Chapitre 10

Proportionnalité et Fonctions linéaires

Définition 10.1 — expression. m un nombre réel donné. f est dite « **fonction linéaire de coefficient** m » lorsque :

$$\text{pour tout } x : \qquad f(x) = mx$$

Une fonction linéaire est une relation de proportionnalité entre abscisse (antécédent) et ordonnée (image). Le coefficient de proportionnalité est m.

En particulier :

- $f(0) = 0$
- $f(1) = m$
- pour tout $x \neq 0$ on a $\dfrac{f(x)}{x} = m$

R Une fonction f tel que $f(0) = 0$ et pour tout $x \neq 0$ on a $\dfrac{f(x)}{x} = m$ est une fonction linéaire.

Proposition 10.1 Le tableau de valeur d'une fonction linéaire est un tableau de proportionnalité :

x	0	1	x	2	3	5	-6
y	0	m	mx	$2m$	$3m$	$5m$	$-6m$

$\times m = \dfrac{y}{x}$ $\qquad$ $\times \dfrac{1}{m}$

Proposition 10.2 — représentation graphique. La représentation graphique d'une fonction linéaire d'expression $f(x) = mx$ est la droite (d) passant par l'origine du repère $O(0; 0)$.

La droite (d) a pour équation $y = mx$, cela signifie :

Un point $P(x;y)$ est sur la droite (d) **si et seulement si** ses coordonnées vérifient $y = mx$.

En particulier $M(1;m)$ appartien à la droite (d).

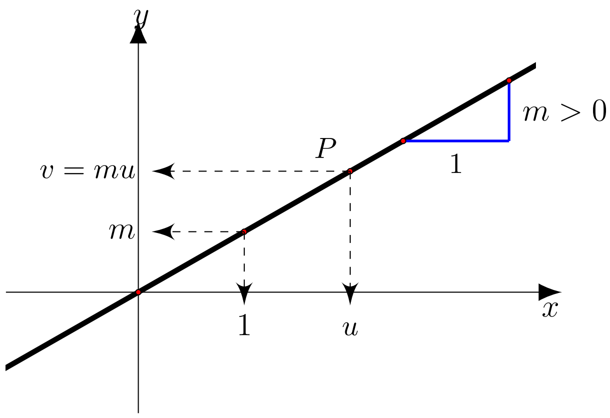


Figure 10.1 – m est le **coefficient directeur** de la droite d.

$$m = \frac{m}{1} = \frac{v}{u} = \frac{\Uparrow y}{\Rightarrow x}$$

10.1 Exercices : Fonctions linéaires

■ **Exemple 10.3** Les tableaux de valeurs suivants sont des tableaux de valeurs de fonctions linéaires. Compléter les tableaux et placer les points dans le repère donné.

