Chapitre 9
Fonctions affines

Table 9.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 9...

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître.../savoir faire...**	🪨	💎	💍
Taux de variation de x_1 à x_2 pour une fonction quelconque			
déterminer algébriquement le taux de variation	1		
déterminer à partir de la représentation la pente d'un segment ou le taux de variation	2, 3,		
interpréter le taux de variation	4, 5		
Notion de fonction affine			
exploiter algébriquement et graphiquement l'expression réduite d'une fonction affine $f(x) = mx + c$.	12, 6, 7,	8 à 13	
représenter et déterminer par lecture graphique l'expression d'une fonction affine $f(x) = mx+c$ et l'équation réduite de sa droite représentatives $\mathscr{D}\colon y = mx + c$ dans le cas $c \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Q}$	16, 17,	15, 18, 19	
Propriétés et applications			
déterminer algébriquement le taux de variation d'une fonction affine ou affine par morceaux	20,	21, 22	
déterminer algébriquement l'expression réduite d'une fonction affine	14	23,	
déterminer et exploiter l'expression réduite d'une fonction		24 à 27	
construire un tableau de signe		28, 29	

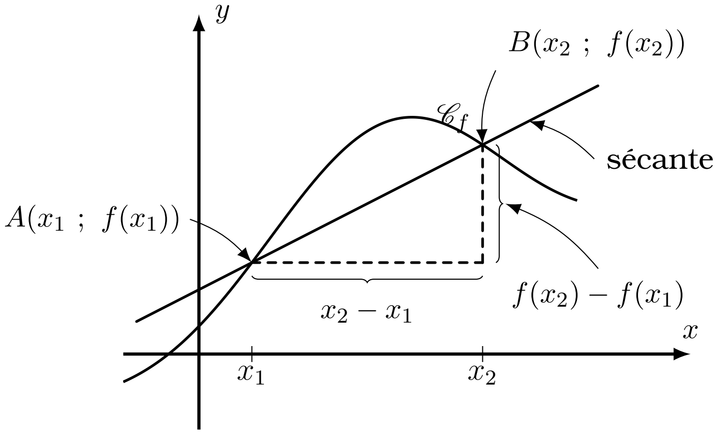
9.1 Préliminaire : taux de variation moyen

Définition 9.1 $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Pour $A(x_1\ ;\ f(x_1))$ et $B(x_2\ ;\ f(x_2)) \in \mathscr{C}_f$ ($x_1 \neq x_2$), La droite (AB) est dite sécante à $\mathscr{C}_f$.

Le *taux de variation* de f de x_1 à x_2, et la *pente de la sécante* (AB) sont donnés par :

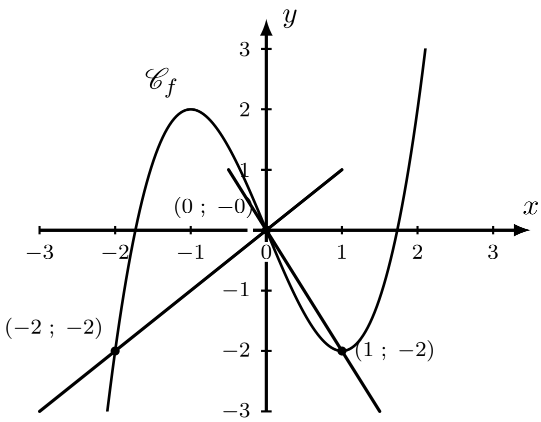
$$m_{AB} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



■ **Exemple 9.1** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$. Déterminer algébriquement :

(i) Le taux de variation de $x_1 = -2$ à $x_2 = 0$ (ii) Le taux de variation de $x_1 = -$ à $x_2 = 1$.

solution.



(i) Le taux de variation de $x_1 = -2$ à $x_2 = 0$ est :

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{(0^3 - 3(0)) - ((-2)^3 - 3(-2))}{0 - (-2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

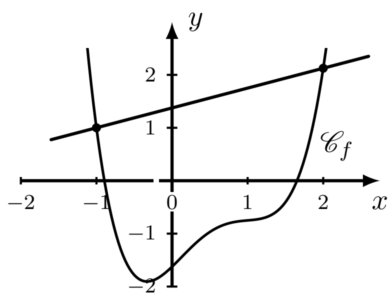
(ii) Le taux de variation de $x_1 = 0$ à $x_2 = 1$ est :

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(1) - f(0)}{1 - (0)} = \frac{(1^3 - 3(1)) - (0^3 - 3(0))}{1 - 0} \\ &= -2 \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 9.2**

Déterminer graphiquement le taux de varition de f de -1 à 2.



solution.

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

9.2 Définition algébrique des fonctions affines

Définition 9.2 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est *affine* s'il existe m et $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = mx + c$$

« mx » est le *terme linéaire* et « c » est le *terme constant*. En particulier :

— Si $m \neq 0$ et $c = 0$, la fonction est dite *affine et linéaire* non nulle : $f(x) = mx$.

— Si $m = 0$ et $c \neq 0$, la fonction est dite *affine et constante* non nulle : $f(x) = p$.

— Si $m = 0$ et $c = 0$, la fonction est dite *fonction nulle* (affine, linéaire et constante).

Corollaire 9.1 Le terme constant c est l'image de 0 par f : $f(0) = c$

Proposition 9.2 Pour une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + c$:

$$\text{Pour tout } x_1 \text{ et } x_2 \in \mathbb{R} \text{ on a} \qquad f(x_1) - f(x_2) = m(x_1 - x_2)$$

$$\underbrace{y_1 - y_2}_{\Delta y} = m\underbrace{(x_1 - x_2)}_{\Delta x}$$

Les variations (écarts) de l'image Δy sont proportionnelles aux variations de l'antécédent Δx.

Corollaire 9.3 Pour une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + c$:

$$\text{Pour tout } x_1 \neq x_2 : \qquad m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Le coefficient m du terme linéaire est *le taux de variation* de la fonction f.

R Si f est affine, *quels que soient* les abscisses x_1 et x_2, le taux de variation de x_1 à x_2 vaut m.

Corollaire 9.4 Pour une fonction affine f de taux de variation m :

(i) Si $m > 0$ alors f est *strictement croissante*

(ii) Si $m < 0$ alors f est *strictement décroissante*

On peut dire que m est *le taux d'accroissement* de f.

Démonstration.

■

9.3 Représentations graphiques de fonctions affines

Théorème 9.5 — admis. La *droite non verticale* $\mathscr{D}_f : y = mx + c$ est la représentation graphique de la fonction affine f de taux de variation m et de terme constant c.

— « $y = mx + c$ » est *l'équation réduite* de $\mathscr{C}_f$.

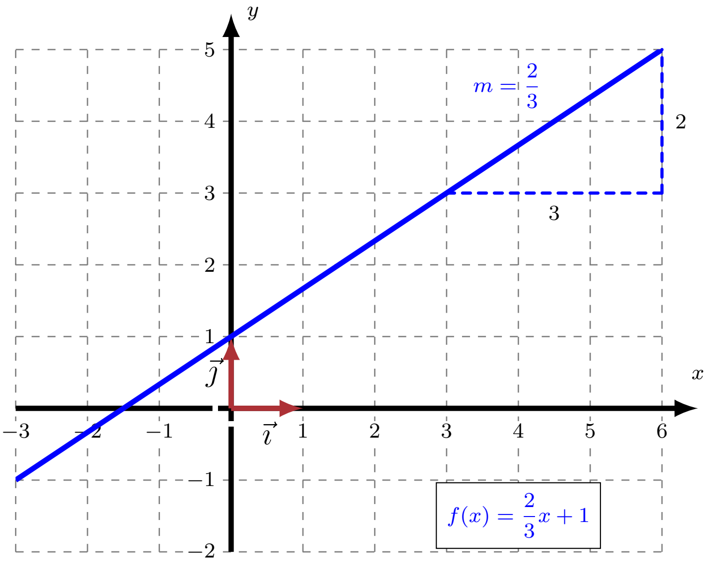
— m est *la pente* de D_f : c'est la pente de tout segment $[AB]$ avec $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B) \in \mathscr{D}_f$:

