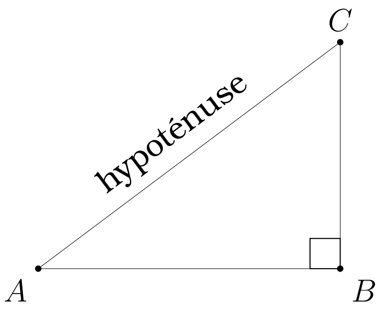
Chapitre 2

# Géométrie plane

**Table 2.1** – Objectifs. À fin de ce chapitre 2...

| | Pour m'entraîner ✍ | | |
|---|---|---|---|
| Je dois **connaître**.../**savoir faire**... | 🪨 | 💎 | 💍 |
| Trigonométrie de collège et approfondissements de seconde | | | |
| résoudre un problème de trigonométrie | | 1, 5 | |
| utiliser la formule des aires | | 2 | |
| loi des sinus | | 4 | |
| loi des cosinus (approfondissement) | | 6 | 7 |
| Classiques de géométrie (faculatif) | | | |
| égalité des triangles | 8 | | |
| triangles semblables | 9 | 10, 11 | |
| théorème de l'angle au centre | | 12 | 13 |

## 2.1 Triangles rectangles




**Définition 2.1** L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le côté opposé à l'angle droit.

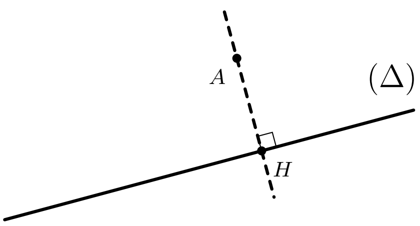
**Théorème 2.1 — Théorème de Pythagore.** Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

R Conséquence : l'hypoténuse est bien le plus grand côté.

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad AB,\ BC \text{ et } AC \geqslant 0$$

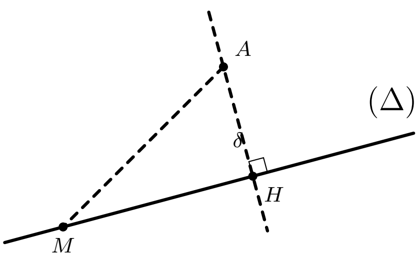
$$AB^2 \leqslant AC^2$$

$$AB \leqslant AC$$



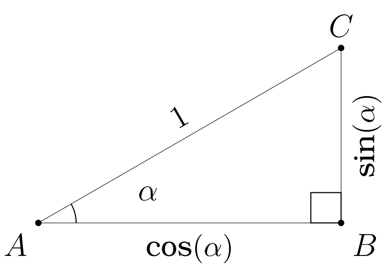

**Définition 2.2** Soit une droite $(\Delta)$ et un point $A$ du plan. Le **projeté orthogonal** $H$ de $A$ sur $(\Delta)$ est le point d'intersection de $\Delta$ et de la perpendiculaire à $(\Delta)$ passant par $A$.

**Théorème 2.2** Soit une droite $(\Delta)$ et $A$ un point n'appartenant pas à $(\Delta)$. $H$ le projeté orthogonal de $A$ sur $(\Delta)$.
La distance ente $A$ et la droite $(\Delta)$ est égale à $AH$. C'est la plus petite distance entre $A$ et un point de la droite $(\Delta)$.




*Démonstration. au programme* Pour tout point $M \in (\Delta)$, $AMH$ est un triangle rectangle d'hypoténuse $AM$, et $AM \geqslant AH$. ■

R On note que le cercle de centre $A$ et de rayon $AH$ touche la droite $(\Delta)$ en un unique point $H$. On dit que la droite $(\Delta)$ est tangente au cercle.




