Chapitre 13
Probabilités

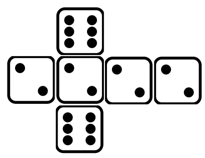
Une **expérience aléatoire** est une expérience **renouvelable à l'identique**, dont on connait les **issues**, et dont le résultat est **imprévisible**. Chaque renouvellement de l'expérience s'appelle **épreuve**.

contrairement à une expérience **déterministe** comme en Physique, où des conditions identiques conduisent à des résultats identiques –aux erreurs de mesure près

Définition 13.1 Pour une série de répétition d'une expérience aléatoire, la **fréquence relative** d'une issue est le rapport :

$$f_i = \frac{\text{nombre de réalisations de l'issue}}{\text{nombre total de répétitions}}$$

■ **Exemple 13.1 — polypad.org/cJZjxu66EX61A.** On lance 120 fois le dé cubique bleu d'Efron et on note le numéro obtenu. Cette expérience a 2 issues : 2 ou 6. On repète l'expérience N fois.



	issue	2	6	**Total**
fréquences	$N = 12$			12
	$N = 24$			24
	$N = 36$			
	$N = 120$			
	$N = 240$			

	2	6	**Total**
fréquences relatives			1
			1
			1
			1
			1

Table 13.1 – La fréquence relative se rapproche de $\frac{2}{3}$ pour un nombre de répétitions N assez grand.

Les résultats expérimentaux suggèrent l'existence d'une **loi du hasard** : les fréquences observées semblent se rapprocher de « valeurs idéales » qui ne sont pas liés à une expérience donnée.

Postulat 13.2 — La loi naïve des grands nombres. Lorsqu'une expérience aléatoire a un nombre fini d'issues possibles, chacune de ces issues possède une probabilité d'**apparaître**.
Quand on répète un grand nombre N de fois l'expérience, la proportion d'apparition de chaque résultat est voisine de sa probabilité :

$$\text{nombre d'observation de l'issue } \omega \approx P(\omega) \times N$$

Principe fondamental. Vous en verrez d'autres versions plus formalisées au lycée et au delà.

■ **Exemple 13.3** La probabilité d'obtenir un 2 pour le dé bleu d'Efron est $P(2) = \frac{2}{3}$. Avec $N = 300$ répetitions, on **estime** le nombre d'observation de l'issue 2 à environ $300 \times \frac{2}{3} \approx 200$.

13.1 Vocabulaire

Pour une expérience aléatoire à n issues possibles :

- une issue est notée ω, ou ω_1, $\omega_2, \ldots$.[1]
- l'univers Ω désigne l'ensemble des issues possibles

  $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \ldots; \omega_n\}$.

[1] à lire « oméga »

Définition 13.2 — Un événement. E est une partie de Ω.
Une issue ω **réalise** l'événement E signifie ω est dans E.

Définition 13.3 — L'événement contraire. de E se note $\overline{E}$.
Une issue ω réalise $\overline{E}$ si elle **n'est pas dans** E.

Définition 13.4 Un événement réduit à une seule issue est dit **élémentaire**.

Définition 13.5 L'univers Ω est un **événement certain** : toutes les issues ω appartiennent à Ω.

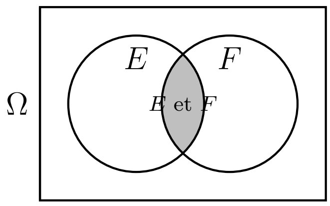
Définition 13.6 — L'ensemble vide. $\emptyset$ est l'**événement impossible** : si l'on choisit une issue ω il est impossible qu'elle appartienne à $\emptyset$.

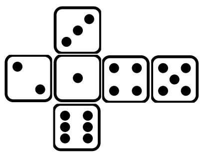
Définition 13.7 $\mathrm{Card}(E)$ est le **cardinal** (on dit aussi taille) d'un événement E. C'est le nombre d'issues qui réalisent E.

En particulier $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$

Définition 13.8 Deux événements E et F sont **incompatibles** si aucune issue ne les réalise en même temps :

$$\text{« } E \text{ et } F \text{ »} = \emptyset$$





■ **Exemple 13.4** Soit l'expérience aléatoire « lancer un dé cubique et noter le nombre obtenu ».

L'univers est $\Omega = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

L'événement $A =$« obtenir un nombre pair » $= \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

L'événement $\overline{\{4\}} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

L'événement $B =$« obtenir un nombre premier » $= \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

L'événement $C =$« obtenir un facteur de 36 » $= \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

$\overline{C} = \{\ldots\ldots\}$ est un événement ....

$D =$« obtenir un multiple de 9 » $= \ldots\ldots$ est un événement ....

$E =$ « obtenir cube » $= \ldots\ldots$ est un événement ....

« A et E » $=$....... Les événements E et A sont ....

« B et C » $=$....... Les événements B et C ne sont pas ....

13.2 Loi de probabilité

Définition 13.9 — définition constructive d'une loi de probabilité. Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

- on attribue à chaque issue ω une probabilité $p(\omega) \geqslant 0$
- la somme des probabilité des événements élémentaires vaut 1 : $p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_n) = 1$
- Pour tout événement E, la probabilité $P(E)$ est égale à la probabilité des issues qui le réalisent.
  En particulier $P(\Omega) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_n) = 1$.

■ **Exemple 13.5** Expérience aléatoire : lancer un dé cubique et noter le nombre obtenu.
$\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$. On choisi le modèle de probabilité :

issue ω_i	1	2	3	4	5	6	Total
$p(\omega_i)$	0	0,5	0,1	0,3	0,01	0,09	

$$P(\Omega) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) =$$

$A =$ « obtenir un nombre pair », $P(A) = p(2) + p(4) + p(6) =$
$B =$ « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 » ; $P(B) =$
$C =$ « obtenir un 7 » ; $P(C) =$
$\overline{A} =$ $P(\overline{A}) =$
$\overline{B} =$ $P(\overline{B}) =$

Convention lycée Dans tout exercice où figurent des expressions tel que « dés équilibrés », « tirage au hasard », « urnes opaque et jetons indiscernables au toucher »... le modèle choisi sera celui de l'équiprobabilité : tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Définition 13.10 — situation d'équiprobabilité. Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

a) $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_n) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$

b) Pour tout événement E on a $P(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$.