$\times \ldots$

x	0	1		
$y = \ldots x$	0	3	6	-9

$\times \ldots$

$\times \ldots$

x	0	1	3	-5
$y = \ldots x$	0	$\frac{5}{3}$		

$\times \ldots$

$\times \ldots$

x	5	1		
$y = \ldots x$	7		5	7

$\times \ldots$

$\times \ldots$

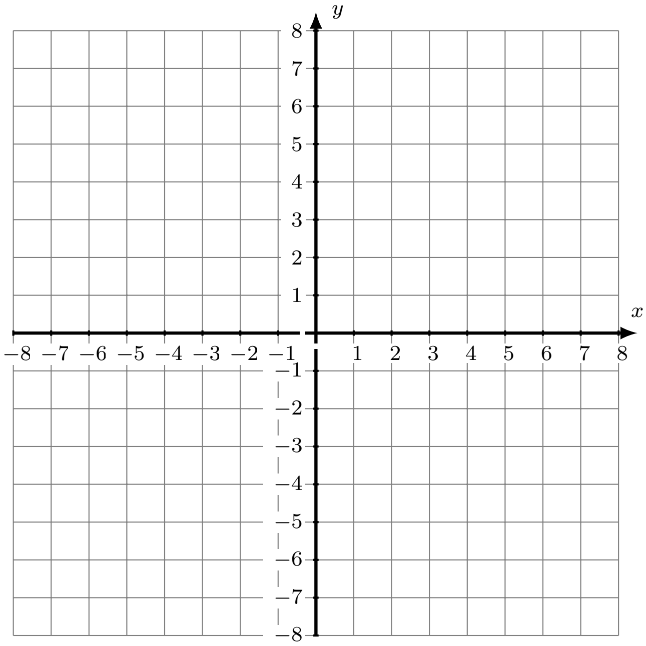
x	-4			
$y = \ldots x$	3	4	3	7

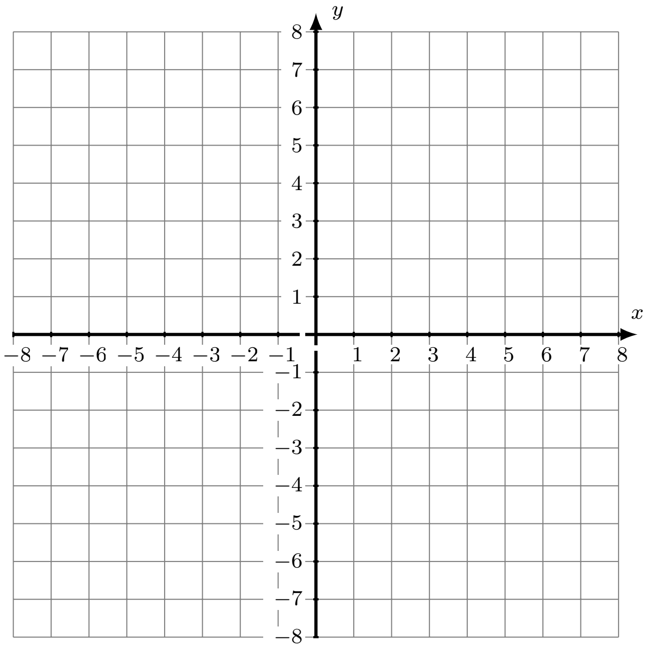
$\times \ldots$

$\times \ldots$

x	-3			
$y = \ldots x$	4	4	3	3

$\times \ldots$





■ **Exemple 10.4** Parmi les tableaux de valeurs suivants, lesquels ne peuvent être ceux d'une fonction linéaire ?

x	3	15	21	-105
$y = \ldots x$	8	40	55	-280

$\times \ldots$

x	-5	15	8	-35
$y = \ldots x$	7	-21	$-11{,}2$	50

$\times \ldots$

Exercice 1

Pour les fonctions linéaires suivantes, préciser la valeur du coefficient m :

- $f_1(x) = 0$
- $f_2(x) = 5x$
- $f_3(x) = (7-1)x$
- $f_4(x) = x \times 3$
- $f_5(x) = 2x + 2x$
- $f_6(x) = 5 + 2x - 5$
- $f_7(x) = x$
- $f_8(x) = -x$
- $f_9(x) = \dfrac{5}{6}x$
- $f_{10}(x) = \dfrac{x}{3}$
- $f_{11}(x) = -\dfrac{2x}{3}$

Exercice 2

Démontrez que les fonctions suivantes ne sont pas linéaires en calculant le rapport $\frac{f(x)}{x}$ pour différentes valeurs de x non nulles.

- $f_1(x) = 2x - 3$
- $f_2(x) = xx$
- $f_3(x) = x(x-1)$
- $f_4(x) = \sqrt{x}$
- $f_5(x) = 6$
- $f_6(x) = \dfrac{8}{x}$

Exercice 3

1) $f(x) = 5x$.
   a) Déterminer l'image de 2.
   b) Résoudre l'équation $f(x) = 13$.
   c) Quel est l'antécédent de 13 ?

2) $g(x) = -3x$.
   a) Déterminer $g(3)$ et $g(5)$.
   b) Résoudre l'équation $g(x) = -9$.
   c) Déterminer l'antécédent de -5.

Exercice 4

Une application linéaire f est telle que $f(12) = 42$.

1) Calculer le coefficient m de la fonction f.
2) En déduire $f(1)$, $f(-13)$ et $f(\frac{2}{7})$.

Exercice 5

Une application linéaire g est telle que $g(-17) = 52{,}87$. Calculer $g(1)$ et $g(-2{,}5)$.