**Définition 2.3** Dans un triangle rectangle d'hypoténuse $1$. Si $\alpha$ est un angle aigu alors :

- $\cos(\alpha)$ la longueur du côté adjacent à $\alpha$
- $\sin(\alpha)$ la longueur du côté opposé à $\alpha$

**Théorème 2.3** Pour tout valeur de l'angle $\alpha$ on a :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

*démonstration.* (*au programme*) Conséquence directe du théorème de Pythagore ! ■

**Définition 2.4** Soit le triangle $ABC$ rectangle en $B$, et soit $\alpha$ un des angles aigus :

**le sinus** de l'angle $\alpha$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC} \leqslant 1$$

**le cosinus** de l'angle $\alpha$ :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC} \leqslant 1$$

**la tangente** de l'angle $\alpha$ :

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha} = \frac{BC}{AB}$$

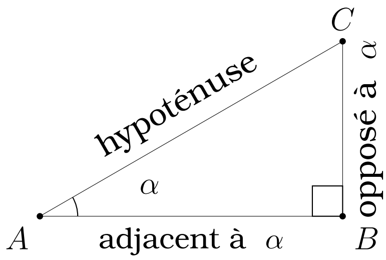



**Figure 2.1** – En $2^{nd}$, on calcule des rapports trigonométriques d'angles aigus.

## 2.2 Triangles égaux

**Définition 2.5 — triangles égaux.** Deux triangles sont égaux si leurs trois côtés et leur trois angles sont égaux deux à deux.

**Postulat 2.4 — Critère CCC.** Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.

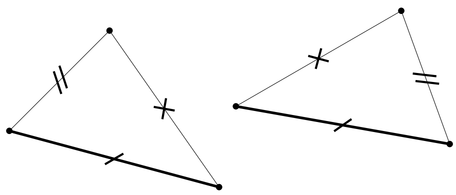


**Figure 2.2** – Critère CCC

**Postulat 2.5 — Critère CAC.** Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.

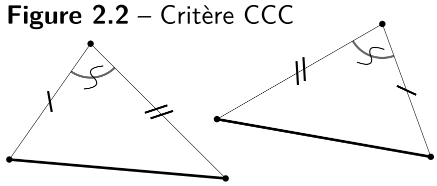


**Figure 2.3** – Critère CAC

**Postulat 2.6 — Critère ACA.** Si deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux, alors ils sont égaux.

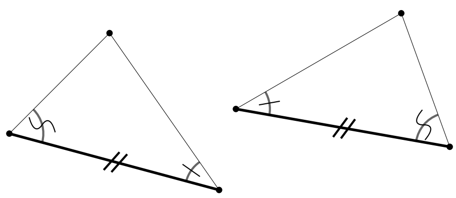
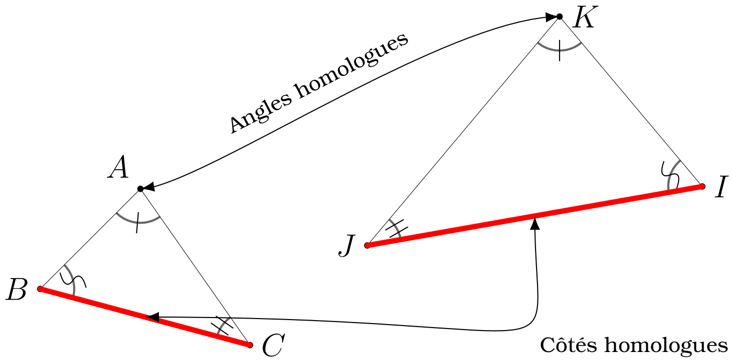


**Figure 2.4** – Critère ACA

**R** Cas RHC (Rectangle-Hypoténuse-Côté). Deux triangles rectangles, qui ont même longueur d'hypoténuse et une même longueur d'un côté de l'angle droit sont égaux.

## 2.3 Triangles semblables

**Définition 2.6** Deux triangles sont **semblables** lorsqu'ils ont leurs angles égaux deux à deux et leurs côtés **proportionnels**.




Les **angles correspondants** sont égaux :
$\widehat{A} = \widehat{K}$ $\widehat{B} = \widehat{J}$ $\widehat{C} = \widehat{I}$
Les **côtés correspondants** sont proportionnels :
$$\frac{JK}{AB} = \frac{IJ}{BC} = \frac{IK}{AC} = k$$

**Figure 2.5** – les trianges $ABC$ et $IJK$ sont semblables.

**Postulat 2.7 — Critère de similitude CCC.** Si les longueurs des 3 côtés d'un triangle $T_1$ sont **proportionnelles** aux longueurs respectives des 3 côtés d'un triangle $T_2$, alors les deux triangles sont semblables.