■ **Exemple 13.6** En supposant l'équiprobabilité l'exemple 13.5 donne :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) =$$
$$P(\Omega) =$$

$A =$ « obtenir un nombre pair », $P(A) =$
$B =$ « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 » ; $P(B) =$
$C =$ « obtenir un 7 » ; $P(C) =$
$\overline{A} =$ $P(\overline{A}) =$
$\overline{B} =$ $P(\overline{B}) =$

Théorème 13.7 — formulaire. Toute loi de probabilité sur un univers Ω vérifie les propriétés suivantes :

loi unitaire

(P1) $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$

loi positive

(P2) Pour tout événement A $\quad 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(P3) Pour tout événement A

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

loi additive

(P4) Si A et B sont des événements **incompatibles** alors :

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

R $P(A \text{ ou } B) \neq P(A) + P(B)$ dans le cas général.

13.3 Simuler une expérience aléatoire

Le travail de répétition d'une expérience aléatoire pour obtenir une fréquence empirique d'événements est fastidieux. On peut utiliser des scripts pour arriver à des résultats similaires à l'aide de `Scratch` ou d'un tableur (=ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) pour choisir un entier au hasard entre 1 et 6).

```
Quand [drapeau] est cliqué
mettre [compteur] à (0)
répéter (120) fois
    lancer dé bleu
    si <(valeur) = (2)> alors
        ajouter (1) à [compteur]
dire ((compteur) / (120))
```

```
définir [lancer dé bleu]
mettre [face de dé] à (nombre aléatoire entre (1) et (6))
si <(face de dé) < (5)> alors
    mettre [valeur] à (2)
sinon
    mettre [valeur] à (6)
```

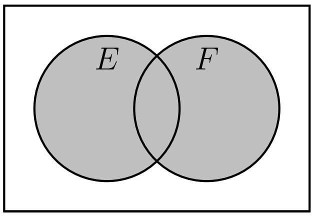
Figure 13.1 – l'instruction `lancer dé bleu` permet de simuler le résultat obtenu par le dé cubique bleu d'Efron. La probabilité que la variable (valeur) vaut 2 est de $\frac{4}{6}$. Le script principal détermine la fréquence de l'issue « obtenir 2 » pour une répétition de 120 épreuves. Lien : scratch.mit.edu/projects/834664253

13.4 Exercices : Probabilités

> Sauf indication contraire, un dé est supposé cubique avec des faces numérotées de 1 à 6

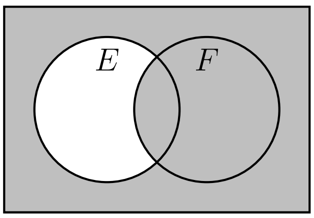
Exercice 1 Entourez la réponse qui convient :

1) L'affirmation incorrecte est :
   - A) Un événement élémentaire est réalisé par une unique issue de l'expérience aléatoire.
   - B) Un événement non élémentaire est un événement réalisé par plusieurs issues.
   - C) L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'univers.
   - D) La probabilité d'un événement peu être supérieure à 1 ou inférieure à 0.
2) On lance 2 dés simultanément. L'événement (   ) est un événement impossible :
   - A) La somme des nombres obtenus est 12.
   - B) La somme des nombres obtenus est inférieure à 3.
   - C) La somme des nombres obtenus est supérieure ou égale à 8.
   - D) La somme des nombres obtenus est 13.
3) On lance 3 dés simultanément. L'événement « les trois dés donnent 3 » est :
   A) événement peu probable B) événement très probable C) impossible D) certain
4) Une urne opaque contient 4 boules rouges, 3 blanches et 2 noires indiscernables au toucher. On tire 8 boules **sans remise**, l'événement « tirer des boules de chacune des 3 couleurs » est :
   A) possible B) probable C) impossible D) certain
5) On lance un jeton dix fois. L'événement « obtenir 10 fois face » est :
   A) possible B) probable C) impossible D) certain
6) Dans le diagramme de Venn, la partie grisée représente :
   - A) les issues qui réalisent l'événement E et l'événement F.
   - B) les issues qui réalisent l'événement E et pas l'événement F.
   - C) les issues qui réalisent l'événement F et pas l'événement E.
   - D) les issues qui réalisent l'événement E ou l'événement F.



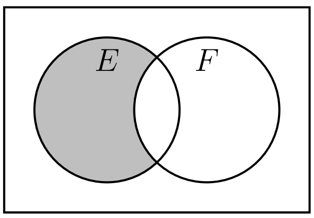
Ω

7) Dans le diagramme de Venn, la partie grisée représente :
   - A) les issues qui réalisent l'événement E et pas l'événement F.
   - B) les issues qui réalisent l'événement E ou pas l'événement F.
   - C) les issues qui réalisent l'événement F et pas l'événement F.
   - D) les issues qui réalisent l'événement F ou pas l'événement E.



Ω

8) Dans le diagramme de Venn, la partie grisée représente :
   - A) les issues qui réalisent l'événement E et pas l'événement F.
   - B) les issues qui réalisent l'événement E ou pas l'événement F.
   - C) les issues qui réalisent l'événement F et pas l'événement F.
   - D) les issues qui réalisent l'événement F ou pas l'événement E.



Ω

Exercice 2 Completez :

1) Un événement qui est certain de se réaliser est ....

2) Un événement qui est certain de ne pas se réaliser est ....

3) Un événement qui peut ou pas se produire est ....

4) Deux événements sont ....s'ils ne peuvent se réaliser simultanément.

5) Une urne opaque contient 7 boules rouges, 2 blanches et 1 noire indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard, l'événement « obtenir une boule rouge » est ....

6) Une urne opaque contient 5 boules rouges, 4 blanches indiscernables au toucher. On tire 6 boules au hasard sans remise, l'événement « obtenir des boules de chacune des couleurs rouge et blanche » est .

7) On lance un dé. L'événement « obtenir un 3 » est un événement ....

   Les événements « obtenir un nombre pair » et « obtenir un 3 » sont ....

8) On lance deux dés et on ajoute les nombres obtenus. L'événement « le total est 1 » est ....