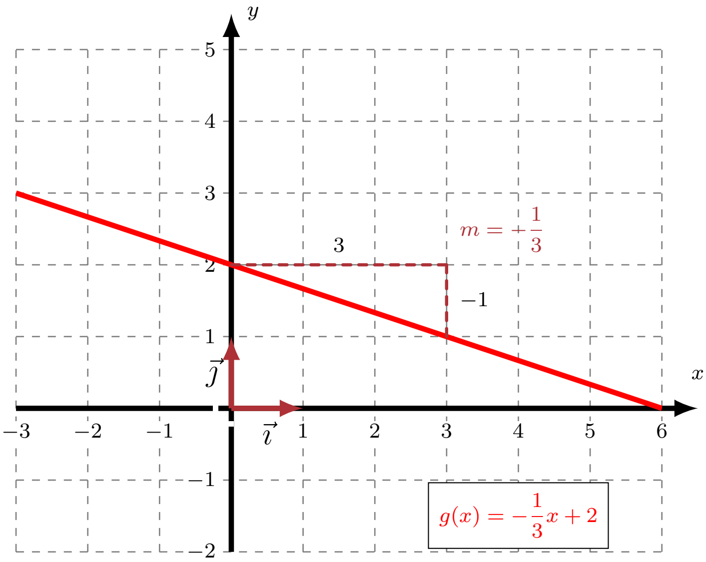
$$m = \frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \qquad x_A \neq x_B$$

— c est l'ordonnée à l'origine de $\mathscr{D}_f$: $P(0\ ;\ c) \in \mathscr{D}_f$.

R Dans la formule de la pente, ou du taux de variation, l'ordre des soustraction est important :

$$\underbrace{m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}_{\text{correct}} \quad \text{où} \quad \underbrace{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}_{\text{correct}} \quad \text{mais} \quad \underbrace{\cancel{m = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B}}}_{\text{incorrect}} \quad \text{ni} \quad \underbrace{\cancel{m = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}}}_{\text{incorrect}}$$





x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	0	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{2}{3}x + 1$	↗	0	1	↗
signe de f	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$	0	6	$+\infty$
$g(x) = -\dfrac{1}{3}x + 2$	↘	2	0	↘
signe de g	$+$		0	$-$

Figure 9.1 – $c = f(0)$ est l'image de 0 ou encore l'ordonnée à l'origine.
m est le taux d'accroissement de la fonction affine f. Il permet de déterminer le sens de variation de la fonction f.
Graphiquement, m est la pente de la droite non verticale représentant f. C'est le rapport de l'augmentation verticale sur l'augmentation horizontale.

R Dans le cas particulier d'une fonction linéaire, $y = f(x) = mx$, on peut aussi affirmer que l'image y qui est proportionnelle à l'abscisse x, et $m = \dfrac{y}{x}$ pour $x \neq 0$. La représentation graphique passe par l'origine $O(0\ ;\ 0)$ du repère.

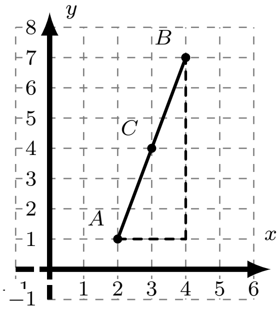
9.4 Exercices

Exercice 1 — taux de variation.

Déterminer pour chaque fonction donnée par son expression, le taux de variation de x_1 à x_2.

1. $f(x) = -2x + 15$, avec $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$
2. $f(x) = 3x + 8$, avec $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$
3. $f(x) = x^2 + 12x - 4$, avec $x_1 = 1$ et $x_2 = 5$
4. $f(x) = x^2 - 2x + 8$, avec $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$
5. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x$, avec $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$
6. $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x$, avec $x_1 = -1$ et $x_2 = 6$
7. $f(x) = 5 - \sqrt{x-2}$, avec $x_1 = 3$ et $x_2 = 11$
8. $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$, avec $x_1 = 3$ et $x_2 = 8$

■ **Exemple 9.3 — déterminer graphiquement la pente d'un segment ou d'une droite.**



La pente de la droite (AB) est donnée par

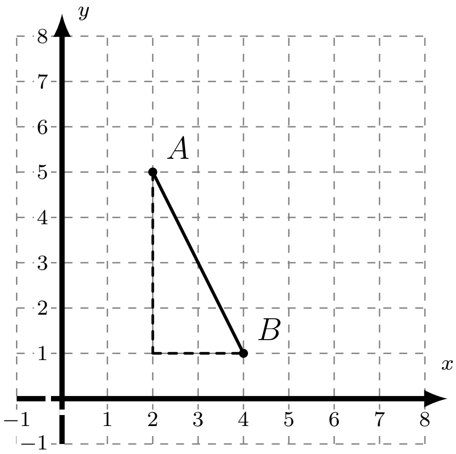
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-1}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

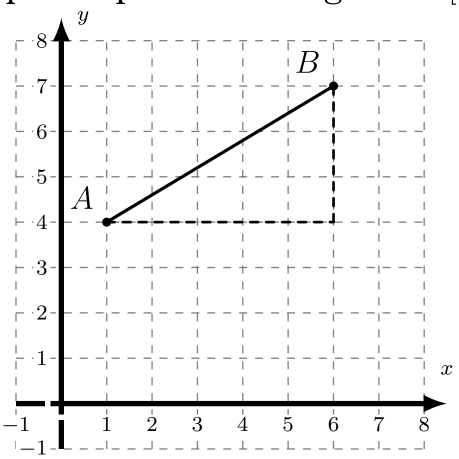
On peut aussi utiliser les points A et C :

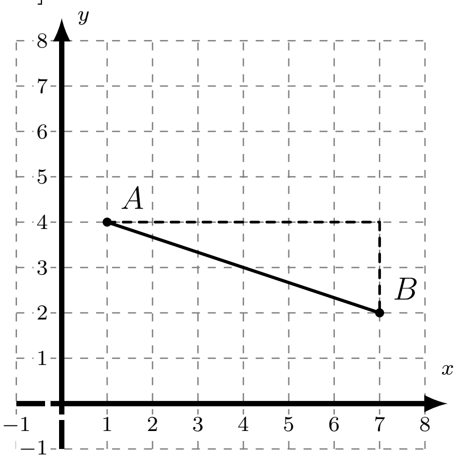
$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4-1}{3-2} = 3$$

Exercice 2

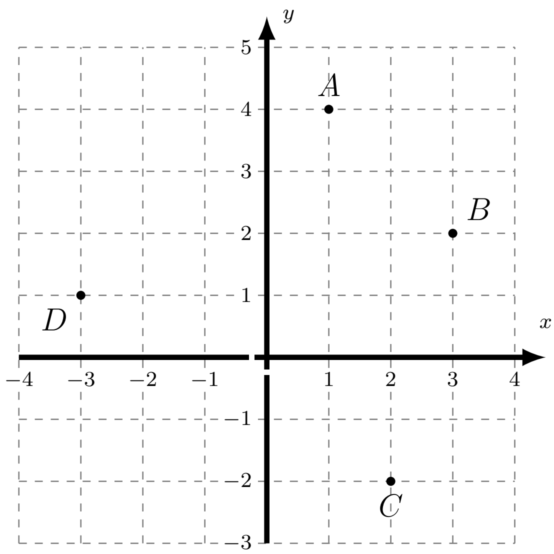
Déterminer par lecture graphique les pentes des segments $[AB]$ ci-dessous.







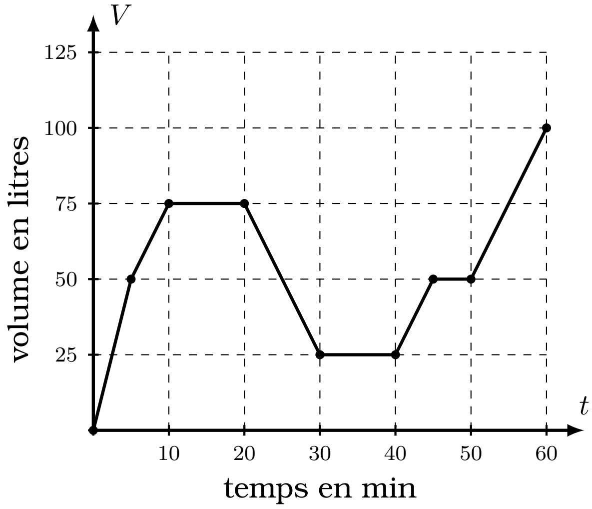
Exercice 3



1. Déterminer les pentes des segments :
   a) $[AB]$ b) $[DB]$ c) $[BC]$
   d) $[AC]$ e) $[DC]$ f) $[AD]$
2. Tracer les droites suivantes :
   a) droite passant par A de pente 3
   b) droite passant par B de pente $\frac{5}{3}$
   c) droite passant par C de pente -1
   d) droite passant par D de pente $-\frac{1}{3}$

Exercice 4

Le graphe ci-contre représente le volume d'eau dans une citerne de récupération en fonction du temps.