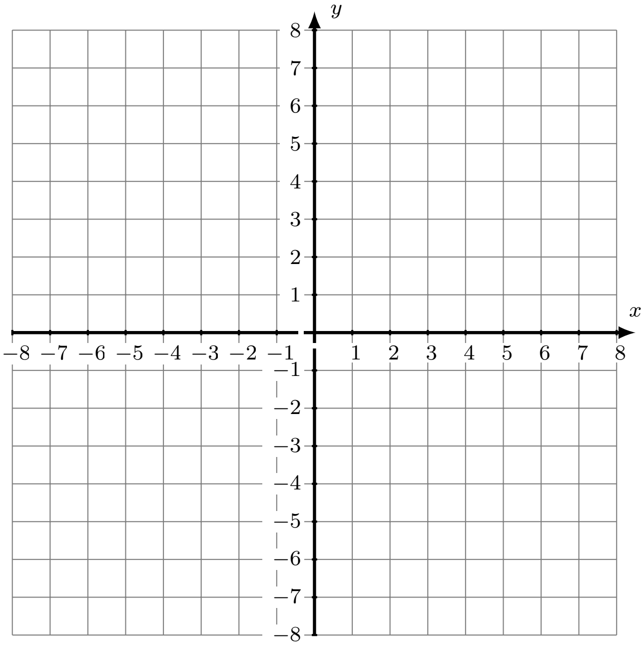
Exercice 6

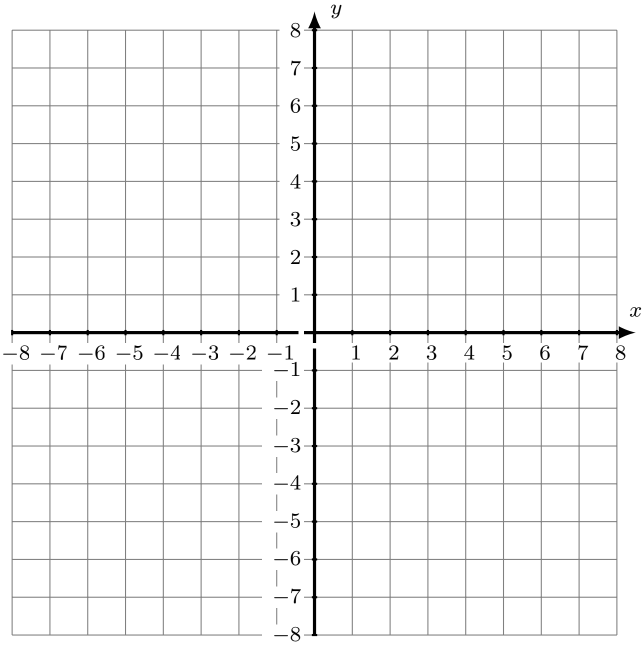
Une application linéaire h est telle que $h(14) = -2{,}1$. Résoudre l'équation $h(x) = 5$.

Exercice 7

Soit les fonctions linéaires $f(x) = \dfrac{3}{2}x$ et $g(x) = -\dfrac{5}{4}x$.

1) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ et $g(0)$, $g(1)$ et $g(4)$.
2) (d_f) est la représentation graphique de la fonction f. Justifier que les points $O(0;0)$ et $A(2;3)$ appartiennent à (d_f).
3) (d_g) est la représentation graphique de la fonction g. Justifier que les points $O(0;0)$ et $B(4;-5)$ appartiennent à (d_g).
4) Représenter (d_f) et (d_g) sur le graphique (de gauche) ci-dessous.





Exercice 8

Représenter les fonctions linéaires suivantes dans le repère de droite. Pour préciserez un point sur le quadrillage (coordonnées entières), autre que l'origine qui appartient à chaque représentation.

