Chapitre 5

Racine carrée et théorème de Pythagore. Triangles égaux

5.1 La racine carrée

Définition 5.1 La racine carrée d'un nombre positif $b \geqslant 0$ est le nombre *positif* noté $\sqrt{b}$ dont le carré vaut b.

$$\left(\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{b} \times \sqrt{b} = b$$

En géométrie $\sqrt{b}$ est « la longueur du côté d'un carré d'aire b ».

R Pour des nombres positifs $b \geqslant 0$, on peut noter $\sqrt{b} = b^{0,5}$. Cette notation est compatible avec les règles d'opérations sur les exposants :

$$\left(b^{0,5}\right)^2 = b^{0,5\times 2} = b^1 = b$$
$$b^{0,5} \times b^{0,5} = b^{0,5+0,5} = b^1 = b$$

Théorème 5.1 Pour a et b nombres positifs :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

5.1.1 Exercices

estimer des racines carrées.

résoudre des problèmes simples de pythagore

propriétés

Exercice 1

Sans utiliser la calculatrice, calcule (et justifie) :

$\sqrt{25}$ $\qquad$ $\sqrt{7^2}$ $\qquad$ $\sqrt{(3,2)^2}$ $\qquad$ $\sqrt{(-2,1)^2}$ $\qquad$ $\left(\sqrt{4,5}\right)^2$ $\qquad$ $\left(\sqrt{-9}\right)^2$

■ **Exemple 5.2 — Simplifier.** Écrire une expression avec le terme sous la racine le plus petit possible

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{12} && \text{\textit{identifier le plus grand carré facteur de} } 12 \\ &= \sqrt{4\times 3} && \text{\textit{utiliser} } \sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= \sqrt{4}\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$B = \sqrt{75}$ $\qquad$ $C = 3\sqrt{8}$

Exercice 2

Écrire les expressions suivantes avec le terme sous la racine le plus petit possible :

$A = \sqrt{18}$	$D = \sqrt{32}$	$G = \sqrt{28}$	$J = \sqrt{63}$	$M = \sqrt{80}$
$B = \sqrt{20}$	$E = \sqrt{200}$	$H = \sqrt{99}$	$K = \sqrt{45}$	$N = \sqrt{150}$
$C = \sqrt{50}$	$F = \sqrt{48}$	$I = \sqrt{27}$	$L = \sqrt{80}$	

Exercice 3

Mêmes consignes :

$A = 5\sqrt{8}$	$C = 3\sqrt{20}$	$E = 2\sqrt{50}$	$G = 6\sqrt{44}$	$I = 3\sqrt{80}$
$B = 2\sqrt{12}$	$D = 4\sqrt{27}$	$F = 5\sqrt{18}$	$H = 5\sqrt{200}$	$J = 10\sqrt{75}$

■ **Exemple 5.3** Sans utiliser de calculatrice, comparer $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$:

Exercice 4

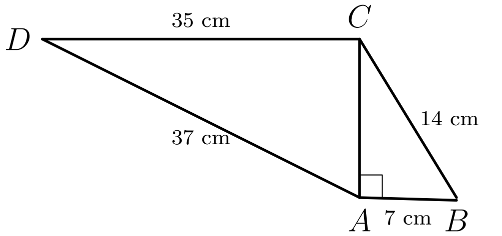
Écrire les nombres suivants sous la forme $\sqrt{k}$ ou k est un entier. Par exemple $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$.

$$3\sqrt{5},\quad 6\sqrt{3};\quad 8\sqrt{5};\quad 4\sqrt{6};\quad 10\sqrt{10};\quad 7\sqrt{7}$$

Exercice 5

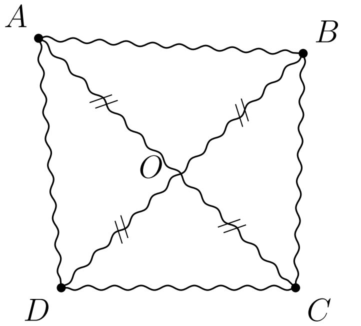
a) Quelle est l'aire $\mathscr{A}$ d'un carré de côté 3^7 cm ?
b) Combien mesure le côté d'un carré d'aire 3^{10} cm^2 ?
c) Quelle est l'aire d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droite mesurent 5^3 mm ?
d) Quel est le périmètre du triangle précédent ?
e) Que devient l'aire de mon triangle précédent, si je multiplie les longueurs par 3?

