Chapitre 11

Produit scalaire

Définition 11.1 Soit trois points non alignés O, I et J. Les vecteurs $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ ne sont pas colinéaires et forment une **base**.

Si on muni le plan du repère $(O\ ;\ I\ ,\ J)$ (noté encore $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OJ})$ ou $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$) alors :

Tout vecteur $\vec{u}$ admet un unique couple de coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la **base** $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

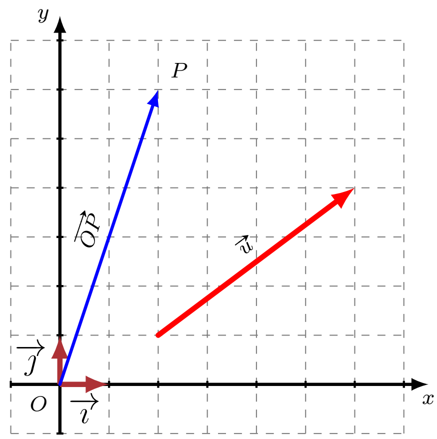


Figure 11.1 – Décomposition de vecteurs dans la base $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$
$\overrightarrow{OP} = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$
$\vec{u} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

11.1 Approche géométrique

Définition 11.2 — Norme. Soit $\vec{u}$ un vecteur et un représentant $\overrightarrow{AB}$. La norme $\|\vec{u}\|$ est la longueur du segment $[AB]$:

$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$$

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Définition 11.3 — formule trigonométrique. Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non nuls**. Le produit scalaire est le nombre noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.

R Pour l'angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ on prendra des représentants de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ de même origine.

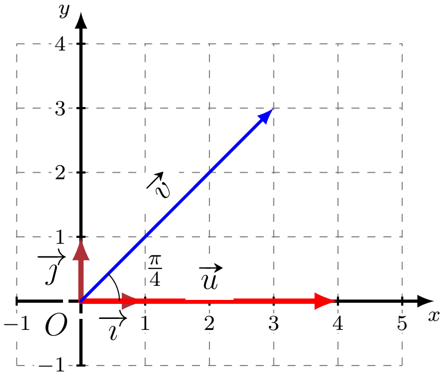


Figure 11.2 – Figure de l'exemple 11.1

■ **Exemple 11.1** Déterminer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans la figure ci-contre.

solution. Par lecture graphique $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$.

$\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$, et $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \frac{\pi}{4} = 45°$.

Donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ ■

$$= 4 \times 3\sqrt{2} \times \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = 12$$

Définition 11.4 $\overline{OH} = \|\vec{u}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ est la projection scalaire de $\vec{u}$ le long de $\vec{v}$.

$\overline{OH}$ est une distance algébrique. $\overline{OH} \geqslant 0$ lorsque la mesure principale de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ est dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. $\overline{OH} < 0$ dans les autres cas.

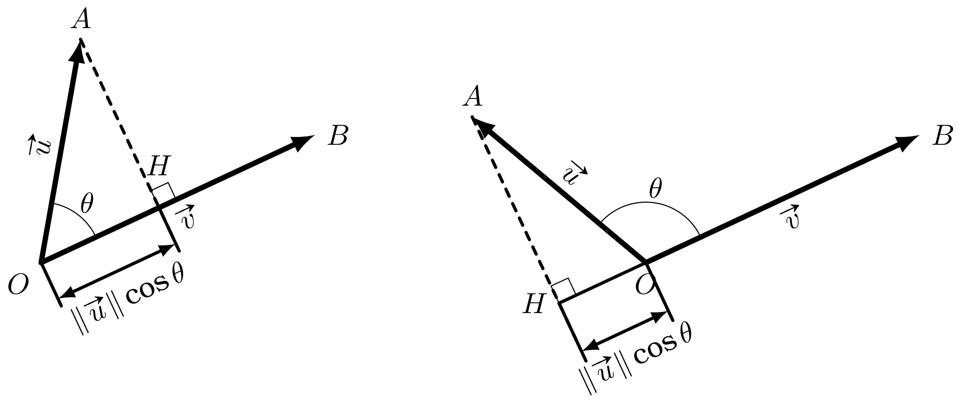


Figure 11.3 – H est le projeté orthogonal de A sur (O,B)
à gauche $\overline{OH} \geqslant 0$ avec la mesure principale de θ est dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
à droite $\overline{OH} \leqslant 0$

