Chapitre

5 Théorème de Pythagore et sa réciproque

5.1 Le carré d'un nombre

Définition 5.1 a désigne un nombre. La puissance

$$a^2 = aa = a \times a$$

s'appelle aussi « le carré de a ».

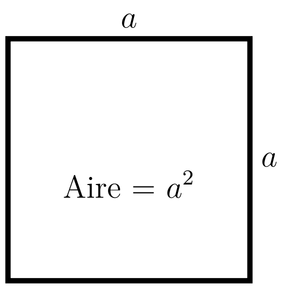


Figure 5.1 – Pour a nombre positif : $a \geqslant 0$. Le nombre a^2 s'interprète comme « l'aire d'un carré de côté a ».

Comme toutes les exposants, l'exposant « 2 » est prioritaire à la multiplication et l'addition.

■ **Exemple 5.1**

$$-5^2 = -5 \times 5 = -25 \qquad 4 - 3^2 = 4 - 3 \times 3 = 4 - 9 = -5$$

$$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25 \qquad (4-3)^2 = 1^2 = 1$$

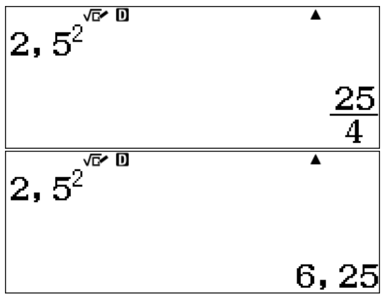


Figure 5.2 – Pour calculer le carré d'un nombre positif, on utilise la touche [x^2] de la calculatrice. La touche [S⇔D] sert à passer d'écriture décimale à fraction d'entier (lorsque c'est possible).

5.2 La racine carré d'un nombre

Définition 5.2 La racine carrée d'un nombre positif $b \geqslant 0$ est le nombre *positif* noté $\sqrt{b}$ dont le carré vaut b.

$$\left(\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{b} \times \sqrt{b} = b$$

En géométrie $\sqrt{b}$ est « la longueur du côté d'un carré d'aire b ».

R Pour calculer le carré d'un nombre positif, on peut utiliser la touche [$\sqrt{\blacksquare}$] ([SECONDE] ou [SHIFT] puis [x^2]).

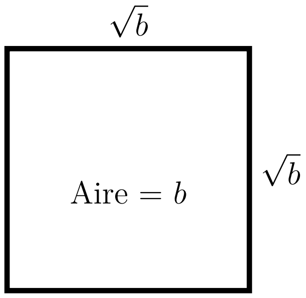


Figure 5.3 – Pour b nombre positif : $b \geqslant 0$. Le nombre $\sqrt{b}$ s'interprète comme « la longueur du côté d'un carré de longueur b ».

■ **Exemple 5.2**

a) $\sqrt{16} = 4$ car $4^2 = 16$ et 4 est positif.
   Le carré d'aire $16\,\text{m}^2$ a un côté de longueur $4\,\text{m}^2$.

b) $\sqrt{144} = 12$, car $12^2 = 144$, et 12 est positif.
   Le carré d'aire $64\,\text{cm}^2$ a un côté de longueur $8\,\text{cm}$.

c) $\sqrt{6,25} = 2,5$. Le carré d'aire $6{,}25\,\text{mm}^2$ a un côté de longueur de $2{,}50\,\text{mm}$.

d) $\sqrt{19} \approx 4,359$. Le carré d'aire $19\,\text{cm}^2$ a un côté de longueur $4{,}36\,\text{cm}$ environ.

■ **Exemple 5.3** J'ai un carré d'aire 19 U.A. (un grand carreau). Je veux savoir la longueur d'un côté l.

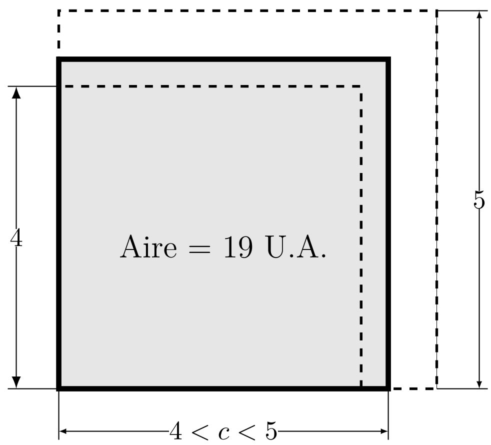


Figure 5.4 – Un carré d'aire 19 Unités d'Aire a un côté compris entre 4 et 5 Unités de longueur. $4 < c < 5$

longueur du côté x	1	2	3	4	5	6
aire du carré x^2						

Table 5.1 – $4.3 < c < 4.4$

longueur du côté x	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
aire du carré x^2											

longueur du côté x	4.30	4.31	4.32	4.33	4.34	4.35	4.36	4.37	4.38	4.39	4.40
aire du carré x^2											

Table 5.2 – $4.3 < c < 4.4$ et $4.35 < c < 4.36$

On sait que le procédé ne s'arrêtera pas. Les mathématiciens ont décidé de donner un nom à $c = \sqrt{19}$. On voit que $\sqrt{19} \approx 4,358$.

