Chapitre 11

Inéquations produit et quotient

Table 11.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 11...

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître**.../**savoir faire**...			
Fonctions polynomiales			
compléter un tableau de signes	1, 2, 3	4, 5	
étudier le signe d'un polynôme factorisé		6, 7	
résoudre des inéquations de signe évident		8	
résoudre des inéquations à l'aide d'un tableau de signe		9, 10	
Fonctions rationnelles			
compléter un tableau de signes d'un quotient simple	11, 12, 13	14	
dresser le tableau de signe d'une fraction rationnelle		15, 16	
résoudre des inéquations rationnelles à l'aide d'un tableau de signe		17, 18	
Problèmes			

11.1 Étude du signe d'une expression polynomiale

■ **Exemple 11.1 — polynômes de degré** 1.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_1(x) = 2x - 3$. Ici $m = 2 > 0$, et la racine est $x = \dfrac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x - 3$		$-$	0	$+$	

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_2(x) = 5 - 3x$. Ici $m = -3 < 0$, et la racine est $x = \dfrac{5}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$5 - 3x$		$+$	0	$-$	

R Les polynômes de degré 1 avec $P(x) = mx + c$ ($m \neq 0$) changent obligatoirement de signe.
Les polynômes de degré 2 avec $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) peuvent ne pas changer de signe.

■ **Exemple 11.2 — polynômes de degré** 2 **sans racines ou racine unique.**

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_1(x) = 2(x - 3)^2$ est positive et a pour racine $x = 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2(x-3)^2$		$+$	0	$+$	

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_2(x) = 9(8x - 4)^2 + 7$ est strictement positive et n'a pas de racines :

x	$-\infty$		$+\infty$
$9(8x-4)^2 + 7$		$+$	

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_3(x) = -8(3x - 1)^2$ est négative et a pour racine $x = \dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-8(3x-1)^2$		$-$	0	$-$	

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_4(x) = -7(9x + 3)^2 - 3$ est strictement négative et n'a pas de racines :

x	$-\infty$		$+\infty$
$-7(9x+3)^2 - 3$		$-$	

L'étude de signe de tout polynôme factorisé se ramène à l'étude des signes de ses facteurs.

Exemple 11.3 — Signe d'un polynôme factorisé avec facteurs irréductibles.

1. Soit $P_1(x) = 3(9x+10)(3x+1)$:
   a) Étudier le signe de $P_1(x)$ selon les valeurs de x.
   b) En déduire les solutions de l'inéquation $P_1(x) < 0$.
2. Soit $P_2(x) = -\frac{1}{4}(-2x+1)(5x^2+1)$
   a) Étudier le signe de $P_2(x)$ selon les valeurs de x.
   b) En déduire les solutions de l'inéquation $P_2(x) \geqslant 0$.

solution.

1. a) Dresser le tableau de signe du produit après avoir cherché les zéros de $P_1(x)$:

x	$-\infty$			$+\infty$
3				
$9x + 10$				
$3x + 1$				
$3(9x+10)(3x+1)$				

   b) Les solutions de l'inéquation $3(9x+10)(3x+1) < 0$ sont $\mathscr{S} =$ ....
2. a) Dresser le tableau de signe du produit après avoir cherché les zéros de $P_2(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$-\frac{1}{4}$		
$-2x + 1$		
$5x^2 + 1$		
$-\frac{1}{4}(-2x+1)(5x^2+1)$		

   b) Les solutions de l'inéquation $-\frac{1}{4}(-2x+1)(5x^2+1) \geqslant 0$ sont $\mathscr{S} =$ ....

■

11.2 Résolution d'inéquations polynomiales ou rationnelles

■ **Exemple 11.4 — résolution d'inéquations polynomiales évidentes.**

(I_1) $8(-x+5)^2 \geqslant 0$

(I_2) $3(-x-5)^2 > 0$

(I_3) $4(-10x-9)^2+1 > 0$

(I_4) $10(-9x-2)^2+3 \leqslant 0$

(I_5) $-10(6x+10)^2-5 \leqslant 0$

(I_6) $-10(3x+5)^2-2 \geqslant 0$

solution.

