Chapitre 10

Variables aléatoires finies

Table 10.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 10…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître**…/**savoir faire**…	🪨	💎	💍
Calcul de fonction dérivées : premiers principes			
déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire			
calculer et interprétez l'espérance d'une variable aléatoire			
calculer la variance et l'écart type d'une variable aléatoire			

10.1 Loi de probabilité de variables aléatoires finies

Définition 10.1 Soit une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ et sa loi de probabilité P. Une variable aléatoire X est une fonction

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto X(\omega) = x$$

$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ l'ensemble des images possibles.

Pour $x \in \mathbb{R}$ l'événement réalisé par les issues ω pour lesquelles $X(\omega) = x$ se note :

$$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

Sa probabilité est :

$$P(X = x) = \sum_{\omega \mid X(\omega)=x} p(\omega)$$

■ **Exemple 10.1** On considère le jeu suivant : « On lance un dé cubique équilibré et on note la face obtenue. Si le résultat est pair, on gagne 2€, si le résultat est 1, on gagne 4€. Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€. »

L'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ avec les issues 1 à 6 équiprobables.

X désigne la variable aléatoire des gains.

1. $X(\Omega) =$ ....
2. $\{X = 2\} = \{..........\}$ $\{X = -4\} = \{..........\}$ $\{X = 4\} =$ ....
3. $P(X = 2) =$ ....$P(X = -4) =$ ....$P(X = 4) =$ ....
4. On peut résumer les probabilités précédentes sous forme de tableau :

x_i	-4	2	4	**Total**
$P(X = x_i)$				

5. $\{X \geqslant -4\} = \{ .... \}$ $P(X \geqslant -4) =$
6. $\{0 < X \leqslant 4{,}5\} = \{ .... \}$ $P(0 < X \leqslant 4{,}5) =$

Définition 10.2 X v.a. réelle finie, $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$. La *loi de probabilité de la variable* X est la loi de probabilité P_X définie sur *des* parties de $I \subset \mathbb{R}$ (typiquement des singletons $\{x\}$ ou des intervalles)

$$P_X(I) = P(X \in I) = \sum_{x_i \in I} P(X = x_i)$$

R En particulier $P_X(\mathbb{R}) = P(X \in \mathbb{R}) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$.

10.2 Indicateurs d'une variable aléatoire

Définition 10.3 X v.a. réelle finie, prenant les valeurs $x_1; \dots; x_n$.

L'*espérance de* X est le réel noté $\mathbb{E}(X)$:

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} xP(X = x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

▪ **Exemple 10.2** En reprenant la v.a. de l'exemple 10.1, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum x_i P(x = x_i) = (-4) \times \qquad +2 \times \qquad +4\times \qquad = \frac{1}{3}$$

R On repète une expérience aléatoire un nombre N **assez grand** de fois. On enregistre les valeurs obtenues de la v.a. X. $\mathbb{E}(X)$ approche la moyenne des valeurs observées sur les N répétitions.

Démonstration. Pour tout i, on note $n_i =$ le nombre d'observation de la valeur x_i durant les N répétitions. La loi des grands nombres dit que :

$$\forall i \qquad P(X = x_i) \approx \frac{n_i}{N}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) \approx \sum_i \left(x_i \frac{n_i}{N} \right) = \frac{\sum_i n_i x_i}{N}$$

■

Définition 10.4 X v.a. réelle finie, prenant les valeurs $x_1; \dots; x_n$. La *variance de* X est le réel *positif ou nul* noté $\mathbb{V}(X)$:

$$\sigma^2 = \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$$

L'**écart-type** $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ est l'*écart quadratique moyen à* μ.

R L'écart-type est une mesure de la dispersion de la v.a. autour de la moyenne. Plus l'écart-type est petit, plus la variable aléatoire est centrée autour de sa moyenne. Plus précisément, l'*inégalité de Tchebychev* :

$$P(|X - \mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

En particulier :

$$P(-2\sigma < X - \mu < 2\sigma) \geqslant 75\%$$

$$P(-5\sigma < X - \mu < 5\sigma) \geqslant 96\%$$

Démonstration. La démonstration de ce résultat est simple.