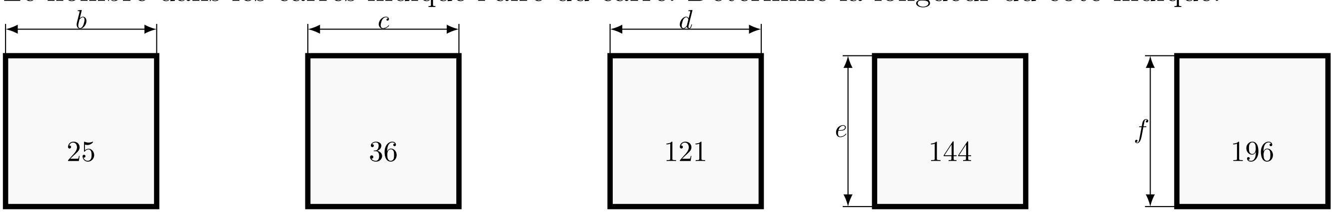
5.2.1 Exercices carrés et racines carrées

Exemple 5.4 — Carrés parfaits à connaitre. Les carrés de nombres entiers sont dits « carrés parfaits ».

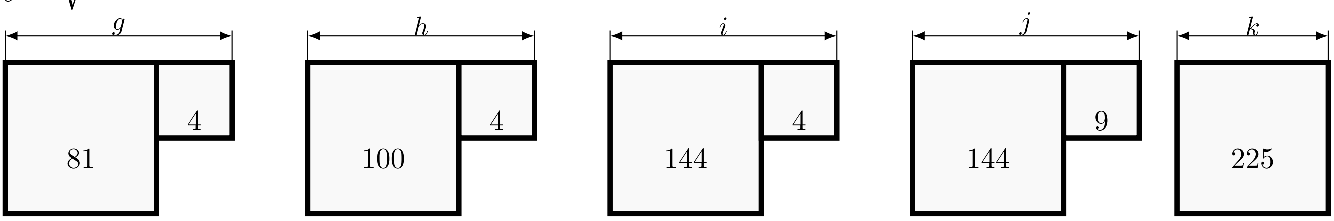
$1^2 =$	$4^2 =$	$7^2 =$	$10^2 =$	$13^2 =$
$2^2 =$	$5^2 =$	$8^2 =$	$11^2 =$	$14^2 =$
$3^2 =$	$6^2 =$	$9^2 =$	$12^2 =$	$15^2 =$

Exercice 1

Le nombre dans les carrés indique l'aire du carré. Détermine la longueur du côté indiqué.



$b = \sqrt{} =$

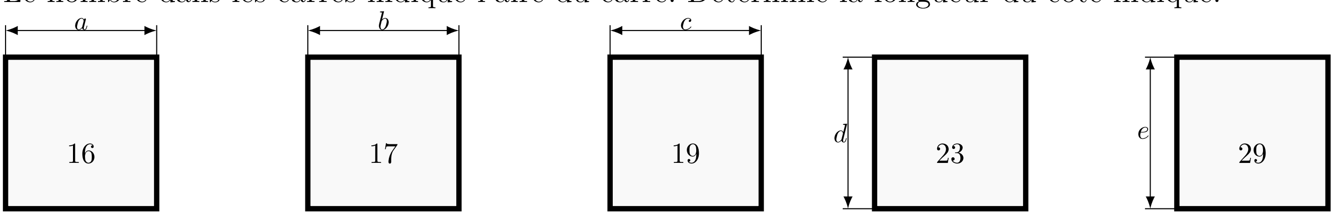


$g =$

En regardant g et e, i et f, h et e, j et k, que dire de $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$.

