Chapitre 9
Triangles semblables

Table 9.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 9...

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître.../savoir faire...**	🪨	💎	💍
Théorème de Thalès, contraposée et réciproque			
Appliquer le théorème de Thalès pour calculer une longueur		1, 2	
Appliquer la contraposée et la réciproque pour vérifier si deux droites sont parallèles	7, 8	9	
Triangles semblables			
Les 3 critères pour justifier la similitude de triangles	4, 5, 6	14	15, 16, 17, 18
Problèmes brevet, réactivation de la trigonométrie	3 10,	11, 12, 13	19 à 21

9.1 Triangles semblables

Définition 9.1 Deux triangles sont **semblables** lorsqu'ils ont leurs angles égaux deux à deux et leurs côtés **proportionnels**.

■ **Exemple 9.1** Pour les triangles semblables ABC et IJK :

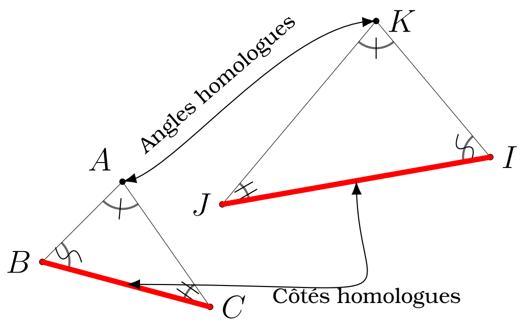
1. Les *angles homologues* sont égaux :

   $\widehat{A} = \widehat{K}$ $\qquad$ $\widehat{B} = \widehat{J}$ $\qquad$ $\widehat{C} = \widehat{I}$

2. Les *côtés correspondants* sont proportionnels.

   On a l'égalité des rapports :
   $$\frac{JK}{AB} = \frac{IJ}{BC} = \frac{IK}{AC} = k$$
   Si $k > 1$, le triangle IJK est un *agrandissement* de ABC.

   Si $k < 1$, le triangle IJK est une *réduction* de ABC.

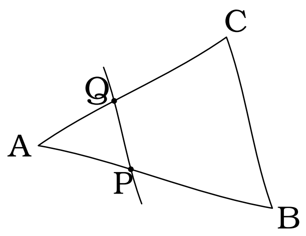


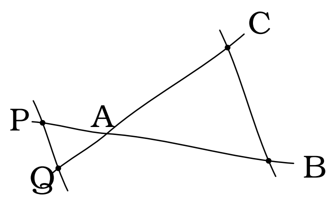
9.2 Théorème de Thalès et généralisation

Dans un premier temps, on s'interresse à des triangles dans l'une des deux situations :

— les triangles ABC et APQ sont emboités : P est sur le segment $[AB]$, et Q est sur le segment $[AC]$.

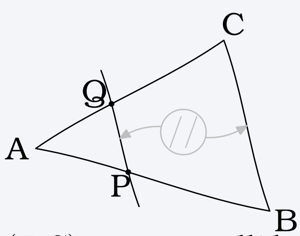
— les triangles ABC et APQ sont en papillon : les segments $[PB]$ et $[QC]$ se coupent en A.

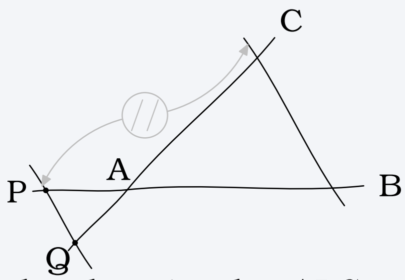




Dans les 2 cas, les points A, B et P sont alignés dans le même ordre que les points A, C et Q.

Théorème 9.1 — Théorème de Thalès. Pour les configurations de triangles ABC et APQ emboités ou papillon ci-dessous :





Si les droites (PQ) et (BC) sont parallèles alors les triangles ABC et APQ sont semblables :

— les longueurs des côtés des triangles ABC et APQ sont proportionnelles :

$$\text{Si les droites } (BC)//(PQ) \qquad \text{alors} \qquad \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} = k$$

— les angles correspondants sont égaux :

$$\text{Si les droites } (BC)//(PQ) \qquad \text{alors} \qquad \widehat{APQ} = \widehat{ABC} \qquad \widehat{ACB} = \widehat{AQP}$$

R Pour écrire les rapports de Thalès :

a) au numérateur figurent les côtés d'un **même triangle**.

b) chaque rapport est entre deux segments **parallèles**.

Si on choisit d'écrire les rapports des longueurs $\frac{\text{« petit »}}{\text{« grand »}}$ on obtient un **coefficient de réduction** $k < 1$.

Postulat 9.2 — Critère de similitude AA.

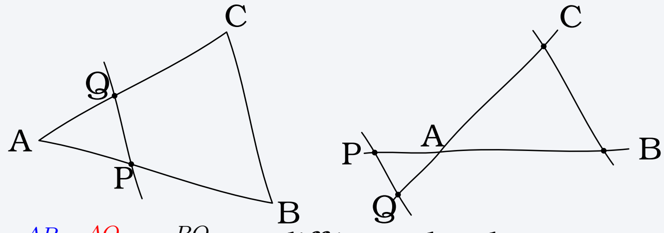
Si 2 angles d'un triangle T_1 sont **respectivement égaux** à 2 angles d'un triangle T_2. Alors les deux triangles sont semblables :

— les angles homologues sont égaux

— les rapports de longueurs de côtés homologues sont égaux.

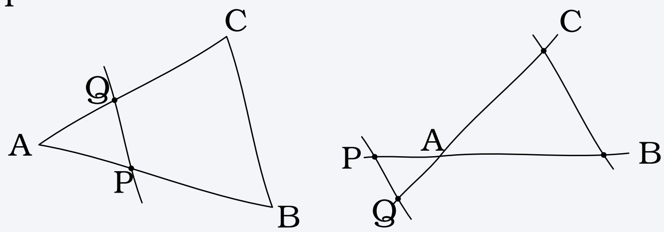
9.3 Réciproque du théorème de Thalès

Théorème 9.3 — Contraposée du théorème de Thalès. Pour les configurations de triangles ABC et APQ emboités ou papillon ci-dessous :



Si *un* des trois rapports $\frac{AP}{AB}$; $\frac{AQ}{AC}$ et $\frac{PQ}{BC}$ est différent des deux autres, alors les droites (BC) et (PQ) **ne sont pas parallèles**.

Théorème 9.4 — La réciproque du théorème de Thalès. Pour les configurations de triangles ABC et APQ emboités ou papillon ci-dessous :



Si $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC}$ alors $(BC)//(PQ)$

R Il n'est pas nécessaire de vérifier que les 3 rapports sont égaux pour appliquer la réciproque. Et une fois qu'il est établit que $(BC)//(PQ)$, on peut déduire du théorème de Thalès que l'on a l'égalité des 3 rapports $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{PQ}{BC}$.

Le théorème de Thalès et sa réciproque permettent d'établir les deux critères de similitudes suivants.

Postulat 9.5 — Critère de proportionnalité des côtés. Si les longueurs des 3 côtés d'un triangle T_1 sont **proportionnelles** aux longueurs respectives des 3 côtés d'un triangle T_2, alors les deux triangles sont semblables :

— les angles homologues sont égaux

— les rapports de longueurs de côtés homologues sont égaux.

Postulat 9.6 — Critère CAC-Semblable. Si deux triangles T_1 et T_2 ont un angle égal compris entre 2 côtés respectivement proportionnels, alors les deux triangles sont semblables :

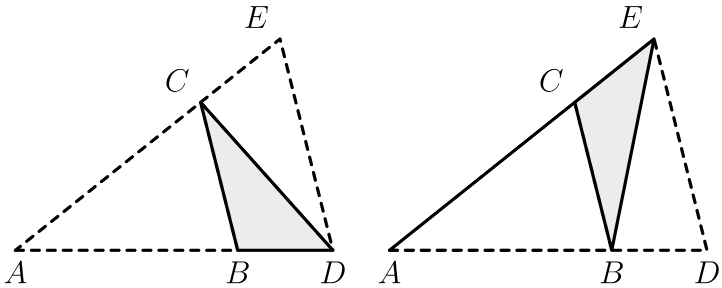
— les angles homologues sont égaux

— les rapports de longueurs de côtés homologues sont égaux.