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) \geqslant \sum_{|x_i - \mu| > k\sigma}^{n} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) \geqslant k^2\sigma^2 \sum_{|x_i - \mu| > k\sigma}^{n} = P(|x_i - \mu| > k\sigma)$$

■

10.3 Exercices

Exercice 1

Une tombola comporte 100 tickets et un unique ticket gagnant permettant de remporter 10000 €.

1. On achète le 3^e^ ticket mis en vente, et on note X_3 le gain obtenu.
   a) Compléter afin de déterminer la loi de probabilité de X_3.
      La variable aléatoire X_3 peut prendre les valeurs ....
      Si le ticket tiré est le ticket gagnant alors $X_3 = 10000$ et $P(X_3 = 10000) =$................
      Si le ticket tiré n'est pas gagnant alors $X_3 = 0$ et $P(X_3 = 0) =$...........................
   b) Compléter le tableau définissant la loi de probabilité de X_3 :

x	0	10000	**Total**
$P(X_3 = x)$			

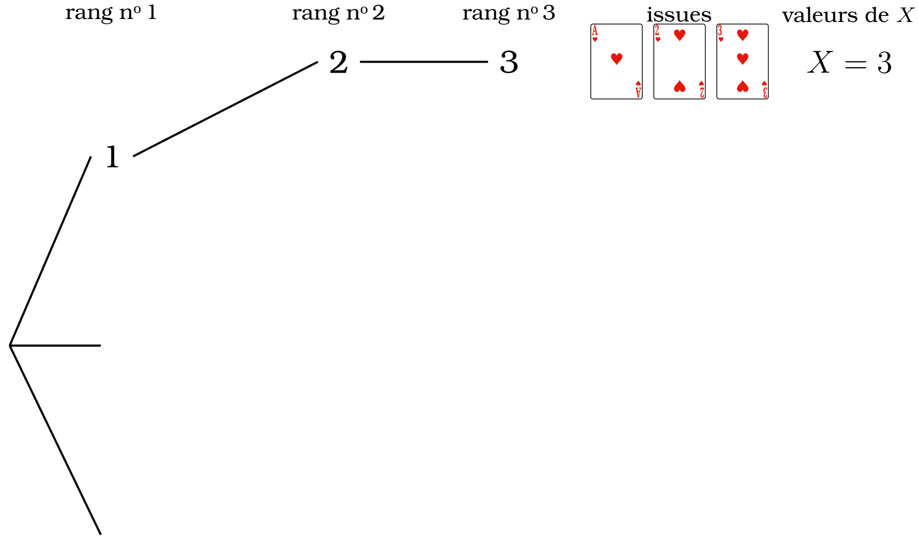
   c) $\mathbb{E}(X_3) = \sum_{i=1}^{2} x_i P(X_3 = x_i) = 0 \times \quad +10\,000\times \quad =$ ....
2. On achète le 3^e^ticket mis en vente puis le 57^e^. On note X_3 et X_{57} les V.A. des gains de chaque ticket. On note $Y = X_3 + X_{57}$ le gain total.
   a) Complétez et justifier que les événements $A = \{X_3 = 0\}$ et $B = \{X_{57} = 0\}$ ne sont pas indépendants :
      $P(B) =$............; $P_A(B) =$ ....; On a ....
   b) Compléter afin de déterminer la loi de probabilité de Y.
      La variable aléatoire Y peut prendre les valeurs ....
      Si le ticket gagnant est parmi les tickets achetés alors $Y = 10000$ et $P(Y = 10000) =$....
      Si le ticket gagnant n'est pas parmi les tickets achetés $Y = 0$ et $P(Y = 0) =$...........
   c) Compléter le tableau définissant la loi de probabilité de Y :

y	0	10000	**Total**
$P(Y = y)$			

   d) $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{2} x_i P(X = x_i) = 0 \times \quad +10\,000\times \quad =$ ....
   e) On constate que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_3 + X_{57}) =$ ....
3. Z est la V.A. des gains lorsque l'on achète les 100 tickets. $\mathbb{E}(Z) =$.........................

Exercice 2

On tire au hasard successivement 3 cartes numérotées de 1 à 3 et on note les valeurs des cartes dans l'ordre d'apparition. La V.A. X désigne le nombre carte dont la valeur est égale à son rang.