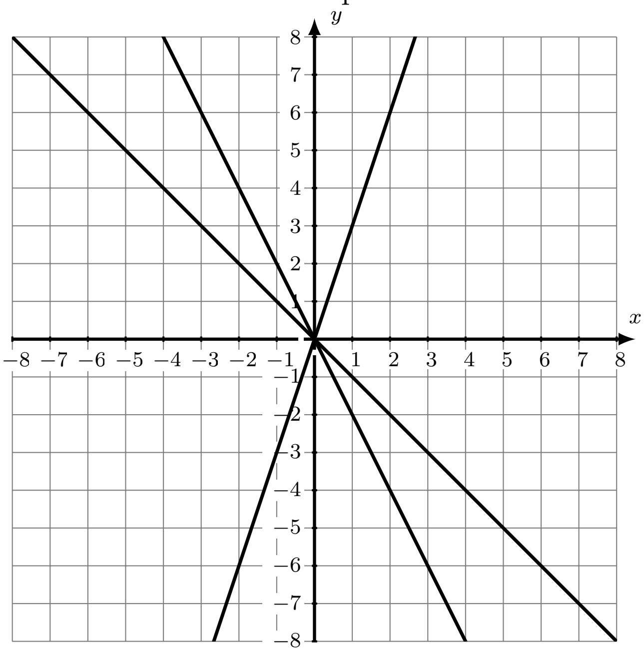
$$f_1(x) = 2x \qquad f_2(x) = \frac{4}{3}x \qquad f_3(x) = -3x \qquad f_4(x) = \frac{1}{3}x \qquad f_5(x) = -\frac{x}{2} \qquad f_6(x) = -\frac{3}{4}x$$

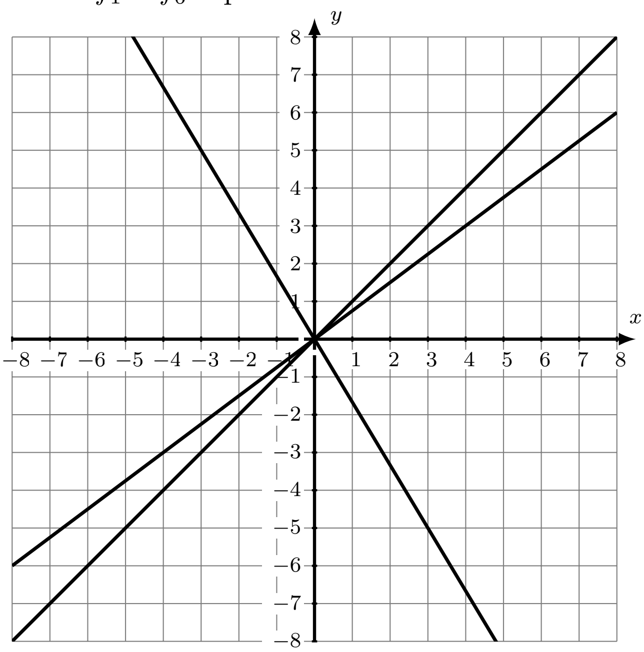
Exercice 9 Quelle est l'équation de la droite passant par l'origine et le point $A(x = 4; y = 6)$?

Exercice 10

1. Quelle est l'équation de la droite passant par l'origine et le point $A(4{,}5; -3)$?
2. Justifier que $B(-128; 192)$ est sur la droite (OA).
3. Trouver y tel que les points $O(0; 0)$, $A(4{,}5; -3)$ et $C(\frac{13}{9}; y)$ soient alignés.

Exercice 11 Préciser les expressions des fonctions linéaires f_1 à f_6 représentées ci-dessous :