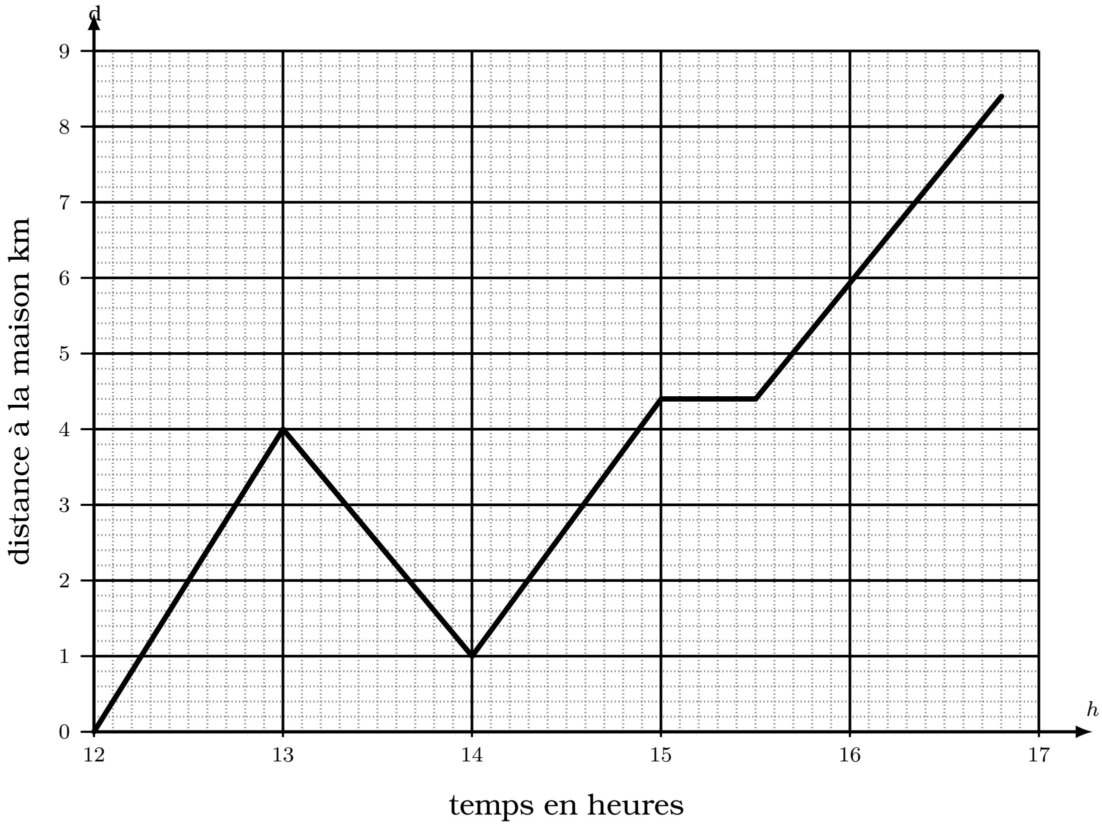


1. Déterminer le taux de variation du volume de 10 min à 20 min. Interprétez le résultat.
2. Déterminer les taux de variation :
   a) de 0 min à 5 min b) de 5 min à 10 min
   c) de 40 min à 45 min d) de 50 min à 60 min.
3. Donner l'intervalle de temps pendant lequel la citerne se remplit le plus rapidement.
4. Déterminer le taux de variation de 20 min à 30 min.

Exercice 5

Ci-dessous est représentée la distance séparant Naomi de la maison durant une promenade.

On s'interresse aux différents segments du trajet.



1. Donner le taux de variation de 12 h à 13 h, puis de 14 h à 15 h. Sur lequel de ces deux segments le déplacement était le plus rapide ?
2. Sur quel segment le taux le taux de variation est nul ? négatif ? Interprétez cela dans le contexte de l'exercice.
3. Déterminer le taux de variation sur le dernier segment de trajet.

Exercice 6

Déterminer les fonctions affines. Parmi les fonctions affines préciser celles qui sont linéaires.

1. $f\colon x \mapsto -2x+5$
2. $f\colon x \mapsto (x+6)^2$
3. $f\colon x \mapsto -4x$
4. $f\colon x \mapsto \dfrac{x}{2}+8$
5. $f\colon x \mapsto x^2+1$
6. $f\colon x \mapsto \dfrac{2}{3x}$
7. $f\colon x \mapsto x^2-(x+2)(x-3)$
8. $f\colon x \mapsto -2x^{-1}$

Exercice 7 — imaginer une fonction.

1. Donner deux exemples de fonctions affines de taux de variation 3.
2. Donner deux exemples de fonctions affines d'ordonnée à l'origine 3.
3. Donner deux exemples de fonctions affines tel que l'image $f(x)$ est proportionnelle à $x+3$.
4. Donner une deux exemples de fonctions affines tel que $f(x)-2$ est proportionnelle à $x-7$.

   Que vaut $f(7)$ dans chaque cas ?
5. Donner deux exemples de fonctions affines non constantes f tel que $f(3)=7$.
6. Donner deux exemples de fonctions affines non constantes f dont le zéro est 3.

Exercice 8

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+a-1$.

1. Déterminer la valeur de a pour laquelle f est constante.
2. Déterminer la valeur de a pour laquelle f est linéaire.
3. Déterminer a sachant que $f(3)=0$. En déduire l'ordonnée à l'origine dans ce cas.
4. Déterminer a sachant que $f(0)=5$. En déduire le taux de variation de f.

Exercice 9

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(k-1)x+k^2-1$.

1. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles f est affine et linéaire.
2. Déterminer la valeur de k pour laquelle f est linéaire non nulle.

Exercice 10

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(a^2-1)x^2-(a+1)x+4$.

1. Déterminer la valeur de a pour laquelle f est constante.
2. Déterminer la valeur de a pour laquelle f est affine non constante.
3. En déduire le taux de variation et l'ordonnée à l'origine dans ce cas.

Exercice 11

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=kx^{k-1}+k-3$.

1. Déterminer la valeur de k pour laquelle f est constante.
2. Déterminer la valeur de k pour laquelle f est affine non constante.

Exercice 12 — concepts. Compléter.

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression réduite $f(x) = 3x + 5$
   a) f une fonction (A) non affine (B) affine non linéaire (C) affine et linéaire .
   b) Le terme linéaire est .... Le terme constant est ....
   c) Le taux de (A) variation (B) évolution (C) accroissement de f est ....
   La fonction f est strictement (A) croissante (B) décroissante car .. est strictement (A) positif (B) négatif .
   d) L'image de 0 est $f(\ldots) =$ ....
   Le zéro de la fonction f est solution de .... C'est $x =$ ....
2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression réduite $g(x) = \sqrt{5}x$
   a) g est une fonction (A) non affine (B) affine non linéaire (C) affine et linéaire (D) affine et constante .
   b) Le terme constant est .... L'image de 0 est $f(\ldots) =$ ....
   c) Le terme linéaire est .... Le taux de variation est ....
   La fonction g est (A) strictement croissante (B) strictement décroissante
3. Soit la fonction h définie $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2(x + 5) =$ .... l'expression réduite :
   a) h une fonction (A) non affine (B) affine non linéaire (C) affine et linéaire .
   b) Sa représentation graphique est la droite D_h d'équation ....
   c) L'image de 0 est .... D_h coupe l'axe des ordonnées en ....
   d) Le zéro de la fonction f est solution de .... C'est $x =$ ....
   Le point d'intersection de D_h avec l'axe des abscisses est ....
   e) Le terme linéaire est .... La pente de la droite D_h est ....
4. Soit f la fonction affine de taux de variation $-\frac{2}{3}$ et d'ordonnée à l'origine 1.
   a) L'expression réduite de f est ....
   b) La fonction f est (A) strictement croissante (B) strictement décroissante
   c) La représentation graphique D_f de f est une droite .... de pente ....
   d) L'image de zéro par f est ....
   Le zéro de f est la solution de .... $x =$ ....
   e) D_f coupe l'axe des abscisses au point .... et l'axe des ordonnées au point ....
5. Les points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $y = 2 - \dfrac{5x}{9}$ forment .... de pente .... et d'ordonnée à l'origine ....