1. $8(-x+5)^2 = 0$. Le polynôme $8(-x+5)^2$ est positif et s'annule pour $x=5$. $\therefore \mathscr{S} = \mathbb{R}$

$$-x+5=0$$
$$x=5$$

2. $3(-x-5)^2 = 0$. Le polynôme $3(-x-5)^4$ est positive et s'annule pour $x=-5$. $\therefore \mathscr{S} = \mathbb{R}\setminus\{-5\}$

$$-x-5=0$$
$$x=-5$$

3. Le polynôme $4(-10x-9)^2+1$ est strictement positif sans racines. $\therefore \mathscr{S} = \mathbb{R}$
4. Le polynôme $10(-9x-2)^2+3$ est strictement positif sans racines. $\therefore \mathscr{S} = \emptyset$
5. Le polynôme $-10(6x+10)^2-5$ est strictement négatif sans racines. $\therefore \mathscr{S} = \mathbb{R}$
6. Le polynôme $-10(3x+5)^2-2$ est strictement négatif sans racines. $\therefore \mathscr{S} = \emptyset$

■

■ **Exemple 11.5 — résolution d'inéquations polynomiales nécessitant une factorisation.**

(I_1) $(x-3)^2-2>0$

(I_2) $x^2+10x+25 \leqslant 0$

solution.

1. $(x-3)^2-2 \geqslant 0 \iff (x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2}) \geqslant 0$

On dresse le tableau de signe du produit $P(x) = (x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2})$:

x	$-\infty$	$3+\sqrt{2}$	$3-\sqrt{2}$	$+\infty$
$x-3-\sqrt{2}$				
$x-3+\sqrt{2}$				
$P(x)$				

On conlut : $\mathscr{S} =$ ....

2. $x^2+10x+25 \leqslant 0 \iff (x+5)^2 \leqslant 0$. Le signe de $(x+5)^2$ est évident.

On peut conclure (sans tableau de signe) : $\therefore \mathscr{S} =$ ....

■

■ **Exemple 11.6 — résolution d'inéquations non linéaires.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(I_1) $x^2 \leqslant -5x$ $\qquad$ (I_2) $x^2(1-3x) > 4(1-3x)$ $\qquad$ (I_3) $x^2 \leqslant 9-6x$

solution. 1. a)

$$x^2 \leqslant -5x$$

On transforme en une comparaison à zéro

$$\iff x^2+5x \leqslant 0$$

On factorise le membre non nul

$$\iff x(x+5) \leqslant 0$$

b) Dresser le tableau de signe de la forme factorisée après avoir cherché ses zéros :

$$x(x+5)=0$$

$x=0$ où $x=-5$

x	$-\infty$	-5	0	$+\infty$
x				
$(x\ -\ 5)$				
$x(x\ -\ 5)$		0	0	

c) Conclure à l'aide du tableau de signe : $\mathscr{S}=$ ....

2. a)

$$x^2(1-3x) > 4(1-3x)$$

On transforme en une comparaison à zéro

$$\iff x^2(1-3x)-4(1-3x) > 0$$

On factorise le membre non nul

$$\iff (x^2-4)(1-3x) > 0$$

Factorisation complète

$$\iff (x-2)(x+2)(1-3x) > 0$$

b) Dresser le tableau de signe de la forme factorisée après avoir cherché ses zéros :

$$(x-2)(x+2)(1-3x)=0$$

$x=2$ où $x=-2$ où $x=\dfrac{-1}{3}$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$(x\ -\ 2)$					
$(x\ +\ 2)$					
$(1\ -\ 3x)$					
$(x-2)(x+2)(1-3x)$		0	0	0	

c) Conclure à l'aide du tableau de signe : $\mathscr{S}=$ ....

3. a)

$$x^2 > 6x-9$$

On transforme en une comparaison à zéro

$$\iff x^2-6x+9 > 0$$

On factorise le membre non nul

$$\iff (x-3)^2 > 0$$

b) Dresser le tableau de signe de la forme factorisée après avoir cherché ses zéros :

$$(x-3)^2=0$$

$$x=3$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$(x\ -\ 3)^2$		$+$	0	$+$	

c) Conclure à l'aide du tableau de signe : $\mathscr{S}=$ ....