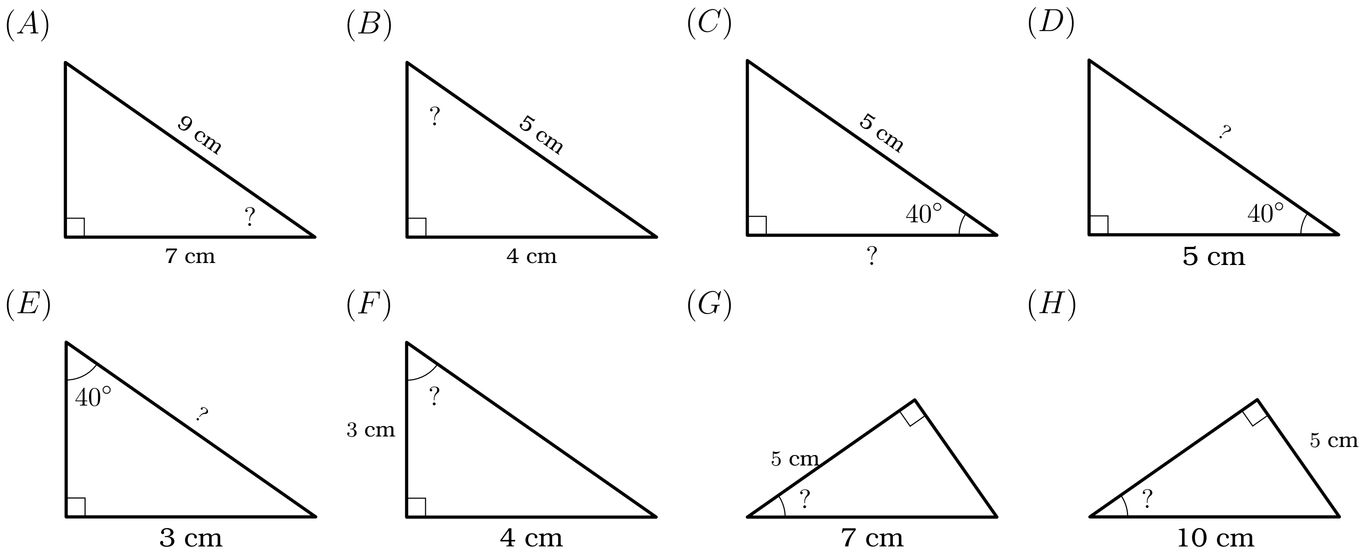
**Postulat 2.8 — Critère CAC-Semblable.** Si deux triangles $T_1$ et $T_2$ ont un angle égal compris entre 2 côtés respectivement proportionnels, alors les deux triangles sont semblables.

**Postulat 2.9 — Critère de similitude AA.** Si 2 angles d'un triangle $T_1$ sont **respectivement égaux** à 2 angles d'un triangle $T_2$. Alors les deux triangles sont semblables.