9.3.1 Démontrer le théorème de Thalès et sa généralisation

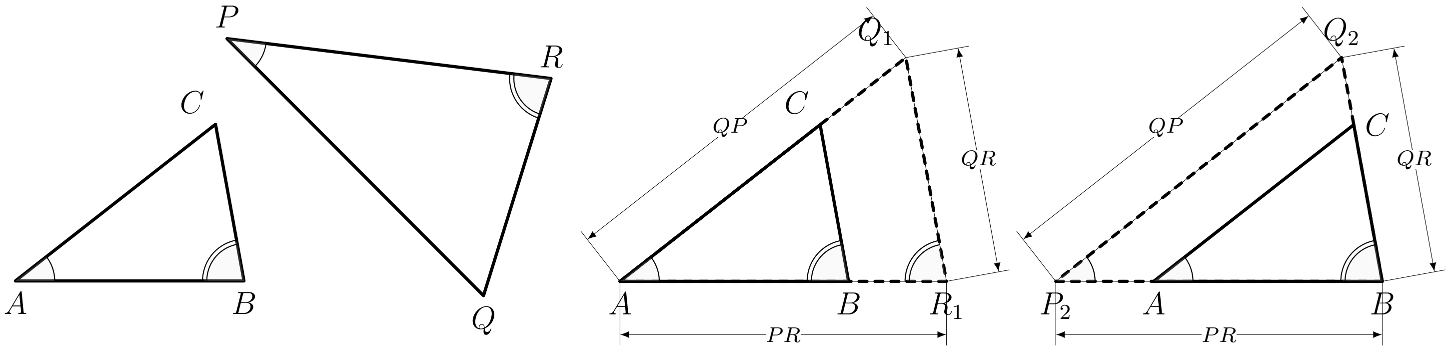
Démonstration. Le point C est sur le segment $[AE]$. Le point B est sur le segment $[AD]$. Les triangles ABC et ADE sont emboités.

Si $(BC)//(ED)$ alors on peut dire :



■

Généralisation. Soit deux triangles ABC et PQR ayant 2 angles homologues égaux.



1. $\widehat{ACB} = 180° - \ldots\ldots - \ldots\ldots = 180° - \ldots\ldots - \ldots\ldots = \widehat{PQR}$

   Les triangles ABC et PQR ont 3 paires d'angles homologues égaux.

2. Les triangles AR_1Q_1 et BP_2Q_2 ci-dessus sont égaux au triangle PRQ tous emboités au triangle ABC.

   Les droites (BC) et (R_1Q_1) sont parallèles, car les angles .... $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AR_1Q_1}$ sont égaux.

   Les droites (AC) et $(P2Q_2)$ sont parallèles, car les angles ..... $\widehat{BP_2Q_2}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux.

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

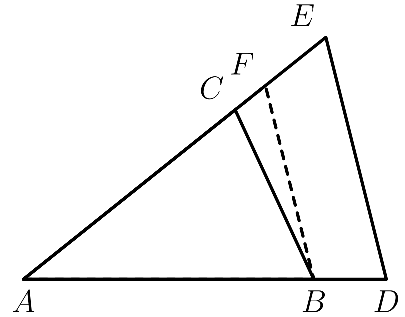
■

9.3.2 Démontrer la réciproque du théorème de Thalès et applications

Démonstration de la réciproque du théorème de Thalès.

On se donne un point C de la droite (DE) tel que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

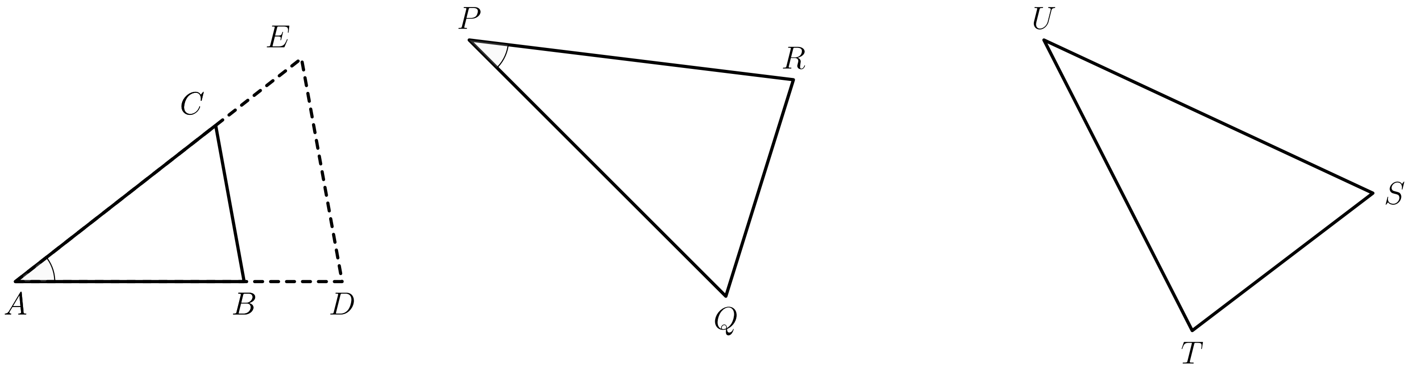


1. On trace la droite parallèle à (DE) passant par B. Elle coupe (AE) au point F.
2. D'après le théorème de Thalès $\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AE}$. On déduit que $AF = \frac{AB \times AE}{AD} =$................
3. Donc .... Les points C et F sont à la même distance de A.
4. Si ...., F et C sont le même point !
5. Les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

■

Généralisation : critères de similitude. Soit les triangles ABC, PQR et STU tel que :

$$\widehat{RPQ} = \widehat{CAB} \text{ et } \frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} = k \qquad \frac{ST}{AB} = \frac{SU}{AC} = \frac{US}{BC} = k$$



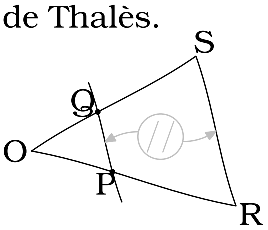
1. On place le point D sur la demi-droite $[A, B)$ et E sur $[A, C)$ tels que $AD = kAB$ et $AE = kAC$.
2. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} =$ ....
3. D'après la réciproque du théorème de Thalès, ...et ......sont ....
4. D'après le théorème de Thalès : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{\dots}{\dots} =$.
5. $kAB = AD = PQ = \dots\dots$; $kAC = AE = \dots\dots = \dots\dots$ et $kBC = ED = \dots\dots = \dots\dots$
6. D'après le critère .... les triangles ADE et PQR sont ....
7. D'après le critère .... les triangles ADE et STU sont ....
8. ADE est semblable à ABC, donc PRQ est aussi semblable à ABC.

■

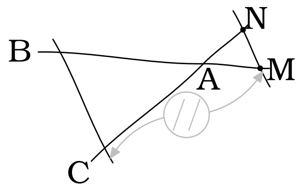
9.4 Exercices

9.4.1 Exercices : théorème de Thalès et généralisation

■ **Exemple 9.2** Pour chaque figure donner l'égalité des rapports obtenue en utilisant le théorème de Thalès.



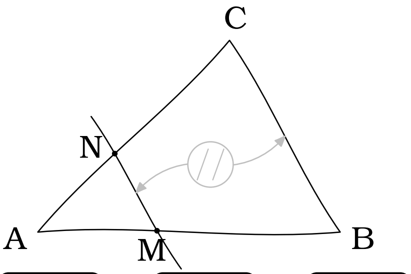
$$\frac{OP}{OR}=\frac{OQ}{OS}=\frac{PQ}{RS}$$



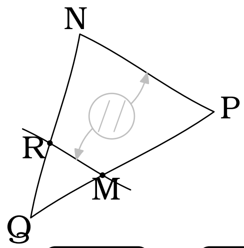
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

Exercice 1

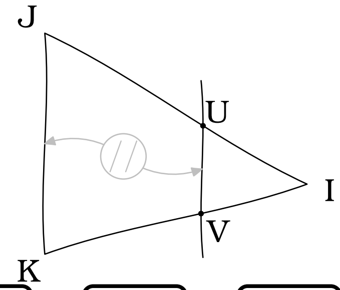
Pour chaque figure donner l'égalité des rapports obtenue en utilisant le théorème de Thalès.



