Chapitre

Vecteurs et opérations 16

16.1 Somme de vecteurs

Théorème 16.1 L'enchainement d'une translation de vecteur $\vec{u}$ puis d'une translation de vecteur $\vec{v}$ est aussi une translation.

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur associé à la translation obtenue.

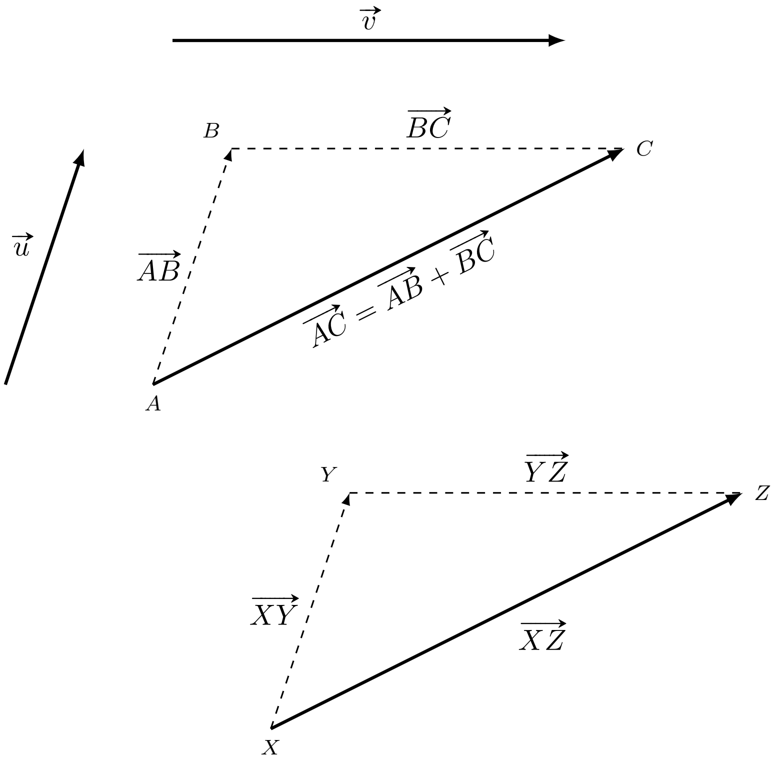
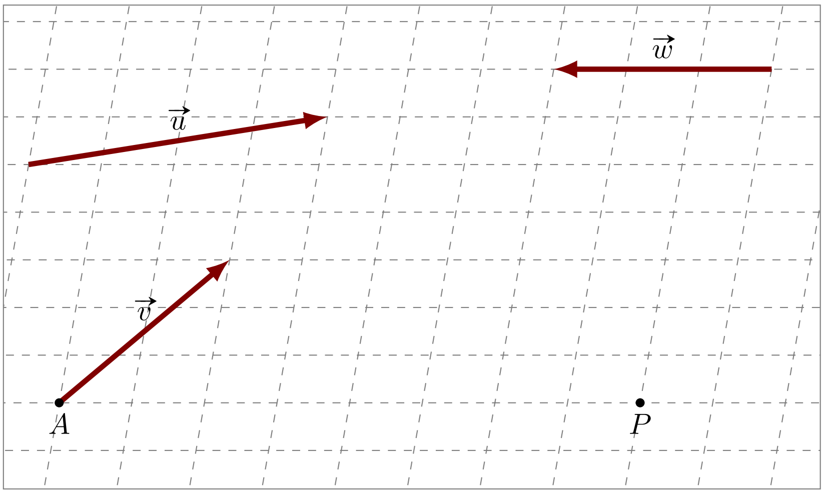


Figure 16.1 – C est l'image de A par l'enchaînement des translation de vecteur $\vec{u}$ puis $\vec{v}$.
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
En prenant un autre point de départ A' on obtient un autre représentant de $\vec{u} + \vec{v}$: $\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$

Relation de Chasles

Pour tout points A, B et C : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

■ **Exemple 16.2** Placer les points B et Q tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} + \vec{w}$



Pour tout points A et B. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

On dira que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Opposé du vecteur

L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $-\vec{u}$.

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

Deux vecteurs opposés ont même direction, même longueur, mais sont de sens contraires.

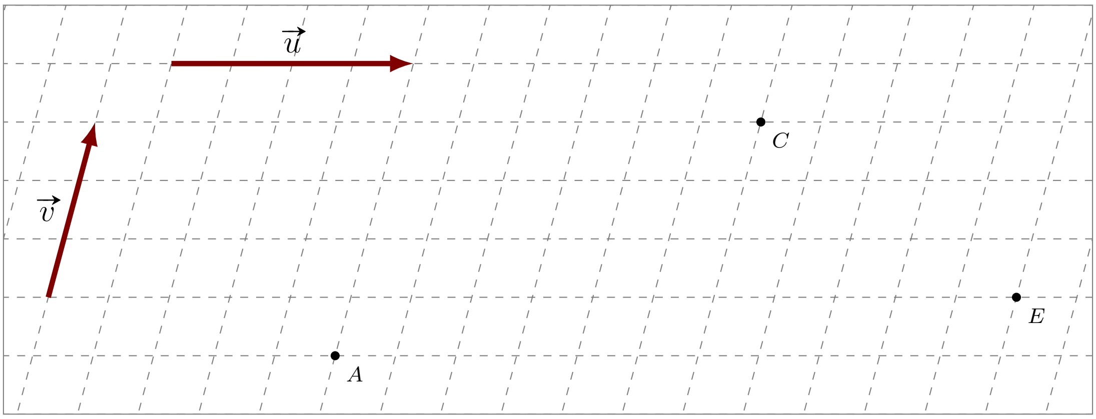
Soit un repère $(O; I, J)$ et les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Le vecteur $-\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