Uniquement dans le cas d'issues équiprobables, la probabilité d'un événement A est :
$P(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues qui réalisent } A}{\text{nombre total d'issues}}$

Exercice 3

1) On tire au hasard une carte parmi :

6	7	8	8

   a) $P(\text{« choisir le 8 »}) =$ ....

   b) $P(\text{« choisir le 5 »}) =$ ....

   c) $P(\overline{\text{« choisir le 6 »}}) =$ ....

   d) $P(\text{« choisir un nombre pair »}) =$ ....

2) Vrai ou Faux ?

   a) « Un événement impossible a pour probabilité -1 » ....

   b) « Une probabilité peut être exprimée comme fraction, nombre décimal ou pourcentage ». ....

   c) « La probabilité d'un événement certain est 100 ». ....

   d) « On lance un jeton. La probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{2}$ » ....

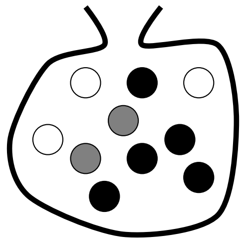
   e) « On lance un dé cubique. La probabilité d'obtenir 1 est $\frac{1}{6}$ » ....

   f) « On lance un dé cubique équilibré. La probabilité d'obtenir 2 est $\frac{2}{6}$ » ....

3) On lance un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20, complétez les probabilités :

A « obtenir 6 ». $P(A) =$........................	C « $\overline{\text{« obtenir 4}}$ ». $P(D) =$ ....
B « obtenir un nombre premier ». $P(B) =$......	D « obtenir un nombre inférieur à 6 ». $P(E) =$..

4) On tire un jeton au hasard de l'urne opaque ci-dessous.

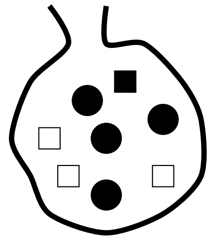


a) La probabilité de « le jeton choisit est .... » vaut 0.3

b) La probabilité de « le jeton choisit est blanc ou .... » vaut 50%

c) La probabilité de « le jeton choisit est blanc,gris ou noir » vaut ....

5) Un sac contenant des jetons est représenté ci-dessous. On choisit un jeton au hasard, déterminer les probabilités des événements suivants :



$P(\text{noir}) =$.........................	$P(\text{blanc ou rond}) =$ ....
$P(\text{noir et rond}) =$	$P(\text{carré et pas noir}) =$.............

6) Dans une assemblée il y a 28 femmes pour 52 hommes. On choisit une personne au hasard. La probabilité de « personne choisie est une femme » vaut ....

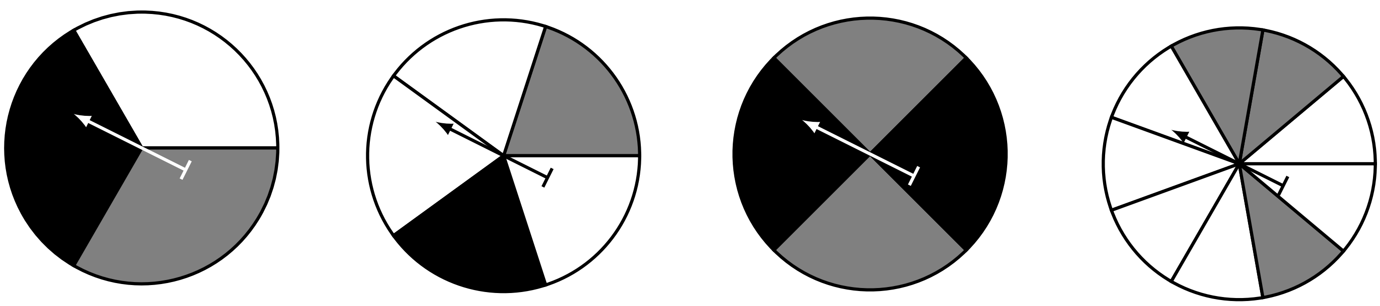
7) Dans un club de vacances, 26% des personnes font de l'équitation. On choisit une personne au hasard. La probabilité de l'événement contraire de « la personne choisie fait de l'équitation » vaut ....

8) Un sac contient 2 fois plus de jetons rouges que de jetons noirs. On tire un jeton au hasard. La probabilité de tirer un jeton rouge est ....

9) Un sac contient 10 fois plus de jetons rouges que de jetons noirs. On tire un jeton au hasard. La probabilité de tirer un jeton noir est ....

10) Un sac contient des jetons rouges et noirs dans le ratio 3: 4. On tire un jeton au hasar. La probabilité de tirer un jeton rouge est ....

11) On fait tourner une aiguille, elle pointe au hasard sur un des secteurs.



$P(\text{blanc}) =$ $P(\text{blanc}) =$ $P(\text{blanc}) =$ $P(\text{blanc}) =$

Exercice 4

On lance un dé cubique pipé. Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de cette expérience.
Calculer la probabilités des événements : (écrire $P(..) = ...$)

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	$\frac{4}{33}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{3}{33}$	$\frac{7}{33}$

$A =$ « le résultat est pair » $P(A) = \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B =$ « le résultat est au plus égal à 3 » $P(B) = \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$C =$ « le résultat est premier » $P(C) = \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D =$ « A ou B » $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$E =$ « B et C » $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$F =$ « $\overline{A}$ » $P(F) = 1 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 5

La loi de probabilité ci-contre décrit le gain possible à une loterie. Le montant de la participation est 50 €.
Calculer la probabilités des événements : (écrire $P(..) = ...$)

ω	0	5	10	100	500
$P(\omega)$	$\frac{20}{65}$	$\frac{17}{65}$	$\frac{16}{65}$	$\frac{8}{65}$	$\frac{4}{65}$

$A =$ « le joueur remporte de l'argent » $P(A) = \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$B =$ « le joueur a gagné au plus 10 euros » $P(B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$C =$ « le joueur n'a pas remporté 500€ » $P(C) = 1 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$D =$ « le joueur a remporté plus que sa participation » $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 6

On lance un dé cubique pipé. Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de cette expérience.
Déterminer $P(6)$.

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	$\frac{2}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{9}{30}$	?

Exercice 7

On lance un dé cubique pipé. Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de cette expérience.
Donner une équation vérifiée par a et la résoudre.

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	a	$\frac{1}{36}$	$2a$	$\frac{9}{36}$

Exercice 8

On lance un dé cubique pipé. Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de cette expérience.
Déterminer a puis la probabilité d'obtenir un nombre pair.

