

Table A.1 – Règles simples de calcul de la fonction dérivée

■ **Exemple A.19 — dérivée de somme, ou d'une multiplication par consante.**

Donner le domaine de définition puis de dérivabilité et l'expressoin de la dérivée :

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

   $D = \mathbb{R}$ et $D' = \mathbb{R}$

   combinaison de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ et $x \mapsto 4$, dérivable sur $\mathbb{R}$

   $f'(x) = 3(2x) - 2(1) + 0 = 6x - 2$

2. $f(x) = \sqrt{x} + 2x$

   $D = [0; +\infty[\qquad D' =]0; +\infty[$

   combinaison de $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}$

   $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2$

3. $f(x) = 7x - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^3}$

   $D = \mathbb{R}^*$ et $D' = \mathbb{R}^*$

   combinaison de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}$

   $f(x) = 7x - 4x^{-1} + 3x^{-3}$

   $f'(x) = 7(1) - 4(-x^{-2}) + 3(-3x^{-4})$

   $f'(x) = 7 + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{9}{x^4}$

Exercice 1 Donner le domaine, le domaine de dérivation et l'expression de la fonction dérivée :

$f_1(x) = 8x - 2$

$f_2(x) = -7$

$f_3(x) = 6x^2 - 3x + 7$

$f_4(x) = \pi x^4 + \dfrac{3}{x^9}$

$f_5(x) = \dfrac{8}{x}$

$f_6(x) = -2x^3$

$f_7(x) = -x - 3\sqrt{2}$

$f_8(x) = 5\sqrt{x}$

$f_9(x) = \dfrac{2}{x^2}$

$f_{10}(x) = \dfrac{-10}{x^8}$

$f_{11}(x) = \sqrt{2x}$

$f_{12}(x) = 2 - x\sqrt{3}$

Exercice 2 Donner le domaine, le domaine de dérivation et l'expression de la fonction dérivée :

$f_1(x) = x^7 + 2x^5 - 2x - 1$

$f_2(x) = 2x^4 + 4x^3 + 5\sqrt{x}$

$f_3(x) = 5x^6 - 3x^2 + 5$

$f_4(x) = 4x^8 + 3x^2 - 4 - x^{-3}$

$f_5(x) = 5x^{-3} + 2x^{-2} - 3x^{-1}$

$f_6(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{2}{x^6}$

$f_7(x) = \dfrac{1}{3x^5} - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{2x^3}{3}$

$f_8(x) = 3x^6 + 5x^2 - 2 + \dfrac{4}{x}$

$f_9(x) = \dfrac{x^{-2} - 3x^2 + 2x^7}{3x^5}$

correction exercice 1.

$f_1'(x) = 8$; $\quad f_2'(x) = 0$; $\quad f_3'(x) = 12x - 3$; $\quad f_4'(x) = 4\pi x^3 - \dfrac{18}{x^7}$; $\quad f_5'(x) = -\dfrac{8}{x^2}$; $\quad f_6'(x) = -6x^2$;
$f_7'(x) = -1$; $\quad f_8'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$; $\quad f_9'(x) = -\dfrac{4}{x^3}$; $\quad f_{10}'(x) = \dfrac{80}{x^9}$; $\quad f_{11}'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$; $\quad f_{12}'(x) = -\sqrt{3}$; ■

correction exercice 2.

$f_1'(x) = 7x^6 + 10x^4 - 2$; $\quad f_2'(x) = 8x^3 + 12x^2 + \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$; $\quad f_3'(x) = 30x^5 - 6x$; $\quad f_4'(x) = 32x^7 + 6x + \dfrac{3}{x^4}$;
$f_5'(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{15}{x^4}$; $\quad f_6'(x) = -\dfrac{12}{x^7} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\quad f_7'(x) = 2x^2 + \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{5}{3x^6}$; $\quad f_8'(x) = 18x^5 + 10x - \dfrac{4}{x^2}$;
$f_9'(x) = \dfrac{4x}{3} + \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{7}{3x^8}$; ■

A.5.2 Thème 2 : nombre dérivé et pente de tangentes

$f'(a) = \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}$ est

— la pente de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

— le taux de variation (instantané/infinitésimal) de $f(x)$ lorsque x varie au voisinage de a.