Définition 11.5 — formule du projeté. Soit O, A et B trois points du plan. Si H est projeté orthogonal de A sur (OB), alors :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overline{OH} \times \overline{OB}$$

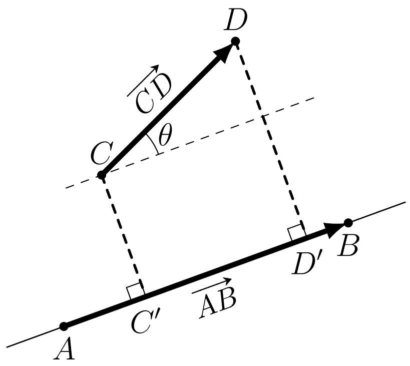
■ **Exemple 11.2** Retrouver la valeur de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ de l'exemple 11.1.

■ **Exemple 11.3** On peut prendre le projeté scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ le long de $\vec{v}$ même si les représentants choisis sont d'origine différentes :

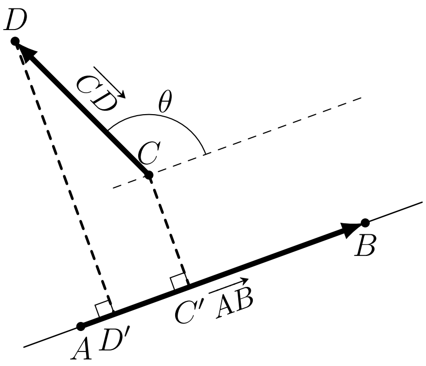
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'} = \overline{AB}\times\overline{C'D'}$$

Figure 11.4 – C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D perpendiculairement sur la droite (AB).

(a) Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{C'D'}$ est positif si $\overrightarrow{C'D'}$ est du même sens que $\overrightarrow{AB}$.



(b) Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{C'D'}$ est négatif si $\overrightarrow{C'D'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire.



Définition 11.6

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

pas de règle de l'« équation produit scalaire nul »!

Démonstration.

$$\begin{aligned} & 0 = \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \iff & 0 = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ \iff & \|\vec{u}\| = 0 \quad \text{ou} \quad \|\vec{v}\| = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \end{aligned}$$

■

Notation 11.1 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux s'écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$

Théorème 11.1 Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $k \in \mathbb{R}$:

(PS1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(PS2) $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$.

(PS3) $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$.

(PS4) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

produit scalaire symétrique

carré scalaire est positif.

pas d'ambiguïté dans $k\vec{u} \cdot \vec{v}$

distributivité sur l'addition

Démonstration.

(PS1) $(\vec{v}\ ;\ \vec{u}) = -(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$, et la fonction cos est paire, donc $\cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \cos(\vec{v}\ ;\ \vec{u})$.

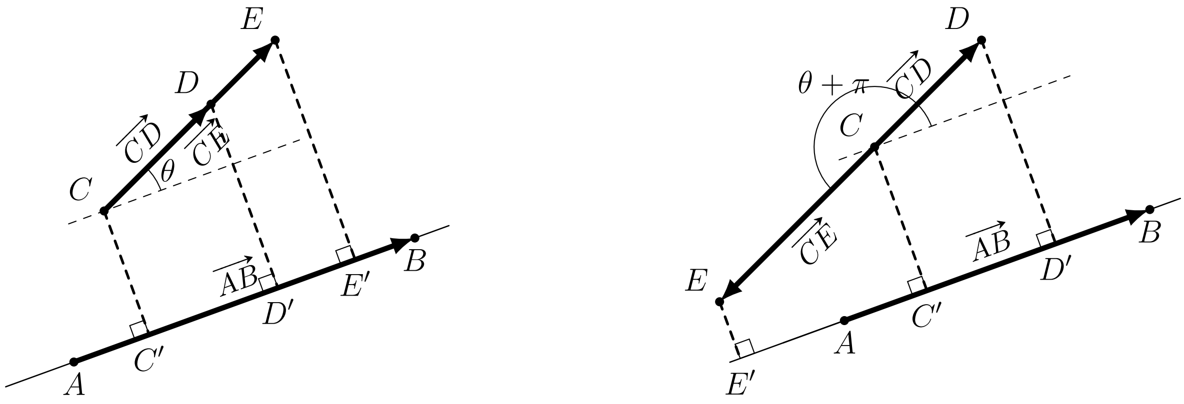
(PS2) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \cos(0) = \|\vec{u}\|^2$

(PS3) Illustration, figure 11.5

■

Figure 11.5 – Illustration de l'identité $k\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE}$.