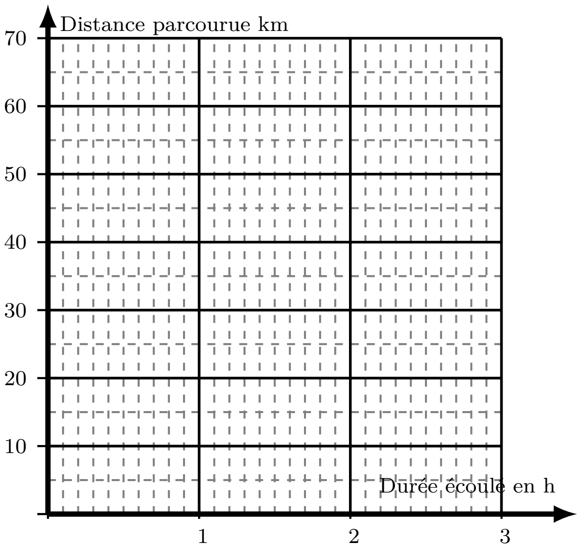
Exercice 12

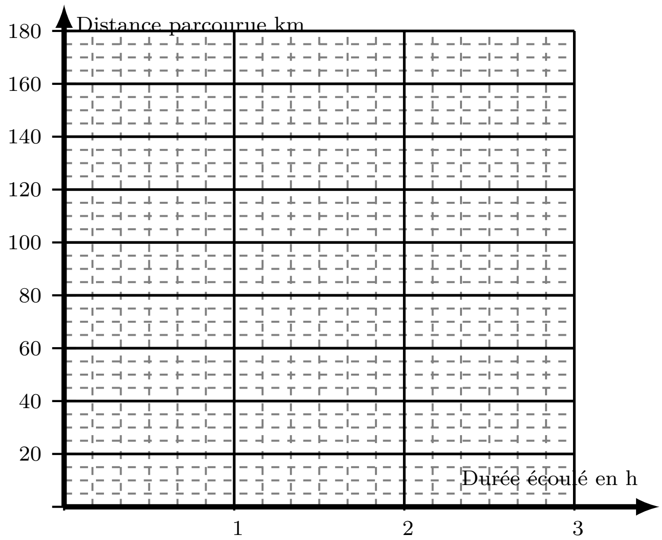
1) Quelle est l'équation de la droite passant par l'origine et le point $A(3;5)$?
2) Montrer que les points $O(0;0)$, $A(3;5)$ et $B(-423;-705)$ sont alignés.
3) Trouver x tel que les points $O(0;0)$, $A(3;5)$ et $C(x;\frac{5}{12})$ soient alignés.

Exercice 13

Un cycliste roulant à vitesse constante a effectué 36 km en 1 h20 min.

1. Représenter sur le graphe de gauche la distance parcourue en fonction de la durée écoulée.
2. Déterminer graphiquement (montrer les traces sur le graphique) :
   a) La distance parcourue en 2 h20 min.
   b) Le temps mis pour parcourir 45 km.





Exercice 14

Un motocycliste et un cycliste partis en même temps sur la même route roulent à vitesse constante. Le premier a parcouru 80 km en 1 h 20 min, et le second 35 km en 1 h10 min.

1) Représenter sur le graphe de droite les distances parcourues en fonction de la durée écoulée.
2) Déterminer graphiquement (montrer les traces sur le graphique):
   a) L'avance en km du motocycliste au bout de 2 h30 min.
   b) L'intervalle de temps séparant les passages au kilomètre 65 km.

Exercice 15

Soit une fonction linéaire de coefficient m.

1. x un nombre non nul. Calculer $\frac{f(x)}{x}$.
2. t un nombre quelconque. Montrer que $f(2t) = 2f(t)$.
3. a et b deux nombres quelconques. Montrer que $f(a+b) = f(a) + f(b)$ et $f(a-b) = f(a) - f(b)$.

$\times 2$

x	0	1	t	$2t$	a	b	$a+b$	$a-b$
$y = mx$	0							

$\times m$

10.2 Problèmes d'évolution

Pour tous nombres U,V,X,P, Q dans les textes parlant de proportions, pourcentages, fraction etc...

Définition 10.2 **Le %** désigne un centième. Ainsi $p\% = \dfrac{p}{100}$.

Définition 10.3 **« La proportion de X parmi Y »** désigne le quotient $\dfrac{X \text{ et } Y}{Y}$.

■ **Exemple 10.5** Dans la classe de 3C

- la proportion des filles parmi les élèves vaut $\frac{15}{29}$
- la proportion des filles parmi les garçons est $\frac{0}{14}$, car on ne doit compter que les filles **qui sont des** garçons et non pas toutes les filles.

Définition 10.4 **« U de V »** désigne $U \times V$.

■ **Exemple 10.6**

- « 5 boites de 7 chocolats » contiennent 35 chocolats.
- « 3 cinquièmes de 50 » signifie ....
- « 60% de 50 » signifie ....

■ **Exemple 10.7**

- 5 augmenté de 30% $= 5+5\times30\% = 6{,}5$. On écrit directement $5 \times (1 + 0,30) =$
- 3 diminué de 10% $= 3 - 3 \times 10\% = 3 - 3 \times \frac{10}{100} = 2{,}7$. On écrit directement $3 \times (1 - 0,10) =$
- 80 augmenté de 20% = ...
- 80 diminué de 20% = ...