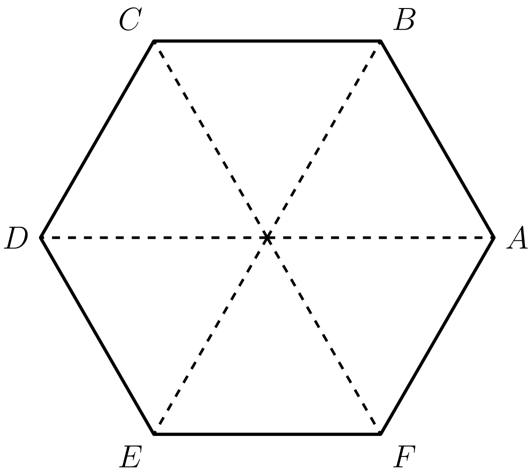
16.2 Exercices : sommes de vecteurs

■ **Exemple 16.3** Placer les points B, D et F tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}+\vec{v}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{u}-\vec{v}$ et $\overrightarrow{EF}=\vec{v}-\vec{u}$



Pour les exercices 1 à 4, $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O et rayon 1. Écrire le plus simplement possible les sommes ci-dessous en utilisant des points de la figure ou le vecteur nul, ou un nombre.

Exercice 1



a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=$

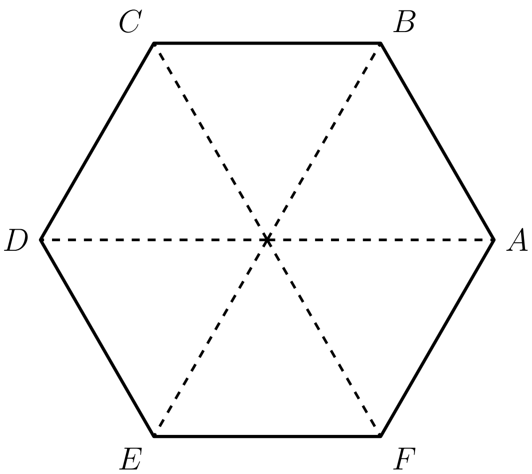
c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=$

d) $OA+OV=$

e) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}=$

f) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}=$

Exercice 2



a) $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AF}=$

b) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}=$

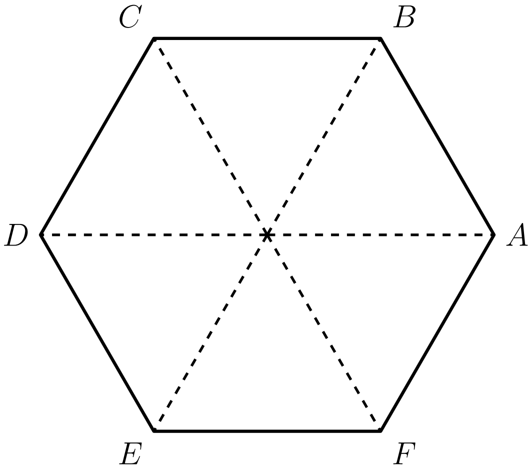
c) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=$

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}=$

e) $OA+OE+OC=$

f) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DE}=$

Exercice 3



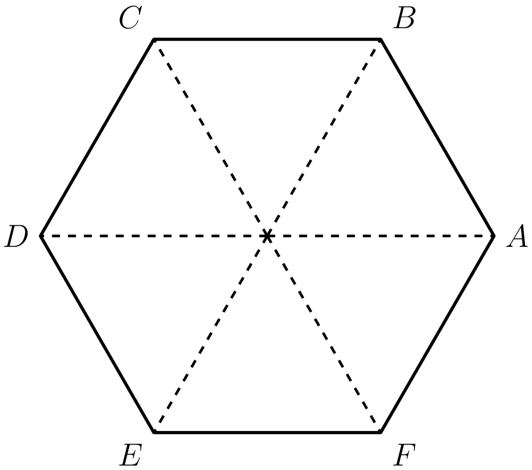
a) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

b) $OB - OA =$

c) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{FA} =$

d) $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{AB} =$

Exercice 4



a) $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} =$

b) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DE} =$

c) $\overrightarrow{OC} - \left(\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{DE}\right) =$

■ **Exemple 16.4** En utilisant la relation de Chasles, compléter les égalités suivantes où « … » représente le nom d'un point :

a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\dots\quad C}$

b) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{F\quad \dots} + \overrightarrow{U\quad \dots}$

c) $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UR} = \overrightarrow{\dots\quad \dots}$

d) $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{\dots\quad I} + \overrightarrow{I\quad \dots}$

e) $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{\dots\quad M} + \overrightarrow{\dots\quad N} + \overrightarrow{\dots\quad \dots}$

Exercice 5 Simplifier les expressions suivantes à l'aide de la relation de Chasles :

a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} =$ ....

b) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} =$ ....

c) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA} =$ ....

d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} =$ ....

e) $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} =$ ....

f) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} =$ ....

g) $\overrightarrow{KT} + \overrightarrow{TD} + \overrightarrow{KT} =$ ....

h) $\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QB} =$ ....

Exercice 6

En utilisant la relation de Chasles, compléter les égalités suivantes où « ... » représente le nom d'un point :

a) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A\ldots}$

b) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{HF}$

c) $\overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{\ldots B}$

d) $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{CM}$

e) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{\ldots\ldots} = \vec{0}$

f) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{AC}$

g) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{DE}$

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes à l'aide de la relation de Chasles :

a) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} =$

b) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} =$

c) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} =$

d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DB} =$

e) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{EM} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{EC} =$

f) $-\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{MU} =$

Exercice 8

Écrire les sommes demandées à l'aide de vecteurs dont les extrémités sont des points de la figure.

a) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CB} =$ ....