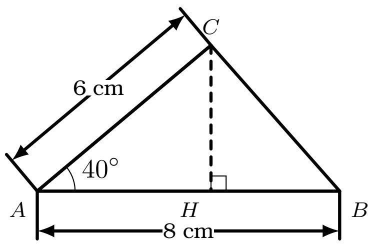
# 2.4 Exercices

## 2.4.1 Exercices : trigonométrie, lois des sinus et des cosinus

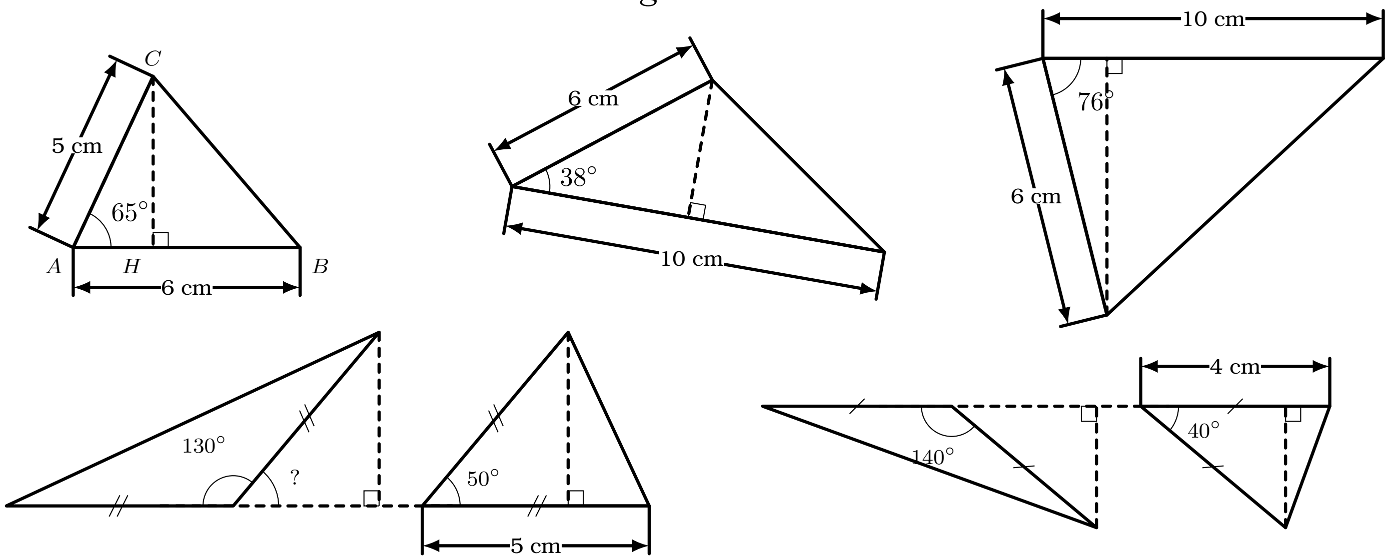
**Exercice 1 — Trigonométrie.** Écrire le rapport trigonométrique adapté et calculer les valeurs demandées.




■ **Exemple 2.1 — Calcul d'une aire.** Calculer l'aire du triangle $ABC$ ci-dessous.

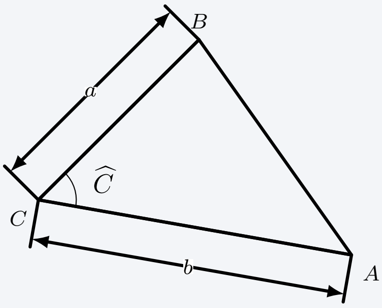



**Exercice 2 — À vous.** Calculer l'aire des triangles suivants :




**R** On peut calculer des rapports trigonométriques d'angles obtus (>90°). Comparer $\sin(130°)$,$\sin(50°)$.

### Formule de l'aire

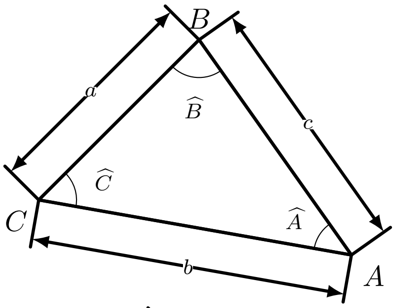


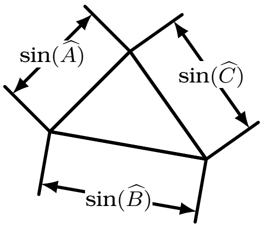

La formule est valable pour des angles aigus, mais aussi des angles obtus !

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$$

On a aussi l'égalité : $\sin(\widehat{C}) = \sin(180° - \widehat{C})$

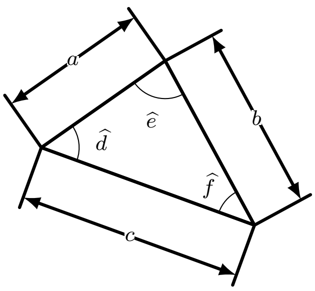
■ **Exemple 2.2 — je fais : loi des sinus.**