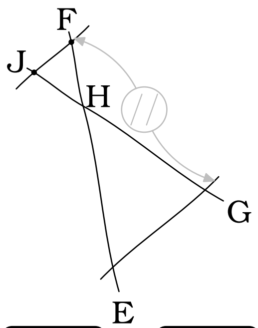
$$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$$



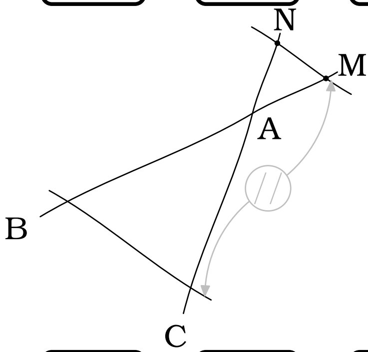
$$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$$



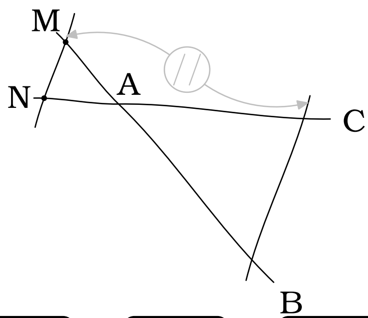
$$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$$



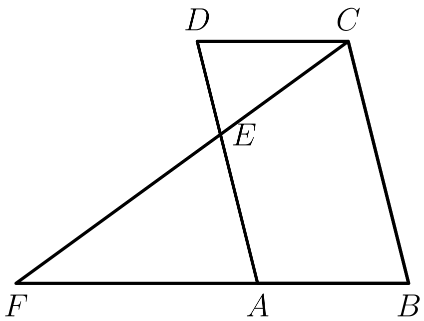
$$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$$



$$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$$



$$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$$

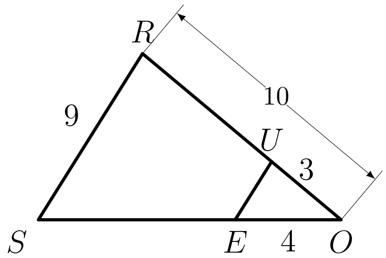


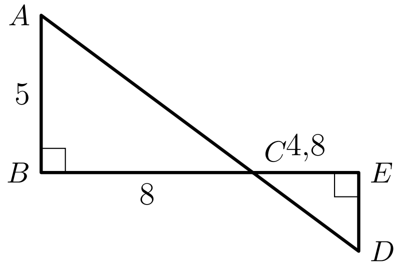
$(AB)//(CD)$ et$(AD)//(BC)$

$$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$$

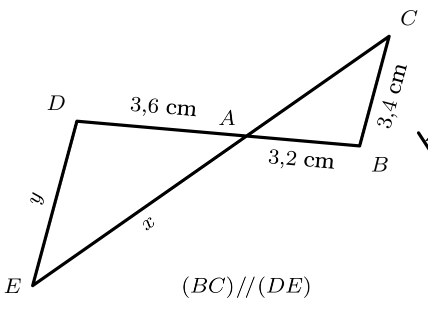
■ **Exemple 9.3 — Exemple rédigé : Calculer d'une longueur à l'aide du théorème de Thalès.** Sur les figures ci-dessous, les droites (RS) et (UE) sont parallèles. Calculer les longueurs SE, UE puis ED.

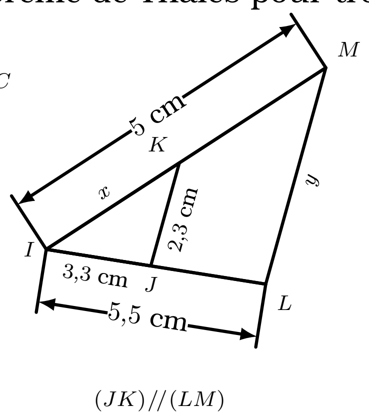


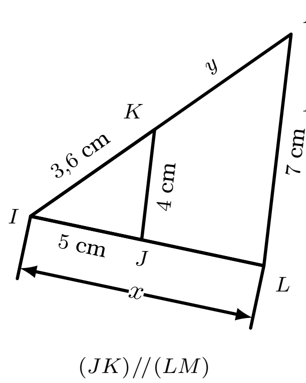


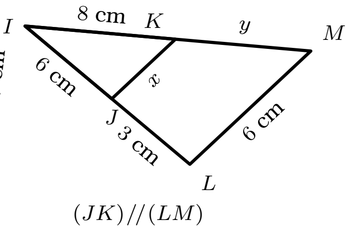
	Justification	Affirmation
	Calcul des longueurs SE et UE	
1	Les points O, U et R sont alignés dans le même ordre que les points O, E et S.	
2		les droites (UE) et (RS) sont parallèles
3	d'après le théorème de Thalès	$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$
4		$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$
5		$UE = \frac{\dots\dots \times \dots\dots}{\dots\dots}$ et $OS = \frac{\dots\dots \times \dots\dots}{\dots\dots}$
6		$UE =$
	Calcul de la longueur ED	
1		
2		
3		$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$
4		$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$
5		$ED = \frac{\dots\dots \times \dots\dots}{\dots\dots}$
6		$ED =$

Exercice 2 Appliquer le théorème de Thalès pour trouver les longueurs x et y demandées.



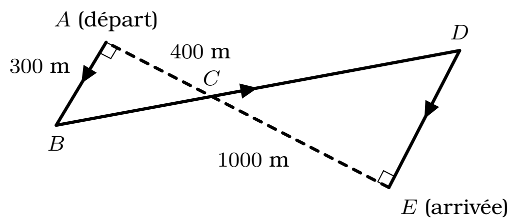






Exercice 3 — **Brevet, 2017.**

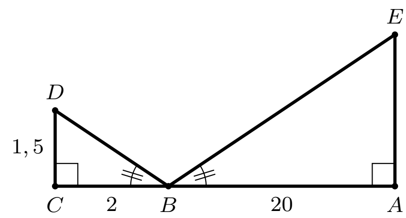
Des coureurs doivent partir du point A et se rendre au point E en passant par les points B, C et D. C est le point d'intersection des droites (AE) et (BD). La figure ci-dessous résume le plan, elle n'est pas à l'échelle. On donne AC $= 400$ m, EC $= 1000$ m et AB $= 300$ m.



1. Calculer BC.
2. Montrer ques les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
3. Justifier que ED $= 750$m.
4. Déterminer la longueur réelle du parcours $ABCDE$.

Exercice 4

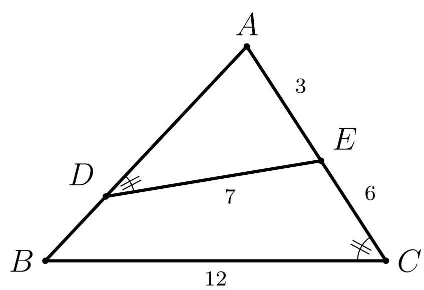
Dans la figure ci-contre les points A, B et C sont alignés et $\widehat{DBC} = \widehat{EBA}$. La figure n'est pas à l'échelle.



1. Montrer que les triangles ABE et BCD sont semblables.
2. Identifier les cotés homologues et écrire les rapports égaux.
3. En déduire la longueur EA.

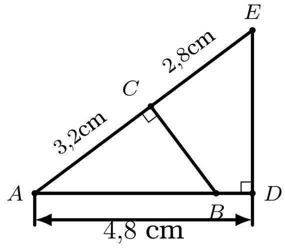
Exercice 5

Dans le triangle ABC, le point D est sur le côté $[AB]$ tel que $\widehat{ADE} = \widehat{C}$. La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle.