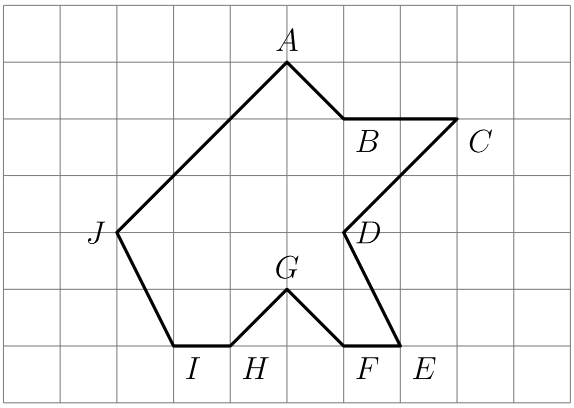
b) $\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{HG} =$ ....

c) $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HF} =$ ....

d) $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{FE} =$ ....

e) $\overrightarrow{HF} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} =$ ....

f) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{IH} - \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{FD} =$ ....



solution de l'exercice 5.

a) $\overrightarrow{BA}$
b) $\vec{0}$
c) $\overrightarrow{BD}$
d) $\overrightarrow{AD}$
e) $\overrightarrow{DB}$
f) $2\overrightarrow{BD}$

■

solution de 6.

a) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HF}$
c) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$
d) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$
e) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$
f) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$
g) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DE}$

■

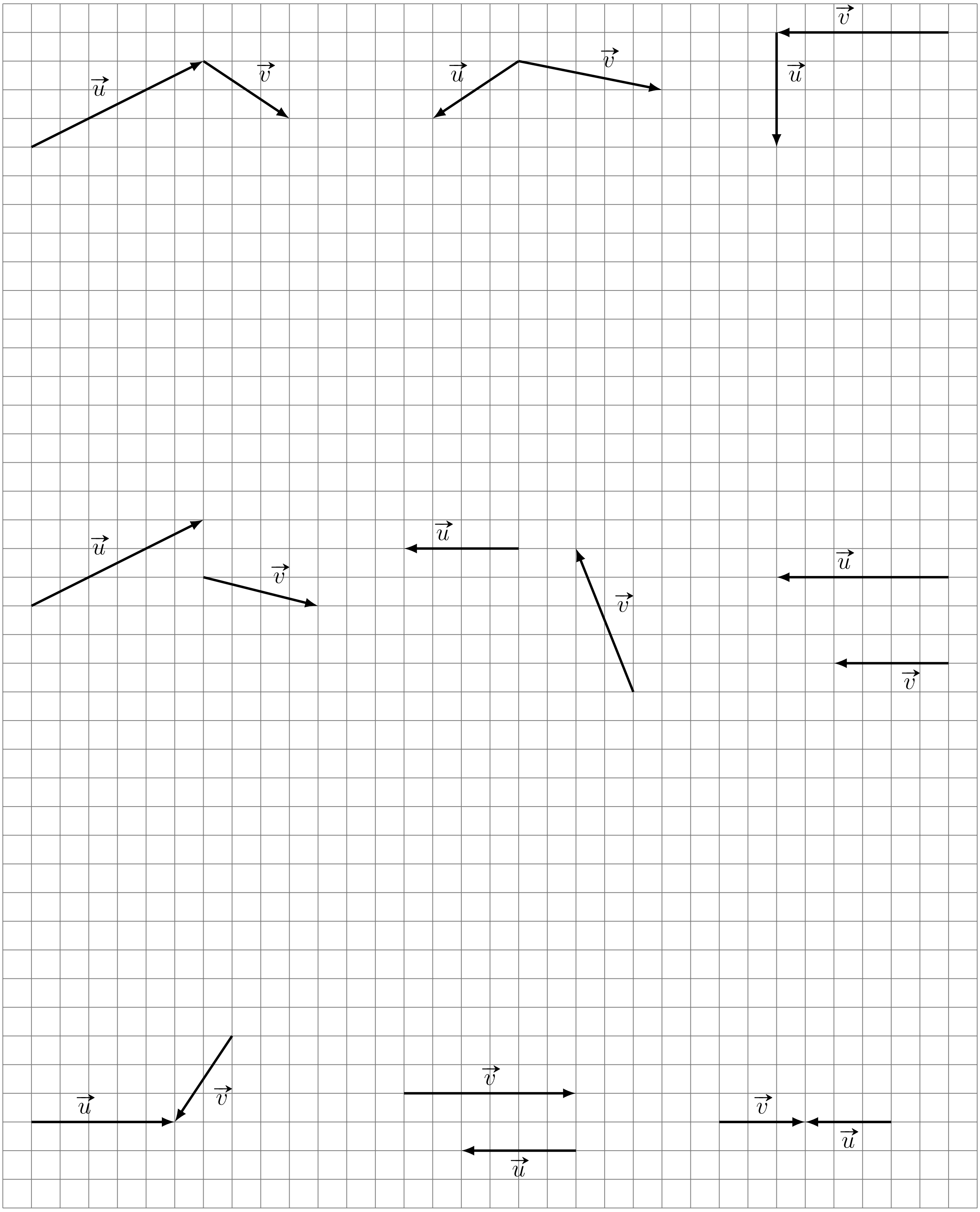
solution de 7.