Exercice 13

1. La fonction affine (......) vérifie $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$.

   (A) $f\colon x \mapsto 2x+1$ (B) $f\colon x \mapsto -2x+1$ (C) $f\colon x \mapsto 2x-1$ (D) $f\colon x \mapsto -2x-1$

2. Le point (......) appartient à la droite représentative de la fonction affine $f\colon x \mapsto \frac{1}{2}x+1$.

   (A) $(2\ ;\ 1)$ (B) $(-2\ ;\ 1)$ (C) $(2\ ;\ 0)$ (D) $(-2\ ;\ 0)$

3. La droite représentative de la fonction affine (......) passe par le point $A(0\ ;\ 5)$

   (A) $f(x) = 5x+3$ (B) $f(x) = 3+5x$ (C) $f(x) = 4x+5$ (D) $f(x) = 5x-0$

4. La représentation graphique de la fonction affine $f\colon x \mapsto mx-(m-2)$ passe par l'origine. La valeur de m est :

   (A) $m=-2$ (B) $m=0$ (C) $m=2$ (D) On ne peut pas savoir

5. Si $a+b=1$, alors la droite représentative de la fonction affine $f\colon x \mapsto ax+b$ passe par le point : (A) $(-1\ ;\ -1)$ (B) $(-1\ ;\ 1)$ (C) $(1\ ;\ -1)$ (D) $(1\ ;\ 1)$

■ **Exemple 9.4 — problème inverse.**

1. Déterminer l'expression de la fonction affine f tel que $f(2) = 3$ et $f(4) = 7$.
2. Déterminer l'expression de la fonction linéaire g dont la représentation $\mathscr{D}_f$ passe par $A(3\ ;\ 2)$.

solution.
On cherche m et c tel que :

pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = mx+c$.

$$\begin{cases} f(2)=3 \\ f(4)=7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2m+c=3 \\ 4m+c=7 \end{cases}$$

résolution par élimination $L_2 - L_1 \to L_2$

$$\iff \begin{cases} 2m+c=3 \\ 2m=4 \end{cases} \iff \begin{cases} m=2 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = 2x-1$$

On cherche m et c tel que

pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = mx+c$.

$$\begin{cases} A(3\ ;\ 2) \in D_f \\ g \text{ linéaire} \end{cases} \iff \begin{cases} g(3)=2 \\ c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3m=2 \\ c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} m=\frac{2}{3} \\ c=0 \end{cases}$$

résolutio

$$\therefore\ g(x) = \frac{2}{3}x$$

■

Exercice 14

Déterminer dans chaque cas l'expression réduite de la fonction affine f et représentée par $\mathscr{D}_f$:

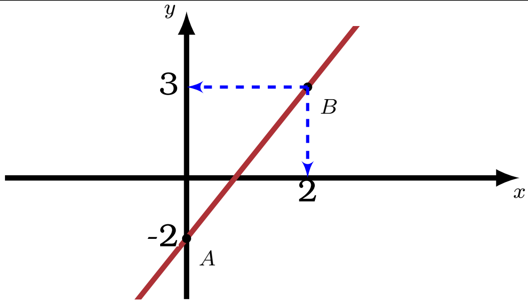
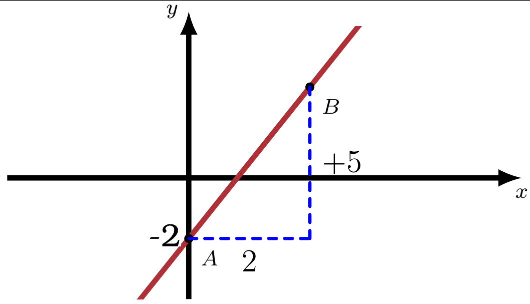
1. $f(2) = -1$ et $f(-2) = 2$
2. $f(3) = 5$ et $f(5) = 11$.
3. $f(-8) = 12$ et f est linéaire.
4. $f(0) = 2$ et $B(-1\ ;\ 1) \in \mathscr{D}_f$.
5. $A(0\ ;\ -4)$ et $B(2\ ;\ 0) \in \mathscr{D}_f$.
6. $A(1\ ;\ -4)$ et $B(4\ ;\ 2) \in \mathscr{D}_f$.

> Une fonction affine $f(x) = mx + c$ est représentée par la droite non verticale d'équation réduite. Pour tracer $\mathscr{D}\colon y = mx + c$, deux points suffisent pour déterminer la droite.

■ **Exemple 9.5 — représenter des fonctions affines avec $c \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Q}$.**

Représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5}{2}x - 2$

solution.

Méthode 1	**Méthode 2**
Ordonnée à l'origine est -2 : $A(0\ ;\ -2) \in \mathscr{D}$	
Pour $x = 2$, $y = \frac{5}{2}(2) - 2 = 3$. $\therefore B(2\ ;\ 3) \in \mathscr{C}$ *on cherchera des points à coordonnées entières, afin que leur placement soit le plus précis*	$m = \frac{5}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *En partant de* $(0\ ;\ -2)$ *on se déplace de* 2 *vers la droite, et* 5 *vers le haut pour trouver un autre point de* $\mathscr{D}$
	

■

Exercice 15

Représenter les droites non verticales données par leur équations réduites.

1. $y = x$

   $m = \ldots;\ c = \ldots$

2. $y = -x + 4$

   $m = \ldots;\ c = \ldots$

3. $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$

   $m = \ldots$ et $c = \ldots$

4. $y = -2$

   $m = \ldots;\ c = \ldots$

5. $y = -\dfrac{3}{2}x - 2$

   $m = \ldots;\ c = \ldots$

6. $y = \dfrac{1}{7}x - 4$

   $m = \ldots;\ c = \ldots$

7. $y = \dfrac{3}{7}x + 5$

   $m = \ldots;\ c = \ldots$

8. $y = -3x - 4$

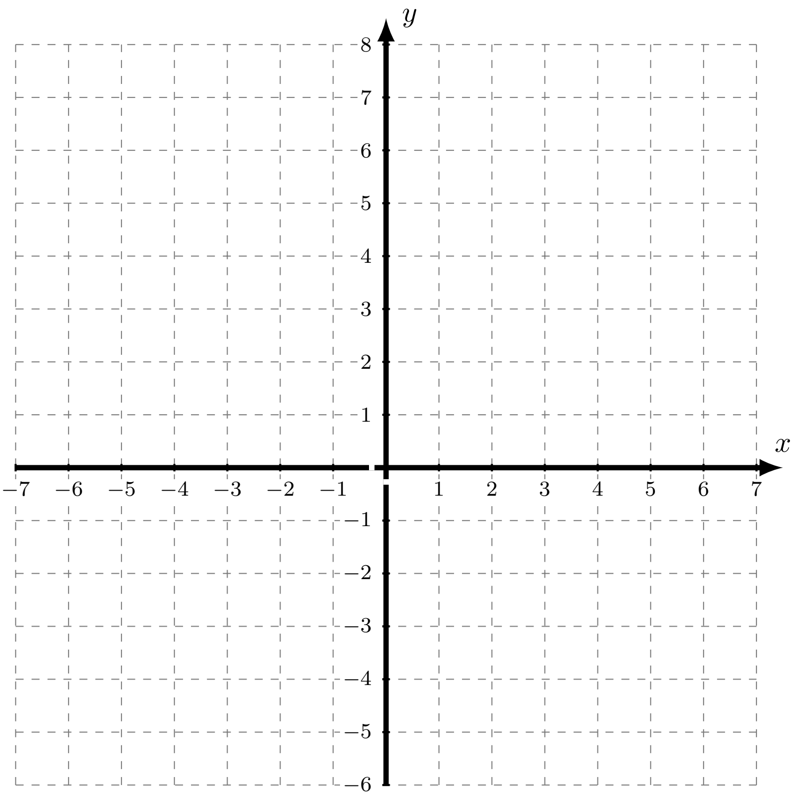
   $m = \ldots;\ c = \ldots$

9. $y = -\dfrac{3}{7}x + 6$

   $m = \ldots;\ c = \ldots$

10. $y = -3x - 5$

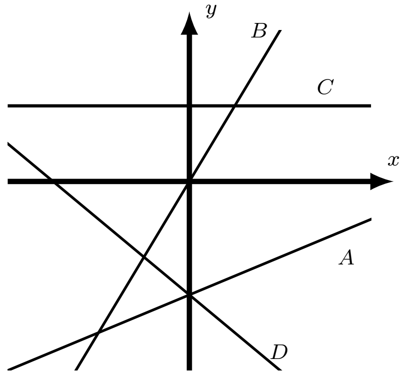
    $m = \ldots;\ c = \ldots$



Exercice 16

Associer les droites représentées avec la bonne ligne du tableau.