Exercice 2

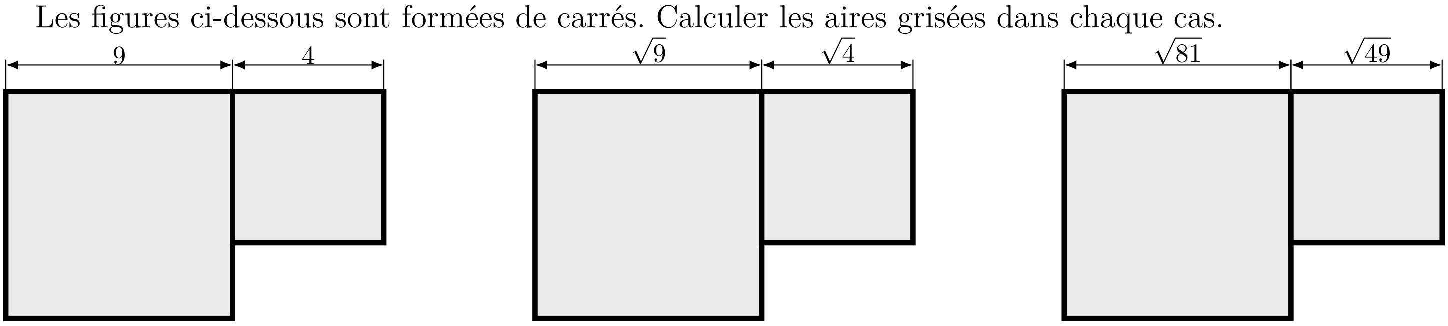
Le nombre dans les carrés indique l'aire du carré. Détermine la longueur du côté indiqué.

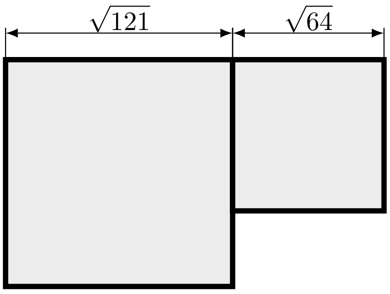


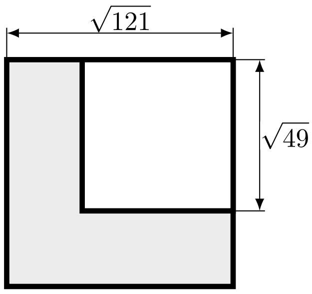
$a = \sqrt{} =$

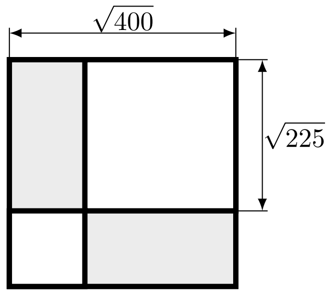
Exercice 3

Les figures ci-dessous sont formées de carrés. Calculer les aires grisées dans chaque cas.









■ **Exemple 5.5 — Racines de carrés parfaits.** sont aussi des entiers.

$\sqrt{\qquad\quad} = 1$	$\sqrt{\qquad\quad} = 6$	$\sqrt{\qquad\quad} = 11$
$\sqrt{\qquad\quad} = 2$	$\sqrt{\qquad\quad} = 7$	$\sqrt{\qquad\quad} = 12$
$\sqrt{\qquad\quad} = 3$	$\sqrt{\qquad\quad} = 8$	$\sqrt{\qquad\quad} = 13$
$\sqrt{\qquad\quad} = 4$	$\sqrt{\qquad\quad} = 9$	$\sqrt{\qquad\quad} = 14$
$\sqrt{\qquad\quad} = 5$	$\sqrt{\qquad\quad} = 10$	$\sqrt{\qquad\quad} = 15$

Exercice 4

Exprimer les expressions suivantes à l'aide d'entiers.

a) $\sqrt{49}$	c) $\sqrt{3^2}$	e) $\sqrt{100}$	g) $-\sqrt{9^2}$	i) $\sqrt{(-9)^2}$	k) $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$
b) $\sqrt{7^2}$	d) $\sqrt{100^2}$	f) $\left(\sqrt{3}\right)^2$	h) $\sqrt{-9^2}$	j) $\left(\sqrt{9}\right)^2$	l) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

> Défi : Trouve des nombres tels que l'instruction $\sqrt{a}$ retourne un message d'erreur.

■ **Exemple 5.6** Encadrer $\sqrt{19}$, $\sqrt{30}$ et $\sqrt{134}$ par deux entiers consécutifs.

$16 < 19 < 25$ $\qquad\qquad$ $< 30 <$ $\qquad\qquad$ $< 134 <$

$\sqrt{16} < \sqrt{19} < \sqrt{25}$

$4 < \sqrt{19} < 5$

Exercice 5 Même consignes. Montrer les étapes.

a) $\sqrt{27}$	b) $\sqrt{41}$	c) $\sqrt{5}$	d) $\sqrt{89}$	e) $\sqrt{10}$	f) $\sqrt{122}$

Exercice 6

À l'aide de la touche $\boxed{\sqrt{\blacksquare}}$ ($\boxed{\text{SECONDE}}$ puis $\boxed{x^2}$) de la calculatrice, donner un encadrement décimal au centième près des racines carrées suivantes :

$< \sqrt{2} <$	$< \sqrt{3} <$	$< \sqrt{5} <$	$< \sqrt{10} <$

5.3 Le théorème de Pythagore

> **Théorème 5.7 — Théorème de Pythagore.** Dans un triangle rectangle. Le carré du plus grand côté (l'hypoténuse) est égale à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