Exercice 6



a) Donne la longueur exacte du côté $[CA]$, puis calcule une valeur approchée au centimètre prés.
b) Le triangle ACD est-il rectangle? Justifie.

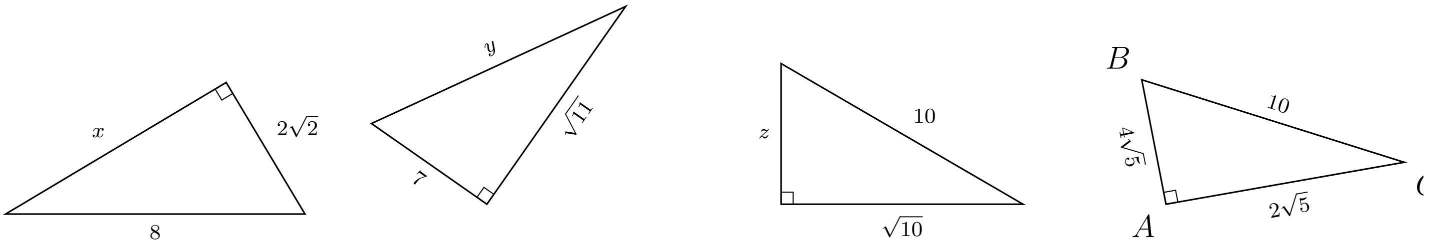
Exercice 7



La figure ci-contre est codée et réalisée à main levée.
Elle représente un quadrilatère $ABCD$ dont les diagonales se croisent en un point O. On donne: OA $= 3,5$ cm et AB $= 5$ cm.
On s'intéresse à la nature du quadrilatère ABCD qui a été représenté.

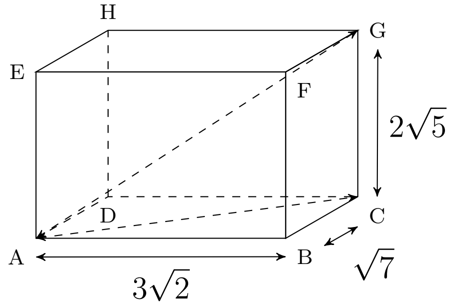
1) Peut-on affirmer que ABCD est un rectangle ? Justifier.
2) Peut-on affirmer que ABCD est un carré ? Justifier.

Exercice 8 — .



a) Calculer la longueur manquante et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{k}$, avec k entier le plus petit possible.
b) Justifier soigneusement que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 9 — .



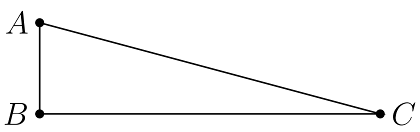
Soit le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-contre :

1. Montrer que $AC = 5$.
2. Calculer AG.

Exercice 10

Pour le triangle ABC ci-dessous, les longueurs des côtés sont exprimées en fonction d'un nombre x :

$$\begin{cases} AB = 3x + 6 \\ BC = 4x + 8 \\ AC = 5x + 10 \end{cases}$$



a) Faire la figure lorsque $x = 0$. Le triangle obtenu est-il rectangle ? **Justifie**.
b) Montrer que pour tout nombre x positif, le triangle ABC est rectangle en B.

5.2 Égalité des triangles

Définition 5.2 — triangles égaux. Deux triangles sont égaux si leurs trois côtés et leur trois angles sont égaux deux à deux.

Les triangles ABC et IJK de la figure 5.1 sont égaux. On a les 6 égalités suivantes :

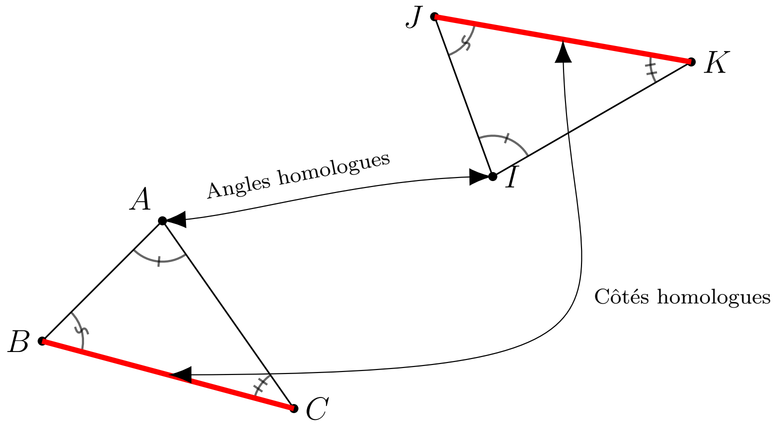
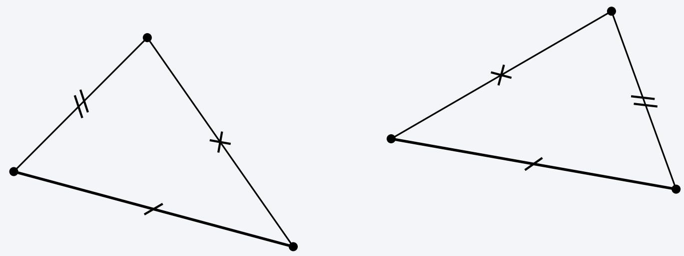