■

■ **Exemple 11.7 — signe d'expressions rationnelles simples.**

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $R_1(x) = \dfrac{-2}{3x-7}$:
   a) Valeurs interdites : $3x - 7 = 0$, donc $x = \dfrac{7}{3}$. Domaine de R_1 est ....
   b) Dresser le tableau de signe du quotient :

x	$-\infty$				$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$3x-7$			0		
$\dfrac{-2}{3x-7}$			‖		

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $R_2(x) = \dfrac{-3x+6}{9x+4}$:
   a) Valeurs interdites : $9x + 4 = 0$, donc $x = \dfrac{-4}{9}$. Domaine de R_2 est ....
   b) Dresser le tableau de signe du quotient :

x	$-\infty$					$+\infty$
$-3x+6$						
$9x+4$						
$\dfrac{-3x+6}{9x+4}$						

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $R_3(x) = \dfrac{2}{5(x-3)^2}$:
   a) Valeurs interdites : $5(x-3)^2 = 0$, donc $x = 3$. Domaine de R_3 est ....
   b) Dresser le tableau de signe du quotient :

x	$-\infty$				$+\infty$
2		$-$		$-$	
$5(x-3)^2$			0		
$\dfrac{2}{5(x-3)^2}$			‖		

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $R_4(x) = \dfrac{2x-1}{9(x-4)^2+7}$:
   a) Valeurs interdites : $9(x-4)^2 + 7 = 0$, pas de solutions. Domaine de R_4 est ....
   b) Dresser le tableau de signe du quotient :

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x-1$			
$9(x-4)^2+7$			
$\dfrac{2x-1}{9(x-4)^2+7}$			

■ **Exemple 11.8 — résolution d'inéquations rationnelles.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(I_1) $\dfrac{1}{4x-3} \geqslant 2$ $\qquad\qquad$ (I_2) $\dfrac{1}{4x+3} > \dfrac{3}{2x}$

solution. 1. a) Valeurs interdites : $4x-3=0 \iff x = \ldots$. Domaine de résolution $D = \ldots\ldots\ldots$

b)

$$\frac{1}{4x-3} \geqslant 2$$

On transforme en une comparaison à zéro

$$\iff \frac{1}{(4x-3)} - 2 \geqslant 0$$

On ramène au même dénominateur le membre non nul

$$\iff \frac{1}{(4x-3)} - 2\frac{(4x-3)}{(4x-3)} \geqslant 0$$

$$\iff \frac{1-2(4x-3)}{(4x-3)} \geqslant 0$$

factorisation complète du numérateur et dénominateur

$$\iff \frac{(7-8x)}{(4x-3)} \geqslant 0$$

c) Dresser le tableau de signe après avoir cherché ses zéros des facteurs :

$7-8x=0$ $\qquad$ $4x-3=0$

$x=$ $\qquad$ $x=$

x	$-\infty$			$+\infty$
$\dfrac{(7-8x)}{(4x-3)}$				

d) Conclure à l'aide du tableau de signe : $\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. a) Valeurs interdites : $4x+3=0 \iff x = \ldots$ et $x=0$. Domaine de résolution $D = \ldots\ldots\ldots$

b)

$$\frac{1}{(4x+3)} > \frac{3}{2x}$$

On transforme en une comparaison à zéro

$$\iff \frac{1}{(4x+3)} - \frac{3}{2x} > 0$$

On ramène au même dénominateur le membre non nul

$$\iff \frac{(2x)}{(4x+3)(2x)} - \frac{3(4x+3)}{(2x)(4x+3)} > 0$$

$$\iff \frac{2x-3(4x+3)}{2x(4x+3)} > 0$$

factorisation complète du numérateur et dénominateur

$$\iff \frac{(-10x-9)}{2x(4x+3)} > 0$$

c) Dresser le tableau de signe après avoir cherché ses zéros des facteurs :

$-10x-9=0$ $\quad$ $2x=0$ $\quad$ $4x+3=0$

$x=$ $\qquad$ $x=$ $\qquad$ $x=$

x	$-\infty$				$+\infty$
$\dfrac{(-10x-9)}{2x(4x+3)}$					

d) Conclure à l'aide du tableau de signe : $\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

■

11.3 Exercices

Exercice 1 Compléter les tableaux de signes suivants, vous commencerez par déterminer les racines des facteurs utilisés.