Le théorème sert à calculer la 3^{e} longueur d'un triangle rectangle quand on connaît les longueurs de 2 de ses côtés. Deux situations possibles

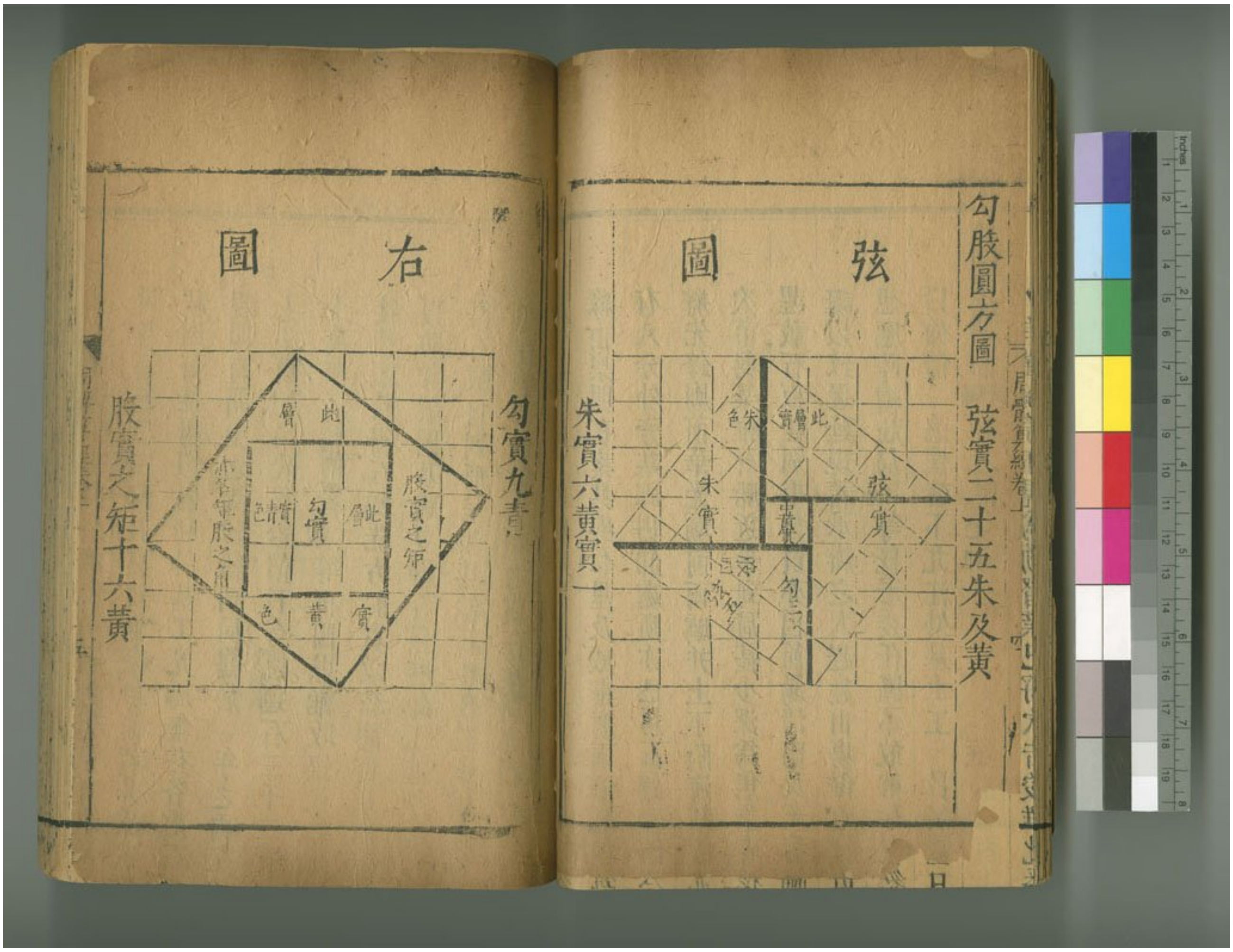
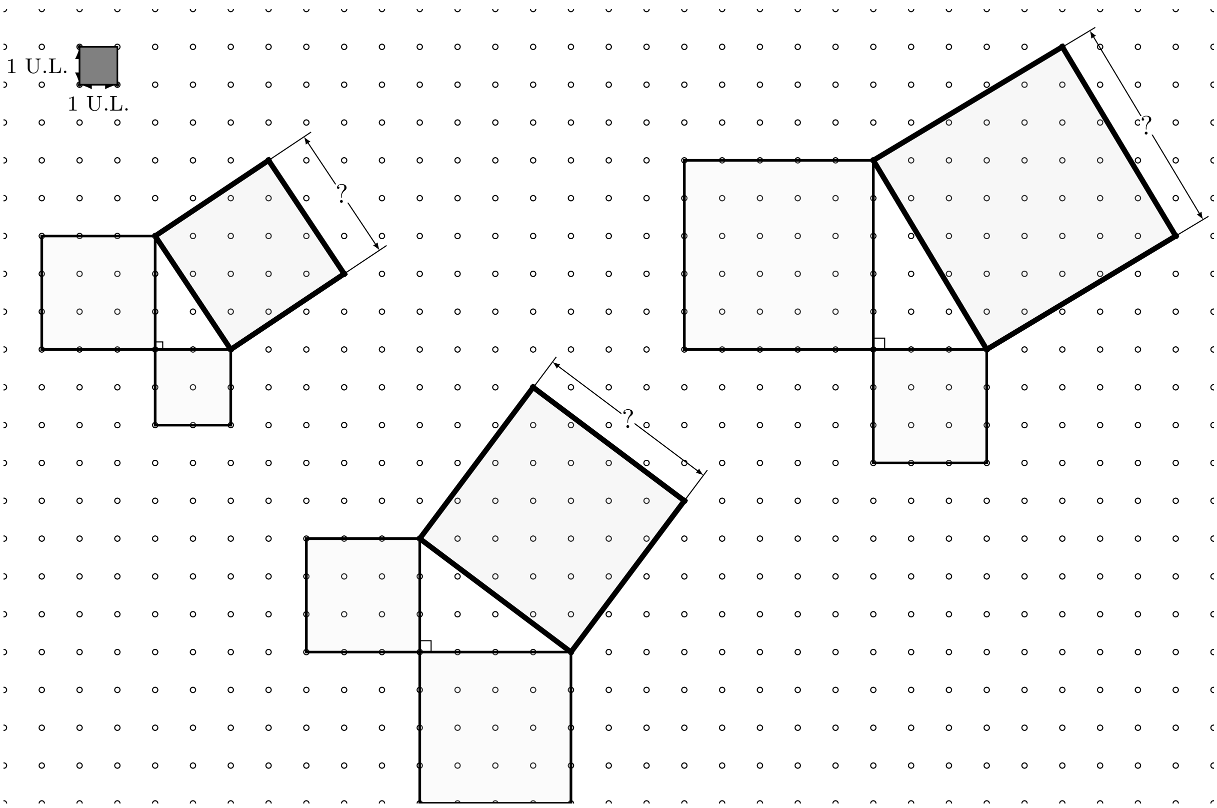