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{« } X \text{ augmenté de } P \text{ »} &= X + P \text{ de } X \\ &= X + PX = (1+P)X \end{aligned}$$

$$\textbf{coefficient multiplicateur} = 1 + P$$

$$\begin{aligned} \text{« } X \text{ diminué de } Q \text{ »} &= X - Q \text{ de } X \\ &= X - QX = (1-Q)X \end{aligned}$$

$$\textbf{coefficient multiplicateur} = 1 - Q$$

■

$$\begin{tikzcd} V_I = x \arrow[r, bend left, "\times CM = \frac{y}{x}"] & V_F = y \end{tikzcd}$$

$$\times(1+TE)$$

Figure 10.2 – Evolution, CM et TE

Définition 10.5 Une évolution est un couple « Valeur Initiale $\mapsto$ Valeur Finale ».

Une évolution de taux TE correspond à une multiplication par $CM = 1 + TE$:

$$\text{Valeur Initiale} \times CM = \text{Valeur Finale}$$
$$CM = 1 + TE$$

$TE > 0$ taux d'évolution positif augmentation : $CM > 1$.
$TE < 0$ taux d'évolution négatif diminution : $CM < 1$.

■ **Exemple 10.8** Après une augmentation de P, on ne retrouve pas le prix de départ en diminuant le prix final de P :

$$\begin{tikzcd} V_D = 1 \arrow[r, bend right, "\times CM_1 = 1 + P"'] & V_I = ? \arrow[r, bend right, "\times CM_2 = 1 - P"'] & V_A = ? \end{tikzcd}$$

Figure 10.3 –

10.3 Exercices : évolutions et pourcentages

Exercice 1

Calcule les valeurs demandées :

1) 35% de 60 €
2) 60% de 35 €
3) 35% de 60% de 80 €
4) 60 € augmenté de 35%
5) 35 € augmenté de 60%
6) 100% de 35 €
7) 35 € augmenté de 100%
8) 160% de 35 €
9) 35 € augmentés de 160%
10) 60 € diminué de 35%
11) 35 € diminué de 60%
12) 35 € diminué de 100%

■ Exemple 10.9

augmenter de 60% revient à multiplier par... . . . .
diminuer de 60% revient à multiplier par... . . . .
multiplier x par 0,7 c'est . . . .
multiplier x par 1,2 c'est . . . .

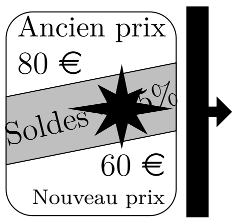
Exercice 2

Traduire les évolutions suivantes en une multiplication par un coefficient que l'on précisera.

a) augmenter de 7%
b) augmenter de 70%
c) augmenter de 700%
d) diminuer de 10%
e) augmenter de 10%
f) augmenter de 200%
g) diminuer de 4%
h) diminuer de 12%
i) augmenter de 22%
j) diminuer de 72%
k) augmenter de 82%
l) augmenter de 92%
m) diminuer de 100%
n) diminuer de 1%
o) diminuer de 11%
p) diminuer de 1,1%
q) diminuer de 0,1%
r) augmenter de 0,1%

■ Exemple 10.10

Quel nombre se cache sous l'étoile ?



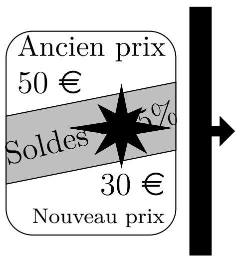
valeur de départ = 80 €. valeur finale = 60 €

Le coefficient multiplicateur CM vérifie : valeur de départ $\times CM$ = valeur finale

$CM = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur de départ}} = \frac{60}{80} = 0{,}75$

Comme « $CM = 1 + \text{TE}$ » donc : $TE = 0{,}75 - 1 = -0{,}25$.

Il s'agit d'une **diminution** de 25%



Exercice 3

Pour chacune des évolutions suivantes, déterminer le coefficient multiplicateur, puis préciser pourcentage d'augmentation ou de diminution.

a) Valeur de départ : 125 €. Valeur finale : 100 €
b) Valeur de départ : 16 €. Valeur finale : 12.5 €
c) Valeur de départ : 100 €. Valeur finale : 36 €
d) Valeur de départ : 20 €. Valeur finale : 36 €
e) Valeur de départ : 20 €. Valeur finale : 18 €
f) Valeur de départ : 200 €. Valeur finale : 160 €
g) Valeur de départ : 160 €. Valeur finale : 200 €
h) Valeur de départ : 22 €. Valeur finale : 40 €
i) Valeur de départ : 22 €. Valeur finale : 88 €
j) Valeur de départ : 88 €. Valeur finale : 22 €
k) Valeur de départ : 125 €. Valeur finale : 80 €
l) Valeur de départ : 80 €. Valeur finale : 125 €