Exercice 3

La distance parcourue d'une voiture voyageant le long d'une route est donnée par $S(t) = 2t^2 + 4t$, où t est le temp écoulé en secondes. Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ et intepréter sa signification.

Exercice 4

Le coût de fabrication et vente de x objets connectés chaque semaine est donné par $C(x) = 1785 + 3x + 0.002x^2$ €. Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$ et interpréter sa signification.

■ **Exemple A.20 — déterminer la pente de la tangente.**

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f par $f(x) = x^2 - \dfrac{4}{x}$. Déterminer la pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

solution. $f(x) = x^2 - \dfrac{4}{x}$

$D = \mathbb{R}^*$ et $D' = \mathbb{R}^*$ *combinaison de* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *définie et dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et* $x \mapsto x^2$, *dérivable sur* $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 4x^{-1}$$

$$f'(x) = 2x - 4(-x^{-2})$$

$$f'(x) = 2x + \frac{4}{x^2}$$

$f'(2) = 2(2) + \dfrac{4}{(2)^2} = 5$. La pente de la tangente est 5. ■

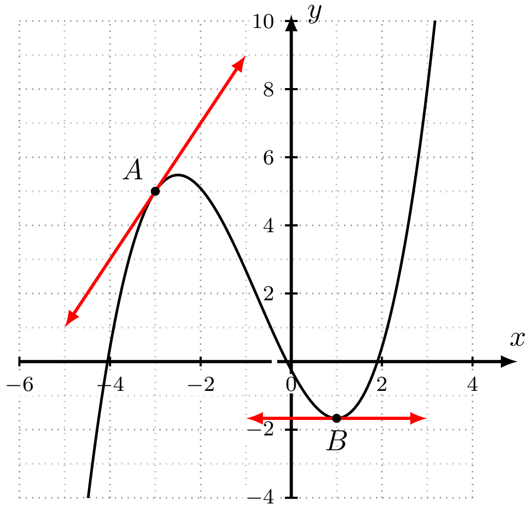
Exercice 5

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f. Déterminer la pente de la tangente au point d'abscisse x_0 dans les cas suivants :

1. f définie par $f(x) = x^2$, au point d'abscisse $x = 2$.
2. f définie par $f(x) = \dfrac{8}{x^2}$, au point d'abscisse $x = 9$.
3. f définie par $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$, au point d'abscisse $x = -1$.
4. f définie par $f(x) = 2x - \dfrac{5}{x}$ au point d'abscisse $x = 2$.
5. f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x - 8}{x^2}$ au point d'abscisse $x = -1$

Exercice 6

Ci-contre sont représentées la fonction f donnée par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}$ ainsi que les tangentes aux points $A(-3\ ;\ 5)$ et $B(1\ ;\ -\frac{5}{3})$.



1. Déterminer par lecture graphique les pentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B.
2. Déterminer par le calcul les nombres dérivés $f'(-3)$ et $f'(1)$.

■ **Exemple A.21 — déterminer le(s) points ou la pente de la tangente est connue.**

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f par $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$. En quel(s) points de la courbe $\mathscr{C}_f$ la pente de la tangente est 13.

solution. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

$D = \mathbb{R}$ et $D' = \mathbb{R}$

combinaison de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2(2x) + 5(1) - 3(0)$$

$$f'(x) = 4x + 5$$

La tangente au point d'abscisse x vaut 13 si $f'(x) = 13$.

$$4x + 5 = 13$$

$$x = 2$$

$f(2) = 2(2)^2 + 5(2) - 3 = 15$, la pente de la tangente vaut 13 au point $A(2\ ;\ 15)$ ■

Exercice 7

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f par $f(x) = x^2 - 4x + 7$. Déterminer le(s) points de la courbe ou la pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ vaut 2.

Exercice 8

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f par $f(x) = 3x^3 - 5x + 2$. Déterminer le(s) points de la courbe ou la pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ vaut 4.

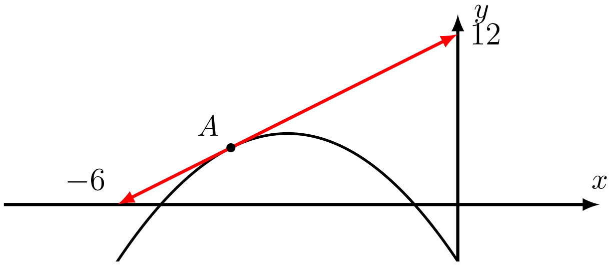
Exercice 9

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer le(s) points de la courbe ou la tangente est horizontale.