$2x-3=0$

$2x=\dots;\quad x=\dots$

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x-3$		0	

$5x+3=0$

$5x=\dots;\quad x=\dots$

x	$-\infty$		$+\infty$
$(5x+3)^2$		0	

$-3x-2=0$

$x=\dots$

x	$-\infty$		$+\infty$
-10			
$-3x-2$			
$-10(-3x-2)$			

$3x-2=0$

$x=\dots$

x	$-\infty$		$+\infty$
5			
$(3x-2)^2$			
$5(3x-2)^2$			

$5(-x+2)^2=0$

$x=\dots$

x	$-\infty$		$+\infty$
$5(-x+2)^2$			

$2(x+1)^2+1=0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$2(x+1)^2+1$			

Exercice 2 — racines trop évidentes. Les tableaux de signes suivants peuvent induire en erreur par leur simplicité. Compléter les soigneusement.

x	$-\infty$		$+\infty$
x			

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$x+1$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$(1-x)^2$			

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2+1			

Exercice 3

Pour chaque tableau de signe, entourez les expressions dont le signe selon les valeurs de x correspond. Plusieurs ou aucune des propositions peut correspondre.

1. (A) $x-2$ (B) $x+2$ (C) $-3x+6$ (D) $5x+10$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

2. (A) $x-2$ (B) x^2-4 (C) $5(x+2)^2$ (D) $(x+2)^2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$+$	

3. (A) x (B) x^2+1 (C) $(x+1)^2$ (D) $(1-x)^2+3$

x	$-\infty$		$+\infty$
$C(x)$		$+$	

4. (A) $-x+3$ (B) x^2-3 (C) $(x+3)^2$ (D) $-2(3-x)^2$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$D(x)$		$-$	0	$-$	

Exercice 4

Proposer pour chaque tableau de signe deux polynômes qui correspondent.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$+\infty$
$B(x)$		$-$	

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$C(x)$		$+$	0	$+$	

Exercice 5

Indiquer si le tableau de signes du produit est correctement dressé, où préciser si : (A) les zéros des facteurs sont mal ordonnées (B) l'étude de signe d'un des facteurs est fausse (C) le signe du produit est mal complété ou faux.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$+\frac{3}{5}$		$+\infty$
$10x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$5x+3$		$+$	0	$-$		$-$	
$(10x-6)(5x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{9}{10}$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$10x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(10x+9)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\frac{4}{5}$		$-\frac{2}{9}$		$+\infty$
$9x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$-10x-8$		$+$	0	$-$		$-$	
$(9x+2)(-10x-8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$-\frac{9}{7}$		$+\infty$
$2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$7x+9$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+7)(7x+9)$		$+$		$-$		$+$	

Exercice 6

Déterminer les racines des polynômes donnés puis compléter le tableau de signe.

x	$-\infty$			$+\infty$
$P(x) = (-2x+3)(-3x-5)$				

x	$-\infty$			$+\infty$
$P(x) = (5x-65)(-2x+7)$				

x	$-\infty$			$+\infty$
$P(x) = (2x+14)(6x+24)$				

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x) = (-3x-72)(-4x-96)$		

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x) = 5x(3x-2)$	

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x) = x^2(5x+2)$	

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x) = (x^2+1)(2-5x)$	

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x) = (x+1)(x+2)(x-1)$	

Exercice 7 On souhaite dresser le tableau de signe de la fonction polynôme P. Indiquer s'il s'agit du bon tableau à remplir et s'il est correctement dressé. Si ce n'est pas le cas préciser si :

(A) la factorisation de $P(x)$ n'est pas complète

(B) les termes étudiés ne sont pas des facteurs de $P(x)$

(C) oubli qu'un facteur est de signe évident ou qu'il est élevé au carré

1. $P(x) = (x-4)\Big(-x-7\Big)^2$

x	$-\infty$		-7		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-7$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. $P(x) = 3\Big((-3x+3)^2 - 36\Big)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-3x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
$-3x+9$		$+$		$+$	0	$-$	
3		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $P(x) = (3x+3)\Big((x-5)^2+4\Big)$

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$3x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-5)^2+4$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

4. $P(x) = (4x+8)\Big(-(-2x+6)^2 - 9\Big)$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$4x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$-(-2x+6)^2$		$-$		$-$	0	$-$	
-9		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes sans utiliser un tableau de signe.