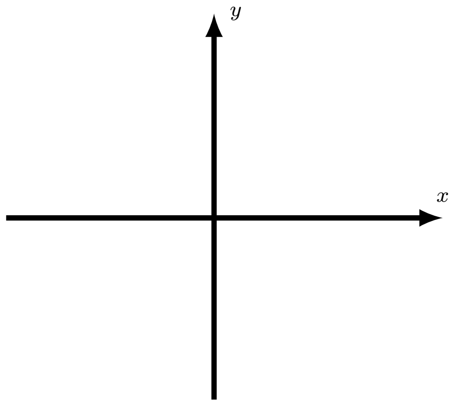
droite	pente	ordonnée à l'origine	équation réduite
	2	0	
	$\frac{1}{2}$	-3	
	-1	-3	
	0	2	



Exercice 17

Compléter le tableau puis tracer à main levée les droites décrites :

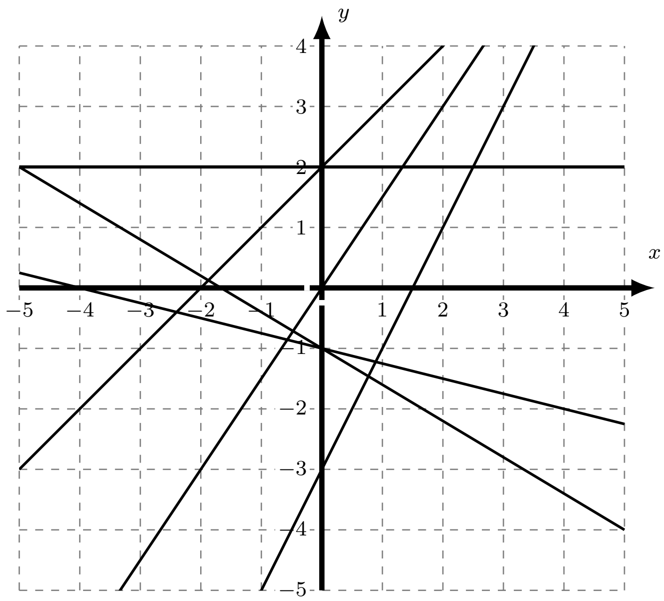
droite	pente	ordonnée à l'origine	équation réduite
A	2	-1	
B	-2	3	
C	1	2	
D	0	-2	



Exercice 18

Compléter le tableau puis associer les droites données par leur équation réduite à leur représentation :

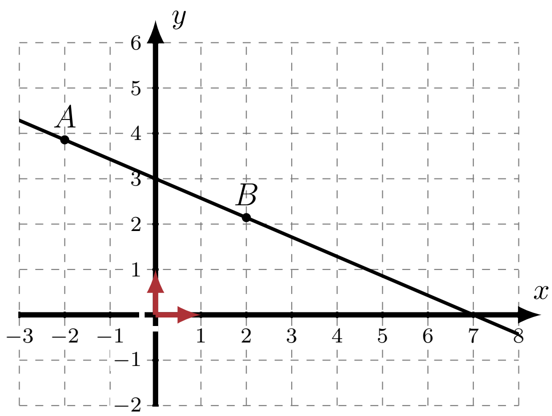
droite	pente	ordonnée à l'origine	équation réduite
A			$y = 2x - 3$
B			$y = 2$
C			$y = x + 2$
D			$y = \frac{3}{2}x$
E			$y = -\frac{3}{5}x - 1$
F			$y = -\frac{1}{4}x - 1$



Exercice 19

Soit la fonction affine f représentée par la droite (AB).

1. Déterminer par lecture graphique l'ordonnée à l'origine et la pente de la droite (AB).
2. Donner l'équation réduite de la droite (AB) et l'expression réduite de f.
3. Déterminer algébriquement les coordonnées exactes de A et B.

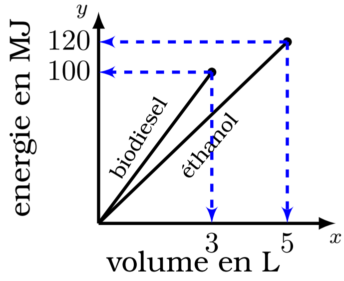


Exercice 20

Déterminer algébriquement le taux de variation m de la fonction affine f dans les cas suivants :

1. $f(5) = 12$ et $f(6) = 2$.
2. $f(9) = 12$ et $f(5) = 2$.
3. $f(-9) = 12$ et $f(5) = 2$.
4. f est constante
5. f est linéaire et $f(5) = 1$.
6. $f(19) - f(-20) = -117$.
7. $f(-6) - f(5) = 77$.
8. $f(2) - f(16) = 49$.

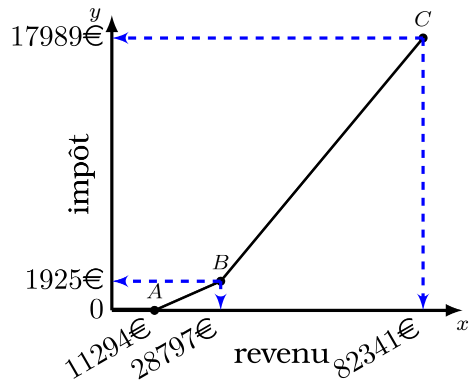
Exercice 21



Le graphe ci-contre représente l'énergie libérée selon le volume de biodiesel ou d'ethanol.

1. Déterminer le taux de variation des fonctions affines.
2. Quel type de carburant offre le plus d'énergie par litre ?

Exercice 22 — impots sur les revenus.



Pour le calcul de l'impôt sur les revenus 2023, les revenus sont considérés tranche par tranche. Le montant des impôts en fonction des revenus est représentés ci-contre.

1. Donner les coordonnées de A. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
2. Déterminer les pentes des segments $[AB]$ et $[BC]$.
3. Quelle tranche d'imposition correspond à un revenu annuel de 25 000 € ?
4. Vrai ou faux ? Affirmation « Pour un revenu de 30 000 €, l'impôt est à 30% du revenu ».

■ **Exemple 9.6** Déterminer la forme réduite de la fonction affine tel que $f(12) = 17$ et $f(16) = 25$.

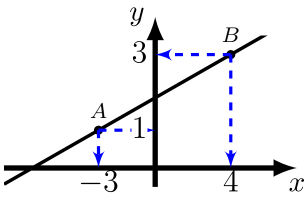
Étape	**Explications**
$m = \dfrac{f(12) - f(16)}{12 - 16} = \dfrac{17 - 25}{12 - 16} = \dfrac{-8}{-4} = 2$	*Déterminer le taux de variation m en calculant le taux de variation de 12 à 16*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - f(12) = m(x - 12)$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - f(16) = m(x - 16)$	*La variation des images est proportionnelle à la variation des abscisses*
$f(x) - 17 = m(x - 12)$ ou $f(x) - 25 = m(x - 16)$ $f(x) = 2(x - 12) + 17$ $\quad$ $f(x) - 25 = 2(x - 16)$ $f(x) = 2x - 24 + 17$ $\quad$ $f(x) = 2x - 7$ $f(x) = 2x - 7$	*déterminer l'expression réduite*

Exercice 23

Déterminez l'expression réduite de la fonction affine f dans les cas suivants :

1. $f(1) = 2$ et $f(4) = 8$.
2. $f(-1) = 4$ et $f(2) = 3$.
3. le taux de variation est $\frac{1}{3}$ et $f(15) = 3$.
4. le taux de variation est $\frac{-1}{2}$ et $f(-16) = \frac{11}{2}$.
5. $f(2) = -5$ et $f(7) = 3$.
6. f est linéaire et $f(3) = -4$.