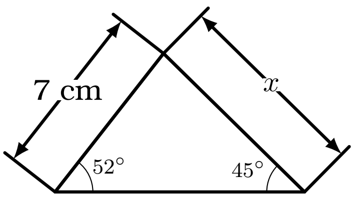

$2\mathscr{A} = ab\sin(\widehat{C}) =$

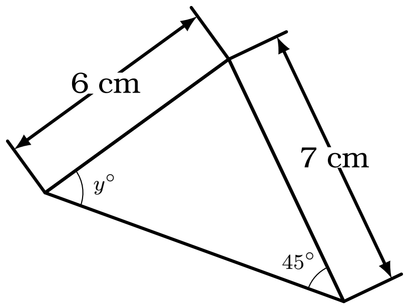
**Exercice 3** On considère la figure ci-dessous. Cocher les cases pour les formules vraies.

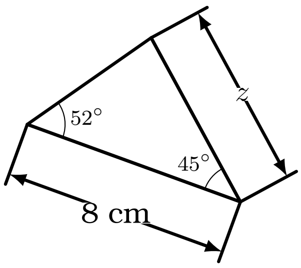



| | | Vrai | Faux |
|---|---|---|---|
| **1/** | $\dfrac{\sin(d)}{b} = \dfrac{\sin(e)}{c}$ | ☐ | ☐ |
| **2/** | $\dfrac{a}{\sin(f)} = \dfrac{b}{\sin(c)}$ | ☐ | ☐ |
| **3/** | $\dfrac{c}{\sin(e)} = \dfrac{b}{\sin(d)}$ | ☐ | ☐ |

**Exercice 4** En utilisant la loi des sinus, trouver les valeurs de $x$, $y$ et $z$ pour chacune des figures suivantes.

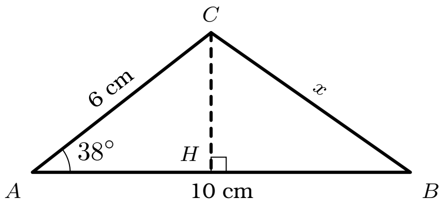


## 2.4.2 Exercices : la loi des cosinus

**Exercice 5 — un classique de 3e.**

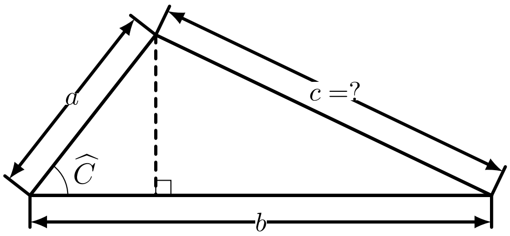



Dans la figure ci-contre, $H$ est le pied de la hauteur issue de $C$.

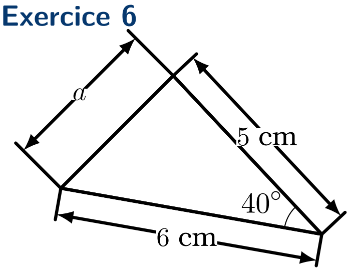
a) Calculer les longueurs $CH$ et $HB$.

b) En déduire $HB$, puis une valeur approchée de $x$ au dixième de cm.

■ **Exemple 2.3 — je fais, loi des cosinus.**

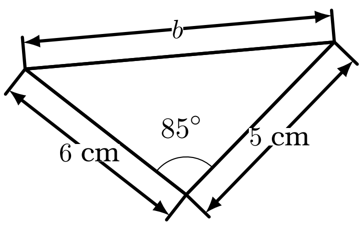



**Exercice 6**



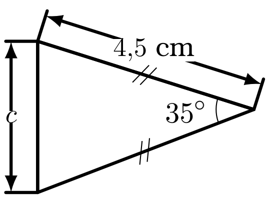

$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos(40°)$

$a = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$



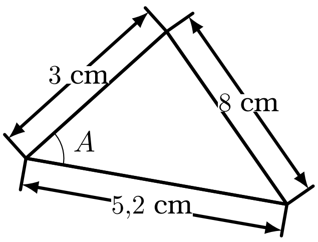

$b^2 =$

$b =$




$c^2 =$

$c =$

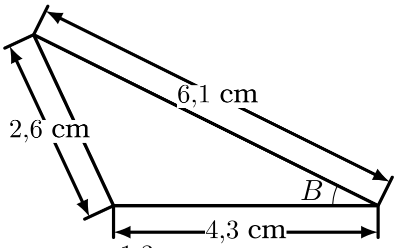


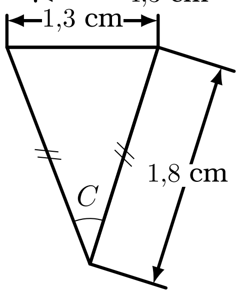

$$(\quad)^2 = (\quad)^2 + (\quad)^2 - 2 \times \quad \times \quad \times \cos(A)$$