1. Compléter l'arbre ci-dessous
2. Compléter le tableau définissant la loi de probabilité de X

x	0	1	2	3	**Total**
$P(X = x)$					

3. $\mathbb{E}(X) = 0 \times P(X = 0) + \ldots \times P(X = \ldots) + \ldots \times P(X = \ldots) + \ldots \times P(X = \ldots)$

   $\mathbb{E}(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 3

On lance deux dés (d4) équilibrés. On note M la variable aléatoire correspondant au maximum, et S la somme des deux valeurs obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de M.

x	1	2	3	4	**Total**
$P(M = x)$					

2. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(M)$
3. Déterminer la loi de probabilité de M.

x								**Total**
$P(S = x)$								

4. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(S)$.

		Dé n° 2
Dé n° 1		

		Dé n° 2
Dé n° 1		

Exercice 4

Soit l'expérience aléatoire « on tire une carte dans un jeu de 32 cartes »et le jeu suivant :

- Si on tire un coeur, on gagne 2€.
- Si on tire un roi, on gagne 5€.
- Si on tire une autre carte, on perd 1€.

A♥ R♥ D♥ V♥ 10♥ 9♥ 8♥ 7♥
A♦ R♦ D♦ V♦ 10♦ 9♥ 8♦ 7♦
A♣ R♣ D♣ V♣ 10♣ 9♣ 8♣ 7♣
A♠ R♠ D♠ V♠ 10♠ 9♠ 8♠ 7♠

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte associe le gain (ou la perte).

1. Compléter afin de déterminer la loi de probabilité de X.

   La variable aléatoire X peut prendre les valeurs -1, 2, 5 et ....

   Si la carte tirée est le roi de coeur R♥, on gagne, $X = \ldots + \ldots = 7$ et $P(X = 7) =$...........

   Si la carte tirée est un coeur (mais pas un roi), $X =$........... et $P(X = \ldots) =$............

   Si la carte tirée est un roi (mais pas un coeur), $X =$........... et $P(X = \ldots) =$............

   Si la carte tirée n'est ni un coeur, ni un roi, $X =$ .... et $P(X = \ldots) =$ ....

2. Compléter le tableau définissant la loi de probabilité de X :

x	-1	2	5		**Total**
$P(X = x)$					

3. $P(X \geqslant 5) = P(X = \ldots\ldots) + P(X = \ldots\ldots) =$..

   La probabilité de ....est égale à $\frac{1}{8}$.

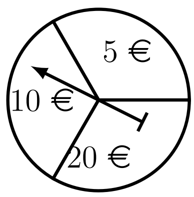
   Dans 1000 répétitions de l'expérience, les gains dépassent 5 € dans $1000 \times$ $\approx$ des essais.

4. $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = -1 \times \quad +2 \times \quad +5 \times \quad +7\times \quad =$............................

   Dans 1000 répétitions de l'expérience, le total des gains $\approx 1000\times$ .... $=$ .... €

Exercice 5

On fait tourner l'aiguille et on note la valeur X du gain obtenu.



1. Identifier les issues et compléter le tableau de la loi de probabilité de la v.a. X.

x en €			
$P(X = x)$			

2. Déterminer l'espérance du gain $\mathbb{E}(X)$.
3. Quel est le gain espéré par épreuve lorsqu'on prend compte de la participation de 15 € par tirage ?

Exercice 6 X est la v.a. des gains possibles à une loterie sans tenir compte du prix du billet :

x en €	0	5	10	100	500
$P(X=x)$	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

   $A =$« le joueur est gagnant ». $P(A) = P(X > \ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   $B =$« le joueur a gagné au moins 100 € ». $P(B) = P(X \geqslant \ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

   $C =$« le joueur a gagné au plus 10 € ». $P(B) = P(X \leqslant \ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   $P(A \cap C) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Calculer l'espérance du gain $\mathbb{E}(X)$:

   $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. L'organisateur pense fixer la participation à 20 €. Le jeu sera-t-il favorable au joueur ?

> En jeu de paris, l'espérence des gains est l'espérence des dividendes attendus moins le taux de participation du jeu. Un jeu est équitable si l'espérence des gains est nulle.

Exercice 7 On considère le jeu de hasard. La loi de probabilité de la variable aléatoire X correspondant au gain est résumée dans le tableau :

x	0	3	5	50
$P(X=x)$	0.4	0.3	0.28	0.02

Sachant que le montant de la mise est fixé à 4 €, déterminer si le jeu est équitable.