Exercice 4

p	p de x	x augmenté de p	x diminué de p
	0,20x		
40%			
8%			
18%			
28%			
88%			
98%			
108%			
118%			
218%			
208%			
1,03%			

p	p de x	x augmenté de p	x diminué de p
			0,7x
	0,15x		
		1,25x	
		1,2x	
			0,76x
			0,66x
	0,66x		
		1,06x	
			0,994x
	0,603x		
		1,004x	
			0,992x

Exercice 5

Calcule les valeurs demandées :

1) 75% de x vaut 6.60 €. Trouver x.
2) 25% de x vaut 6.60 €. Trouver x.
3) x € augmenté de 60% vaut 35 €. Trouver x.
4) x € augmenté de 35% vaut 60 €. Trouver x.
5) x € diminué de 60% vaut 35 €. Trouver x.
6) x € diminué de 35% vaut 60 €. Trouver x.
7) x% de 35 vaut 60. Trouver x.
8) x% de 60 vaut 35. Trouver x.

Exercice 6

a) Après une augmentation de 40 % un article coûte maintenant $4,06$ €. Calculer son prix avant l'augmentation.

b) Le prix de ma taxe d'habitation était de 917 € l'année dernière et il a augmenté de 2 %. Calculer son nouveau prix.

c) En 5 ans, la population d'une ville est passé de 820 000 habitants à 721 600. Exprimer cette diminution en pourcentage.

d) En 10 ans, la population d'une ville est passé de 64 000 habitants à 78 720. Exprimer cette augmentation en pourcentage.

e) Un article coûtait $6,20$ € et son prix a augmenté de 40 %. Calculer son nouveau prix.

f) Après une augmentation de 9 % le prix de ma facture annuelle de gaz est maintenant $1154,31$ €. Calculer son prix avant l'augmentation.

g) Soldé à -40 % un article coûte maintenant 414 €. Calculer son prix avant les soldes.

h) En 2020, il y avait 1 000 élèves dans un lycée. En 2021, ils sont 1 100. Exprimer la variation du nombre d'élèves de cet établissement en pourcentage.

i) Le prix de ma taxe d'habitation est passé de 928 € à $937,28$ €. Exprimer cette augmentation en pourcentage.

Exercice 7 Trouver p, en % dans chacun des les cas suivants.

1) Une augmentation de x de 35% suivie d'une diminution de 60% correspond à une augmentation globale de p.
2) Une diminution de x de 35% suivie d'une augmentation de 60% correspond à une diminution globale de p.
3) Une augmentation de x de 20% suivie d'une diminution de 20% correspond à une évolution globale de p.
4) Une augmentation de x de 25% suivie d'une diminution de 20% correspond à une évolution globale de p.

Exercice 8

Le montant de la TVA (taxe sur la valeur ajoutée) est généralement 20% du prix HT (hors taxe). Le prix TTC (toutes taxes comprises) est égal au prix HT augmenté de 20%.

a) Quel est le coefficient multiplicateur entre prix HT et TVA ? entre prix HT et prix TTC ?

b) Le prix hors taxe d'une chemise est 80 €. Calculer le prix TTC.

c) Le prix TTC d'un pull est égal à 135 €. Quel était le prix HT ?

d) Le prix TTC d'une veste est 159 €. Quel est le montant de la TVA ?

Exercice 9

Soit un carré de côté a. On augmente deux côtés opposés de ce carré de 30%, et on diminue les deux autres côtés opposés de 20%.

1) Exprimer l'aire du rectangle obtenu en fonction de a.
2) Quelle augmentation de l'aire du carré de départ donne l'aire du rectangle obtenu ?

Exercice 10 — Brevet, Nouvelle Calédonie 2018.

Un prix TTC (Toutes Taxes Comprises) s'obtient en ajoutant la taxe appelée TGC (Taxe Générale sur la Consommation) au prix HT (Hors Taxes).

En Nouvelle-Calédonie, il existe quatre taux de TGC selon les cas : 22 %, 11 %, 6 % et 3 %.

Alexis vient de faire réparer sa voiture chez un carrossier.

Voici un extrait de sa facture qui a été tâchée par de la peinture.