$$=$$

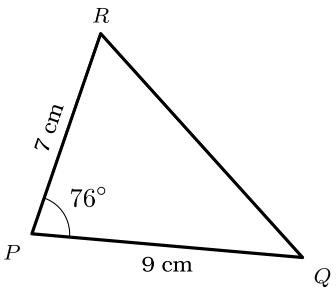
$$\cos(A) =$$

$$A =$$




### Exercice 7

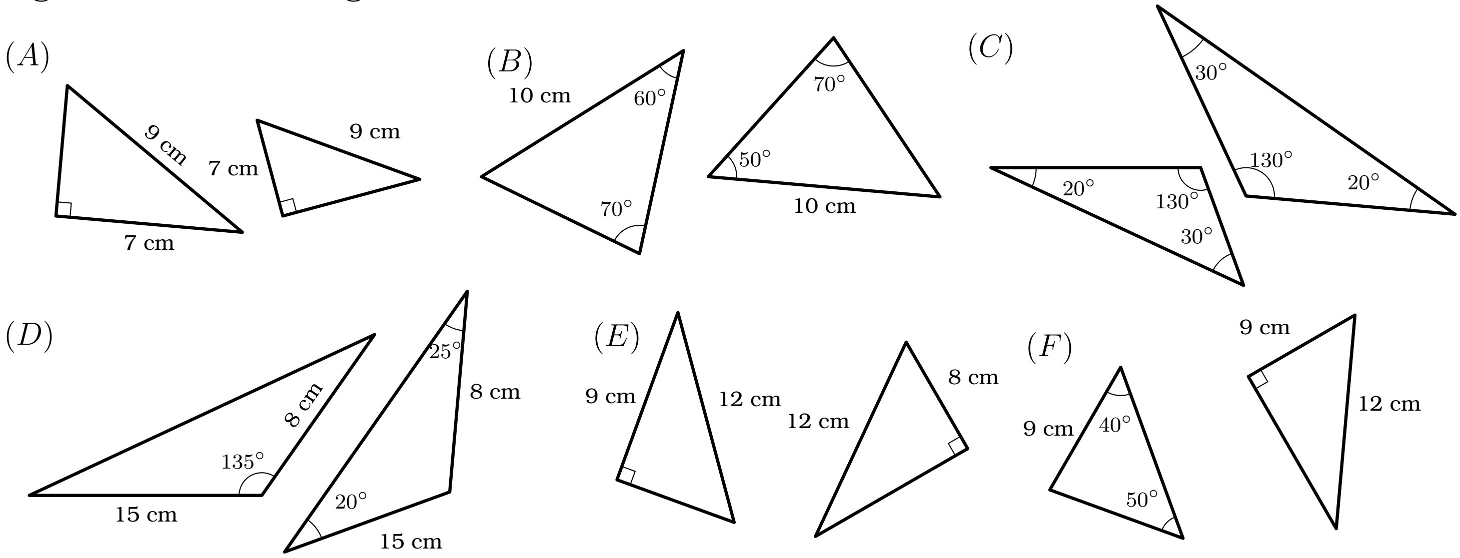



Dans le triangle $PQR$, $\widehat{QPR} = 76°$, $PQ = 9$ cm et $PR = 7$ cm.