Figure 5.1 – ABC et IJK sont égaux.

$\widehat{A} = \widehat{I}$	$\widehat{B} = \widehat{J}$	$\widehat{C} = \widehat{K}$
$BC = JK$	$AC = IK$	$AB = IJ$

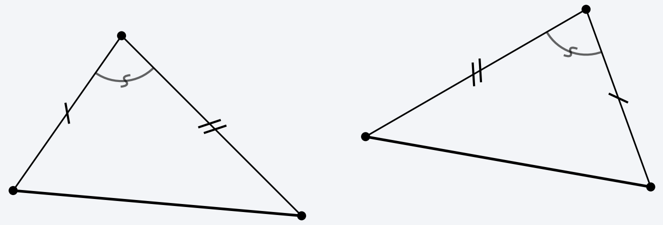
Il n'est pas nécessaire de vérifier les six égalités pour prouver que les triangles sont égaux et que les 6 égalités sont vraies. Il suffit de vérifier que l'on est dans l'une des trois situations suivantes.

Postulat 5.4 — Critère CCC. Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.

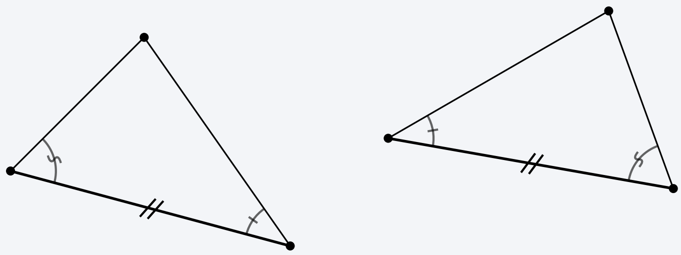


R Cas RHC (Rectangle-Hypoténuse-Côté). Deux triangles rectangles, qui ont même longueur d'hypoténuse et une même longueur d'un côté de l'angle droit sont égaux.

Postulat 5.5 — Critère CAC. Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux.



Postulat 5.6 — Critère ACA. Si deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux, alors ils sont égaux.



R Il n'y a pas de critère ACC

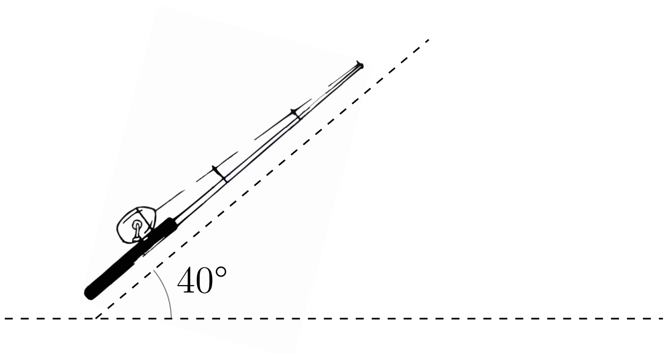


Figure 5.2

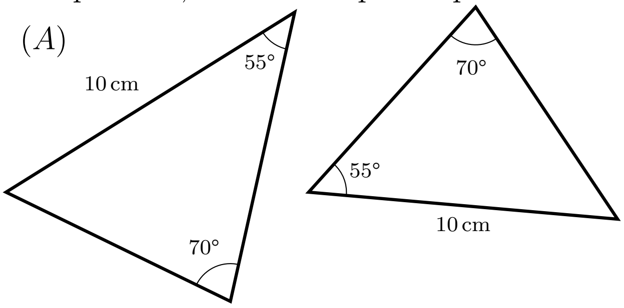
R Avoir 2 angles homologues égaux n'est pas suffisant pour dire que les triangles sont égaux.