(I_1) $-(-3x-2)^2 - 3 < 0$

(I_2) $7(2x+1)^2 + 2 \geqslant 0$

(I_3) $-(x-2)^2 \geqslant 0$

(I_4) $-2(-8x-3)^2 > 0$

(I_5) $(-6x-5)^2 < 0$

(I_6) $6(3x-1)^2 + 10 \geqslant 0$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes après factorisation complète du membre non nul.

(I_1) $4x^2 + 5x \geqslant 0$

(I_2) $(2x+5)(x-4)(-x-8) < 0$

(I_3) $6(x+1)^2(5x-3) \leqslant 0$

(I_4) $-(2x-3)(2-x) > 0$

(I_5) $(2x^2+5)(3x-2) \leqslant 0$

(I_6) $3x(x+3) - (x+3)^2 < 0$

(I_7) $x^3 + 2x^2 + x \geqslant 0$

(I_8) $(4x^2-9)(x+1) > 0$

(I_9) $(2x-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}) > 0$

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

(I_1) $x^2 > 4$

(I_2) $x^2 \leqslant 2$

(I_3) $x^2 > 3x$

(I_4) $x^3 \geqslant 9x$

(I_5) $3x^3 \leqslant 5x^2$

(I_6) $x^2 - 4x \leqslant -2x - 1$

(I_7) $(2x+3)^2 > (2x+3)(x-3)$

(I_8) $(x+1)(x-3) \geqslant x^2 - 9$

(I_9) $x^2 - 4 < (x+2)(2x+5)$

Exercice 11

Compléter les tableaux de signes suivants, vous commencerez par déterminer les racines des facteurs utilisés.

$x - 6 = 0$; $x = \dots$

x	$-\infty$		$+\infty$
$x - 6$		0	
$R(x) = \dfrac{1}{x-6}$		‖	

$3 - 5x = 0$; $x = \dots$

x	$-\infty$		$+\infty$
$3 - 5x$		0	
$R(x) = \dfrac{1}{3-5x}$		‖	

$3x + 2 = 0$; $x = \dots$

x	$-\infty$		$+\infty$
5			
$3x + 2$			
$R(x) = \dfrac{5}{3x+2}$			

$5x + 4 = 0$; $x = \dots$

x	$-\infty$		$+\infty$
13			
$(5x + 4)^2$			
$R(x) = \dfrac{13}{(5x+4)^2}$			

$-x - 3 = 0$; $x = \dots$

x	$-\infty$		$+\infty$
-2			
$-x - 3$			
$R(x) = \dfrac{-2}{-x-3}$			

$2x^2 + 3 = 0$; $x = \dots$

x	$-\infty$		$+\infty$
-5			
$2x^2 + 3$			
$R(x) = \dfrac{-5}{2x^2+3}$			

Exercice 12 — racines trop évidentes. Les tableaux de signes suivants peuvent induire en erreur par leur simplicité. Compléter les soigneusement.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$\dfrac{-1}{x}$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$\dfrac{-1}{x^2}$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$\dfrac{1}{x+1}$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$\dfrac{1}{(1-x)^2}$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$\dfrac{-1}{x^2+1}$			

Exercice 13

Pour chaque tableau de signe, entourez les expressions dont le signe selon les valeurs de x correspond. Plusieurs ou aucune des propositions peut correspondre.