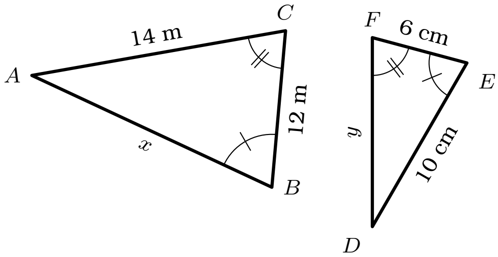
1. Calculer $QR$ au millimètre près.
2. À l'aide de la loi des sinus, calculer les valeurs approchées à $10^{-1}$ près des angles $\widehat{PQR}$ et $\widehat{PRQ}$.

### 2.4.3 Exercices : calculs algébriques et géométrie

**Exercice 8 — Triangles égaux : à l'oral.** Si possible, démontrer pour chaque cas que les triangles sont égaux. Les figures ne sont pas à l'échelle. Utiliser la même couleur pour indiquer les angles et côtés homologues.

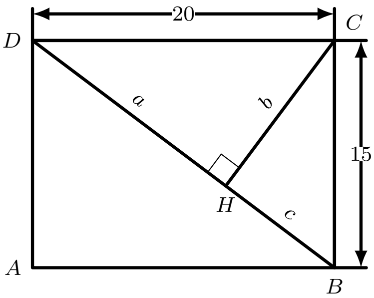



**Exercice 9 — Révision triangles semblables.**




1. Justifier que les triangles $ACB$ et $FED$ sont semblables.
2. Écrire les égalités des rapports entre les côtés homologues.
3. Calculer les longueurs $x$ et $y$.

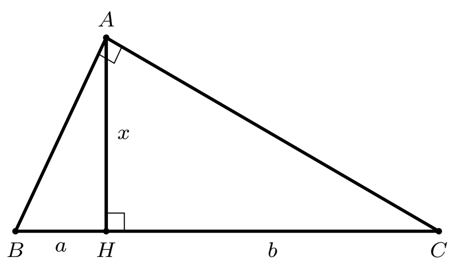
**Exercice 10**




1. Calculer la longueur de la diagonale du rectangle $ABCD$.
2. Justifier que les triangles $ABD$ et $DHC$ sont semblables.
3. Écrire les égalités des côtés homologues.
4. Déduire les valeurs de $a$, $b$ et $c$.

**Exercice 11 — Quadrature du rectangle.**
Sur la figure ci-dessous, le triangle $ABC$ est rectangle en $A$, et $(AH)$ est perpendiculaire à $(BC)$.

1. Démontrer que les triangles $ACH$ et $ABH$ sont semblables.
2. Écrire les rapports égaux.
3. En déduire que $x = \sqrt{ab}$.



**Exercice 12 — théorème de l'angle au centre.** Soit un cercle de centre $O$ passant par les points $A$, $B$ et $C$. Nous voulons démontrer le théorème suivant :

> Dans un cercle, un angle au centre mesure le double d'un angle inscrit interceptant le même arc.

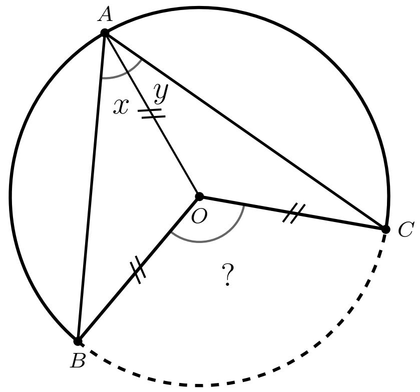
Pour simplifier on suppose que le centre $O$ est intérieur à l'angle aigu $\widehat{BAC}$. Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BOC}$ (intérieur) interceptent le même arc de cercle $BC$.

On pose $x = \widehat{BAO}$ et $y = \widehat{OAC}$.

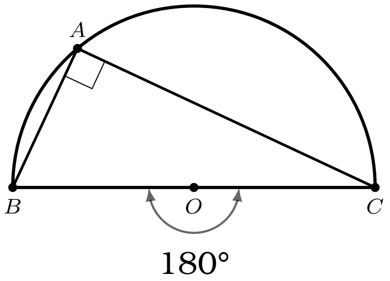
a) Exprimer les angles du triangle $OAB$ à l'aide de $x$.