5.2.1 Exercices

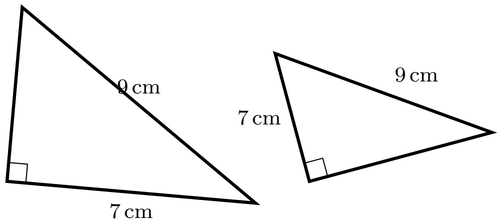
Exercice 1 — Égalité des triangles.

Si possible, démontrer que les paires de triangles sont égaux. Les figures ne sont pas à l'échelle.

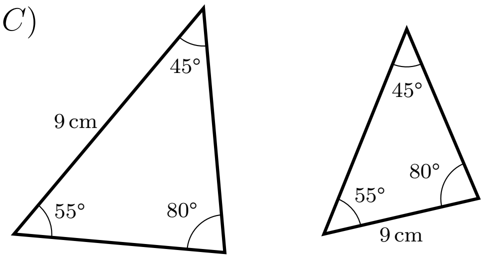
(A)



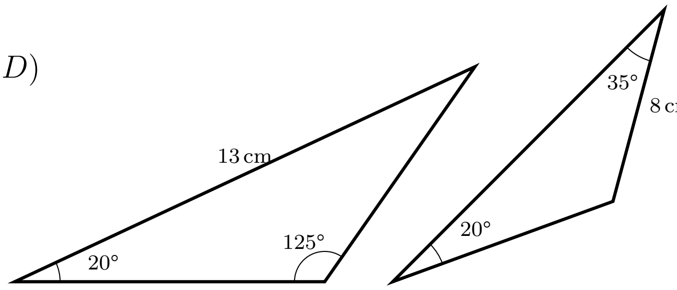
(B)



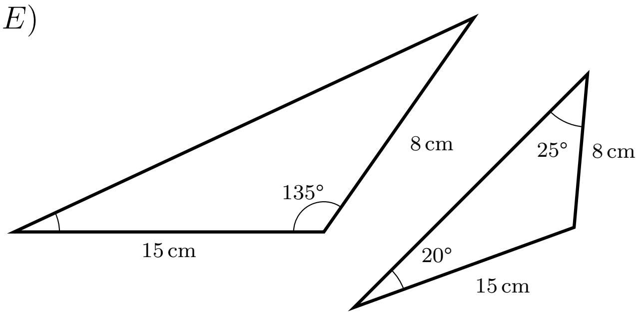
(C)



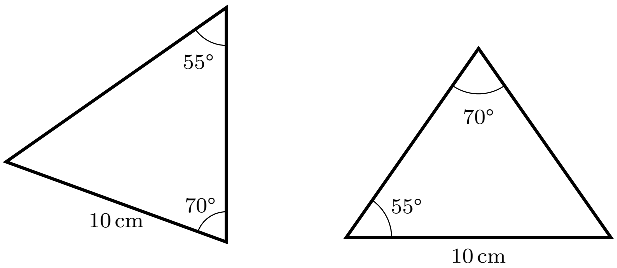
(D)



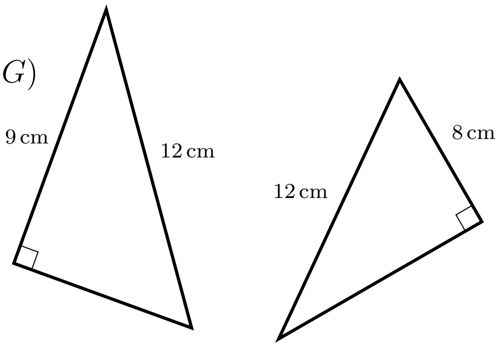
(E)



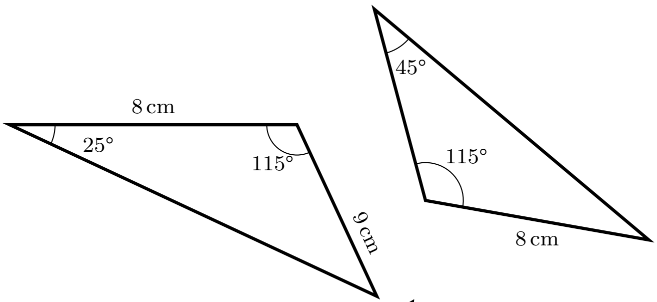
(F)



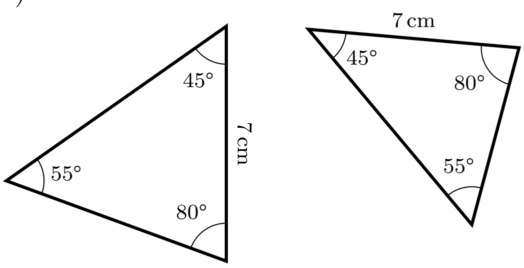
(G)