a) $\overrightarrow{BD}$
b) $2\overrightarrow{DB}$
c) $\vec{0}$
d) $\overrightarrow{CB}$
e) $\vec{0}$
f) $\overrightarrow{TA}$

■

Exercice 9

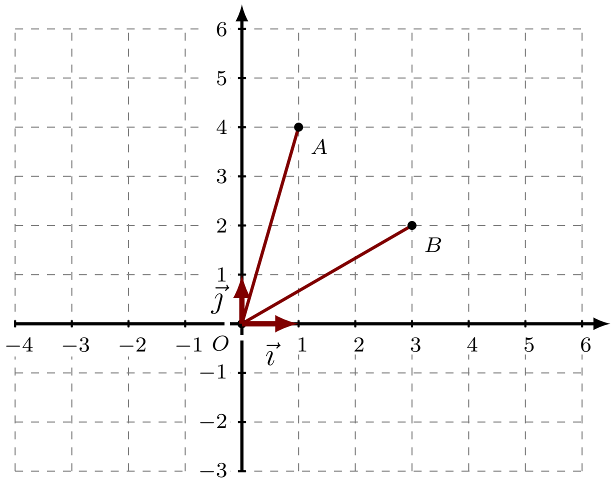
Pour chaque cas, représentez $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ (en bleu) et $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ (en rouge). Aucune restriction sur l'orgine du représentant choisi.

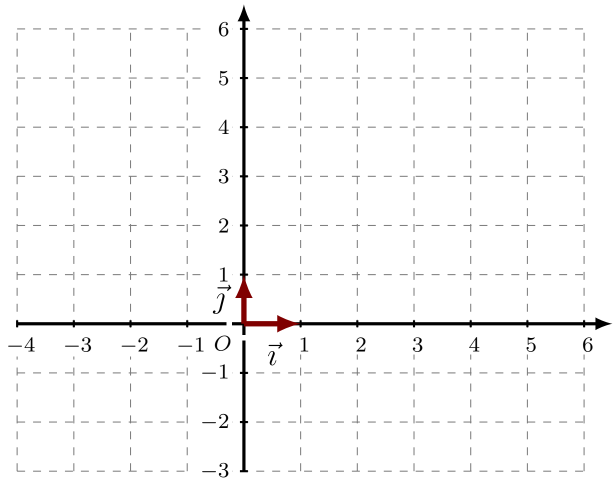


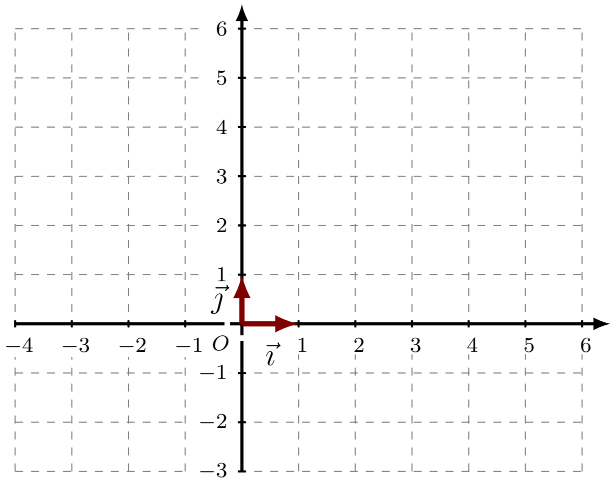
Exercice 10

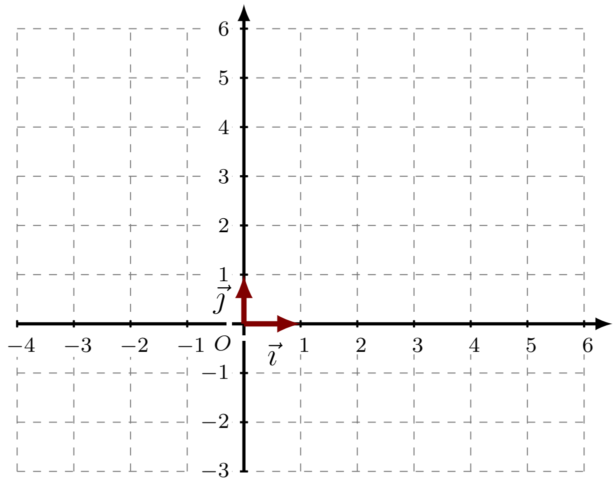
Pour chacun des cas suivants placer le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et représenter le parallélogramme $OAMB$ puis écrire le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sous la forme $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.

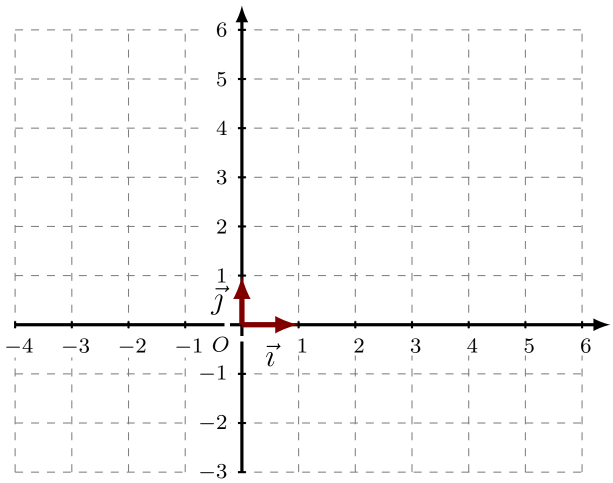
a) $A(1;4)$ et $B(3;2)$.
b) $A(-1;2)$ et $B(3;1)$.
c) $A(-1;1)$ et $B(-1;2)$.
d) $A(1;5)$ et $B(1;1)$.
e) $A(-2;1)$ et $B(1;2)$.
f) $A(-3;-2)$ et $B(-1;-1)$.