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	$\frac{9}{32}$	$3a$	$\frac{1}{32}$	$2a$	$3a$	$3a$

Exercice 9

Soit un dé cubique équilibré dont trois faces sont bleues, deux sont blanches et une est rouge. On lance le dé et on note la couleur obtenue.

1) Les trois couleurs sont-elles équiprobables?
2) Déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur. Écrire $P(\ldots) = \ldots$ ou je vous khôlle.

Exercice 10

La répartition des participants à une compétition est décrite dans le tableau croisé des effectifs ci-contre.

	Hommes	Femmes	**Total**
Le péage	29	78	
Salaise	17	34	
Total			

On choisit au hasard une personne de ce groupe.

1) Quelles sont les issues de cette expérience aléatoire. Sont-elles équiprobables ?
2) Complétez le tableau croisé des effectifs.
3) On note A l'événement « la personne choisie est un homme ». Calculer $P(A)$.
4) Décrire par une phrase l'événement $\overline{A}$ et donner sa probabilité $P(\overline{A})$
5) On note B l'événement « la personne choisie est originaire de Salaise ». Calculer $P(\overline{A}$ et $B)$.
6) Donner deux événements incompatibles.

Exercice 11

Dans une classe de 32 élèves, la repartition des élèves selon leur sexe et la langue LVB est décrite dans le tableau croisé des effectifs ci-contre.

	Filles	Garçons	**Total**
espagnol	6		26
pas espagnol	5		
Total			32

On choisit au hasard un élève de cette classe.

1) Quelles sont les issues de cette expérience aléatoire. Sont-elles équiprobables ?
2) Complétez le tableau puis déterminer les probabilités :

$A =$ « élève choisit est un garçon » $P(A) =$ . . . .

$B =$ « élève choisit est une fille n'apprenant pas l'espagnol » $P(B) =$ . . . .

$C =$ « élève choisit est un garçon ou apprend l'espagnol » $P(C) =$ . . . .

$D =$ « élève choisit n'est ni un garçon ni apprend l'espagnol » $P(D) =$ . . . .

Exercice 12

Il y a 11 garçons et 15 filles dans une classe de CE1, et 13 garçons et 10 filles dans la classe de CE2. On considère l'expérience aléatoire « choisir un élève au hasard parmi les élèves ».
Soit les événements $A =$« l'élève choisi est une fille » et $B =$ « l'élève choisi est en CE2 ».

	A	$\overline{A}$	**Total**
B			
$\overline{B}$			
Total			

1) Compléter le tableau double entrée par les effectifs correspondants.
2) Décrire les événements suivants par une courte phrase puis déterminer leur probabilité.

$P(A) =$ . . . . $P(B) =$ . . . .

$\overline{A}=$ . . . . $P(\overline{A}) =$

A et $\overline{B} =$ . . . . $P(A$ et $\overline{B}) =$

$\overline{A \text{ et } B} =$ . . . . $P(\overline{A \text{ et } B}) =$

A ou $B =$ . . . . $P(A$ ou $B) =$

$\overline{A}$ ou $\overline{B} =$ . . . . $P(\overline{A}$ ou $\overline{B}) =$

■ Exemple 13.8 — modélisation par tableau double entrée d'une expérience à 2 épreuves.

On lance un dé tétraédrique (d4) et un dé cubique (d6) et on note les valeurs des faces supérieures. On suppose que les dés sont équilibrés. Donner les probabilités des événements suivants :

$A =$ « le d6 est strictement plus grand que le d4 » ....

$B =$ « le d6 est égal au double du d4 » ....

$C =$ « la somme des dés est égale à 1 » ....

$D =$ « la somme des dés est égale à 10 » ....

$E =$ « la somme des dés est égale à 6 » ....

$F =$ « le produit des dés est 12 » ....

		Dé n° 2			
		1	2	3	4
Dé n° 1	1				
	2				
	3				
	4				
	5				
	6				

Exercice 13

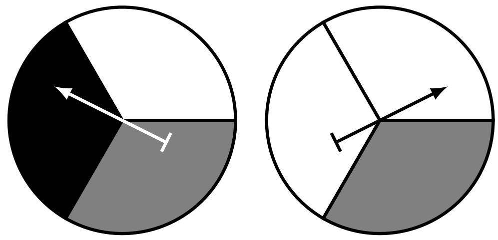
On lance un jeton et un dé cubique équilibrés.
Compléter le diagramme de l'univers des issues possibles et déterminer :
$P($« obtenir face ou un diviseur de 12 »$) = \ldots$

		issues équiprobables du dé					
		1					
issues équiprobables de la pièce	Pile	P1					

Exercice 14 On fait tourner deux aiguilles et on note le couple de couleurs obtenues.On suppose que les aiguilles s'arrêtent au hasard sur les secteurs de même taille.

1) Complète le diagramme de l'univers de cette expérience :

		issues équiprobables aiguille n° 2		
		Blanc		
issues équiprobables aiguille n° 1	Noir	(N ; B)		

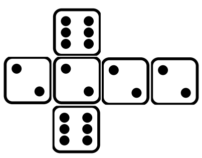


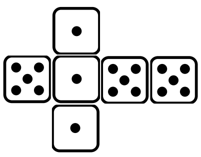
Aiguille n° 1 **Aiguille n° 2**

2) $P($« obtenir deux couleurs identiques »$) =$ ....

3) $P($« obtenir deux couleurs différentes »$) =$ ....

Exercice 15 — bataille de dés. Bashir et Vash s'affrontent dans une bataille de dés, le vanqueur est celui qui obtient le plus grand nombre. Utiliser le diagramme pour déterminer la probabilité que Bashir batte Vash.

Bashir utilise le dé bleu d'Efron  .