Exercice 8

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau ci-dessous :

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	k	$2k$	$4k$	$2k$	k

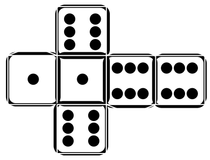
1. Donner une équation vérifiée par k et en déduire k
2. En déduire $\mathbb{E}(X)$.
3. On repète l'expérience 1000 fois, et on note les valeurs de X observées.
   a) Donner une estimation du nombre d'observations de l'événement $\{X = 1\}$
   b) Donner une estimation de la somme des observations.

Exercice 9 La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau ci-dessous :

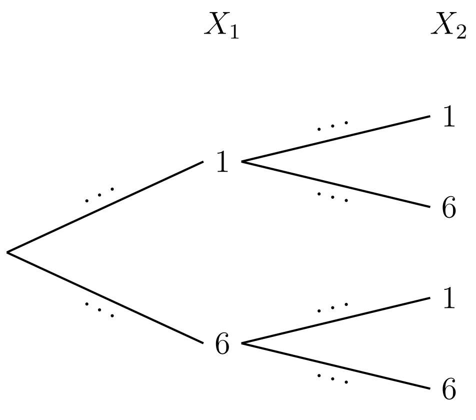
x	10	20	30	40	50
$P(X=x)$	$\frac{k}{10}$	$\frac{k}{20}$	$\frac{k}{30}$	$\frac{k}{40}$	$\frac{k}{50}$

1. Donner une équation vérifiée par k et en déduire que $k = \frac{600}{137}$.

2. En déduire $\mathbb{E}(D)$.
3. On repète l'expérience 100 fois, donner une estimation de la somme des valeurs de X obtenues.

Exercice 10 On lance deux dés de Grim magenta :  .

1. On note X_1 la variable aléatoire correspondant aux points affichées sur le 1 dé et X_2 celle sur le 2 dé.
   a) Préciser les valeurs possibles de X_1 et X_2
   b) Déterminer la loi de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2.
   c) Déterminer $\mathbb{E}(X_1)$.
2. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = X_1 + X_2$.
3. Complétez l'arbre de probabilité ou le tableau double entrée et déterminer les valeurs possibles pour Y ainsi que sa loi de probabilité.



		Dé n° 2 : X_2
Dé n° 1 : X_1		

4. Calculer $\mathbb{E}(Y)$. Que constatez vous ?

Exercice 11

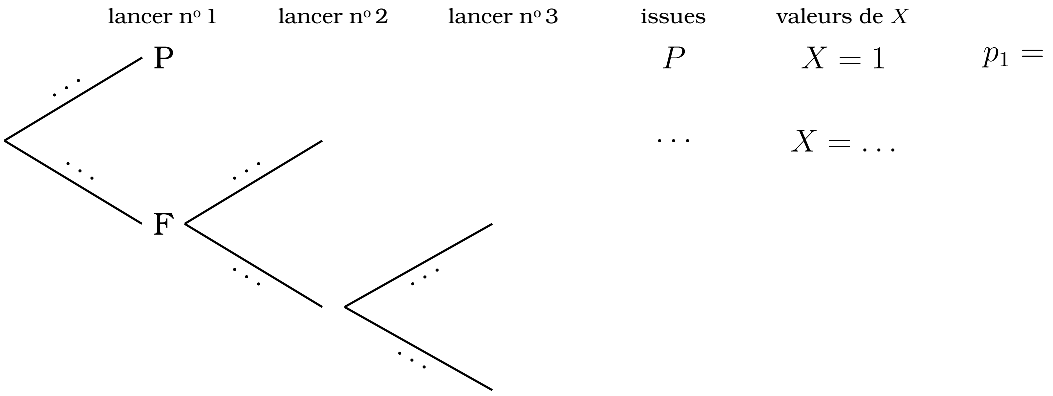
On lance au plus trois fois une pièce bien équilibrée, et on s'arrête dès que l'on a obtenu « Pile ».

Les issues de cette expérience peuvent s'écrire : P, FP, FFP et FFF.

La variable aléatoire X correspond au nombre total de lancers.

1. Les issues sont-elles équiprobables ?

2. En complétant l'arbre de probabilité déterminer les probabilités des issues.



3. Déterminer la loi de probabilité de X et la résumer dans un tableau.
4. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 12

On lance au plus quatre fois un dé équilibré d6, et on s'arrête dès que l'on a obtenu un 6. La variable aléatoire X correspond au nombre total de lancers réalisés. À l'aide d'un arbre identifier la loi de probabilité de X et déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 13 — Point calculatrice.