1. (A) $x-7$ (B) $\frac{2}{x-7}$ (C) $\frac{1}{(x-7)^2}$ (D) $\frac{2}{(-x+7)^2}$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$A(x)$		$-$	‖	$+$	

2. (A) $2x-6$ (B) $\frac{1}{2x-6}$ (C) $\frac{3}{(2x-6)^2}$ (D) $\frac{-5}{(2x-6)^2}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$B(x)$		$-$	‖	$-$	

3. (A) $-4x-5$ (B) $\frac{3}{-4x-5}$ (C) $\frac{-5}{-4x-5}$ (D) $\frac{-2}{(-4x-5)^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$+\infty$
$C(x)$		$+$	‖	$-$	

4. (A) $-4x-4$ (B) $\frac{-8}{-4x-4}$ (C) $\frac{2}{(-4x-4)^2}$ (D) $\frac{-5}{(-4x-4)^2}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$D(x)$		$+$	‖	$+$	

5. (A) $3x+1$ (B) $3x^2+1$ (C) $\frac{2}{(3x+1)^2}$ (D) $\frac{1}{3x^2+1}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$E(x)$		$+$	

Exercice 14

Proposer pour chaque tableau de signe deux *expressions rationnelles* qui correspondent.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$A(x)$		$+$	‖	$-$	

x	$-\infty$		$+\infty$
$B(x)$		$-$	

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$C(x)$		$+$	‖	$+$	

Exercice 15

Pour les expressions rationnelles simples ci-dessous, déterminer les racines des facteurs du numérateur et dénominateurs et compléter le tableau de signe.

x	$-\infty$						$+\infty$
$R(x)=\frac{-x}{x+12}$							

x	$-\infty$			$+\infty$
$R(x) = \dfrac{2x-5}{7+21x}$				

x	$-\infty$			$+\infty$
$R(x) = \dfrac{x^2}{5x+3}$				

x	$-\infty$			$+\infty$
$R(x) = \dfrac{-14x+12}{x^2+3}$				

x	$-\infty$				$+\infty$
$R(x) = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{1-9x}$					

x	$-\infty$				$+\infty$
$R(x) = \dfrac{5+x}{(x-6)(7x+8)}$					

Exercice 16 On souhaite dresser le tableau de signe de la fonction rationnelle f. Indiquer s'il s'agit du bon tableau à remplir et s'il est correctement dressé. Si ce n'est pas le cas préciser si :

(A) les termes étudiés ne sont pas des facteurs de $f(x)$ (factorision non complète)

(B) oubli qu'un facteur est de signe évident ou qu'il est élevé au carré

(C) oubli de valeurs interdites ou de zéros.

1. $f(x) = \dfrac{10x+6}{-(x+7)^2-9}$

x	$-\infty$		-7		$-\frac{3}{5}$		$+\infty$
$10x+6$		$-$		$-$	0	$+$	
$-(x+7)^2$		$-$	0	$-$		$-$	
-9		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

2. $f(x) = \dfrac{-8x+6}{-(-x+8)^2-25}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$-8x+6$		$+$	0	$-$	
$-(-x+8)^2-25$		$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3. $f(x) = \dfrac{-x+2}{(-2x-7)^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$-2x-7$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

4. $f(x) = 1 + \dfrac{-5x-2}{5x-10}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{5}$		2		$+\infty$
1		$+$		$+$		$+$	
$-5x-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$5x-10$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$		$-$		$+$	

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations rationnelles simples suivantes.

(I_1) $\dfrac{2x}{6x+1} < 0$

(I_2) $\dfrac{-3x+9}{-4x+7} < 0$

(I_3) $\dfrac{x^2+4x}{2x^2+3} > 0$

(I_4) $\dfrac{2x-4}{x+2} > 0$

(I_5) $\dfrac{-2x+8}{3x-2} < 0$

(I_6) $\dfrac{2x^2}{-(x+1)(x+3)} \geqslant 0$

(I_7) $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2+2} \leqslant 0$

(I_8) $\dfrac{-5x}{(2x-7)^2} \geqslant 0$

(I_9) $\dfrac{1+2x^2}{7-x} \geqslant 0$

Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

(I_1) $\dfrac{1}{x} > 2$

(I_2) $\dfrac{1}{x^2} < 3$

(I_3) $\dfrac{3}{x} \geqslant 5x$

(I_4) $\dfrac{4}{1-5x} < 2$

(I_5) $3 \leqslant \dfrac{-6}{7x-4}$

(I_6) $\dfrac{3}{x-1} \leqslant \dfrac{2}{x+1}$

(I_7) $\dfrac{3x+1}{6-5x} \geqslant 2$

(I_8) $\dfrac{3x+1}{5-2x} \leqslant -3$

(I_9) $\dfrac{x+5}{x-1} \leqslant \dfrac{x-3}{x+2}$

11.4 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 1.