Exercice 10

Ci-dessous est représenté la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 6x - 4$ et la tangente en A à $\mathscr{C}_f$.

Déterminer les coordonnées de A.



■ **Exemple A.22 — retrouver une expression à partir d'informations sur le nombre dérivé.**

$a, b \in \mathbb{R}$. Soit $\mathscr{C}_f$ est la représentation de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - ax + b$. Sachant que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(2\ ;\ 7)$ est de pente 3, déterminer a et b.

solution. $f(x) = 2x^2 - ax + b$, $f'(x) = 4x - a$.

$$A(2\ ;\ 7) \in \mathscr{C}_f \iff f(2) = 7 \iff 2(2)^2 - a(2) + b = 7.$$

pente de la tangente en $A(2\ ;\ 7)$ est 3 $\iff f'(2) = 3 \iff 4(2) - a = 3$

En résolvant le système $\begin{cases} 8 - 2a + b = 7 \\ 8 - a = 3 \end{cases}$ on a $\begin{cases} a = 5 \\ b = 9 \end{cases}$, $\therefore f(x) = 2x^2 - 5x + 9$. ■

Exercice 11

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation de la fonction f donnée par $f(x) = x^3 + ax + 5$. Déterminer a sachant que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'asbcisse 1 est de pente 10.

Exercice 12

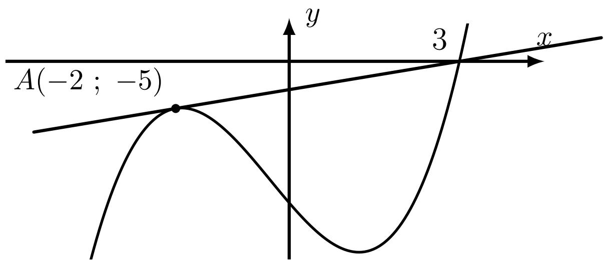
Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation de la fonction f donnée par $f(x) = -3x^3 + ax + b$. Déterminer a et b sachant que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'asbcisse $A(-3\ ;\ 8)$ est de pente 9.

Exercice 13

Soit la courbe $\mathscr{C} : y = 2x^2 + a + \dfrac{b}{x}$. Déterminer a et b sachant que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'asbcisse $A(1\ ;\ 11)$ est de pente -2.

Exercice 14

Soit la courbe $\mathscr{C} : y = x^3 + x^2 + ax + b$ et la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(-2\ ;\ -5)$ représentées ci-dessous :



1. Déterminer la pente de la tangente en A.
2. Déterminer a et b.

Exercice 15

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$.

1. Donner le domaine de dérivabilité et déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.
2. On suppose $f(2) = 0$, $f'(1) = 0$ et $f'(-2) = 0$. Écrire 3 équations vérifiées par a, b et c.
3. Résoudre le système obtenu et donner l'expression de la fonction f.

Exercice 16

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + bx + c$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
2. Donner le domaine de dérivabilité et déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.
3. On sait que $A(0;5)$ et $B(2, -\frac{23}{3}) \in \mathscr{C}_f$, et que la pente de la tangente en A est -9.

   Pour chaque question entourer l'équation vraie :

   a) (A) $f(5) = 0$ (B) $f'(5) = 0$ (C) $f(0) = 5$ (D) $f'(0) = 5$

   b) (A) $f'(-9) = 0$ (B) $f'(5) = -9$ (C) $f'(0) = -9$ (D) $f'(-9) = 5$

   c) (A) $f(2) = -\frac{23}{3}$ (B) $f'(2) = -\frac{23}{3}$ (C) $f(-\frac{23}{3}) = 5$ (D) $f'(-\frac{23}{3}) = 2$
4. Traduire les 3 affirmations précédentes par un système d'inconnues a, b et c.
5. Résoudre le système et déduire l'expression de la fonction f.

correction exercice 16. $a = 4$, $b = -5$ et $c = 1$. ■