1. Montrer que les triangles ADE et ABC sont semblables.
2. Identifier les cotés homologues et écrire les rapports égaux.
3. En déduire la longueur AB.

Exercice 6

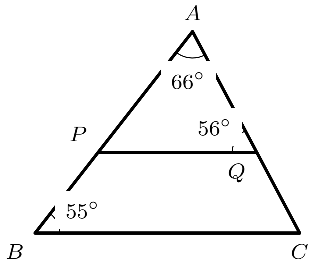


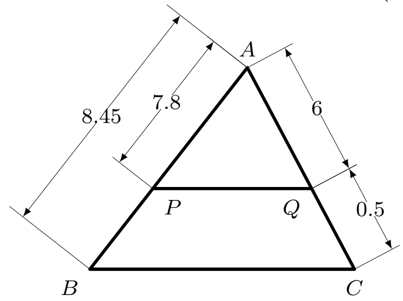
1. Montrer que les triangles ACB et ADE sont semblables.
2. Identifier les cotés homologues et écrire les rapports égaux.
3. Calculer AB.

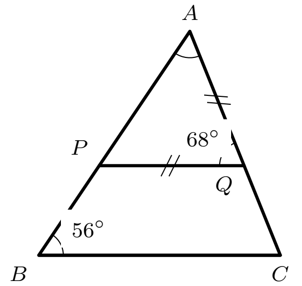
9.4.2 Exercices : réciproque du théorème de Thalès, problèmes

> En plus du théorème de Thalès et sa réciproque, on peut comparer les angles correspondants pour démontrer si deux droites sont parallèles ou non.

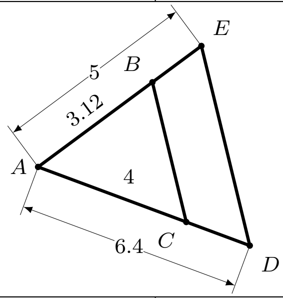
Exercice 7 Justifier sur les figures ci-dessous si les droites (BC) et (PQ) sont parallèles ou non.

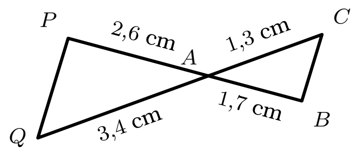


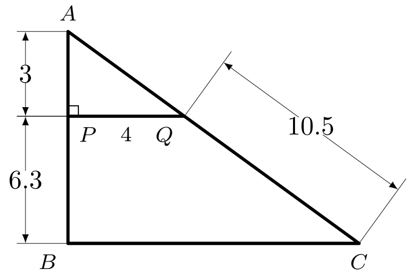




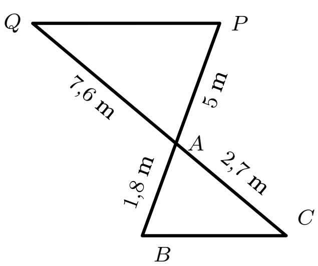
Je compare			
avec			
Je constate			
J'en déduis			

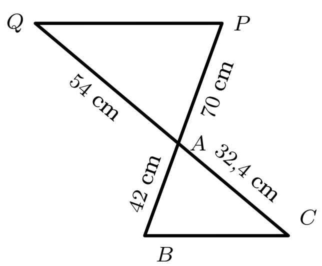


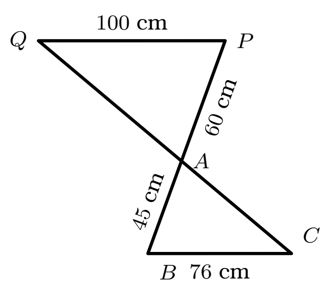


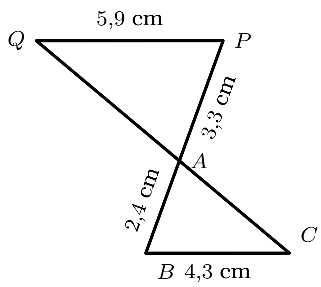


Je compare			
avec			
Je constate			
J'en déduis			



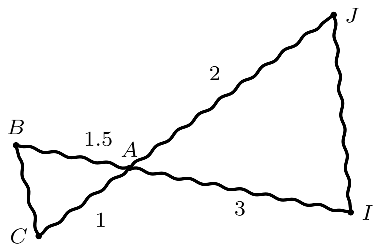


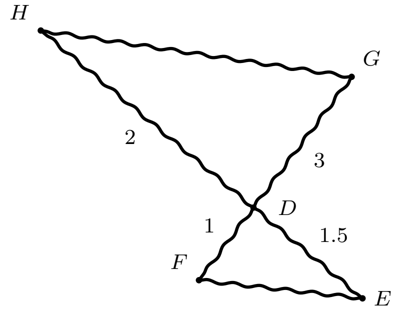




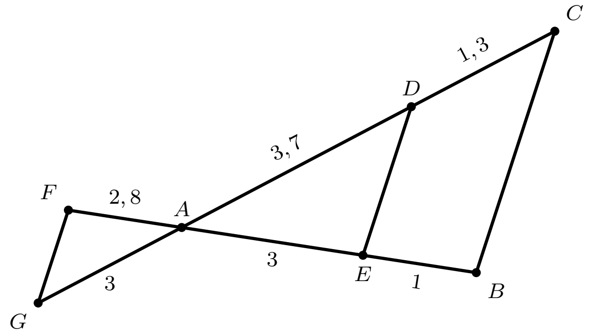
Je compare				
avec				
Je constate				
J'en déduis				

Exercice 8 — exercice rédigé : utiliser les longueurs pour justifier le parallélisme. À l'aide des longueurs données, vérifier le parallélisme des droites (BC) et (IJ), (FE) et (HG) puis (FG) (BC) et (DE).





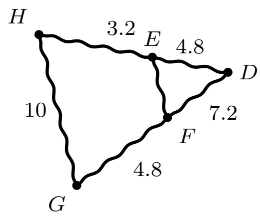
<table>
<tr><th></th><th>Justification</th><th>Affirmation</th></tr>
<tr><td colspan="3">(BC) et (IJ) sont elles parallèles ?</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Les points B, A et I sont alignés dans le même ordre que les points C, A et J.</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} =$</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} =$</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>d'après</td><td>les droites (BC) et (IJ)</td></tr>
<tr><td colspan="3">(FE) et (GH) sont elles parallèles ?</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Les points F, D et G sont alignés dans le même ordre que les points E, D et H.</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} =$</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} =$</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>d'après ....</td><td>les droites (GH) et (FE) ....</td></tr>
</table>



(FG) **et** (BC) **sont elles parallèles ?**		
1		
2		$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} =$
3		$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} =$
4		$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$
5	d'après	les droites (BC) et $((FG)$

(ED) **et** (BC) **sont elles parallèles ?**		
1		
2		$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} =$
3		$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} =$
4		$\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$
5	d'après	les droites (BC) et (ED) ....

Exercice 9



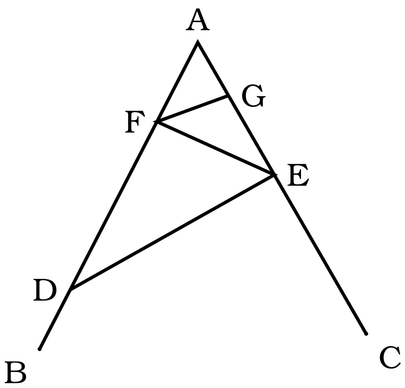
1. Montrer que (EF) et (GH) sont parallèles.
2. En déduire la longueur (EF).

Exercice 10 — Amérique du Nord, 2018.

On donne les informations suivantes :

— Le triangle ADE vérifie $AD = 7$ cm, $AE = 4{,}2$ cm et $DE = 5{,}6$ cm.

— B est le point de $[AD)$ et C est le point de $[AE)$ tels que : $AB = AC = 9$ cm.