(a) $k > 0$, alors $(\overrightarrow{AB}\ ;\ k\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = \theta$ **(b)** $k < 0$ alors $(\overrightarrow{AB}\ ;\ k\overrightarrow{CD}) = \theta + \pi$.



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot (k\overrightarrow{CD}) &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|k\overrightarrow{CD}\| \cos(\overrightarrow{AB}\ ;\ k\overrightarrow{CD}) \\
&= \|\overrightarrow{AB}\| \times |k| \|\overrightarrow{CD}\| \cos(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CE})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{si } k > 0 &= \|\overrightarrow{AB}\| \times k\|\overrightarrow{CD}\| \cos(\theta) \\
&= k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}
\end{aligned}
$$

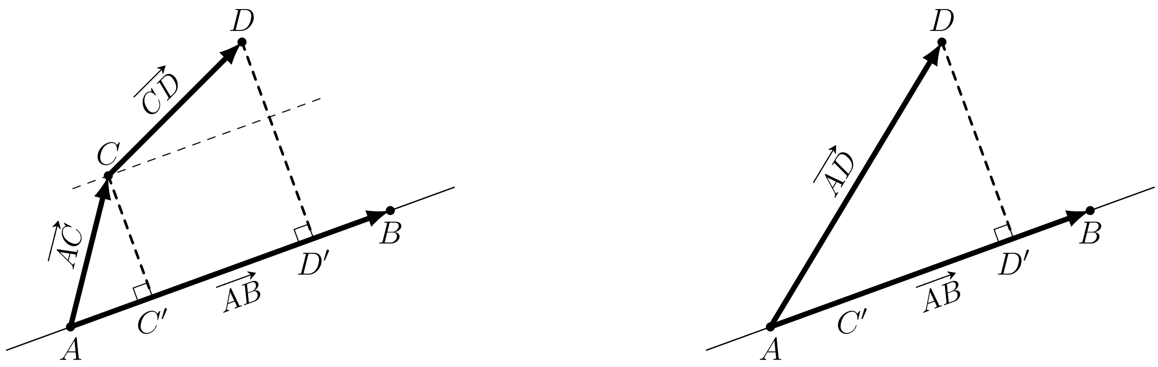
$$
\begin{aligned}
\textbf{si } k < 0 &= \|\overrightarrow{AB}\| \times (-k)\|\overrightarrow{CD}\| \cos(\theta + \pi) \\
&= \|\overrightarrow{AB}\| \times (-k)\|\overrightarrow{CD}\| \times (-1)\cos(\theta) \\
&= k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}
\end{aligned}
$$

(PS4) On se ramène au cas de la figure 11.6

Figure 11.6 – Cas où $\overline{AC'}$, $\overline{C'D'}$ et $\overline{AB}$ sont de même signe

(a)
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overline{AC'} \times \overline{AB} + \overline{C'D'} \times \overline{AB} \\
&= (\overline{AC'} + \overline{C'D'}) \times \overline{AB} \\
&= \overline{AD} \times \overline{AB}
\end{aligned}
$$

(b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overline{AD} \times \overline{AB}$



On peut alors écrire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

11.2 Approche analytique

On se place dans un plan muni d'un repère **orthonormé** $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$:

- $\|\vec{\imath}\| = 1$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1$
- $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} = 0$ car $\vec{i} \perp \vec{j}$.