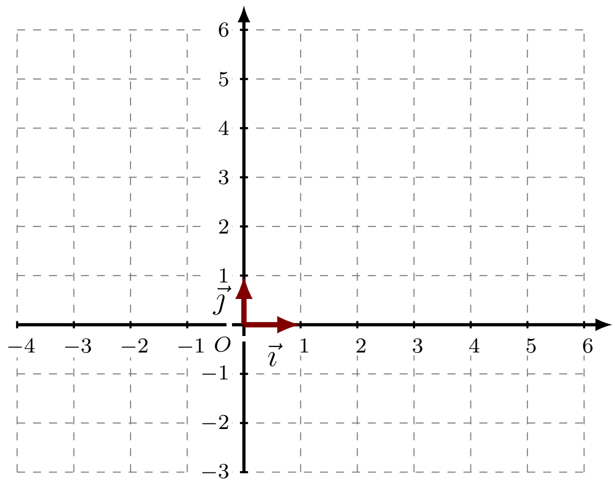




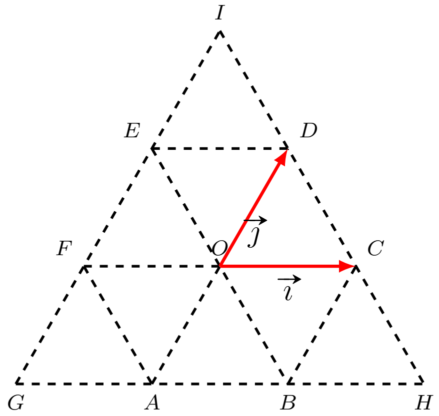


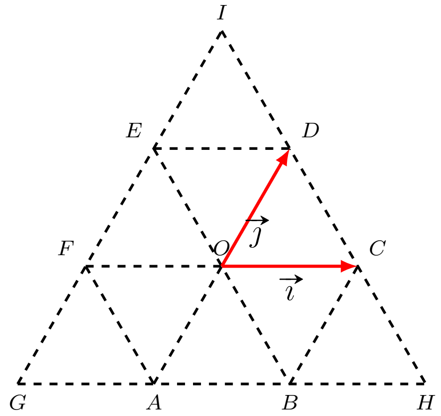


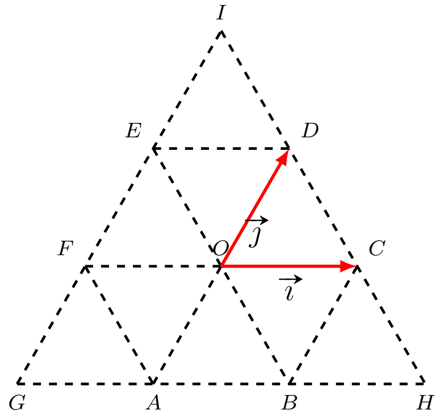




Exercice 11 — décomposer un vecteur en fonction de deux autres.
La figure ci-dessous (répétée 3 fois) est formée de triangles équilatéraux. On pose $\overrightarrow{OC} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OD} = \vec{\jmath}$. Écrire chacun des vecteurs suivants sous la forme $a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath}$.







a) $\overrightarrow{BI} =$

b) $\overrightarrow{IA} =$

c) $\overrightarrow{IH} =$

d) $\overrightarrow{EB} =$

e) $\overrightarrow{OG} =$

f) $\overrightarrow{DG} =$

g) $\overrightarrow{GC} =$

h) $\overrightarrow{HE} =$

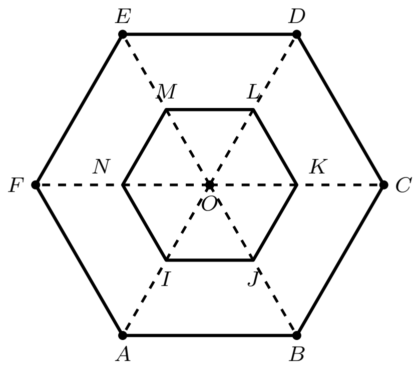
i) $\overrightarrow{AE} =$

j) $\overrightarrow{AF} =$

k) $\overrightarrow{BD} =$

l) $\overrightarrow{FB} =$

Exercice 12 — décomposer un vecteur en fonction de deux autres. La figure ci-dessous est formée de deux hexagones réguliers de centre O. I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des segements $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$, $[OD]$, $[OE]$ et $[OF]$.



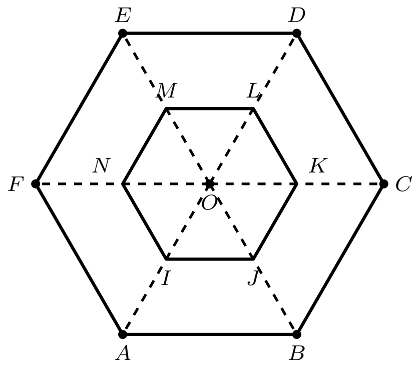
Décomposer chacun des vecteurs suivants selon les vecteurs donnés.

a) $\overrightarrow{BF} = \ldots\overrightarrow{OI} + \ldots\overrightarrow{OJ}$

b) $\overrightarrow{JD} = \ldots\overrightarrow{OI} + \ldots\overrightarrow{OK}$

c) $\overrightarrow{CO} = \ldots\overrightarrow{OI} + \ldots\overrightarrow{OJ}$

d) $\overrightarrow{EA} = \ldots\overrightarrow{OI} + \ldots\overrightarrow{OK}$



Écrire chacun des vecteurs suivants sous la forme $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$.