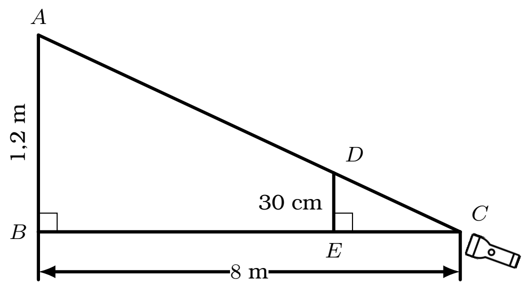
— F est le point de $[AD]$ tel que $AF = 2{,}5$ cm.

— La droite (FG) est parallèle à la droite (DE).

La figure n'est pas à l'échelle.

1. Réaliser une figure en vraie grandeur.
2. Prouver que ADE est un triangle rectangle en E.
3. Calculer la longueur FG.

Exercice 11 — Brevet Nouvelle-Calédonie 2015.



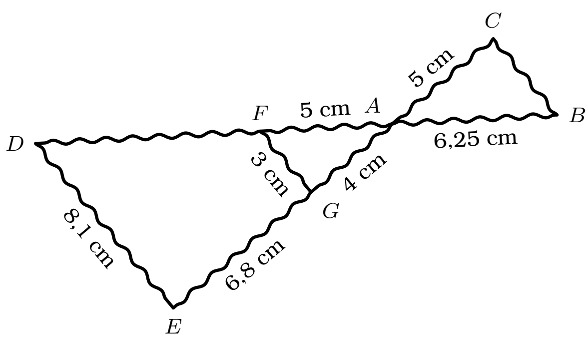
Un marionnettiste doit faire un spectacle sur le thème de l'ombre. Pour cela il a besoin que sa marionnette de 30 cm ait une ombre de 1,2 m.

La source de lumière C est située à 8 m de la toile (AB).

La marionnette est représentée par le segment $[DE]$. *La figure n'est pas à l'échelle.*

1. Justifier que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
2. Calculer EC pour savoir où il doit placer sa marionnette.

Exercice 12 — Métropole 2017.



Les points D, F, A et B sont alignés, ainsi que les points E, G, A et C. De plus, les droites (DE) et (FG) sont parallèles.

1. Montrer que le triangle AFG est un triangle rectangle.
2. Calculer la longueur du segment $[AD]$. En déduire la longueur du segment $[FD]$.
3. Les droites (FG) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

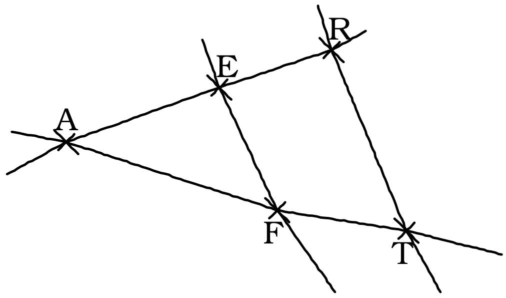
Exercice 13 — Brevet. Amérique du nord, 2019. *environ 10 min*

On considère la figure ci-contre, réalisée à main levée et qui n'est pas à l'échelle. On donne les informations suivantes :

— les droites (ER) et (FT) sont sécantes en A ;

— AE $= 8$ cm, AF $= 10$ cm, EF $= 6$ cm ;

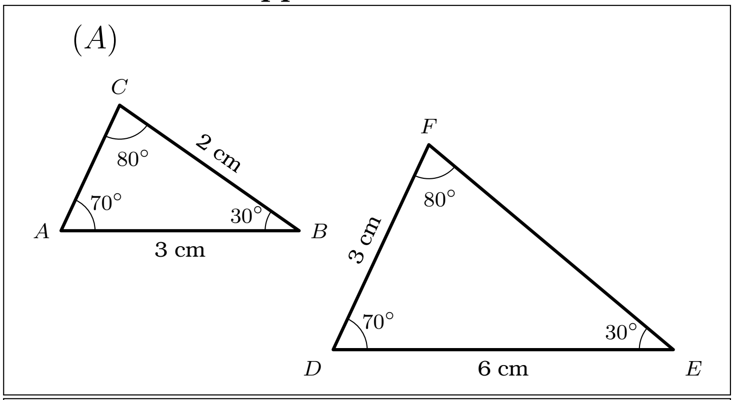
— AR $= 12$ cm, AT $= 14$ cm

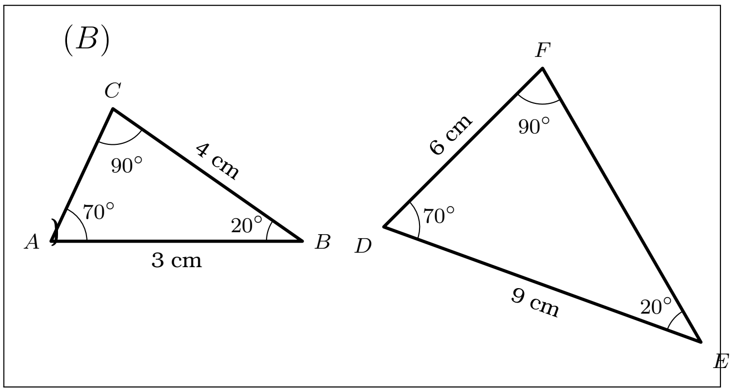


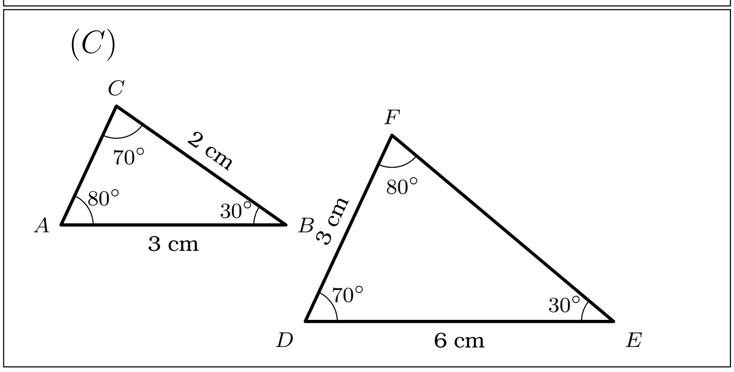
1. Démontrer que le triangle AEF est rectangle en E.
2. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\text{EAF}}$ au degré près.
3. Les droites (EF) et (RT) sont-elles parallèles ?

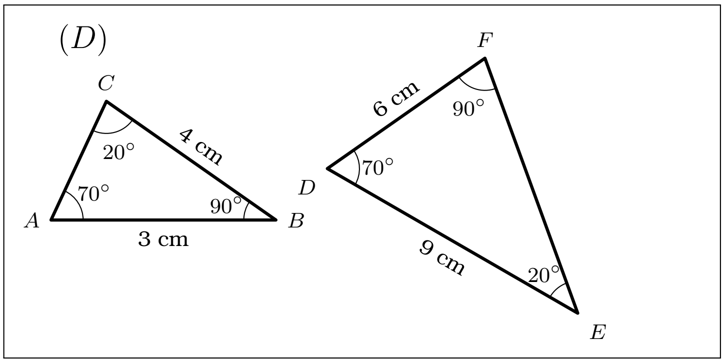
Exercice 14 — Triangles semblables. Pour chaque paire de triangle :

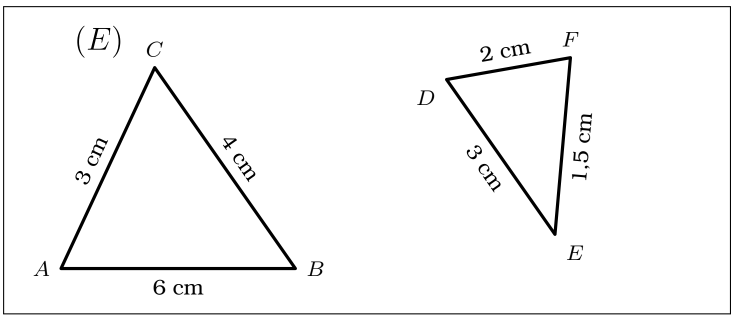
1. Justifier que les triangles sont semblables à l'aide d'un des 3 critères du cours.
2. Écrire l'égalité des rapports des côtés homologues.
3. Donner un rapport d'echelle (réduction ou agrandissement) pour passer de ABC à DFE.