Figure 5.5 – la figure de l'hypoténuse du Zhoubi Suanjing *Classique mathématique du Gnomon des Zhou*. Un des textes mathématiques chinois des plus anciens, de la dynastie de Zhou (1046-771 av J.-C.). On y voit le cas 3-4-5 d'un triangle rectangle

5.3.1 Illustration du théorème de Pythagore

■ **Exemple 5.8** Vidéo Retrouver les longueurs des côtés des triangles rectangles suivants :



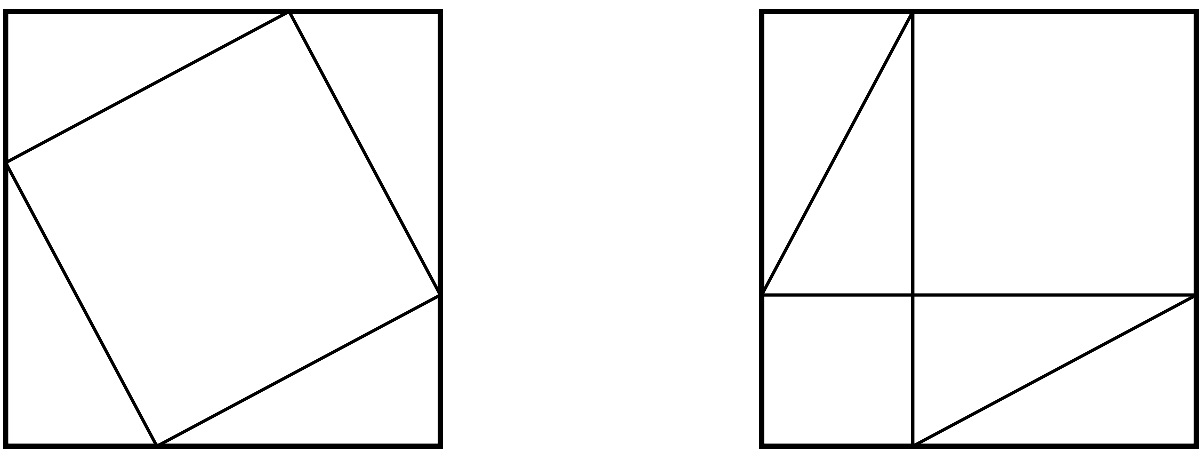
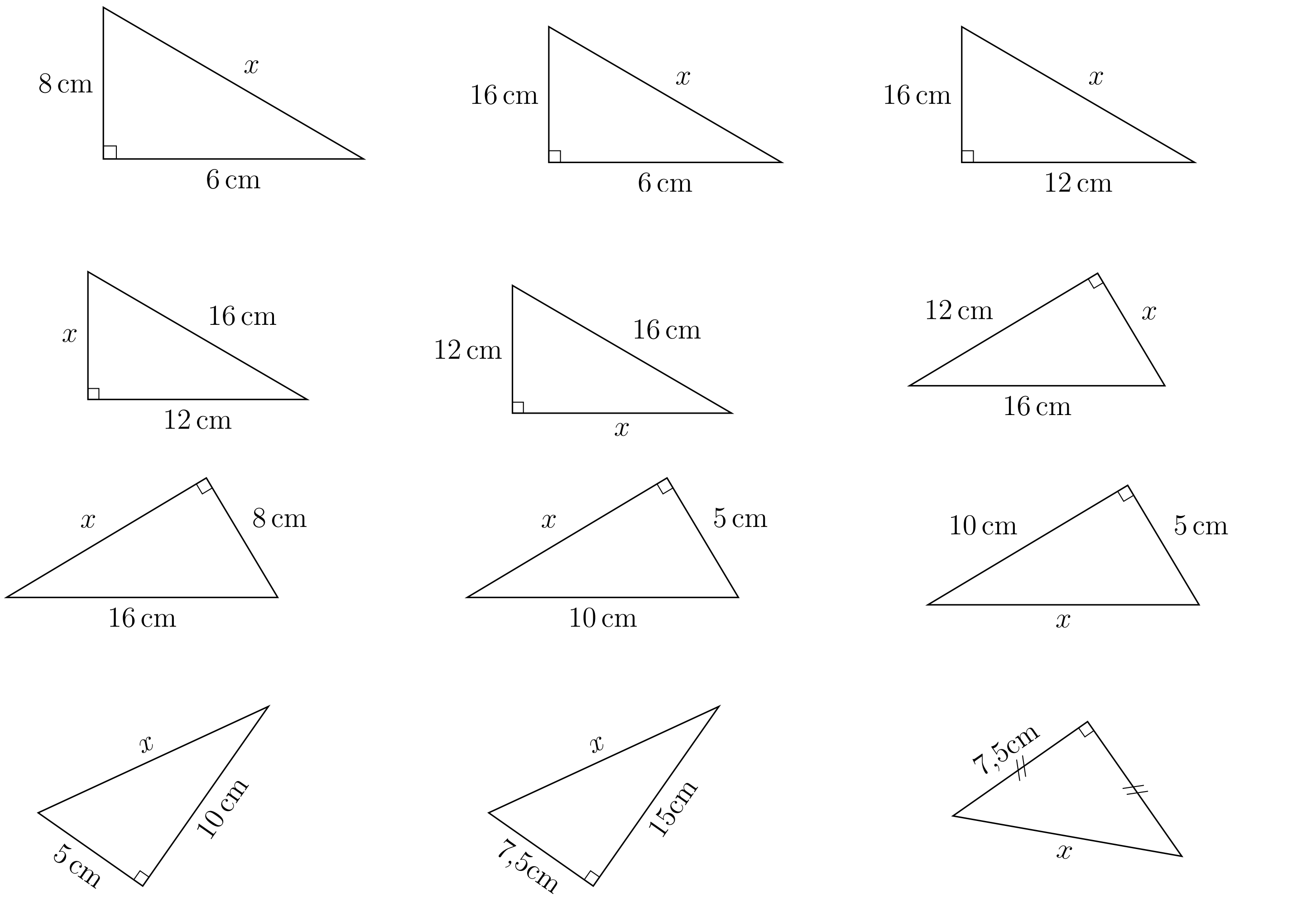


Figure 5.6 – Geogebra `https://www.geogebra.org/m/tf7wdbjf`

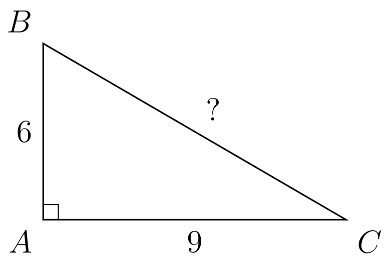
5.3.2 Exercices application : je sais que le triangle est rectangle

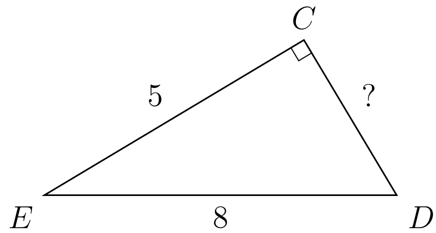
■ **Exemple 5.9 — Je fais.** Calculer la valeur de x puis donner une valeur approchée au centième près.