■

solution de l'exercice 2.

■

solution de l'exercice 3.

■

solution de l'exercice 4.

■

solution de l'exercice 5.

1. le signe du facteur $5x + 3$ est faux.
2. les zéros de P ne sont pas rangés dans l'ordre croissant.
3. tableau correct.
4. le signe du produit est incomplet.

■

solution de l'exercice 6.

■

solution de l'exercice 7.

1. oubli que $-x - 7$ est au carré
2. résolution correct, le polynôme se factorise en $P(x) = 3(-3x - 3)(-3x + 9)$
3. Le facteur $(x - 5)^2 + 4$ ne s'annule pas.
4. $-(2x + 6)^2$ et -9 ne sont pas des facteurs de $P(x)$.

■

solution de l'exercice 8.

(I_1) $\mathscr{S}_1 = \mathbb{R}$

(I_2) $\mathscr{S}_2 = \mathbb{R}$

(I_3) $\mathscr{S}_3 = \{2\}$

(I_4) $\mathscr{S}_4 = \emptyset$

(I_5) $\mathscr{S}_5 = \emptyset$

(I_6) $\mathscr{S}_6 = \mathbb{R}$

■

solution de l'exercice 9.

(I_1) $\mathscr{S}_1 = \left]-8, -\frac{5}{2}\right[\cup]4, \infty[$

(I_2) $\mathscr{S}_2 = \left]-\infty, \frac{3}{5}\right]$

(I_3) $\mathscr{S}_3 = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

(I_4) $\mathscr{S}_4 = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right]$

(I_5) $\mathscr{S}_5 =]-3, 3[$

(I_6) $\mathscr{S}_6 = \{-1\} \cup [0, \infty[$

(I_7) $\mathscr{S}_7 = \left]-\frac{3}{2}, -1\right[\cup \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$

(I_8) $\mathscr{S}_8 = \left]-\infty, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, \infty\right[$

■

solution de l'exercice 10.

(I_1) $\mathscr{S}_1 =]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$

(I_2) $\mathscr{S}_2 =]-\infty, 0[\cup]3, \infty[$

(I_3) $\mathscr{S}_3 = [-3, 0] \cup [3, \infty[$

(I_4) $\mathscr{S}_4 = \left]-\infty, \frac{5}{3}\right]$

(I_5) $\mathscr{S}_5 = \{1\}$

(I_6) $\mathscr{S}_6 =]-\infty, -6[\cup \left]-\frac{3}{2}, \infty\right[$

(I_7) $\mathscr{S}_7 =]-\infty, 3]$

(I_8) $\mathscr{S}_8 =]-\infty, -7[\cup]-2, \infty[$

■

solution de l'exercice 11.

■

solution de l'exercice 12.

■

solution de l'exercice 13.

■

solution de l'exercice 14.

■

solution de l'exercice 15.

■

solution de l'exercice 16.

1. -9 et $-(x+7)^2$ ne sont pas des facteurs
2. tableau correct
3. oubli que $(-2x-7)$ est élevé au carré.
4. les valeurs interdites et signes de $f(x)$ ne sont pas marqués. 1 n'est pas un facteur de $f(x)$.

■

Point méthode

1. Pour les inéquations rationnelles, préciser le domaine de résolution (valeurs interdites).
2. Ramener l'inéquation à une *comparaison à zéro* (i.e. une étude de signe)
3. Déterminer la forme factorisée du membre non nul.
4. Mettre au même dénominateur et factoriser complètement *numérateurs et dénominateurs* si nécessaire.
5. Chercher les racines des facteurs obtenus.
6. Dresser le tableau de signe de la forme factorisée
7. Conclure.

solution de l'exercice 17.