Pour chacune des variables aléatoires suivantes dont on donne la loi de probabilité à l'aide d'un tableau. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type *en rappellant les formules du cours* (on arrondira les résultats à $0,01$ près).

x_i	-4	0	9	25
$P(X = x_i)$	$0,5$	$0,2$	$0,2$	$0,1$

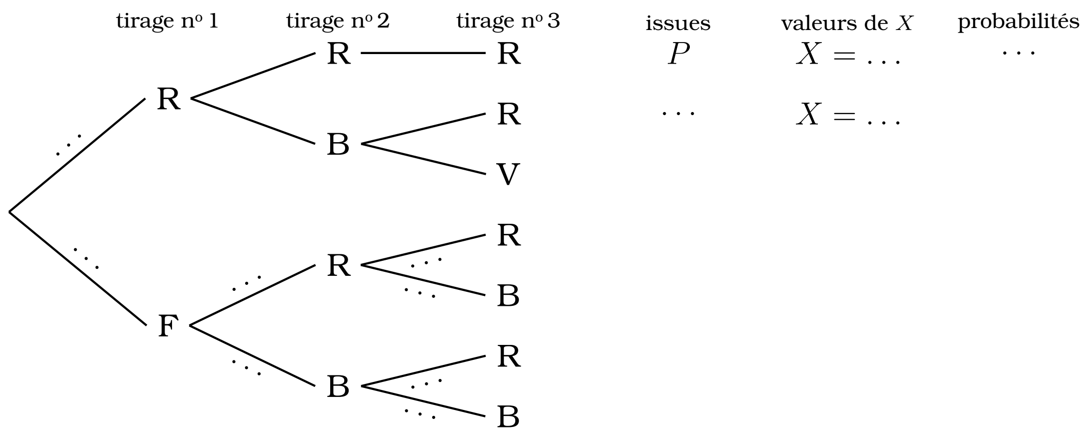
x_i	-25	-3	5	100
$P(Y = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$0,3$	$0,2$

x_i	-5	0	4	10
$P(Z = x_i)$	$0,42$	$0,38$	$0,15$	$0,05$

Exercice 14

Une urne contient 3 boules bleues et deux boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise 3 boules. X designe le nombre de boules bleues tirées.

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous et identifier les valeurs possibles de X.



2. Déterminer la loi de probabilité de X

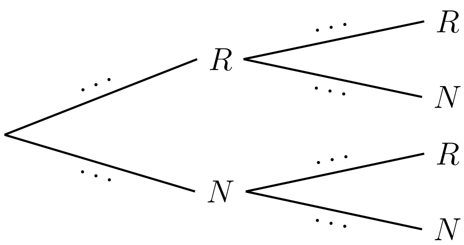
x	1	2	3	**Total**
$P(X=x)$				

3. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathbb{V}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

Exercice 15 — Examen blanc type E3C.

Une urne contient deux boules rouges et trois boules noires toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard une première boule en notant sa couleur puis on la remet dans l'urne. On tire ensuite toujours au hasard une deuxième boule en notant sa couleur.

1. On note R l'évènement « tirer une boule rouge » et N l'évènement « tirer une boule noire ». Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à cette expérience.



2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
3. Si un joueur tire une boule rouge, il gagne 20 euros. S'il tire une boule noire, il perd 10 euros.

   On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, en euros, à l'issue des deux tirages successifs. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
4. Calculer la probabilité que le joueur gagne de l'argent.
5. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et en donner une interprétation.

Exercice 16 — Formule de König-Huygens. Une V.A. réelle finie vérifie $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$.