Définition 11.7 — analytique du produit scalaire dans repère orthonormé. Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration.
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \cdot (x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}) \\ &= xx'\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} + xy'\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} + yx'\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} + yy'\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} \\ &= xx' + yy' \end{aligned}$$

d'après (PS3) et (PS4) ■

■ **Exemple 11.4** Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

solution. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 1 \times 2 = 5$. ■

■ **Exemple 11.5** Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

solution. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-1) + 2 \times \frac{3}{2} = 0$. ■

Propriété 11.2 — calculer un angle. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls. Si $\theta = (\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ alors :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

■ **Exemple 11.6** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{6}$. Déterminer $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$

solution. $\cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ■

$$(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad -\tfrac{\pi}{4} + 2k'\pi$$

11.2.1 Exercices

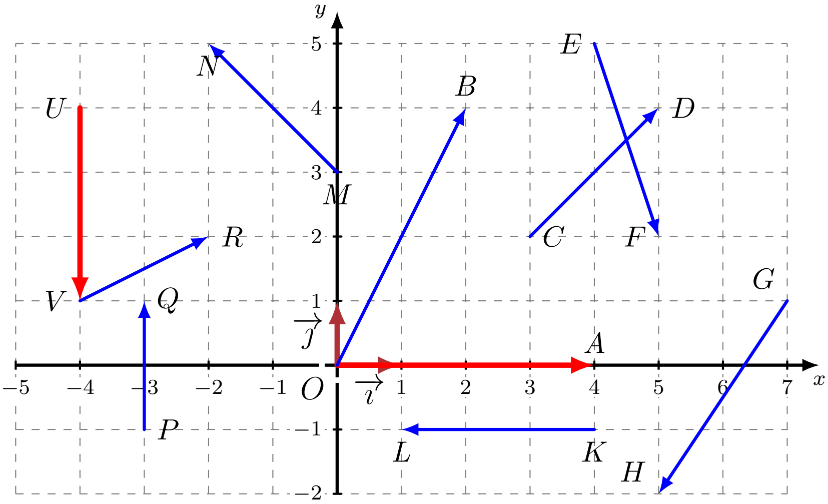
Exercice 1 — . À l'aide de la formule trigonométrique, déterminer pour $\vec{u} \cdot \vec{v}$ chaque cas le produit scalaire demandé :

1) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 135°$.

2) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = -60°$.

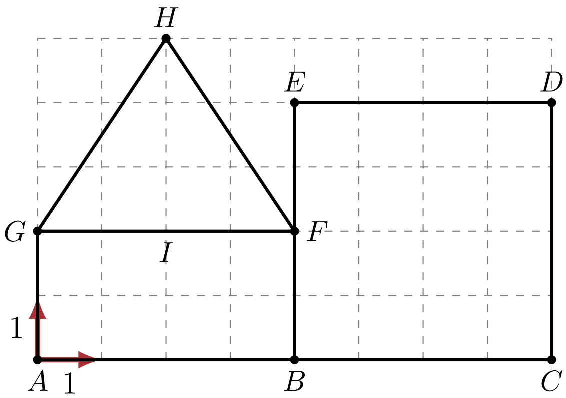
3) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 120°$.

Exercice 2 À l'aide de la formule du projeté, déterminer les produits scalaires suivants :



$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \ldots\ldots$	$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{KL} = \ldots\ldots$
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \ldots\ldots$	$\overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{PQ} = \ldots\ldots$
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CD} = \ldots\ldots$	$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = \ldots\ldots$
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{EF} = \ldots\ldots$	$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{KL} = \ldots\ldots$
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{GH} = \ldots\ldots$	$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = \ldots\ldots$
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MN} = \ldots\ldots$	$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{PQ} = \ldots\ldots$
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{UV} = \ldots\ldots$	$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{UV} = \ldots\ldots$

Exercice 3 À l'aide de la formule du projeté, déterminer les produits scalaires suivants :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

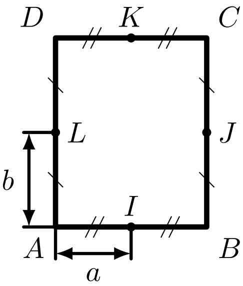
$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{FH} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{BC} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{FD} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 4 On considère le rectangle $ABCD$ et les points I, J, K et L milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Exprimer en fonction de $a = AI$ et $b = AL$ les produits scalaires suivants :