(I_1) $\mathscr{S}_1 = \left]-\dfrac{1}{6}, 0\right[$

(I_2) $\mathscr{S}_2 = \left]\dfrac{7}{4}, 3\right[$

(I_3) $\mathscr{S}_3 =]-\infty, -4[\cup]0, \infty[$

(I_4) $\mathscr{S}_4 =]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$

(I_5) $\mathscr{S}_5 = \left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right[\cup]4, \infty[$

(I_6) $\mathscr{S}_6 =]-3, -1[\cup \{0\}$

(I_7) $\mathscr{S}_7 = [-1, 2]$

(I_8) $\mathscr{S}_8 =]-\infty, 0]$

(I_9) $\mathscr{S}_9 =]-\infty, 7[$

■

solution de l'exercice 18.

(I_1) $\mathscr{S}_1 = \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$

(I_2) $\mathscr{S}_2 = \left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right[$

(I_3) $\mathscr{S}_3 =]-\infty, 0]$

(I_4) $\mathscr{S}_4 = \left]-\infty, -\dfrac{1}{5}\right[\cup \left]\dfrac{1}{5}, \infty\right[$

(I_5) $\mathscr{S}_5 = \left[\dfrac{2}{7}, \dfrac{4}{7}\right[$

(I_6) $\mathscr{S}_6 =]-\infty, -5] \cup]-1, 1[$

(I_7) $\mathscr{S}_7 = \left[\dfrac{11}{13}, \dfrac{6}{5}\right[$

(I_8) $\mathscr{S}_8 = \left]\dfrac{5}{2}, \dfrac{16}{3}\right]$

(I_9) $\mathscr{S}_9 =]-\infty, -2[\cup \left[-\dfrac{7}{11}, 1\right[$

■

11.5 B.A.R Maths : un carré est positif

> Un grand nombre de résultats reposent sur le principe simple suivant : le carré d'un réel est un réel positif, et ce carré est nul si et seulement si le réel est nul. Dans cette feuille, nous explorons plusieurs applications (simples et moins simples) de ce principe.

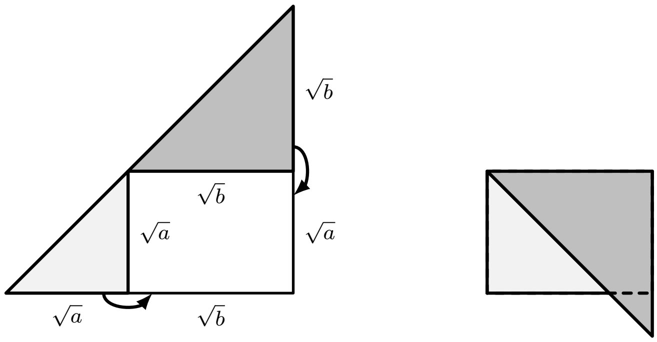
Problème 1 — Petites astuces à connaître.

Montrer les inégalités suivantes sont vraies pour tout a et $b \in \mathbb{R}$:

$$2ab \leqslant a^2 + b^2 \qquad ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4} \qquad (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$$

Problème 2 — Inégalité arithmético-géométrique.

1. Montrer que la figure ci-contre illustre l'inégalité pour $a, b \geqslant 0$, on a $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$
2. Démontrer algébriquement l'inégalité précédente.



Problème 3 — Inégalité de Cauchy-Schwarz et application.

1. Montrer que pour tout $x, y, u, v \in \mathbb{R}$:

$$(x^2+y^2)(a^2+b^2) \geqslant \left(xa+yb\right)^2$$

2. En déduire pour $a > 0$ et $b > 0$ on a :

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$$

Problème 4 — Lemme du tourniquet. Montrer que pour tout a, b et $c \in \mathbb{R}$ on a :

$$ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$$

et que s'il y a égalité alors les trois réels sont égaux.

solution du problème 1. Il s'agit de montrer que la différence est positive. Quelle est cette différence ? Peut-on l'écrire sous forme factorisée ? ■

solution du problème 3. Il s'agit de montrer que la différence est positive. Quelle est cette différence ? Peut-on l'écrire sous forme factorisée ? Pour la question b), choisir astucieusement x et y. ■

solution du problème 4. Multiplier par deux des deux côtés, tout regrouper, reconnaître des identités remarquables ■