Exercice 24

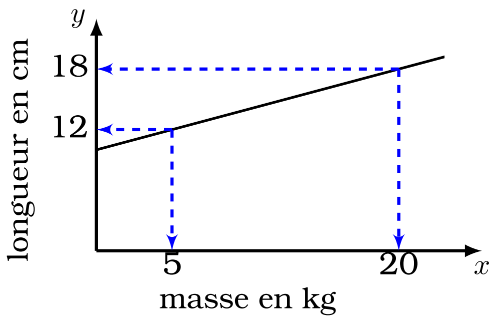


La fonction f est représentée par la droite (AB).

1. Déterminer l'expression réduite de la fonction affine f.
2. Déduire l'image de 0 par f. Intérpréter graphiquement le résultat.
3. Déterminer le zéro de la fonction f. Intérpréter graphiquement le résultat.
4. Construire le tableau de signe de f.

Exercice 25

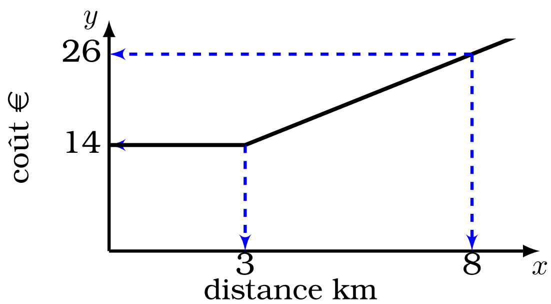
La relation entre la longueur y cm d'un ressort et la masse $x$kg d'un objet qui y est suspendu est une fonction affine représentée ci-dessous.



1. Déterminer l'expression réduite de y en fonction de x.
2. Quelle est la longueur du ressort au repos ?
3. Quelle masse faut-il suspendre pour que la longueur du ressort soit de 15 cm ?

Exercice 26

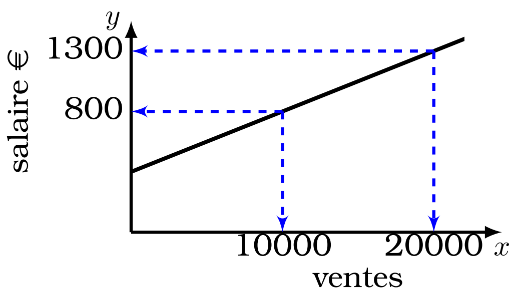
La relation entre le coût y € d'un taxi en fonction de la distance x km parcourue et représentée ci-dessous.



1. Pour $x \geqslant 3$, déterminer l'expression réduite de y en fonction de x.
2. Quel est le prix pour un trajet de 2,5 km ? de 13 km ?
3. Quelle est la longueur maximale du trajet que l'on peut faire avec 30,80 €.

Exercice 27

Le salaire y € des commerciaux d'une entreprise en fonction des ventes réalisées x (par dizaines de milliers) est représentée ci-contre.



1. Déterminer l'expression réduite de y en fonction de x.
2. Quel est le salaire d'un commercial qui ne réalise aucune vente ?

■ **Exemple 9.7 — tableau de signe.** Construire le tableau de signe des fonctions affines suivantes.

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 3x + 5$ (ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = -\frac{2}{3}x + 1$

solution.

$f(x) = 0$ $3x + 5 = 0$ $x = -\frac{5}{3}$	*recherche du zéro*	$g(x) = 0$ $-\frac{2}{3}x + 1 = 0$ $x = \frac{3}{2}$
$m = 3 > 0$	*préciser le signe du taux de variation*	$m = -\frac{2}{3} < 0$
La fonction f est strictement croissante (positive pour x supérieur au zéro de f) *La fonction g est strictement décroissante (négative pour x supérieur au zéro de g)*		

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x) = 3x + 5$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$		$+$	0	$-$	

■

Pour une fonction affine d'expression $f(x) = mx + c$ ($m \neq 0$). C'est le terme linéaire mx qui domine pour des valeurs de x infiniment grandes (ou petites). Le tableau de signe de f est :

x	$-\infty$		*le zéro*		$+\infty$
$f(x) = mx + c$		signe de $-m$	0	signe de m	

Exercice 28 Pour chacune des fonctions affines données par son expression :

(i) Déterminer le zéro de la fonction.

(ii) Déterminer le taux de variation m, et préciser son signe

(iii) Construire le tableau de signe de la fonction.

1. $f(x) = 2x + 3$
2. $f(x) = -5x + 9$
3. $f(x) = -3 + x$
4. $f(x) = 5x + 1$
5. $f(x) = -\frac{3}{5}x - 2$
6. $f(x) = \frac{3}{7}x - 2$
7. $f(x) = 2(5 - x)$
8. $f(x) = -2(x + 1)$
9. $f(x) = \frac{-3x + 8}{4}$
10. $f(x) = \frac{5x}{3} + 1$
11. $f(x) = \frac{4x + 3}{5}$
12. $f(x) = 1 - \frac{10x}{7}$

Exercice 29 Pour chaque tableau de signe donner deux fonctions affines qui correspondent :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

9.5 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 1.

■

solution de l'exercice 2.

■

solution de l'exercice 3.

■

solution de l'exercice 4.

■

solution de l'exercice 5.

■

solution de l'exercice 6.

■

solution de l'exercice 7.

■

solution de l'exercice 8.

■

solution de l'exercice 9.

■

solution de l'exercice 10.

■

solution de l'exercice 11.

■

solution de l'exercice 12.

■

solution de l'exercice 13.

■

solution de l'exercice 14.

■

solution de l'exercice 15.

■

solution de l'exercice 16.

■

solution de l'exercice 17.

■

solution de l'exercice 18.

■

solution de l'exercice 19.

■

solution de l'exercice 20.

■

solution de l'exercice 21.

■

solution de l'exercice 22.

■

solution de l'exercice 23.

■

solution de l'exercice 24.

■

solution de l'exercice 25.

■

solution de l'exercice 26.

■

solution de l'exercice 27.

■

solution de l'exercice 28.

■

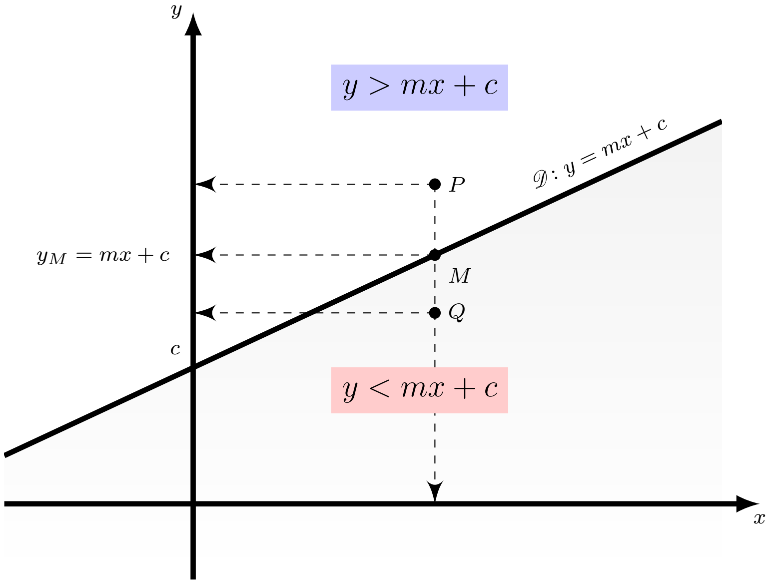
solution de l'exercice 29.