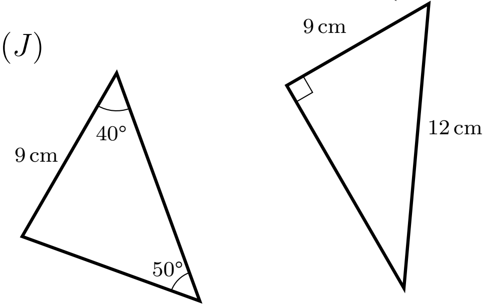
(H)



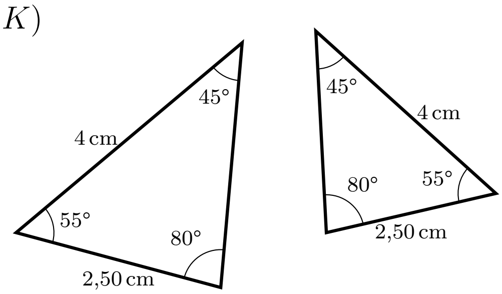
(I)



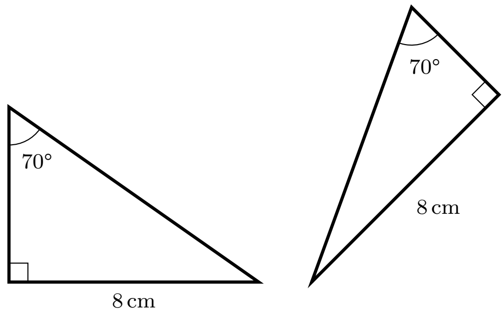
(J)



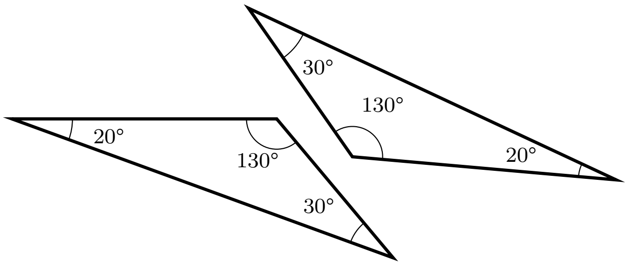
(K)



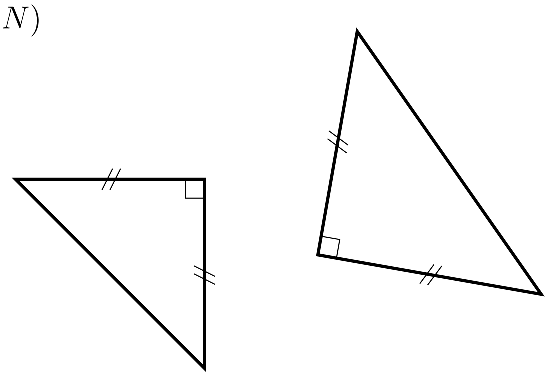
(L)



(M)



(N)



Exercice 2

$ABCD$ est un parallélogramme. O est l'intersection des diagonales.

a) Montrer que les triangles ABC et ACD sont égaux.

b) Montrer que les triangles OAB et OCD sont égaux.

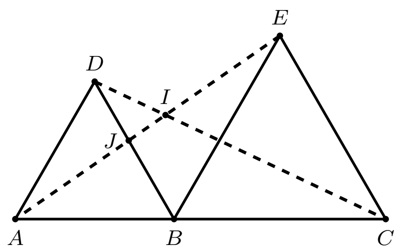
Problème 1

B est un point du segment $[AC]$. Les triangles ABD et BCE sont situés du même côté du segment $[AC]$ et sont équilatéraux. Le point I est l'intersection des segments $[AE]$ et $[CD]$, et J est l'intersection de $[BD]$ et $[AE]$.

a) Montrer que les triangles ABE et BCD sont égaux.

b) En déduire que $AE = CD$ et $\widehat{JAB} = \widehat{JDI}$.

c) Montrer que $\widehat{DIJ} = 60°$.



Problème 2

B est un point du segment $[AC]$.

$ABDE$ et $CDGF$ sont des carrés.

I est l'intersection de (CE) et de (BG).

J est l'intersection de (CE) et de (BD).

a) Montrer que $EC = BG$

b) Montrer que les triangles EDJ et IJB sont semblables.

c) En déduire que les droites (CE) et (BG) sont perpendiculaires.