Les colonnes B, D et E désignent des prix en francs.

	A	B	C	D	E
1	**Référence**	Prix HT	TGC (en %)	Montant TGC	Prix TTC
2	Phare avant	64 000	22 %	14 080	78 080
3	Pare-chocs	18 000	22 %		21 960
4	Peinture	11 700	11 %	1 287	12 987
5	Main d'œuvre	24 000		1 440	25 440
6				**TOTAL À RÉGLER (en Francs)**	**138 467**

1) Quel est le montant TGC pour le pare-chocs ?
2) Quel est le pourcentage de la TGC qui s'applique à la main d'œuvre?
3) La facture a été faite à l'aide d'un tableur.
   Quelle formule a été saisie dans la cellule E6 pour obtenir le total à payer ?

Exercice 11 — bilan.

Compléter le tableau

Prix de départ	taux d'évolution	Augmentation/diminution	Coefficient Multiplicateur	Prix final	Variation absolue
72 €	-20%				
72 €				54 €	
	20%			54 €	
	-20%			54 €	
54 €					+54 €
40 €			×0,7		
				108 €	-27 €
96 €				108 €	
			×1,3	91 €	
	+25%			98.40 €	
130 €			×1,007		
98.40 €					-19.68 €

Problème 1 **Capital et taux d'intérêt**

Partie 1 : Calculer avec des pourcentages

Quark a placé une somme de 1500 € le 1er janvier 2020 à un taux d'intérêt de 2% par an. Cela signifie que son capital augmente de 2% chaque année.

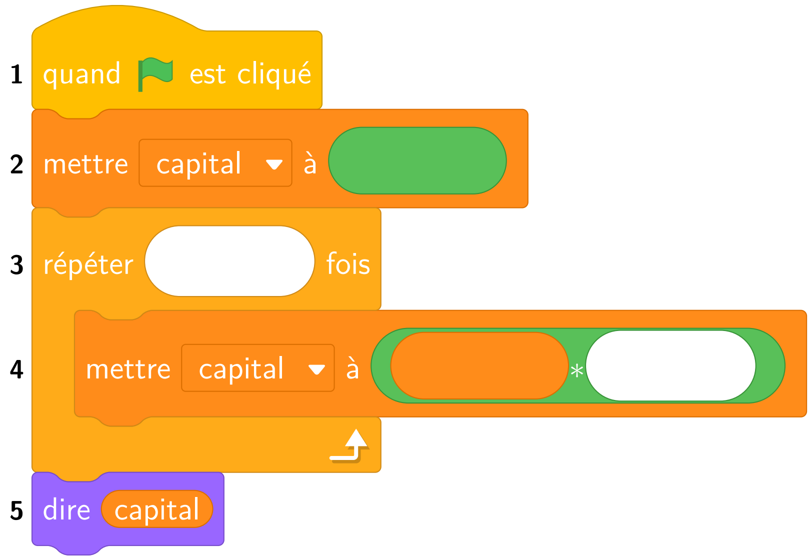
1. Calculer le capital disponible au 1er janvier 2021
2. Calculer le capital dispnnible après 2 ans, après 3 ans.

Partie 2 : Calculer avec des lettres Soit x un nombre.

1. Compléter : 2% de x= ; x augmenté de 2% =
2. Avec un taux de 2%, quelle opération permet de calculer successivement le capital d'une année à la suivante ?
3. Avec un taux de 2%, quelle opération permet de calculer le capital après 2 ans ? après 3 ans ?
4. Quel est le capital de Quark après 7 ans ?

Partie 3 : Algorithme

Le programme suivant doit calculer le capital disponible au 1er janvier 2027.



1. Créer la variable capital (onglet variables) puis compléter l'algorithme.
2. Au bout de combien d'années le capital sera supérieur à 2000 €.
3. Quel taux d'intérêt minimal faudrait-il pour que la somme de 2000 € soit atteinte en seulement 12 ans ?

Partie 4 : Calculer avec des puissances

1. Avec un taux d'intérêt de 2%, par combien le capital est-il multiplié au bout de 2 ans ? À quelle hausse en pourcentage cela correspond-il ?
2. Par combien le capital est-il multiplié au bout de 10 ans ?
3. À quelle hausse en pourcentage cela correspond-il ?
4. Au bout de combien d'années le capital disponible aura-t-il doublé ?