■

9.6 Club de Maths : représentations d'inéquations dans le plan

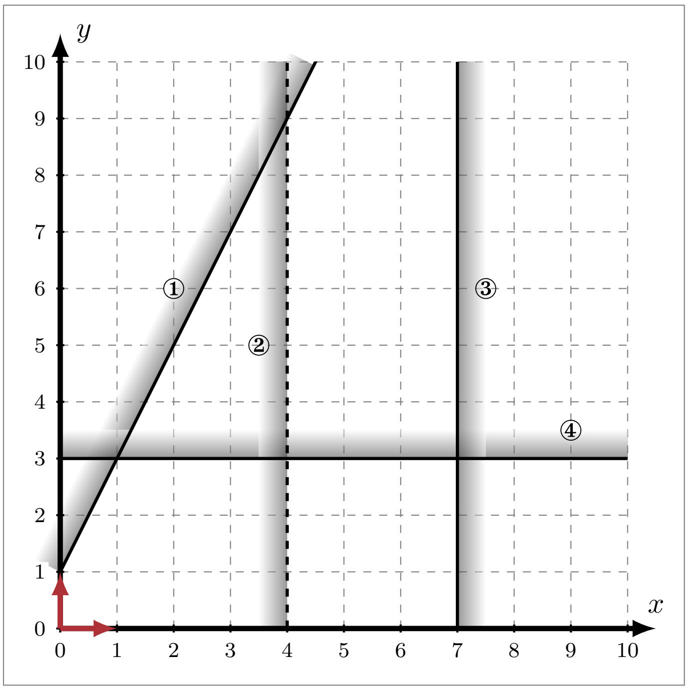
Figure 9.2 – La représentation graphique d'une fonction affine $\mathscr{D}$: $y = mx + c$ partage le plan en 3 parties :

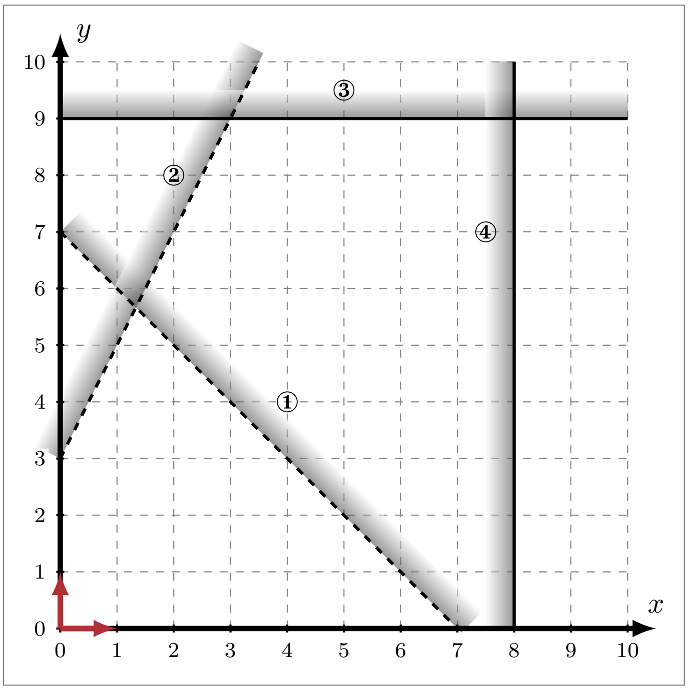
- Les points $M(x; y) \in \mathscr{D}$ dont les coordonnées vérifient l'équation $y = mx + c$.
- Les points $P(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'inéquation $y < mx + c$ ($y < f(x)$) qui en dessous de la droite $\mathscr{D}$
- Les points $Q(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'inéquation $y > mx + c$ ($y > f(x)$) qui au dessus de la droite $\mathscr{D}$



■ **Exemple 9.8** Faire correspondre chaque équation à un demi-plan délimité par une droite.

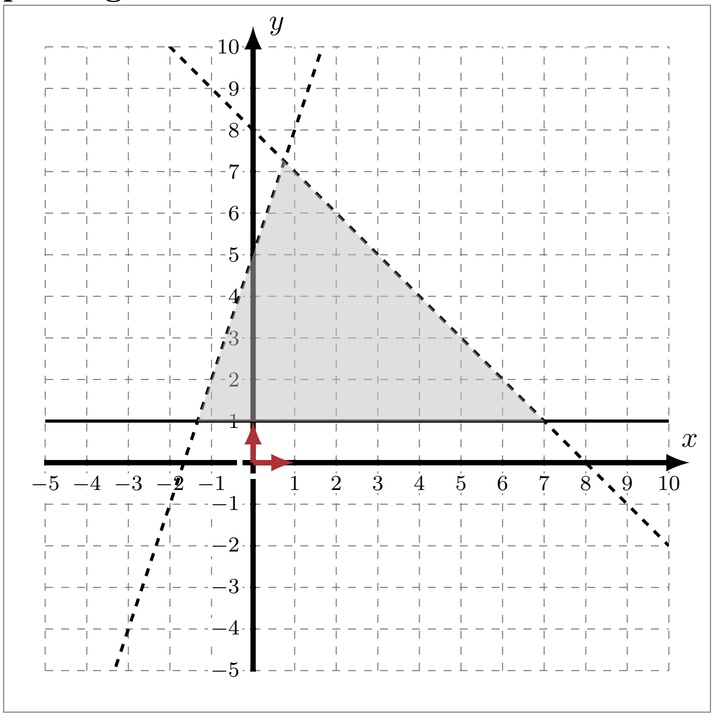
$7 \leqslant x \qquad y \geqslant 3 \qquad x < 4 \qquad y \geqslant 2x + 1 \qquad 9 \leqslant y \qquad x \leqslant 8 \qquad y + x > 7 \qquad y > 2x + 3$

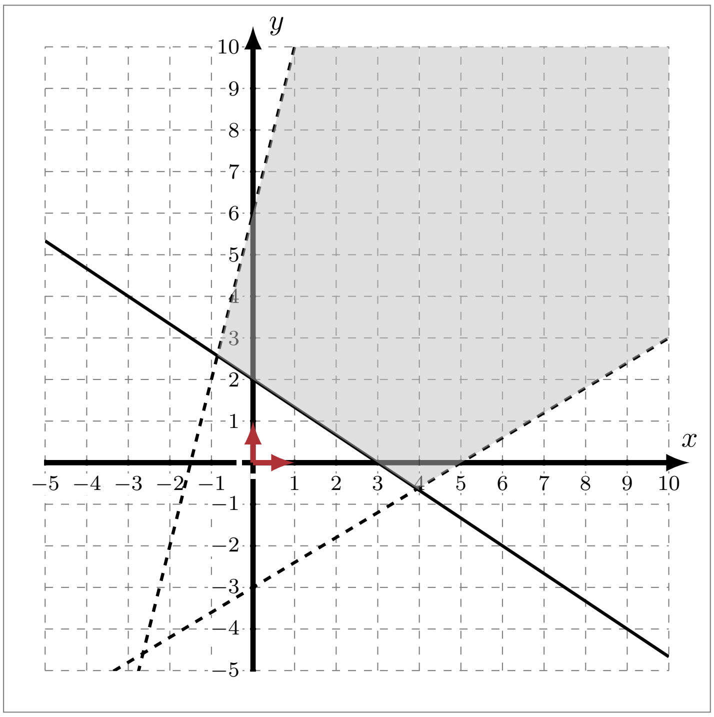




Exercice 30

Préciser pour chaque graphe, les inéquations vérifiées par les coordonnées des points de la partie grise.