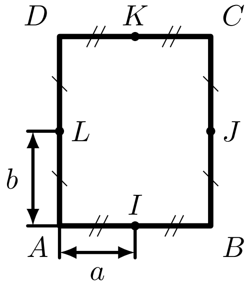
$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AI} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{AC} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IL} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{IK} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 5 Complétez pour calculer les produits scalaires demandés :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{B\ldots}+\overrightarrow{\ldots D}) \qquad \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AK} = (\overrightarrow{D\ldots}+\overrightarrow{\ldots B})\cdot\overrightarrow{AK}$$

$$= \overrightarrow{AC}\cdot\ldots\ldots\ldots + \overrightarrow{AC}\cdot\ldots\ldots\ldots \qquad = \overrightarrow{DA}\cdot\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\cdot\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



$$\overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{IC} = (\overrightarrow{I\ldots}+\overrightarrow{\ldots L})\cdot(\overrightarrow{I\ldots}+\overrightarrow{\ldots C})$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice 6 Dans chaque cas, utiliser les propriétés du produit scalaire pour déterminer :

1. Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=-3$, $\vec{w}\cdot\vec{v}=0$, $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=2$ et $\|\vec{w}\|=3$ alors :
   a) $(-2\vec{u})\cdot\vec{w} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   b) $(3\vec{v})\cdot\vec{v} = \ldots\vec{v}\cdot\vec{v} = \ldots\|\ldots\ldots\|^{\cdots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   d) $(\vec{u}-3\vec{v})\cdot(2\vec{w}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   e) $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Si $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=5$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=12$, alors :
   a) $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   b) $2\vec{u}\cdot(-3\vec{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   c) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

      $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. Si $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$, alors :

   $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   $= \ldots\ldots\ldots\ldots$
4. Si $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-6$, alors :

   $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   $= \ldots\ldots\ldots\ldots$

On se place dans un plan muni d'un repère **orthonormé** $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$:

Exercice 7

Calculer les produits scalaires demandés:

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}15\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.
5. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$
6. $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $A(2\ ;\ -1)$ et $B(-1\ ;\ -5)$.
7. $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$, $A(-1\ ;\ 2)$ et $B(-3\ ;\ 6)$
8. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ avec $A(5;\,6)$, $B(-1;\,4)$, $C(3;\,7)$, $D(8;9)$
9. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ avec $A(0\,;\,1)$, $B(3\,;\,0)$, $C(8\,;\,8)$, $D(5\,;\,5)$
10. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ avec $A(3;7)$, $B(2;-5)$, $C(-5;2)$, $D(-4;3)$

Exercice 8

Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}10\\-8\end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-14\\-4\end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3b\\-3a\end{pmatrix}$.

Exercice 9 — entrainement équations.

Pour chaque cas, déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\vec{u}\perp\vec{v}$.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\m\end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2m\\6\end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}m^2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\m-4\end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{m}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\m\end{pmatrix}$.

Exercice 10

Soit $P(3;4)$, $Q(-5;1)$, $M(7;3)$, and $N(4;11)$. Montrer que $(PQ)\perp(MN)$.

Exercice 11 — entrainement.

Soit $A(1\ ;\ 3)$, $B(3\ ;\ 1)$, $C(-2\ ;\ -2)$, $D(13\ ;\ -5)$ et $E(4\ ;\ 3)$. Justifiez si les droites données sont perpendiculaires ou pas :

1. (AC) et (AB)
2. (AC) et (BD)
3. (BE) et (CD)

Exercice 12 — nature d'un triangle.

Soit $J(6\ ;\ 1)$, $K(2\ ;\ 4)$, $L(1\ ;\ -5)$ et $M\left(-\frac{5}{2}\ ;\ -2\right)$.

1. Le triangle JKL est-il rectangle en J ?
2. Montrer que JKM est rectangle.

Exercice 13 — nature d'un quadrilatère.

Soit $F(-2\ ;\ -3)$, $A(-8\ ;\ 4)$, $K(-29\ ;\ -14)$ et $E(-23\ ;\ -21)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{EA}$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que $(FA)\perp(FE)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14 — entrainement.

Soit $T(-3\ ;\ 8)$, $R(8\ ;\ 0)$, $U(16\ ;\ 11)$ et $E(5\ ;\ 19)$.