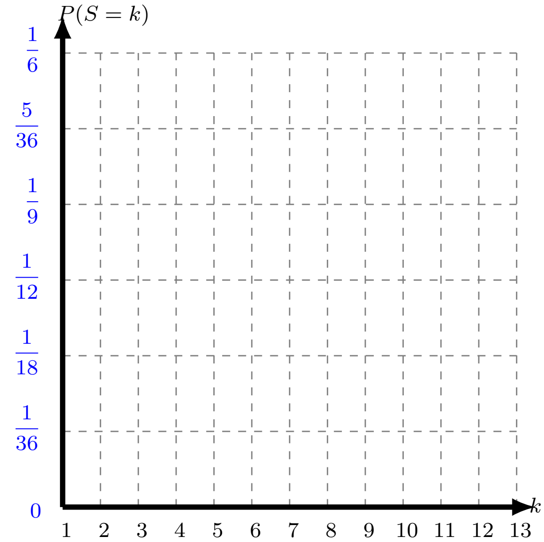
Vash utilse le dé vert d'Efron  .

		Dé					
Dé							

Exercice 16 — somme de deux dés. On lance simultanément un dé Noir et un dé Bleu (cubiques) et on note la somme S des deux nombres obtenus. On cherche la loi de probabilité des sommes possibles.

1) Complète le tableau à double entrée ci-dessous avec les sommes obtenues.

		Dé n° 2					
		1	2	3	4	5	6
Dé n° 1	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						



2) Sachant que les deux dés sont équilibrés, en déduire les probabilités des sommes possibles

k	2											Total
$P(S=k)$												

3) Représenter dans le graphique ci-dessus la loi de probabilité de la somme.

4) Déterminer les probabilités des événements suivants (ÉCRIRE CLAIREMENT $P(\ldots) = \ldots$):

$A =$ « somme égale à 4 » ....

$B =$ « somme égale à 12 ....

$C =$ « somme supérieure ou égale à 7 » ....

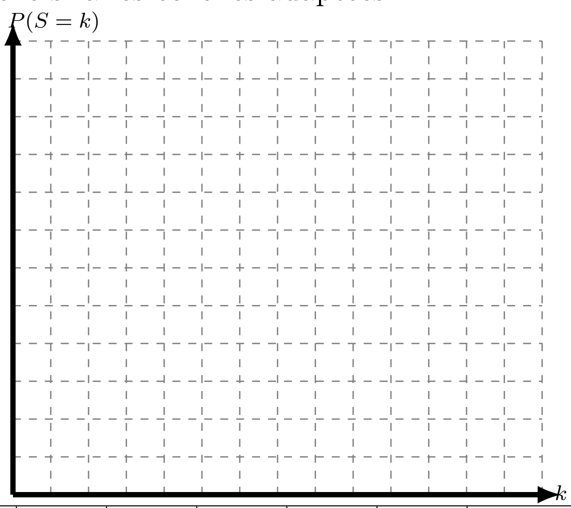
$D =$ « somme strictement inférieure à 4 » ......

$E =$ « somme paire » ....

$F =$ « somme égale à 7 et produit égal à 12 » ..

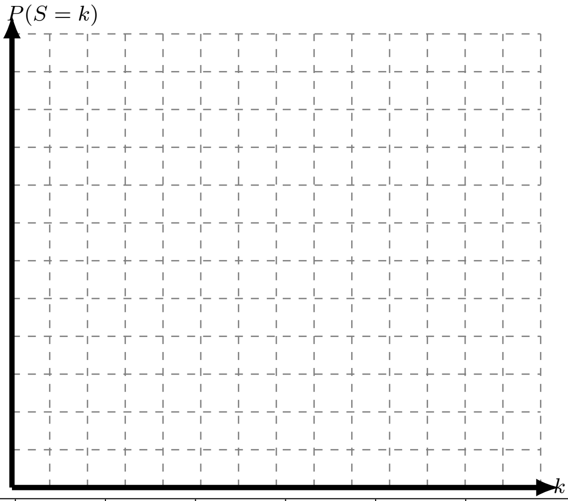
Exercice 17 On lance les deux dés distribuées. Déterminer et représenter les probabilités des sommes possibles. On supposera que les dés sont équilibrés, et on choisira les échelles adaptées.

		Dé n° 2					
Dé n° 1							



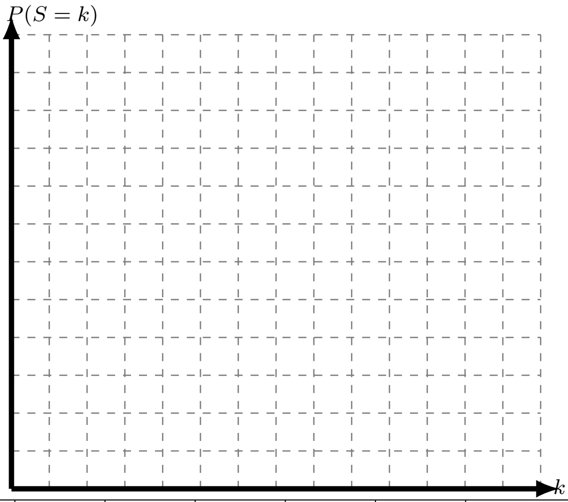
k													Total
$P(S=k)$													

		Dé n° 2					
Dé n° 1							



k													Total
$P(S=k)$													

		Dé n° 2					
Dé n° 1							



k													Total
$P(S=k)$													

Exercice 18 — 3 dés non transitifs. Deux joueurs s'affrontent dans une bataille de dés. Le joueur A choisit en premier un dé, le joueur B choisit un dé parmi ceux restants. Le vainqueur de la manche est celui qui obtient le plus grand nombre.

1) À l'aide d'un diagramme double entrée, déterminer pour chaque combinaison de dés celui qui a le plus de chance de gagner : le dé vert : . . . . le dé bleu : . . . . le dé rouge : . . . .