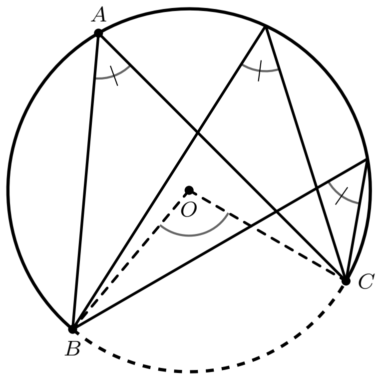
b) Exprimer les angles du triangle $AOC$ à l'aide de $y$.

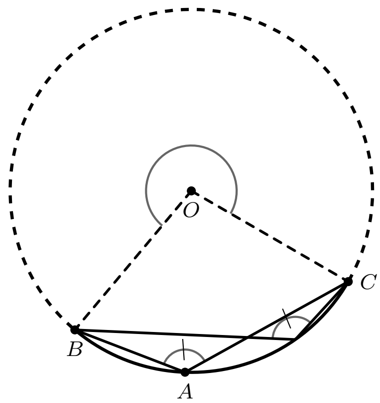
c) Montrer que la mesure de l'angle au centre recherché est égal à $2\widehat{BAC}$.




> **Théorème 2.10 — théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle.** Si le point $A$ appartient au cercle de diamètre $[BC]$ alors le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

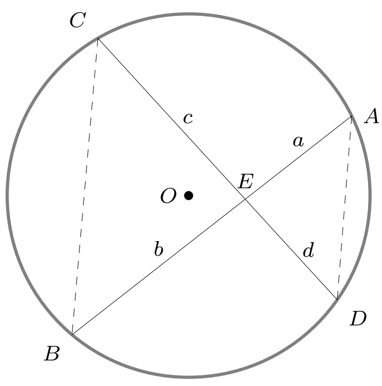



> **Théorème 2.11 — Théorème de l'angle inscrit.** Les angles inscrits interceptant le même arc de cercle ont la même mesure

**Exercice 13**




$A$, $B$, $C$ et $D$ sont des points d'un cercle de centre $O$. On suppose que les cordes $[AB]$ et $[CD]$ se coupent en $E$ situé à l'intérieur du cercle.

1. À l'aide du théorème de l'angle inscrit, justifier que $\widehat{EDA} = \widehat{EBD}$.
2. Montrer que les triangles $EAD$ et $EBC$ sont semblables.
3. Écrire les égalités des rapports des côtés homologues.
4. En déduire que $ab = cd$.

## 2.5 Exercices : solutions et éléments de réponse

*solution de l'exercice 1.*

A) $\cos(x) = \dfrac{7}{9}$.
$x = \arccos(\frac{7}{9}) \approx 39°$.

B) $\sin(x) = \dfrac{4}{5}$.
$x = \arcsin(\frac{4}{5}) \approx 53°$

C) $x = 5\cos(40°) \approx 3{,}83$.

D) $x = \dfrac{5}{\cos(40°)} \approx 6{,}53$.

E) $x = \dfrac{3}{\sin(40°)} \approx 4{,}67$.

F) $\tan(x) = \dfrac{4}{3}$.
$x = \arctan(\frac{4}{3}) \approx 53{,}1°$.

G) $\cos(x) = \dfrac{5}{7}$
$x = \arccos(\frac{5}{7}) = 44{,}4°$.

H) $\sin(x) = \dfrac{5}{10}$, $x = 30°$.

■

*solution de l'exercice 2.*

$A \approx 13{,}6$ cm$^2$; $B \approx 18{,}5$ cm$^2$; $C \approx 29{,}1$ cm$^2$; $D \approx 9{,}58$ cm$^2$; $E \approx 5{,}14$ cm$^2$; ■

*solution de l'exercice 3.*

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** $\dfrac{\sin(d)}{b} = \dfrac{\sin(e)}{c}$ | ☒ | ☐ |
| **2/** $\dfrac{a}{\sin(f)} = \dfrac{b}{\sin(c)}$ | ☐ | ☒ |
| **3/** $\dfrac{c}{\sin(e)} = \dfrac{b}{\sin(d)}$ | ☒ | ☐ |

■

*solution de l'exercice 4.*

$x = 6{,}3$ cm, $y \approx 55{,}6°$ et $z \approx 6{,}35$ cm ■