Complétez pour établir cette propriété dans le cas simplifié ou la V.A. X ne prend que 4 valeurs :

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = x_1 p_1 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - \mu)^2 p_i$$

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{4} (x_i^2 - \dots\dots x_i + \dots\dots) p_i$$

$\mathbb{V}(X) = (x_1^2 - 2\mu x_1 + \mu^2)p_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\mathbb{V}(X) = x_1^2 p_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad -2\mu(x_1p_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) + \mu^2(p_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(\ldots\ldots) \qquad - 2\mu\mathbb{E}(\ldots\ldots) \qquad + \mu^2 \ldots\ldots$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(\ldots\ldots) - 2\mu \ldots\ldots + \mu^2 \ldots\ldots$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(\ldots\ldots) - \ldots\ldots$

Exercice 17

Utiliser la formule de König-Huygens pour déterminer les variances des v.a. X et Y dont les loies sont décrites dans le tableau ci-dessous :

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
$P(Y = x_i)$	0.02	0.18	0.61	0.16	0.03

Exercice 18

On considère la v.a. qui prend les valeurs 0 et 1, avec $P(X = 1) = p$.

1) Exprimer $q = P(X = 0)$ en fonction de p

2) Montrer que $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = pq$.

Exercice 19

On lance un dé équilibré. On note X la v.a. correspondant au nombre obtenu. Complétez pour déterminer ses paramètres μ et σ :

$\mu = \mathbb{E}(X) = 1 \times \ldots\ldots + 2 \times \ldots\ldots + 3 \times \ldots\ldots + 4 \times \ldots\ldots + 5 \times \ldots\ldots + 6 \times \ldots\ldots$

$\mu = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\mathbb{E}\left(X^2\right) = 1^2 \times \ldots\ldots + 2^2 \times \ldots\ldots + 3^2 \times \ldots\ldots + 4^2 \times \ldots\ldots + 5^2 \times \ldots\ldots + 6^2 \times \ldots\ldots$

$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sigma = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 20

Soit une variable aléatoire finie X, et a et $b \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(X + b) = \mathbb{E}(X) + b$$

formules que l'on regroupe dans $\quad \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$

Complétez pour établir cette propriété dans le cas simplifié ou la V.A. X ne prend que 4 valeurs :

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X = x)$	p_1	p_2	p_3	p_4

1. $\sum_{i=1}^{4} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 =$ ....
2. $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = x_1p_1+$ ....
3. $\mathbb{E}(aX + b) = \sum_{i=1}^{4}(ax_i + b)p_i = (ax_1 + b)p_1+$ ....
4. $\mathbb{E}(aX + b) = ax_1p_1 + bp_1+$ ....
5. $\mathbb{E}(aX + b) = ax_1p_1 +$ .... $+bp_1+$ ....
6. $\mathbb{E}(aX + b) = a(x_1p_1 + x_2p_2+$ ....$) + b(p_1 + p_2+$ ....$)$
7. $\mathbb{E}(aX + b) = a$ .... $+ b$ ......

Exercice 21

Une entreprise compte 100 salariés. Le tableau de répartitions des salaires est :

Salaire en €	1550	1750	2200	3000
Nb de personnes	40	35	24	1

On tire un employé au hasard. On note X la v.a. correspondant au salaire perçu.

1. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.
2. Le directeur décide d'augmenter tous les salaires de 10 €. Que devient l'espérance ?
3. Le directeur décide d'augmenter les salaires de 2%. Comment évolue l'espérance ?

Exercice 22 X est une v.a. prenant 4 valeurs. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathbb{E}\left((X - x)^2\right)$

1. Montrer que $f(x) = \sum_{i=1}^{4}(x_i - x)^2 p_i = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2x\mathbb{E}(X) + x^2$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f admet un minimum et que ce minimum est atteint pour $x = \mathbb{E}(X)$.

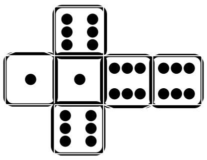
Exercice 23

X est une v.a. prenant 4 valeurs. a et $b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathbb{V}(X + b) = \mathbb{V}(X)$.
2. Montrer que $\mathbb{V}(aX) = a^2X$
3. Exprimer $\sigma(aX + b)$ en fonction de $\sigma(X)$.

Exercice 24 Soit une v.a. finie X. Expriquer pourquoi $\mathbb{E}\left(X^2\right) \geqslant \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$

■ **Exemple 10.3 — Simuler une variable aléatoire de loi quelconque à partir d'une loi équiprobable.** lien

Soit le dé de Grim magenta  .