		Dé					
Dé							

		Dé					
Dé							

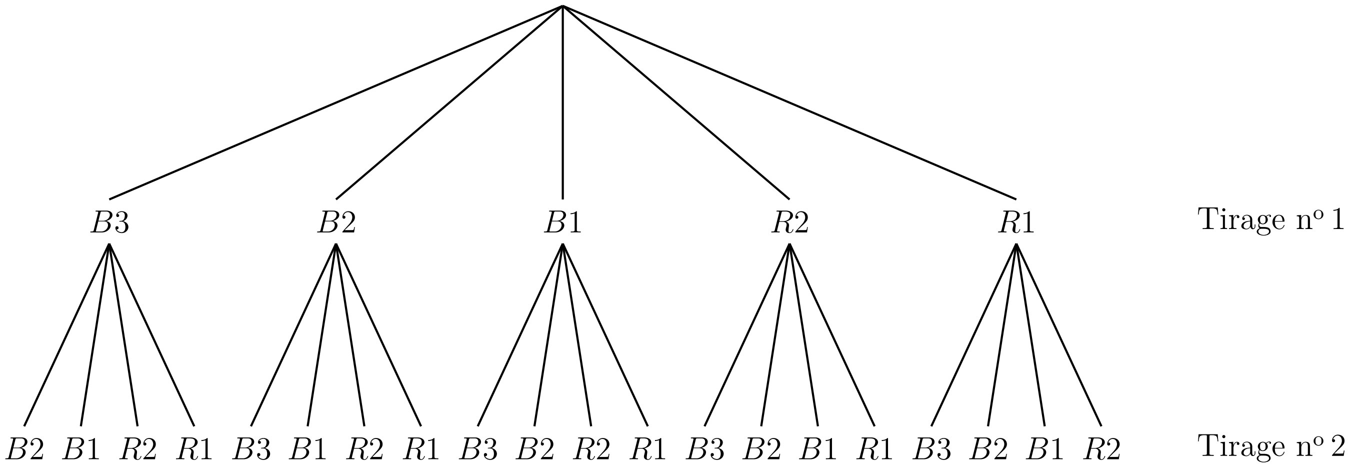
		Dé					
Dé							

2) Quelle est la stratégie gagnante à adopter par le joueur qui choisit en dernier ?

■ Exemple 13.9 — Modéliser à l'aide d'un arbre de probabilité.

Une boite opaque contient 2 rubans rouges et 3 rubans bleus. On tire au hasard 1 premier ruban de la boite sans regarder (et sans le remettre), puis un second, et on note les couleurs de chaque.
On compte 4 issues possibles (non équiprobbles ! il y a plus de rubans bleus que de rouges !)

- $BB =$ « tirer deux rubans bleus »
- $RR =$ « tirer deux rubans rouges »
- $BR =$ « tirer un ruban bleu puis un ruban rouge »
- $RB =$ « tirer un ruban rouge puis un ruban bleu »



- L'expérience aléatoire est constituée de 2 expériences aléatoires élémentaires (1^{er} tirage ...).
- Chaque niveau correspond à une expérience aléatoire élémentaire.
- Les bifurcations à chaque niveau correspondent aux issues possibles d'une l'expérience élémentaire.
- Chaque chemin le long de l'arbre correspond à une issue. Le chemin $R1B3$ correspond à l'issue « $R1$ au tirage n° 1 PUIS $B3$ au tirage n° 2 ».
- Les chemins différents sont des issues incompatibles.
- Les issues sont **équiprobables si le nombre de bifurcations à chaque niveau est le même pour tous les noeuds**. Ici $\frac{1}{20}$.

$P(RR) = P(R1R2) + P(R2R1) = \dfrac{2}{20}$,

$P(BR) = P(\{R1B1, R2B1, R1B2, R2B2, R1B3, R2B3\}) = \dfrac{6}{20}$.

$P(RB) =$ ....

$P(BB) =$ ....

P(un ruban rouge est tiré au premier tirage) = ...

P(un ruban rouge est tiré au second tirage) = ...

Exercice 19 On reprend l'exercice précédent avec une boite opaque contenant 2 rubans rouges, 3 rubans bleus, mais cette fois on remmet dans la boite le premier ruban tiré.

1) Comment est modifié l'arbre précédent ? Rajouter en rouge les branches supplémentaires.

2) Déduire la nouvelle valeur de $P(RR) =$ ....

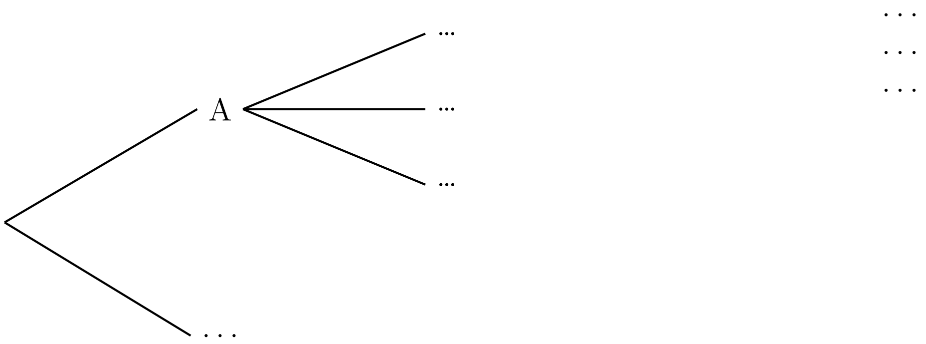
3) Quelle est la probabilité de tirer aucun ruban rouge ? ....

4) P(un ruban rouge est tiré au second tirage) = ...

Exercice 20 — le menu. Au restaurant scolaire le menu se compose forcement d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Les élèves doivent choisir une entrée parmi Artichaut (A) ou Betterave (B), puis choisir un plat parmi Cheval (C), Daube (D) ou Escalope (E) et choisir un dessert parmi Fromage (F) ou Gâteau (G).

1) Compléter l'arbre et identifier tous menus possibles.

1er choix   2^{e} choix   3^{e} choix   Menus possibles



2) On choisit un menu au hasard. Déterminez les probabilités :

a) qu'il comporte une escalope ?

b) qu'il ne comporte pas de cheval ?

c) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?

d) qu'il comporte de l'artichaut ou du fromage ?

Exercice 21 — Garçons ou filles ?. On s'intérèsse aux familles de trois enfants, sans jumeaux, et en ne tenant compte que du sexe des enfants. On suppose qu'à chacune des 3 naissances, les issues $F =$ « l'enfant est une fille » ou $G =$ « l'enfant est un garçon » sont équiprobables.

1) Complétez l'arbre des probabilités correspondant à la situation décrite (famille de 3 enfants) et donner les issues possibles.

2) Déterminer, sans justifier, la probabilité de chacun des évènements suivants :

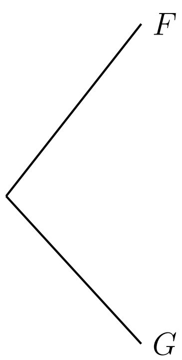
A : « la famille n'a aucune fille ».