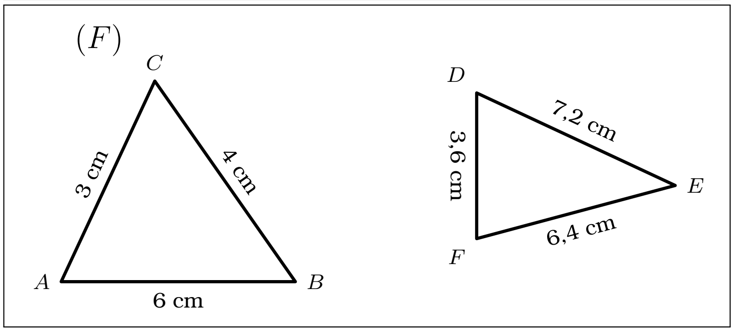


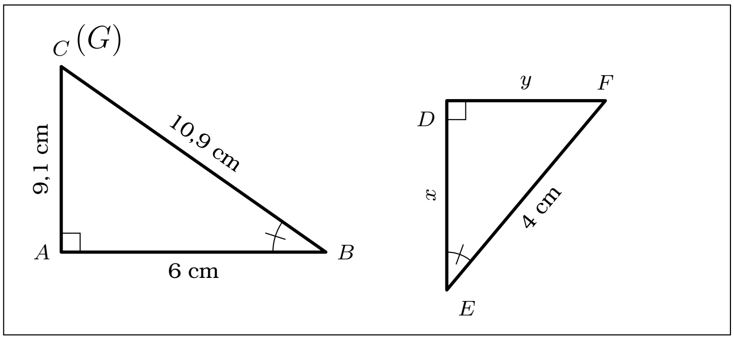


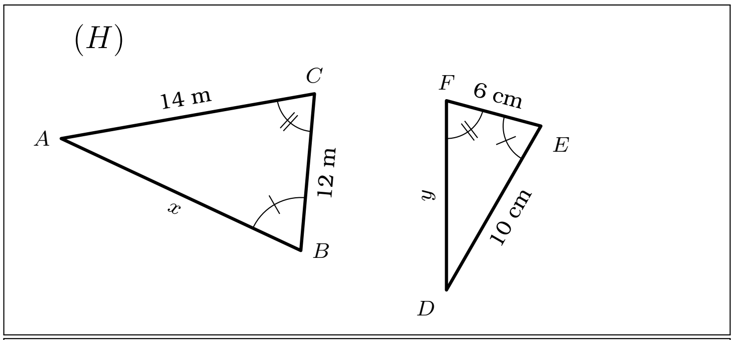


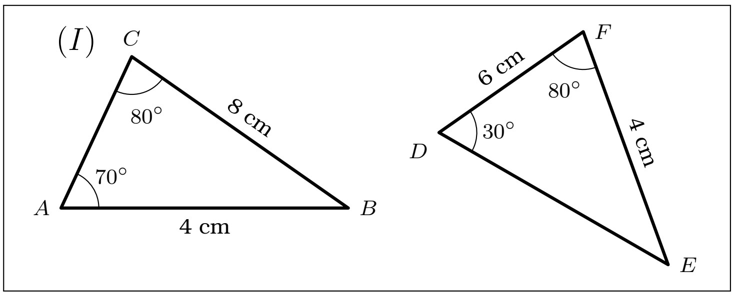


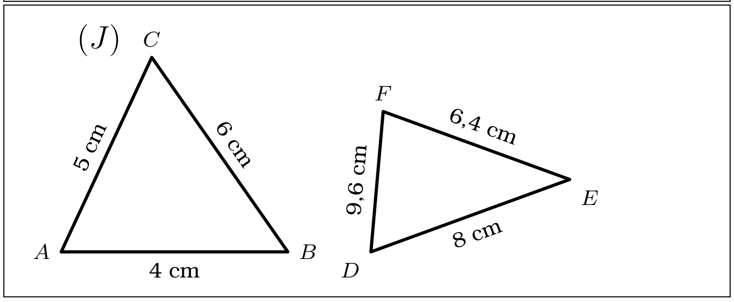




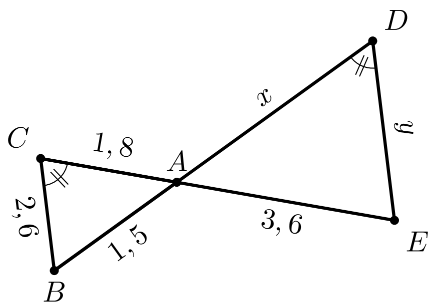






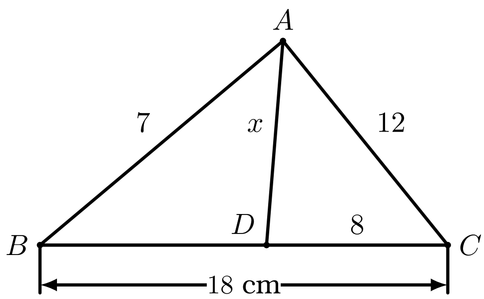


Exercice 15



1. Expliquer pourquoi le théorème de Thalès ne s'applique pas à la figure ci-contre.
2. Montrer que les triangles ACD et ABC sont semblables.
3. Identifier les cotés homologues, écrire les rapports égaux et en déduire les longueurs AD et ED.

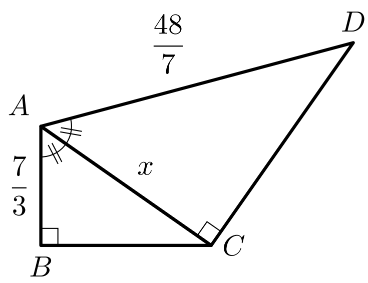
Exercice 16



La figure n'est pas à l'échelle.

1. Montrer que les triangles ACD et ABC sont semblables.
2. Identifier les cotés homologues, écrire les rapports égaux et en déduire la longueur AD.

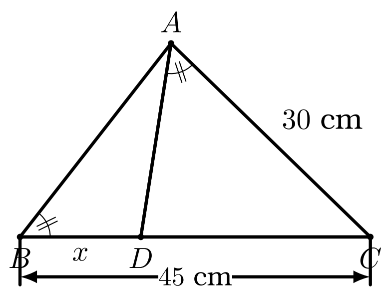
Exercice 17



La figure n'est pas à l'échelle. On a $\widehat{CAD} = \widehat{BAC}$.

1. Montrer que les triangles ACD et ABC sont semblables.
2. Déterminer les côtés homologues, écrire l'égalité des rapports et en déduire x.

Exercice 18

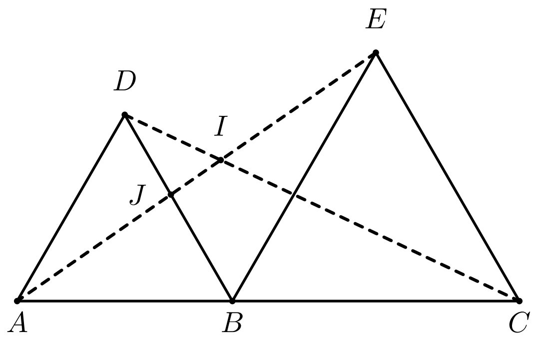


La figure n'est pas à l'échelle. On a $\widehat{DAC} = \widehat{ABC}$.

1. Démontrer que les triangles ACH et ABH sont semblables.
2. Identifier les cotés homologues, écrire les rapports égaux et déterminer x.

9.4.3 Problèmes bonus

Exercice 19 B est un point du segment $[AC]$. Les triangles ABD et BCE sont situés du même côté du segment $[AC]$ et sont équilatéraux. Le point I est l'intersection des segments $[AE]$ et $[CD]$, et J est l'intersection de $[BD]$ et $[AE]$.