Script 10.1 – fonction `magenta()` retourne une réalisation d'un lancer de dé magenta de Grim : $P(X=1)=\frac{2}{6}$ et $P(X=6)=\frac{4}{6}$

```
from random import randint
def magenta() :
    face = randint(1,6)
    if face <= 2 :
        return 1
    else :
        return 6
```

Pour simuler la variable aléatoire somme de deux dés de Grim magenta S : $P(S=2)=\frac{4}{36}$, $P(S=7)=\frac{16}{36}$ et $P(S=12)=\frac{16}{36}$ on peut procéder de deux manières :

```
def double_magenta() :
    total = magenta() + magenta()
    return total
```

Script 10.2 – fonction `double_magenta()` retourne une réalisation de la variable aléatoire S.

```
def double_magenta() :
    face = randint(1,36)
    if face <= 4 :
        return ....
    elif face <= .... :
        return 7
    else :
        return 12
```

Script 10.3 – fonction `frequence_magenta(n)` retourne la fréquence relative de l'issue 1 pour `n` répétitions du lancer d'un dé de Grim magenta.

```
def frequence_magenta(n) :
    compteur = 0
    for i in range(n) :
        lancer = magenta()
        if lancer == 1 :
            compteur = compteur + 1
    f = compteur/n
    return f
```

Script 10.4 – fonction `frequence_double_magenta(x,n)` retourne la fréquence relative de l'issue `x` pour `n` répétitions d'un double lancer de dés magentas.

```
def frequence_double_magenta(x,n) :
    compteur = 0
    for i in range(n) :
        lancer = ...
        if lancer == .... :
            compteur = compteur + 1
    f = compteur/n
    return f
```

Script 10.5 – fonction `moyenne_magenta(n)` retourne une estimation $\mathbb{E}(X)$ en calculant la valeur moyenne `n` répétitions.

```python
def moyenne_magenta(n) :
    cumul = 0
    for i in range(n) :
        cumul = cumul + magenta()
    moyenne = cumul / n
    return moyenne
```

Script 10.6 – fonction `moyenne_double_magenta(n)` retourne une estimation $\mathbb{E}(S)$ en calculant la valeur moyenne `n` répétitions.

```python
def moyenne_double_magenta(n) :
    cumul = 0
    for i in range(n) :
        cumul = cumul + ...
    moyenne = cumul / n
    return moyenne
```

Exercice 25 — à vous lien. Soit les dés de Grim jaune (3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 8 ; 8) et vert (0 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5).

1) Écrire les fonctions `jaune()` et `rouge()` qui retournent l'issue d'un lancer de dé jaune et d'un rouge.

```python
from random import randint
def jaune() :
    face = randint(1,6)
    if face <= ... :
        return ...
    else :
        return ...
```

```python
from random import randint
def vert() :
    face = randint(1,6)
    if face <= ... :
        return ...
    else :
        return ...
```

2) On fait jouer un dé vert contre un jaune. Déterminer $P(\text{Jaune} > \text{Vert})$

3) On souhaite vérifier le résultat obtenu à la question précédente à l'aide d'un script Python. Complétez le script suivant afin que l'instruction `frequence_jaunebatvert(n)` retourne la fréquence de victoire du dé jaune sur `n` épreuves.

```python
def frequence_jaunebatvert(n) :
    compteur = 0
    for i in .......... :
        j = ...
        v = ...
        if .......... :
            compteur = compteur + 1
    f = .....
    return f
```

4) On affronte désormais une paire de dés jaunes avec une paire de dés vert en comparant le total de chaque paire. Dans le script ci-dessous l'instruction `frequence_doublejaunebatdoublevert(n)` retourne la fréquence de victoire d'une paire de dés jaunes sur `n` épreuves. Complétez et tester le script.

```python
def frequence_doublejaunebatdoublevert(n) :
    compteur = 0
    for i in .......... :
        j = ...
        v = ...
        if .......... :
            compteur = compteur + 1
    f = .....
    return f
```

5) Que constatez vous ? Montrer que $P(\text{Double jaune} > \text{Double vert}) = \frac{56}{81}$.

6) Complétez le script pour calculer la valeur moyenne du total d'une paire de deux dés jaunes après `n` répétitions.

```python
def moyenne_double_jaune(n) :
    cumul = ....
    for i in ........ :
        ...
```

```
        ...
    return ...
```

Dans Python, on peut créer et utiliser des listes (de lettres, de mots, de chiffres, ...).

Une liste est une suite d'éléments **numérotés** dont le **premier indice est 0** (on commence à compter à partir du rang 0).