B : « la famille a exactement deux filles ».

C : « la famille a au moins deux filles ».

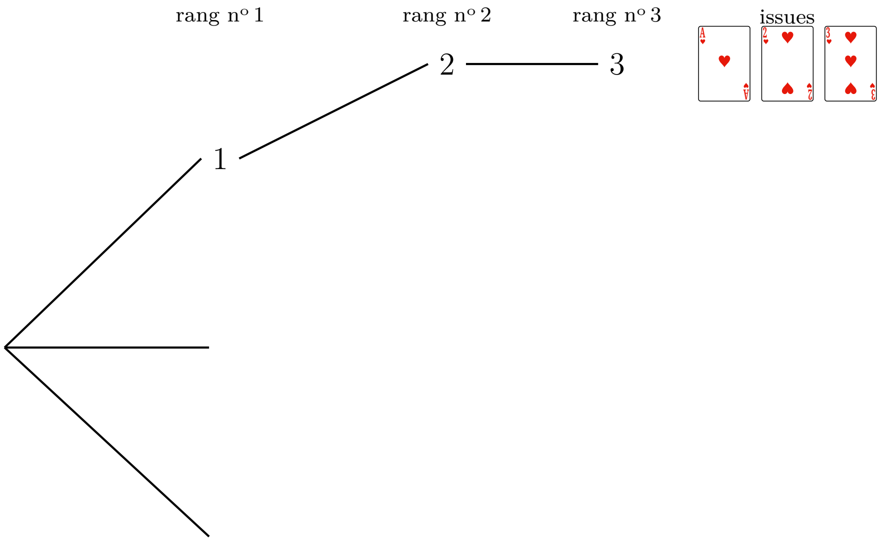
D : « la famille a une fille unique ».

Enfant n° 1   Enfant n° 2   Enfant n° 3   Issues



Exercice 22 On tire au hasard successivement 3 cartes numérotées de 1 à 3 et on note les valeurs des cartes dans l'ordre d'apparition.

1) Compléter l'arbre et identifier tous les ordres de tirages possibles.



2) Déterminer, sans justifier, la probabilité de chacun des évènements suivants :

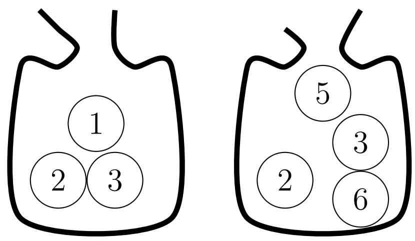
   A : « le rang de chaque carte est égal à sa valeur » ....

   B : « exactement deux cartes ont leur rang égal à leur valeur » ....

   C : « au moins 1 carte a son rang égal à sa valeur » ....

   D : « aucune des cartes n'a son rang égal à sa valeur » ....

Exercice 23 — Brevet. Juin 2018 - Amérique du Nord . Deux urnes contiennet des boules numérotées indiscernables au toucher. Le schéma ci-contre représente le contenu de chacune des urnes.



On forme un nombre entier à deux chiffres en tirant au hasard une boule dans chaque urne :

- Le chiffre des dizaine est le numéro de la boule issue de l'urne D
- Le chiffre des unités est le numéro de la boule issue de l'urne U.

Exemple : en tirant la boule 1 de l'urne D et ensuite la boule 5 de l'urne U, on forme le nombre 15.

1) À l'aide d'arbre ou d'un tableau à double entrée identifier les issues possibles
2) A-t-on plus de chance de former un nombre pair que de former un nombre impair ?
3) Quelle est la probabilité de tirer un nombre premier ?
4) Donner un événement de probabilité égale à $\frac{1}{3}$

Exercice 24 Une urne opaque contient des boules indiscernables au toucher. On compte 2 boules rouges, 1 jaune et un nombre x de vertes.

1) Sachant que la probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{1}{2}$, donner x.
2) On effectue deux tirages successifs et sans remise de 2 boules. Déterminer à l'aide d'un arbre la probabilité d'obtenir deux rouges.

Exercice 25 — Brevet. Juin 2018. Centres étrangers. Thomas possède une montre qu'il compose en assemblant des cadrans et des bracelets de plusieurs couleurs. Pour cela, Il dispose de :

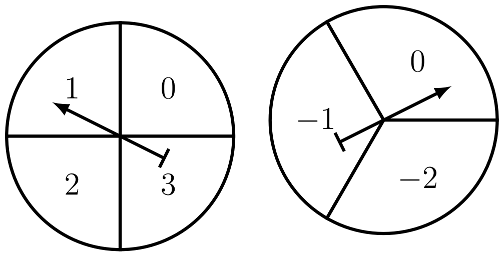
- deux cadrans: un rouge et un jaune ;
- quatre bracelets: un rouge, un jaune, un vert et un noir.

Il choisit au hasard un cadran et un bracelet pour composer sa montre.

1) Combien y a-t-il d'assemblages possibles ?
2) Déterminer la probabilité d'obtenir une montre toute rouge.
3) Déterminer la probabilité d'obtenir une montre d'une seule couleur.
4) Déterminer la probabilité d'avoir une montre de deux couleurs.

Exercice 26 — jeux équitables.

Deux joueurs A et B font tourner deux aiguilles 1 et 2 sur les roues respectivement partagées en 4 et 3 secteurs égaux. Si la somme des deux valeurs obtenues vaut 0 alors le joueur A gagne, sinon c'est le joueur B qui est déclaré vainqueur. Le jeu est dit équitable si chacun des joueurs a la même probabilité de gagner. À l'aide d'un arbre ou d'un tableau double entrée, déterminer si le jeu est équitable.

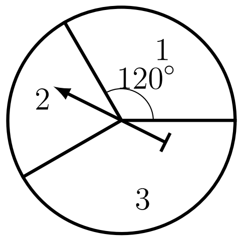


Aiguille n° 1 **Aiguille n° 2**

Exercice 27

On lance un jeton équilibré 4 fois de suite et on note les faces obtenues dans l'ordre. Déterminer à l'aide d'un arbre la probabilité de l'événement « la plus longue chaine de piles successifs ou de faces successives est égale à 2 ».

Exercice 28 On fait tourner une auiguille sur une roue partagée en 3 secteurs non égaux.