1. Montrer que $TRUE$ est un parallélogramme.
2. Montrer que $TRUE$ est un parallélogramme rectangle.

3. Montrer que $TRUE$ est un parallélogramme carré.

Exercice 15 — entrainement.

Soit $C(2\ ;\ -9)$, $H(5\ ;\ -21)$, $E(8\ ;\ -9)$ et $F(5\ ;\ 3)$. Montrer que $CHEF$ est un losange.

Exercice 16 — révision.

Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}6a\\3b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4a\\2b\end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}3a\\-a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-15a\\5a\end{pmatrix}$.

Exercice 17 — revision.

Soit $P(-3;1)$, $Q(6;4)$, $M(2;-2)$, and $N(5;-1)$. Montrer que $(PQ)//(MN)$.

Exercice 18

Dans chaque cas donner les valeurs possibles de $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$. Arrondir au degré près.

1. $AB=6$, $AC=2\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=18$
2. $AB=\sqrt{6}$, $AC=\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5$
3. $AB=1$, $AC=3$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$
4. $AB=2$, $AC=\frac{1}{2}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

Exercice 19 — entrainement.

Déterminer $\widehat{BAC}$ au degré près.

1. $A(-3;2)$, $B(3;0)$ et $C(0;6)$
2. $A(-2;2)$, $B(3;1)$ et $C(-1;2)$
3. $A(1;3)$, $B(0;-2)$ et $C(1;-2)$

Exercice 20 — identités de polarisation. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

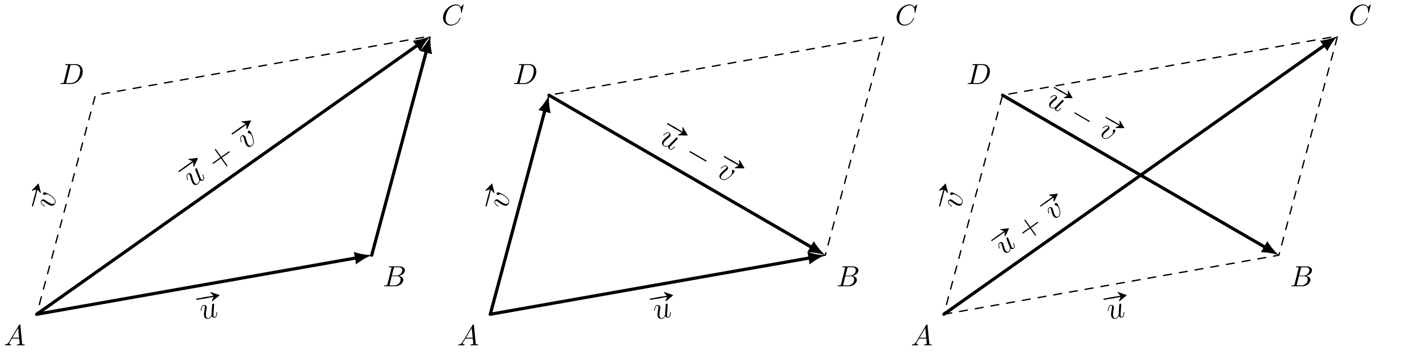
1. Développer $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ à l'aide des propriétés du produit scalaire.
2. En déduire que : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

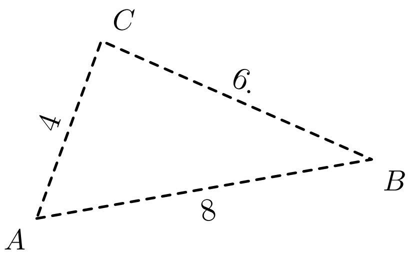
■ **Exemple 11.7**

On peut calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ à partir des longueurs AB, BC et AC, ou à partir des longueurs des diagonales AC et BD du parallélogramme $ABCD$.



Exercice 21

Compléter afin de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$:



$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{\ldots C} = -\overrightarrow{\ldots B} + \overrightarrow{\ldots C}$ ....

$BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{\boxed{}} - \overrightarrow{\boxed{}}\|^2$

$BC^2 = \|\boxed{}\|^2 - 2\boxed{}\cdot\boxed{} + \|\boxed{}\|^2$

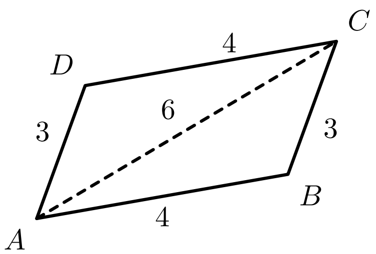
$BC^2 = \boxed{} - 2\boxed{} + \boxed{}$

$6^2 = 4^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 8^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$ ....

Exercice 22

Compléter afin de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$:



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{\ldots C} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{AD}$ ....

$AC^2 = \boxed{} = \|\overrightarrow{\boxed{}} + \overrightarrow{\boxed{}}\|^2$

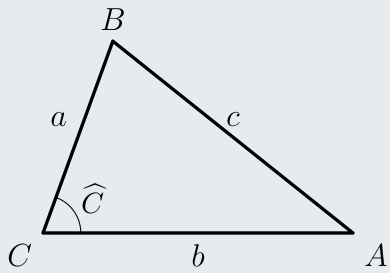
$AC^2 =$ ....

$AC^2 =$ ....

$6^2 =$ ....

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} =$ ....

Exercice 23 — ❤️ **Loi des cosinus ou Formule d'Al-Kashi.** au programme



Dans le triangle ABC ci-contre : a, b et c est la longueur du côté opposé au sommet A, B et C respectivement.

On a la relation :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$$

démonstration guidée et conclusion.

1. Complétez afin de démontrer l'égalité :

   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{\ldots B} = -\overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{\ldots B}$ ....

   $AB^2 = \|\overrightarrow{\boxed{}} - \overrightarrow{\boxed{}}\|^2 =$ ....

   $AB^2 =$ ....

   $c^2 = a^2 + b^2 -$ .... $= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$

2. Complétez par $=$, $>$ et $<$

   Si $0 \leqslant \widehat{C} < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos(\widehat{C})\ldots 0$ et $c^2 \ldots a^2 + b^2$.

   Si $\widehat{C} = \frac{\pi}{2}$, alors $\cos(\widehat{C})\ldots 0$ et $c^2 \ldots a^2 + b^2$. C'est la relation de P............................

Si $\frac{\pi}{2} < \widehat{C} \leqslant \pi$ alors $\cos(\widehat{C}) \ldots 0$ et $c^2 \ldots a^2 + b^2$.

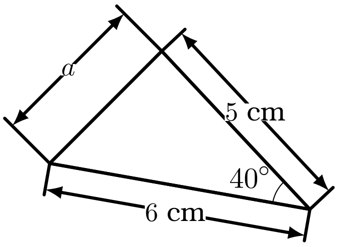
3. Écrire les lois du cosinus pour les côtés BC et AC :

$$BC^2 = \ldots + \ldots - 2 \ldots \cos(\widehat{\ldots\ldots}) \qquad AC^2 = \ldots + \ldots - 2 \ldots \cos(\widehat{\ldots\ldots})$$

■

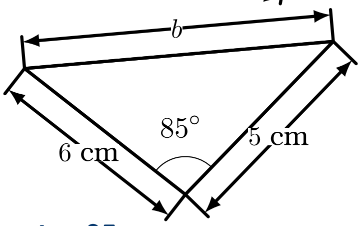
Exercice 24

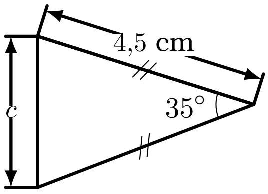
À l'aide de la loi des cosinus déterminer les longueurs demandées de chaque cas.

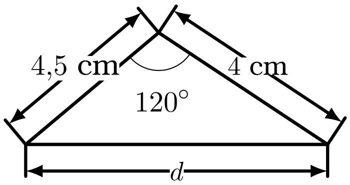


$$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos(40°)$$

$$a =$$

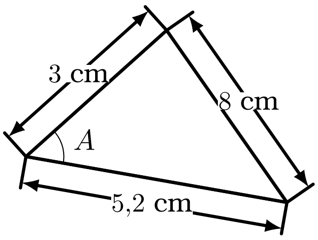






Exercice 25

À l'aide de la loi des cosinus déterminer les angles (au degré près) demandées de chaque cas.