Les éléments sont entre crochets `[]` et séparés par des virgules.

Pour atteindre l'élément d'indice « i » de la liste « `L` », il suffit d'écrire « `L[i]` ».

■ **Exemple 10.4**

```
>>> L = ["P","I","Z","Z","A"]
>>> L[1]      # terme de rang 1
'I'
>>> L[4]
'A'
>>> L[0]      # terme de rang 0
'P'
>>> len(L)    # nbr d'éléments de L
5
>>> L.append("S")
>>> # ajoute élément en fin de L
>>> L
['P', 'I', 'Z', 'Z', 'A', 'S']
>>> M = []     # liste vide
>>> len(M)
0
```

Créer des listes **par compréhension** à l'aide de l'instruction `for` :

```
>>> ma_liste=[i**2+1 for i in range(5)]
>>> ma_liste
[1, 2, 5, 10, 17]
```

ou à l'aide de la méthode `append` :

```
ma_liste=[]      #liste vide
for i in range(5) :
    ma_liste.append(i**2+1)
```

Parcourir une liste avec une boucle for :

```
ma_liste = ['I','did','it','for','love']
for i in range(len(ma_liste)) :
    print(ma_liste[i])
```

affiche : I did it for love

■ **Exemple 10.5** On reprend la fonction `magenta()` qui simule le dé magenta de Grim. Ce script simule `n` lancer de dés et calcule la moyenne des résultats de l'échantillon complet.

```
n=400                                     # taille de l'échantillon
echantillon=[magenta() for i in range(n)] # liste des issues de n épreuves
x = sum(echantillon)/n                    # moyenne de l'échantillon
```

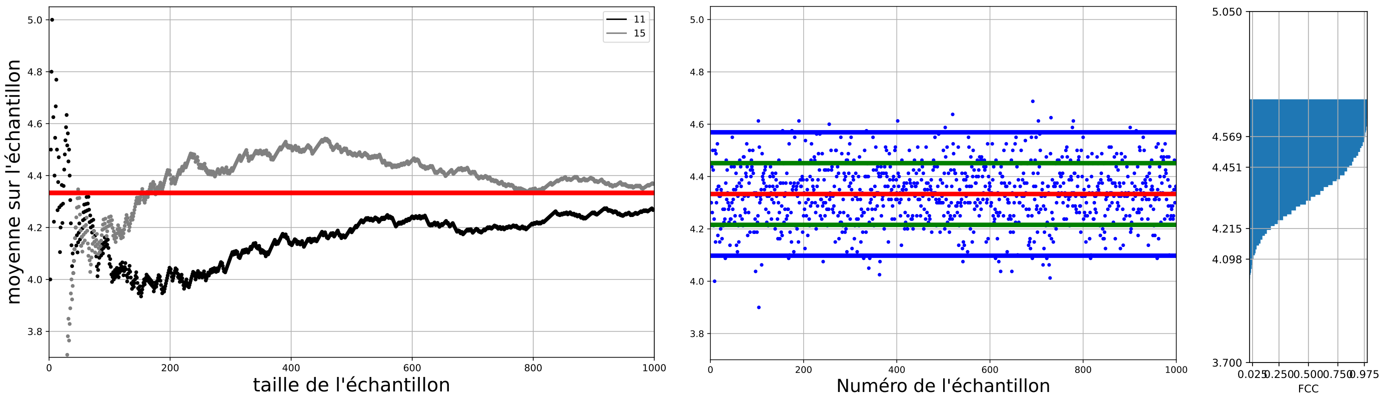


Figure 10.1 – à gauche Représentation de la valeur moyenne sur un échantillon en fonction de la taille de l'échantillon. La valeur moyenne se rapproche de l'espérance.
à droite Pour chacun des 1000 échantillons de taille 400, est représentée la moyenne des 400 valeurs obtenues. Près de 95% des échantillons vérifient : $\overline{x} \in [\mu - \frac{2\sigma}{400}; \mu + \frac{2\sigma}{400}]$

10.4 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 6 . 1) $P(A) = 4/5$, $P(B) = 1/10$, $P(C) = 9/10$ et $P(A \cap C) = 7/10$

2) $\mathbb{E}(X) = 48$

3) Le jeu est favorable au joueur. L'espérance de gagner en tenant compte de la participation est de 28€.

■