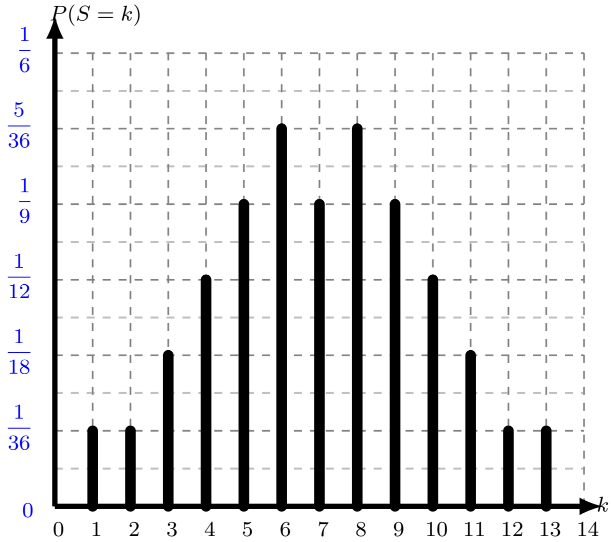
1) Déterminer la probabilité que l'aiguille pointe sur le secteur 1.
2) On repéte l'expérience 216 fois. Estimer le nombre de fois ou l'aiguille pointe sur le secteur 1.
3) En répétant l'expérience 650 fois, l'aiguille s'arrête 278 fois sur le secteur 3. Donner une estimation de la probabilité de l'événement « aiguille pointe sur le secteur 3 ».
4) En déduire une estimation en degré de l'angle au centre du secteur 3.

Exercice 29

éléments de réponse de l'exercice 17.

Bleu et Noir

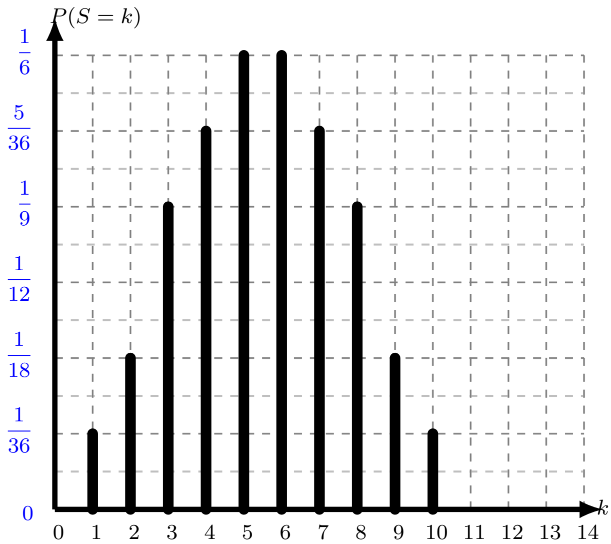
	Dé Bleu					
Dé Noir	0	2	3	4	5	7
1	1	3	4	5	6	8
2	2	4	5	6	7	9
3	3	5	6	7	8	10
4	4	6	7	8	9	11
5	5	7	8	9	10	12
6	6	8	9	10	11	13



k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$P(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36}=1$

Rouge et Noir

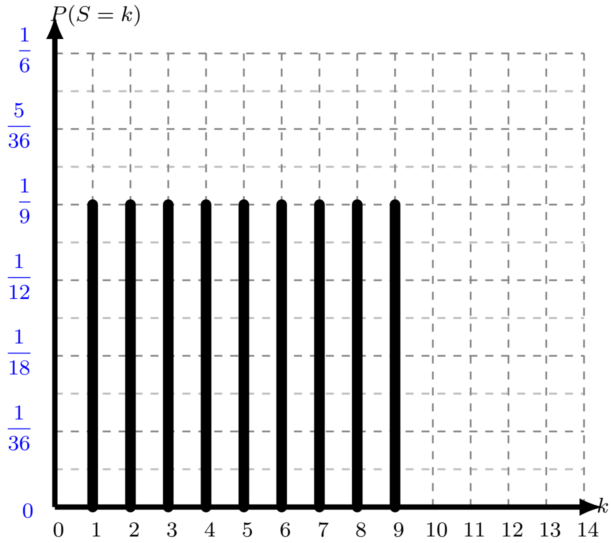
	Dé Rouge					
Dé Noir	0	1	2	2	3	4
1	1	2	3	3	4	5
2	2	3	4	4	5	6
3	3	4	5	5	6	7
4	4	5	6	6	7	8
5	5	6	7	7	8	9
6	6	7	8	8	9	10



k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$P(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$				$\frac{36}{36}=1$

Rouge et Bleu

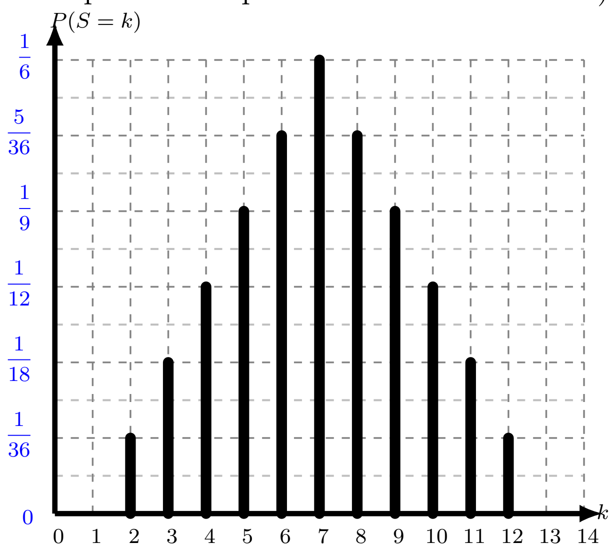
		Dé Bleu					
		1	2	3			
Dé Red	0	1	2	3			
	3	4	5	6			
	6	7	8	9			



k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$P(S=k)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$					$\frac{36}{36}=1$

d3 standard et d12 non standard (même graphique et loi de probabilité pour les dés de Sicherman)

		Dé d12											
		1	2	3	4	4	5	5	6	6	7	8	9
Dé d3	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	9	10
	2	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	10	11
	3	4	5	6	7	7	8	8	9	9	10	11	12



k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$P(S=k)$		$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$		$\frac{36}{36}=1$

■