Exercice 1 — à vous. Mêmes consignes



■ **Exemple 5.10 — Rédaction type.** Les triangles ABC et CDE sont rectangles. Les longueurs sont données en cm. Donner la valeur exacte de la longueur manquante puis un arrondi au centième de cm.





Dans le triangle BAC rectangle en A, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} BC^2 &= BA^2 + AC^2 \\ BC^2 &= 6^2 + 9^2 \\ BC^2 &= 36 + 81 \\ BC^2 &= 117 \\ BC &= \sqrt{117} \\ BC &\approx 10{,}82 \text{ cm} \end{aligned}$$

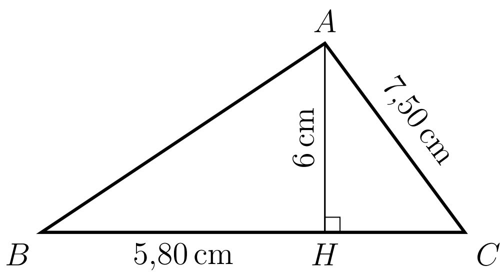
Dans le triangle DCE rectangle en C, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} DE^2 &= DC^2 + CE^2 \\ 8^2 &= DC^2 + 5^2 \\ 64 &= DC^2 + 25 \\ DC^2 &= 64 - 25 \\ DC^2 &= 39 \\ DC &= \sqrt{39} \\ DC &\approx 6{,}25 \text{ cm} \end{aligned}$$

Exercice 2

Dans le triangle ABC ci-contre, H est le pied de la hauteur issue de A. Le triangle ABC n'est pas a priori rectangle.

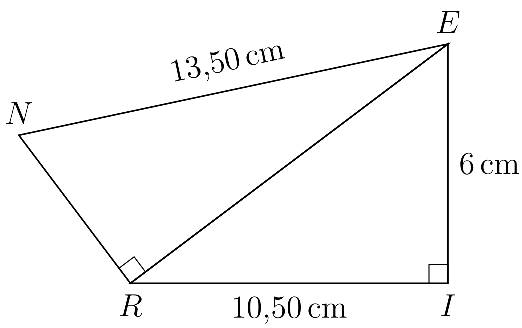
a) Calculer la valeur exacte de AB.
b) Calculer la valeur exacte de HC.



Exercice 3

Dans la figure ci-contre, ERI est un triangle rectangle en I, et NRE est rectangle en R.

a) Calculer la valeur exacte de RE.
b) En déduire la valeur exacte de EI.

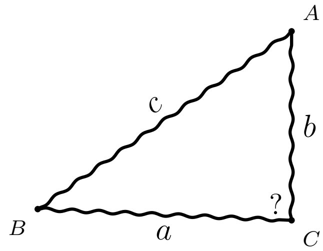


Exercice 4

$ABCD$ est un losange de centre O et de diagonales $AC = 10\,\text{cm}$ et $BD = 8\,\text{cm}$. Calcule son périmètre au millimètre près.

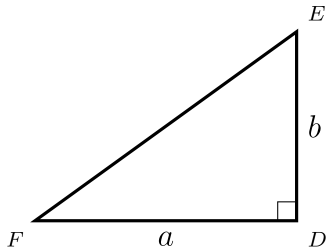
5.4 Identifier si un triangle est rectangle

Soit un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont désignés par a, b et c. Le côté le plus long est c.



On souhaite savoir si ABC est un triangle rectangle en C.

Considérons le triangle rectangle EDF dont les côtés de l'angle droit mesurent a et b. Le théorème de Pythagore dans le triangle EDF, indique que $EF^2 = a^2 + b^2$.



Il y a deux possibilités :

Cas n° 1 $c^2 = EF^2 = a^2 + b^2$. Dans ce cas, le triangle ABC a les mêmes longueurs de côtés que DEF. Les triangles sont superposables, et l'angle $\widehat{ACB}$ est droit.

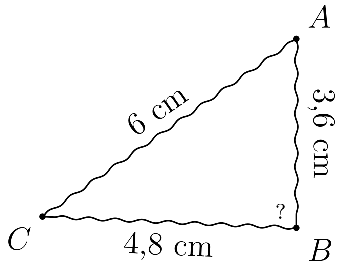
Cas n° 2 $c^2 \neq a^2 + b^2$. Le triangle ABC ne peut pas être rectangle en C.

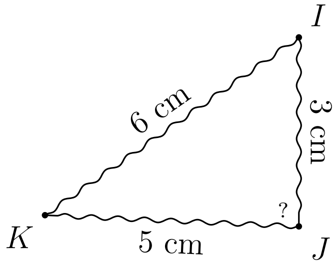
Théorème 5.11 Si le carré du plus grand côté **n'**est **pas** égal à la somme des carrés des petits côtés côtés alors le triangle n'est pas rectangle.