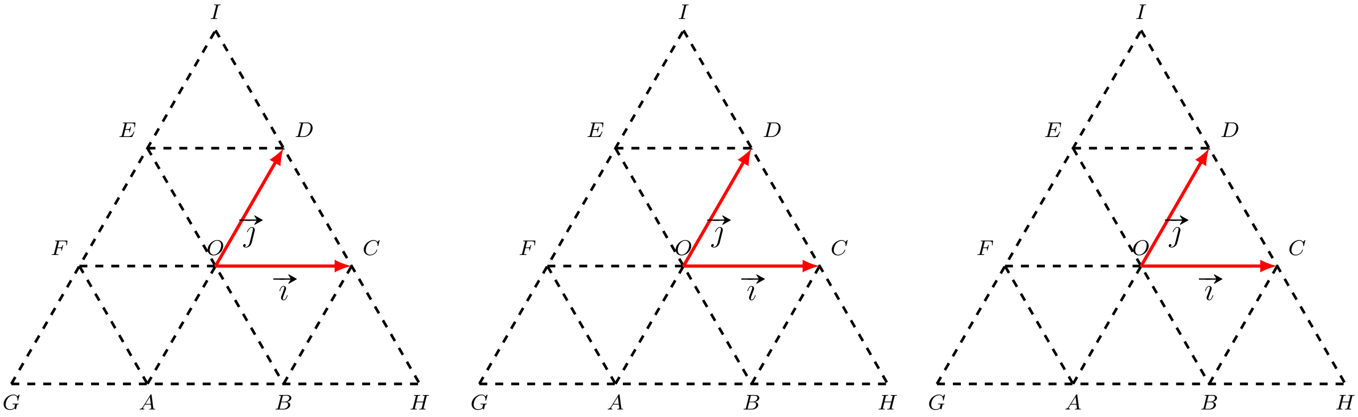
a) $\overrightarrow{JF} = \ldots\overrightarrow{OA} + \ldots\overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{EK} = \ldots\overrightarrow{OA} + \ldots\overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{CI} = \ldots\overrightarrow{OA} + \ldots\overrightarrow{OB}$

d) $\overrightarrow{JD} = \ldots\overrightarrow{OA} + \ldots\overrightarrow{OC}$

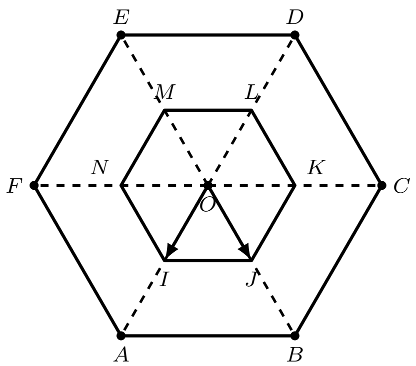
solution de 11.



a) $\overrightarrow{BI} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$	e) $\overrightarrow{OG} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$	i) $\overrightarrow{AE} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$
b) $\overrightarrow{IA} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$	f) $\overrightarrow{DG} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$	j) $\overrightarrow{AF} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$
c) $\overrightarrow{IH} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$	g) $\overrightarrow{GC} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$	k) $\overrightarrow{BD} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$
d) $\overrightarrow{EB} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$	h) $\overrightarrow{HE} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$	l) $\overrightarrow{FB} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

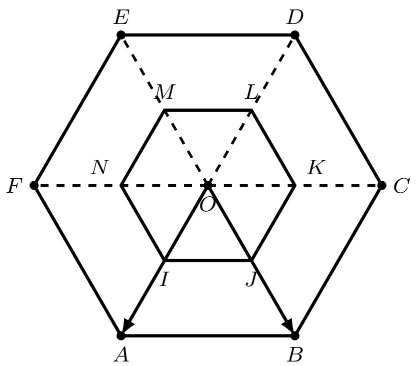
■

solution de 12.



Décomposer chacun des vecteurs suivants selon les vecteurs donnés.

a) $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{OI} - 4\overrightarrow{OJ}$	c) $\overrightarrow{CO} = 2\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$
b) $\overrightarrow{JD} = -3\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OK}$	d) $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OK}$



Écrire chacun des vecteurs suivants sous la forme $a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$.

a) $\overrightarrow{JF} = \overrightarrow{OA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$	c) $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
b) $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$	d) $\overrightarrow{JD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

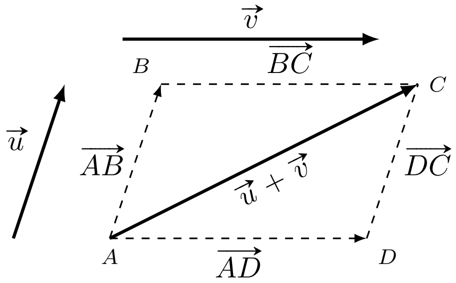
■

16.3 Propriétés des opérations

Élément nul Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\quad \vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.