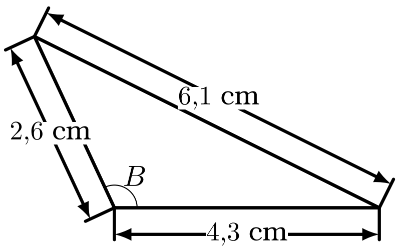


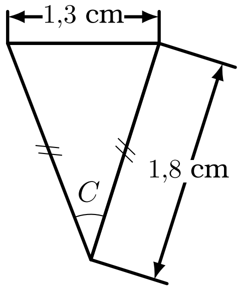
$$(\qquad)^2 = (\qquad)^2 + (\qquad)^2 - 2 \times \qquad \times \qquad \times \cos(A)$$

$$=$$

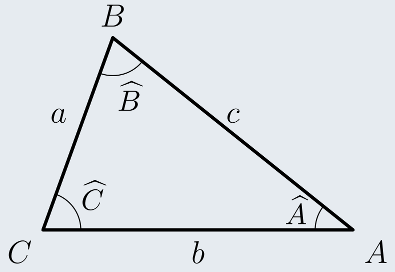
$$\cos(A) =$$

$$A =$$





Exercice 26 — Loi des sinus.



Dans le triangle ABC ci-contre : a, b et c est la longueur du côté opposé au sommet A, B et C respectivement.

On a la relation :

$$\frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$$

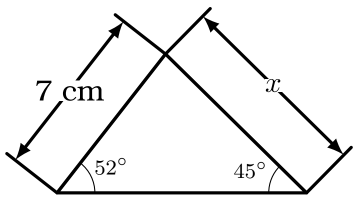
démonstration. On utilise la formule de l'aire : $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$ ■

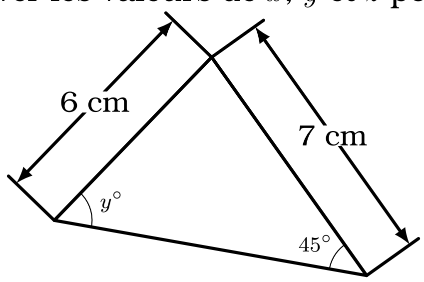
$$2\mathscr{A} = ab\sin(\widehat{C}) = bc\sin(\widehat{A}) = ca\sin(\widehat{B}) \quad \times\frac{1}{abc}$$

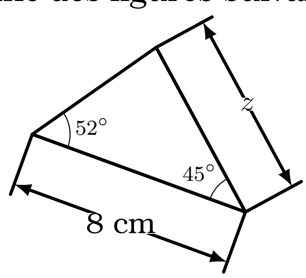
$$\frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$$

Exercice 27

En utilisant la loi des sinus, trouver les valeurs de x, y et z pour chacune des figures suivantes.

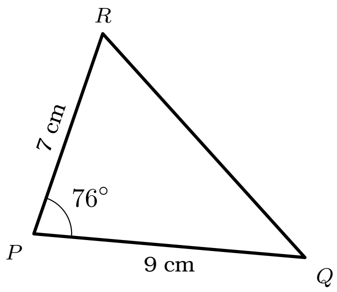


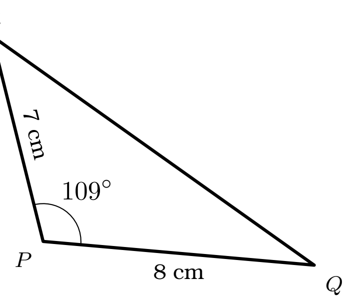


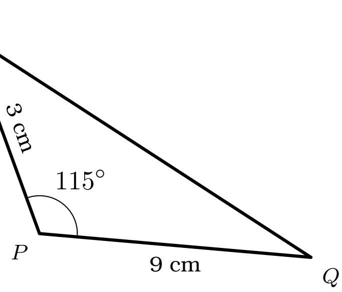


Exercice 28

Déterminer QR à l'aide de la loi des cosinus, puis l'angle $\widehat{RQP}$ à l'aide de la loi des sinus.







11.3 Exercices : solutions et éléments de réponse