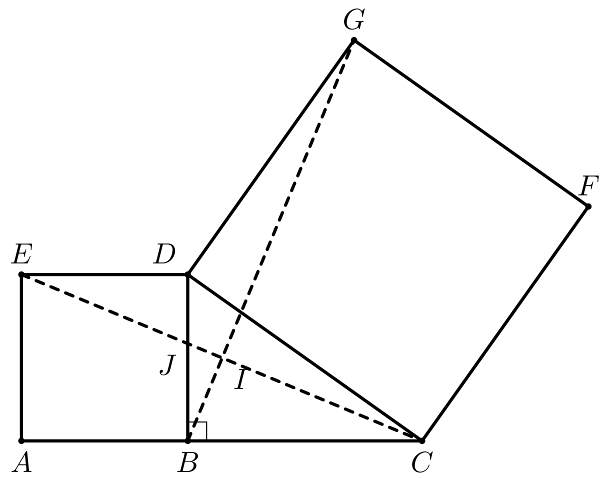
1. Montrer que les triangles ABE et BCD sont égaux.
2. En déduire que $AE = CD$ et $\widehat{JAB} = \widehat{JDI}$.
3. Montrer que les triangles JAB et JID sont semblables.
4. En déduire que $\widehat{DIJ} = 60°$.

Exercice 20

B est un point du segment $[AC]$.

$ABDE$ et $CDGF$ sont des carrés.

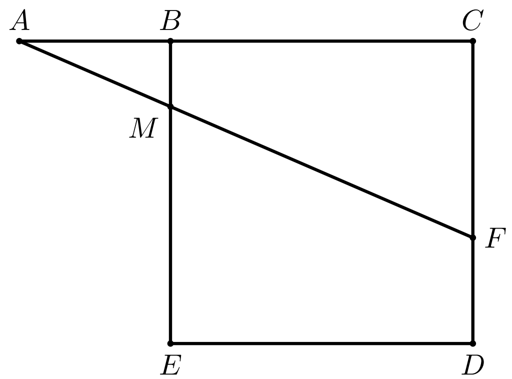
I est l'intersection de (CE) et de (BG). J est l'intersection de (CE) et de (BD).



1. Montrer que les triangles EDC et DBG sont égaux.
2. En déduire que $EC = BG$ et $\widehat{DEC} = \widehat{DBG}$.
3. Montrer que les triangles EDJ et IJB sont semblables.
4. En déduire que les droites (CE) et (BG) sont perpendiculaires.

Exercice 21 — **Brevet : prise d'initiative.**

On considère la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur.



— $BCDE$ est un carré de 6 cm de côté.

— Les points A, B et C sont alignés et $AB = 3$ cm.

— F est un point du segment $[CD]$.

— La droite (AF) coupe le segment $[BE]$ en M.

Déterminer la longueur CF par calcul ou par construction pour que les longueurs BM et FD soient égales.

9.5 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 2 .

1. Dans le triangle ABC, D est un point de la droite (AB), E est un point de la droite (AC).

   Comme les droites (DE) et (BC) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

   $$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

   On remplace par les longueurs connues :

   $$\frac{3{,}2}{3{,}6} = \frac{3{,}4}{DE} = \frac{AC}{AE}$$

   $$DE = \frac{3{,}4 \times 3{,}6}{3{,}2}$$
   $$DE = \frac{12{,}24}{3{,}2}$$
   $$DE = 3{,}82 \text{ cm}$$

2. Dans le triangle IKJ, M est un point de la droite (IK), L est un point de la droite (IJ).

   Comme les droites (ML) et (KJ) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

   $$\frac{IM}{IK} = \frac{IL}{IJ} = \frac{ML}{KJ}.$$

   On remplace par les longueurs connues :

   $$\frac{IK}{5} = \frac{2{,}3}{ML} = \frac{3{,}3}{5{,}5}$$

   $$IK = \frac{5 \times 3{,}3}{5{,}5}$$
   $$IK = \frac{16{,}5}{5{,}5}$$
   $$IK = 3 \text{ cm}$$

   $$ML = \frac{2{,}3 \times 5{,}5}{3{,}3}$$
   $$ML = \frac{12{,}65}{3{,}3}$$
   $$ML \approx 3{,}83 \text{ cm}$$

3. Dans le triangle IKJ, M est un point de la droite (IK), L est un point de la droite (IJ).

Comme les droites (ML) et (KJ) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{IM}{IK} = \frac{IL}{IJ} = \frac{ML}{KJ}.$$

On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{3{,}6}{IM} = \frac{4}{7} = \frac{5}{IL}$$

$$IM = \frac{3{,}6 \times 7}{4}$$
$$IM = \frac{25{,}2}{4}$$
$$IM = 6{,}3 \text{ cm}$$

$$IL = \frac{5 \times 7}{4}$$
$$IL = \frac{35}{4}$$
$$IL = 8{,}75 \text{ cm}$$

4. Dans le triangle IKJ, M est un point de la droite (IK), L est un point de la droite (IJ).

   Comme les droites (ML) et (KJ) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

   $$\frac{IM}{IK} = \frac{IL}{IJ} = \frac{ML}{KJ}.$$

   On remplace par les longueurs connues :

   $$\frac{8}{IM} = \frac{KJ}{6} = \frac{6}{9}$$

   $$IM = \frac{8 \times 9}{6}$$
   $$IM = \frac{72}{6}$$
   $$IM = 12 \text{ cm}$$

   $$KJ = \frac{6 \times 6}{9}$$
   $$KJ = \frac{36}{9}$$
   $$KJ = 4 \text{ cm}$$

5. Dans le triangle DEF, H est un point de la droite (DE), G est un point de la droite (DF).

   Comme les droites (HG) et (EF) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

   $$\frac{DH}{DE} = \frac{DG}{DF} = \frac{HG}{EF}.$$

On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{DE}{DH} = \frac{2}{3{,}2} = \frac{DF}{DG}$$

6. Dans le triangle URS, V est un point de la droite (UR), T est un point de la droite (US).

   Comme les droites (VT) et (RS) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{UV}{UR} = \frac{UT}{US} = \frac{VT}{RS}.$$

   On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{UR}{UV} = \frac{1{,}62}{4{,}5} = \frac{US}{UT}$$

■

solution de 7 . 1. $\widehat{APQ} = 58°$. Ne sont pas parallèles.

2. Dans le triangle APQ, B est un point de la droite (AP), C est un point de la droite (AQ).

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{AP}=\dfrac{7{,}8}{8{,}45}=\dfrac{7{,}8\times 100}{8{,}45\times 100}=\dfrac{780}{845}\\[4em]\dfrac{AC}{AQ}=\dfrac{6}{6{,}5}=\dfrac{6\times 10}{6{,}5\times 10}=\dfrac{60}{65}=\dfrac{60\times 13}{65\times 13}=\dfrac{780}{845}\end{array}\right\}\dfrac{AB}{AP}=\dfrac{AC}{AQ}$$

De plus, les points A, B, P sont alignés dans le même ordre que les points A, C, Q. Donc les droites (BC) et (PQ) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

3. $\widehat{APQ}=(180-68)/2=56°$. Sont parallèles.
4. Dans le triangle ABC, E est un point de la droite (AB), D est un point de la droite (AC).

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{3{,}12}{5}=\dfrac{3{,}12\times 100}{5\times 100}=\dfrac{312}{500}=\dfrac{312\times 16}{500\times 16}=\dfrac{4\,992}{8\,000}\\[4em]\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{4}{6{,}4}=\dfrac{4\times 10}{6{,}4\times 10}=\dfrac{40}{64}=\dfrac{40\times 125}{64\times 125}=\dfrac{5\,000}{8\,000}\end{array}\right\}\dfrac{AE}{AB}\neq\dfrac{AD}{AC}$$

Donc les droites (ED) et (BC) ne sont pas parallèles.