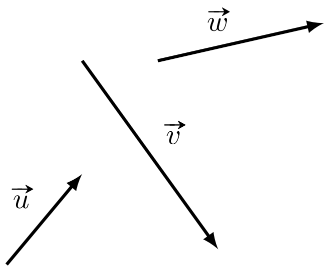
La somme de 2 vecteurs est indépendante de l'ordre

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

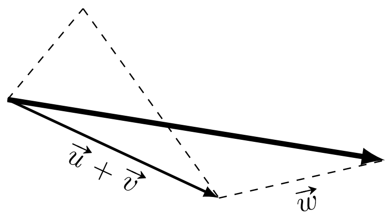


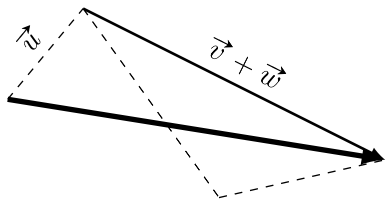
$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$
$$\vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$$

La somme de plusieurs vecteurs quelconques $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est aussi indépendante de l'ordre :



$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$



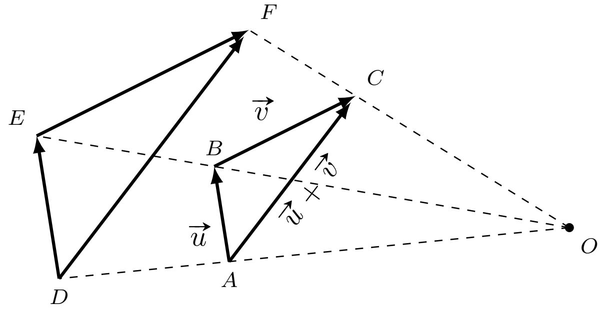


Pour tout vecteurs $\vec{u}$, et réel a et b, $\quad a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$.

Pour tout a et $b\in\mathbb{R}$ et vecteur $\vec{u}$ on a : $a\vec{u}+b\vec{u}=(a+b)\vec{u}$

Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et réel k, $\quad k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$.

Démonstration. La figure correspond au cas $k>0$. Le cas $k<0$ est similaire.



■

Exercices bilan opérations sur vecteurs

■ **Exemple 16.5**

Dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$; $A(1\ ;\ -3)$ et $B(4\ ;\ -5)$.

Calculer les coordonnées de chacun des vecteurs suivants :

$-3\ \overrightarrow{AB}$ $\quad\vec{u}+\overrightarrow{AB}$ $\quad-3\vec{u}+2\overrightarrow{AB}$ $\quad 2\ \vec{u}+5\ \overrightarrow{BA}$

Exercice 1

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ deux vecteurs définis par leurs coordonnées dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$.

Calculer les coordonnées de chacun des vecteurs suivants :

a) $-\vec{u}$	b) $\vec{u}+\vec{v}$	c) $3\vec{u}+2\vec{v}$	d) $-5\vec{u}-\vec{v}$	e) $\frac{1}{2}\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$

Exercice 2

Le plan est muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ et des points $A(-3\ ;\ 2)$, $B(1\ ;\ -2)$, $C(-5\ ;\ 3)$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs :

a) $\overrightarrow{AB}$	b) $\overrightarrow{AC}$	c) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$	d) $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$	e) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

Exercice 3 — révision.

Le plan est muni du repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$. Soient les points $T(1\ ;\ -2)$, $R(0\ ;\ -1)$, $U(5\ ;\ 3)$. Déterminer les coordonnées du point $E(x;y)$ tel que $TRUE$ est un parallélogramme, ainsi que celles du centre F du parallélogramme.

Exercice 4 Le plan est muni du repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$. Soient les points $A(2\ ;\ -3)$, $B(1\ ;\ -1)$, $C(4\ ;\ 5)$

a) Le point $M(x;y)$ est tel que $\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{BC}$.
   Écrire les équations vérifiées par x et y et retrouver les coordonnées de M.
b) Déterminer les coordonnées du point $N(x;y)$ tel que $\overrightarrow{CN}=2\ \overrightarrow{AB}-3\ \overrightarrow{AC}$
c) Déterminer les coordonnées du point $G(x;y)$ tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Exercice 5

Le plan est muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$. Soient les points $A(3\ ;\ -3)$, $B(2\ ;\ -4)$, $C(-5\ ;\ 1)$

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AC}+2\ \overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=-3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$.
c) Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{BD}=2\ \vec{u}-\vec{v}$.
d) Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE}=2\ \overrightarrow{BE}+2\ \vec{u}$

Exercice 6 — révision.
Soit les points $A(-1\ ;\ 3)$; $B(-1\ ;\ 2)$; $C(\frac{5}{2}\ ;\ 2)$ et $D(-8\ ;\ 4)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$. Montrer que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

Exercice 7 — révision.
Soit les points $M(1\ ;\ -2)$; $N(0\ ;\ -1)$ et $P(3\ ;\ -4)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$. Montrer que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 8 — révision.
Soit les points $A(1\ ;\ 1)$; $B(2\ ;\ -3)$; $C(4\ ;\ x)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$. Trouvez x tel que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 9
Dans un repère, on donne les points: $A(1\ ;\ -1)$, $B(-1\ ;\ -2)$ et $C(-2\ ;\ 2)$

1) Déterminer les coordonnées du point G vérifiant $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
2) Déterminer les coordonnées du point D vérifiant $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.
3) Les points B, G et D sont-ils alignés ?

Exercice 10
Dans un repère, on donne les points: $A(-2\ ;\ 2)$, $B(0\ ;\ -3)$ et $C(4\ ;\ 5)$.

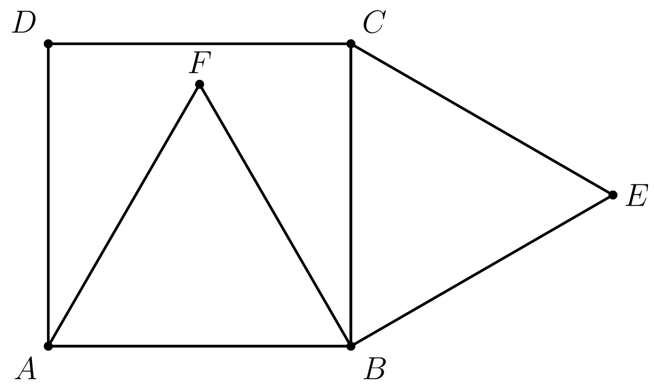
1) Déterminer les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.
2) I est le milieu de $[AB]$. Calculer les coordonnées de I
3) Montrer que les points C, I et M sont alignés.