Théorème 5.12 Si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des petits côtés côtés alors le triangle est rectangle.

5.5 Exercices : identifier les triangles rectangles

■ **Exemple 5.13 — rédaction type.** Justifier si les triangles ABC et IJK ci-dessous sont rectangles. Les figures sont données à titre indicatif.





solution. Dans le triangle ABC, $[AC]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{aligned} &AC^2 = 6^2 = 36 \\ \\ &AB^2 + BC^2 = 4{,}80^2 + 3{,}60^2 = 23{,}04 + 12{,}96 = 36 \end{aligned}\right\} AC^2 = AB^2 + BC^2$$

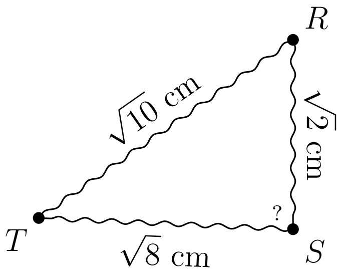
Comme $AC^2 = AB^2 + BC^2$, alors l'égalité de Pythagore est vérifiée. Donc le triangle ABC est rectangle en B. ■

solution. Dans le triangle IJK, $[IK]$ est le plus grand côté.

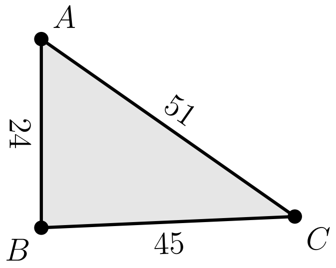
$$\left.\begin{aligned} &IK^2 = 6^2 = 36 \\ \\ &IJ^2 + JK^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34 \end{aligned}\right\} IK^2 \neq IJ^2 + JK^2$$

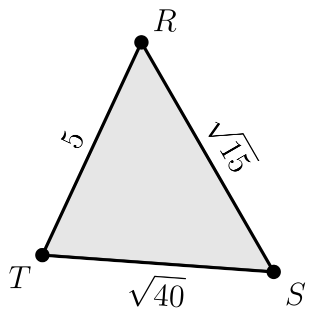
Comme $IK^2 \neq IJ^2 + JK^2$, alors l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée. Donc le triangle IJK n'est pas rectangle. ■

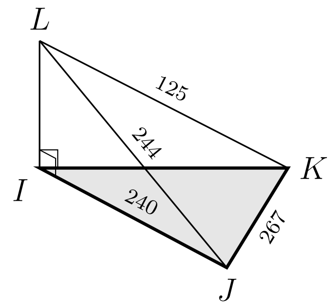
■ **Exemple 5.14 — à vous.**



Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, dire si le triangle colorié est un triangle rectangle, et si oui, en quel point.

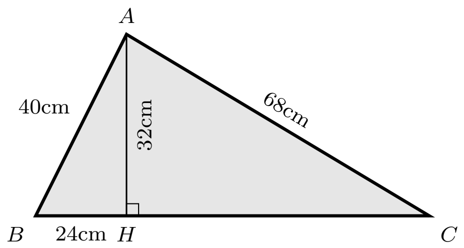






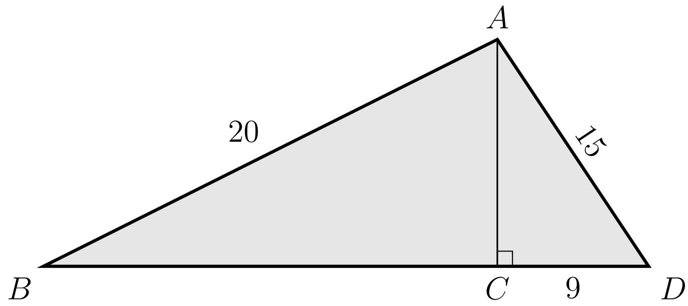
Exercice 2

a) Donne la longueur exacte du côté $[HC]$.
b) Calculer l'aire du triangle ABC.
c) Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier votre réponse.



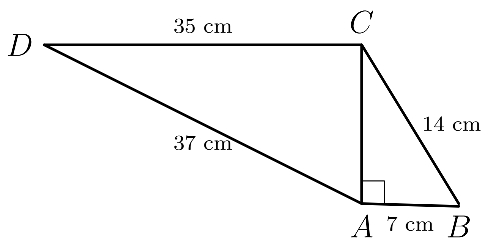
Exercice 3

Le triangle ABD est-il rectangle? Justifie.



Exercice 4

a) Donne la longueur exacte du côté $[CA]$, puis calcule une valeur approchée au centimètre prés.
b) Le triangle ACD est-il rectangle? Justifie.



Exercices du manuel 47, 55 page 250-251.

Exercice 5 —

Soit le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-contre :
a) Montrer que $AC = 5$.
b) Calculer AG.