5. Dans le triangle ABC, P est un point de la droite (AB), Q est un point de la droite (AC).

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{1{,}7}{2{,}6}=\dfrac{1{,}7\times 10}{2{,}6\times 10}=\dfrac{17}{26}=\dfrac{17\times 17}{26\times 17}=\dfrac{289}{442}\\[4em]\dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{1{,}3}{3{,}4}=\dfrac{1{,}3\times 10}{3{,}4\times 10}=\dfrac{13}{34}=\dfrac{13\times 13}{34\times 13}=\dfrac{169}{442}\end{array}\right\}\dfrac{AP}{AB}\neq\dfrac{AQ}{AC}$$

Donc les droites (PQ) et (BC) ne sont pas parallèles.

6. Dans le triangle APQ rectangle en P, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
AQ^2 &= AP^2 + PQ^2 \\
AQ^2 &= 3^2 + 4^2 \\
AQ^2 &= 9 + 16 \\
AQ^2 &= 25 \\
AQ &= \sqrt{25} \\
AQ &= 5 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Dans le triangle APQ, B est un point de la droite (AP), C est un point de la droite (AQ).

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{AB}{AP} = \frac{3}{9{,}3} = \frac{3 \times 10}{9{,}3 \times 10} = \frac{30}{93} = \frac{30 \times 5}{93 \times 5} = \frac{150}{465} \\
&\frac{AC}{AQ} = \frac{5}{15{,}5} = \frac{5 \times 10}{15{,}5 \times 10} = \frac{50}{155} = \frac{50 \times 3}{155 \times 3} = \frac{150}{465}
\end{aligned}\right\} \frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$$

De plus, les points A, B, P sont alignés dans le même ordre que les points A, C, Q. Donc les droites (BC) et (PQ) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

7. Dans le triangle APQ, B est un point de la droite (AP), C est un point de la droite (AQ).

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{AB}{AP} = \frac{5}{1{,}8} = \frac{5 \times 10}{1{,}8 \times 10} = \frac{50}{18} = \frac{50 \times 3}{18 \times 3} = \frac{150}{54} \\
&\frac{AC}{AQ} = \frac{7{,}6}{2{,}7} = \frac{7{,}6 \times 10}{2{,}7 \times 10} = \frac{76}{27} = \frac{76 \times 2}{27 \times 2} = \frac{152}{54}
\end{aligned}\right\} \frac{AB}{AP} \neq \frac{AC}{AQ}$$

Donc les droites (BC) et (PQ) ne sont pas parallèles.

8. Dans le triangle APQ, B est un point de la droite (AP), C est un point de la droite (AQ).

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{AP} = \dfrac{70}{42} = \dfrac{70 \times 54}{42 \times 54} = \dfrac{3\,780}{2\,268} \\ \\ \\ \dfrac{AC}{AQ} = \dfrac{54}{32{,}4} = \dfrac{54 \times 10}{32{,}4 \times 10} = \dfrac{540}{324} = \dfrac{540 \times 7}{324 \times 7} = \dfrac{3\,780}{2\,268} \end{array}\right\} \dfrac{AB}{AP} = \dfrac{AC}{AQ}$$

De plus, les points A, B, P sont alignés dans le même ordre que les points A, C, Q. Donc les droites (BC) et (PQ) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

9.

10.

■

solution de l'exercice 1.

a) Dans le triangle BAC rectangle en A, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 300^2 + 400^2$$
$$BC^2 = 90\,000 + 160\,000$$
$$BC^2 = 250\,000$$
$$BC = \sqrt{250\,000}$$
$$BC = 500 \text{ m}$$

b) Dans le triangle CAB, E est un point de la droite (CA), D est un point de la droite (CB).

Comme les droites (ED) et (AB) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB} = \frac{ED}{AB}.$$

On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{400}{1\,000} = \frac{300}{DE} = \frac{500}{CD}$$

$$DE = \frac{300 \times 1\,000}{400}$$
$$DE = \frac{300\,000}{400}$$
$$DE = 750 \text{ m}$$

$$CD = \frac{500 \times 1\,000}{400}$$
$$CD = \frac{500\,000}{400}$$
$$CD = 1\,250 \text{ m}$$

c) ...

■

solution de l'exercice 3.

a)

b) Dans le triangle AED, $[AD]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} AD^2 = 7^2 = 49 \\ \\ AE^2 + ED^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2 = 17{,}64 + 31{,}36 = 49 \end{array}\right\} AD^2 = AE^2 + ED^2$$

Comme $AD^2 = AE^2 + ED^2$, alors le triangle AED est rectangle en E d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

c) Dans le triangle AGF, E est un point de la droite (AG), D est un point de la droite (AF).
Comme les droites (ED) et (GF) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{AE}{AG} = \frac{AD}{AF} = \frac{ED}{GF}.$$

On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{AG}{4{,}2} = \frac{FG}{5{,}6} = \frac{2{,}5}{7}$$

$AG = \dfrac{4{,}2 \times 2{,}5}{7}$

$AG = \dfrac{10{,}5}{7}$

$AG = 1{,}5$ cm

$FG = \dfrac{5{,}6 \times 2{,}5}{7}$

$FG = \dfrac{14}{7}$

$FG = 2$ cm

■

solution de l'exercice 10.

a) Dans le triangle FGA, $[FA]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} FA^2 = 5^2 = 25 \\ \\ FG^2 + GA^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \end{array}\right\} FA^2 = FG^2 + GA^2$$

Comme $FA^2 = FG^2 + GA^2$, alors le triangle FGA est rectangle en G d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

b) Dans le triangle AGF, E est un point de la droite (AG), D est un point de la droite (AF).
Comme les droites (ED) et (GF) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{AE}{AG} = \frac{AD}{AF} = \frac{ED}{GF}.$$

On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{4}{10{,}8} = \frac{3}{8{,}1} = \frac{5}{AD}$$

$AD = \dfrac{5 \times 8{,}1}{3}$

$AD = \dfrac{40{,}5}{3}$

$AD = 13{,}5$ cm

c) Dans le triangle ACB, E est un point de la droite (AC), D est un point de la droite (AB).

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{5}{6{,}25} = \dfrac{5 \times 100}{6{,}25 \times 100} = \dfrac{500}{625} \\ \\ \\ \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{4 \times 125}{5 \times 125} = \dfrac{500}{625} \end{array}\right\} \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$$

De plus, les points A, E, C sont alignés dans le même ordre que les points A, D, B. Donc les droites (ED) et (CB) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

■

solution de l'exercice 12.

a) c.f. votre cours de 5ᵉ

b) Dans le triangle CED, B est un point de la droite (CE), A est un point de la droite (CD). Comme les droites (BA) et (ED) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{CB}{CE} = \frac{CA}{CD} = \frac{BA}{ED}.$$

On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{CE}{800} = \frac{30}{120} = \frac{CD}{AC}$$

$$CE = \frac{800 \times 30}{120}$$
$$CE = \frac{24\,000}{120}$$
$$CE = 200 \text{ cm}$$

■

solution de l'exercice 13.

a) Dans le triangle AEF, $[AF]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} AF^2 = 10^2 = 100 \\ \\ AE^2 + EF^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \end{array}\right\} AF^2 = AE^2 + EF^2$$

Comme $AF^2 = AE^2 + EF^2$, alors le triangle AEF est rectangle en E d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

b) Dans le triangle AEF, rectangle en E, on a :

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{EAF}) &= \frac{AE}{AF} \\ \cos(\widehat{EAF}) &= \frac{8}{10} \\ \widehat{EAF} &\approx 37° \end{aligned}$$

c) Dans le triangle AEF, R est un point de la droite (AE), T est un point de la droite (AF).

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AR}{AE} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{12_{\div 4}}{8_{\div 4}} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{3 \times 5}{2 \times 5} = \dfrac{15}{10} \\ \\ \dfrac{AT}{AF} = \dfrac{14}{10} = \dfrac{14_{\div 2}}{10_{\div 2}} = \dfrac{7}{5} = \dfrac{7 \times 2}{5 \times 2} = \dfrac{14}{10} \end{array}\right\} \frac{AR}{AE} \neq \frac{AT}{AF}$$

Donc les droites (RT) et (EF) ne sont pas parallèles.

■