Exercice 11
Dans un repère, on donne les points: $A(2\ ;\ 4)$, $B(-2\ ;\ 2)$ et $C(6\ ;\ -1)$. I est le milieu de $[AC]$. G et H sont tels que $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BH}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) Déterminer les coordonnées de I, G et H.
2) Prouver que B est le milieu de $[GI]$
3) Montrer que les points A, G et H sont alignés.

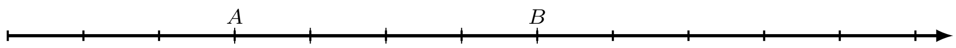
Exercice 12 — un classique : approche vectorielle.
Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré et les triangles BCE et ABF sont équilatéraux. On considère le repère orthonormé $(A\ ;\ B\ ,\ D)$.

1) Représenter les axes du repère.
2) Donner les coordonnées des points A, B, C et D.
3) Déterminer les coordonnées de F et E.
   indice : trigonométrie
4) Démontrer que les points D, F et E sont alignés.



■ **Exemple 16.6 — Équation vectorielle sur une droite.**

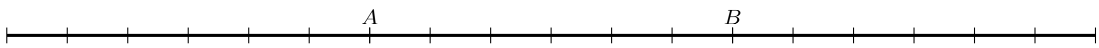
Soit les points A, B. Soit P et Q tel que $\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{QA}-3\overrightarrow{QB}=\vec{0}$. Placer P et Q.



Exercice 13

Pour chaque cas, exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, et placer le point P sur la figure.

a) P est tel que $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.
b) Q est tel que $\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QB}=\vec{0}$.
c) R est tel que $\overrightarrow{RA}+5\overrightarrow{RB}=\vec{0}$.
d) S est tel que $-3\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}=\vec{0}$.
e) T est tel que $-\overrightarrow{TA}+3\overrightarrow{TB}=\vec{0}$.
f) M est tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.



■ **Exemple 16.7 — Équation vectorielle dans le plan.**

Soit les points $A(1;2)$, $B(3;1)$ et $C(4;5)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On cherche les coordonnées des points $M(x;y)$ et $N(x;y)$ tel que

$3\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{BC}$

Exercice 14

On donne les points $A(-5;2)$. $B(3;0)$ et $C(-1;4)$. Calculer les coordonnées du point $M(x;y)$ qui vérifie l'équation donné.

a) $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BC}$
c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$
d) $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}$
e) $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{CM}$
f) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

16.4 Club maths : Cas particuliers du théorème de Menelaus

Exercice 1

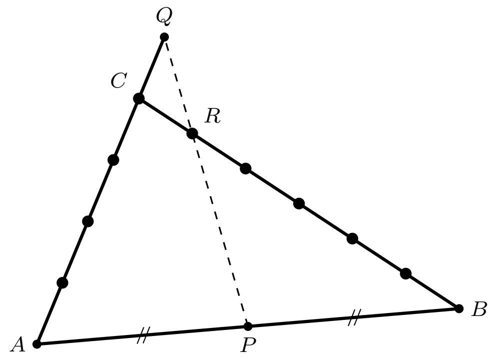
ABC est un triangle. P est le milieu de $[AB]$, Q est un point de (AC) et R est sur le segment $[BC]$. Les graduations sur les droites sont régulières.

L'objectif de cet exercice est de démontrer que les points P, Q et R sont alignés.

1. Donner les valeurs des réels a, b et c tel que :

$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AQ} = b\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{BR} = c\overrightarrow{BC}$$

2. Montrer que $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Montrer que $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont multiples l'un de l'autre. Conclure.



Exercice 2

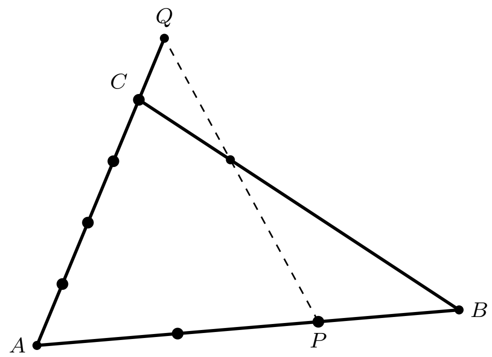
ABC est un triangle. P est le milieu de $[AB]$, Q est un point de (AC). Les graduations sur les droites sont régulières. R est le point d'intersection des droites (PQ) et (BC).

On sait que pour un certain nombre k : $\overrightarrow{BR} = k\overrightarrow{BC}$. L'objectif de cet exercice est de trouver k.

1. Donner les valeurs des réels a et b tel que :

$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AQ} = b\overrightarrow{AC}$$

2. Montrer que $\overrightarrow{PQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{PR} = \left(\frac{1}{3} - k\right)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.
4. Trouver k pour que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ soient multiples l'un de l'autre.



Exercice 3

ABC est un triangle ; P est un point de (AB), Q un point de (BC) et R un point de (AC) disposés comme sur le dessin (les graduations sur les droites sont régulières).

1. Donner les valeurs des réels a, b, et c tels que :

$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AR} = b\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{BQ} = c\overrightarrow{BC}$$

2. Exprimer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Démontrer que $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{9}{28}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$
4. Justifier que $\overrightarrow{PQ} = -\dfrac{9}{7}\overrightarrow{PR}$. Que conclure ?