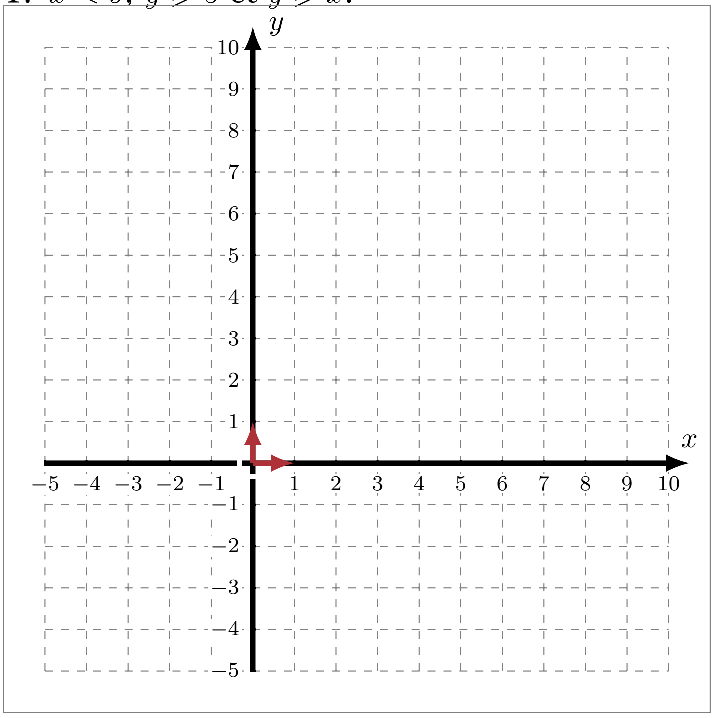




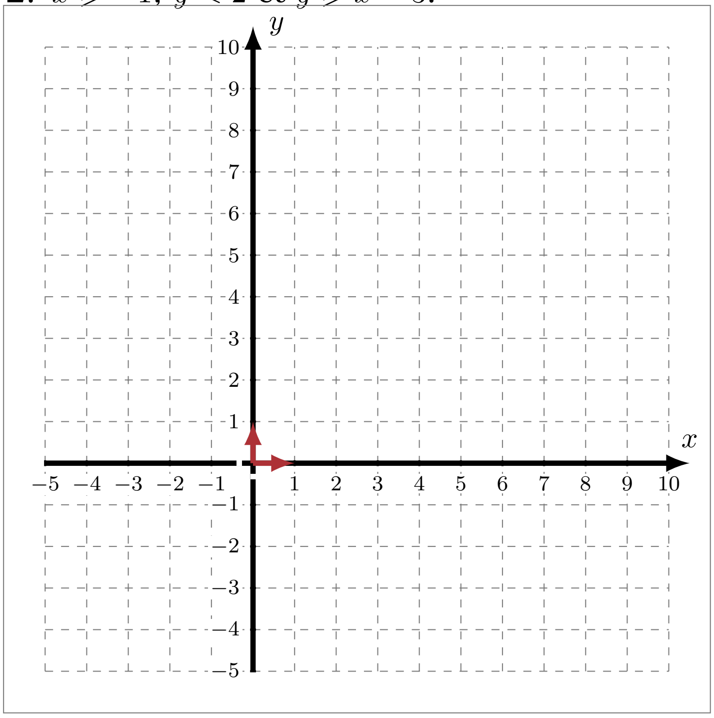
Exercice 31

Pour chacune des questions suivantes, colorier en gris la partie du plan définie par les 3 inéquations.

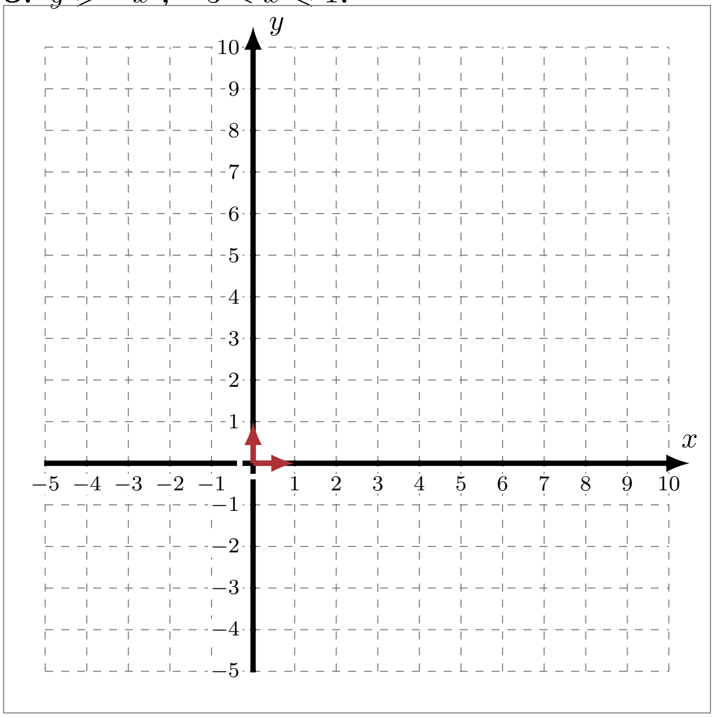
1. $x < 9$; $y \geqslant 5$ et $y \geqslant x$.



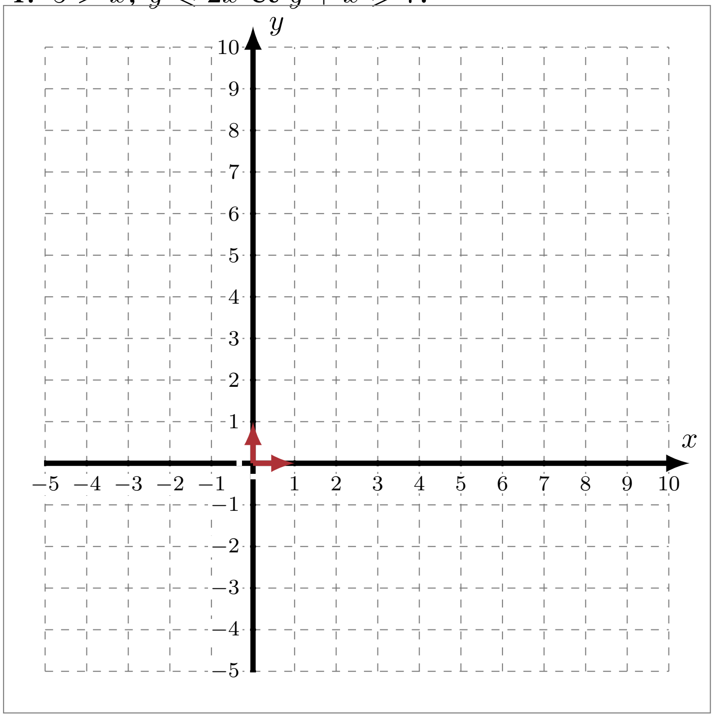
2. $x \geqslant -1$, $y < 2$ et $y \geqslant x - 3$.



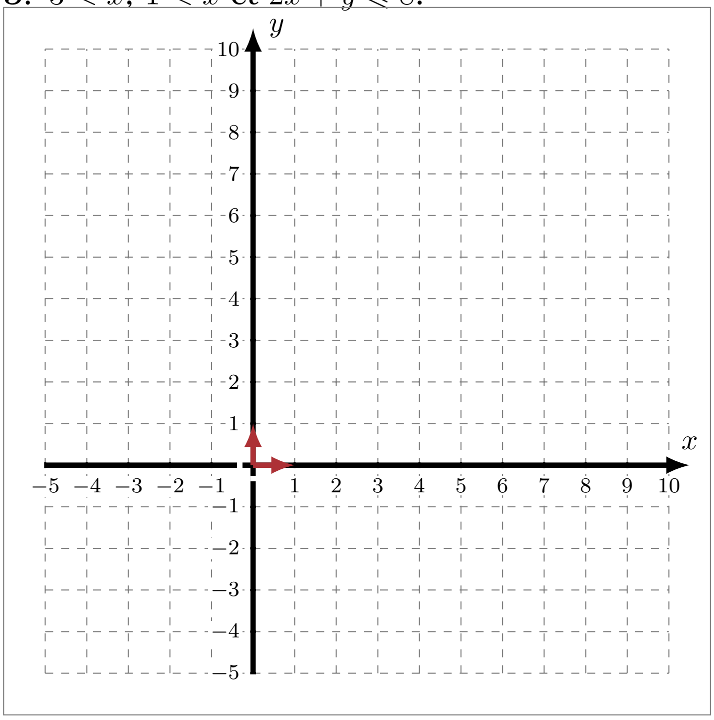
3. $y \geqslant -x$, $-3 < x \leqslant 1$.



4. $5 > x$, $y \leqslant 2x$ et $y + x \geqslant 7$.



5. $3 < x$, $1 < x$ et $2x + y \leqslant 8$.



6. $4x + 3y < 12$, $y \leqslant 2x + 6$ et $x \leqslant -2$.