A.7 Fonction inverse

Définition A.6 La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; -\infty[$ par

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \frac{1}{x}$$

Théorème A.10 Pour $x \neq 0$, l'image de x par f est aussi l'antécédent de x par f. En effet $f(f(x)) = x$.

Proposition A.11 — sens de variation. f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]0; -\infty[$ et : $]-\infty; 0[$:

$$\text{Si} \quad a < b < 0 \quad \text{alors} \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$$

$$\text{Si} \quad 0 < a < b \quad \text{alors} \quad 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Démonstration. Exigible en fin de seconde ■

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$
signe de $f(x)$	$-$	‖	$+$

Figure A.8 – Tableau de variation de la fonction inverse

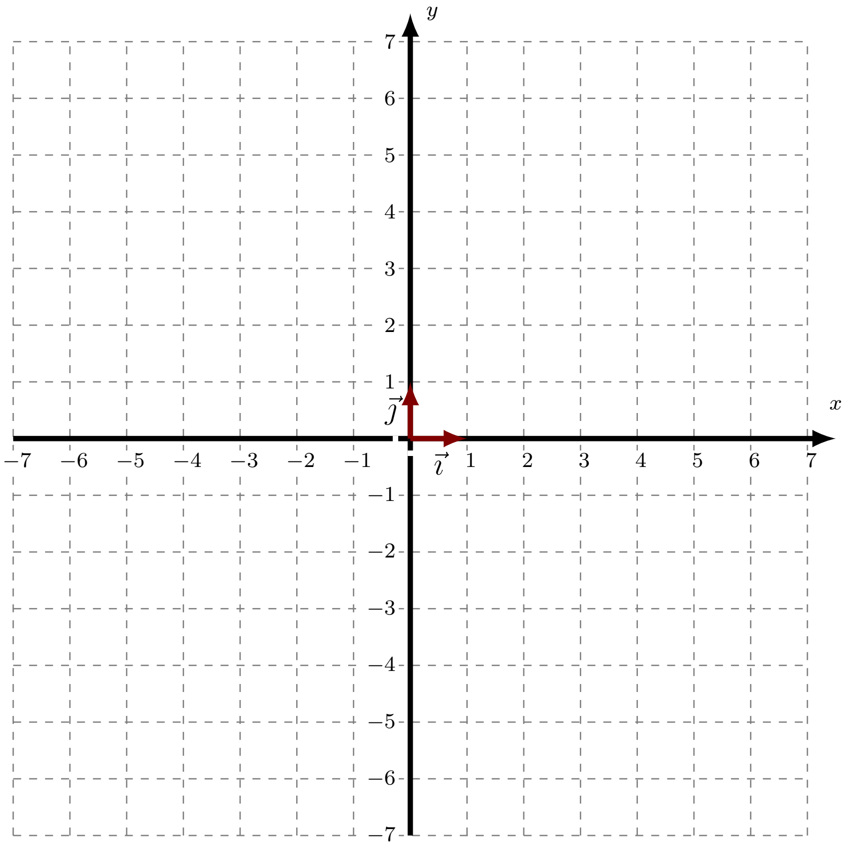

Figure A.9 – La courbe représentative de la fonction inverse dans un repère orthonormé est l'**hyperbole** d'équation $\mathscr{C} : y = \dfrac{1}{x}$ (on peut aussi dire $\mathscr{C} : xy = 1$)

■ **Exemple A.12** Résoudre graphiquement les inéquation $\dfrac{1}{x} > 2$ et $\dfrac{1}{x} > -3$ d'inconnue x

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de	
signe de	
signe de	

Exercices : Fonction inverse

Exercice 1 — calculer les images et antécédents par une fonction inverse.
f est la fonction inverse définie dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

a) Sans l'aide de la calculatrice, exprimer l'image par la fonction inverse de chacun des nombres réels suivants sans laisser de racine carrée au dénominateur : $2\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Exprimer l'antécédent des nombres suivants par la fonction inverse sous la forme d'un entier ou d'une fraction d'entiers : $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{2}$, 10^{-2}, $0,001$, -10^3 et -10^{-4}.

■ **Exemple A.13 — Résoudre équations et équations en isolant $\frac{1}{x}$.**

$\dfrac{1}{x} = 12$ $\qquad$ $\dfrac{3}{x} = -11$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x} + 8 = \dfrac{10}{13}$ $\qquad$ $40 - \dfrac{14}{x} = 20$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant $\frac{1}{x}$.

(E_1) $\frac{1}{x} = 2$	(E_3) $\frac{15}{x} = \frac{-5}{17}$	(E_5) $\frac{-7}{x} = 2$
(E_2) $\frac{1}{x} = \frac{-1}{7}$	(E_4) $\frac{2}{x} = 26$	(E_6) $\frac{1}{x} - 11 = \frac{10}{23}$

■ **Exemple A.14 — Résoudre équations et inéquations en isolant $\frac{1}{x}$.**

$\dfrac{1}{x} > 5$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x} \leqslant 2$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x} \leqslant -3$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x} \geqslant -\dfrac{1}{2}$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en isolant $\frac{1}{x}$.

(I_1) $\frac{1}{x} \geqslant 7$	(I_3) $\frac{1}{x} > -2$	(I_5) $\frac{1}{x} \leqslant 2$
(I_2) $\frac{1}{x} < -\frac{3}{2}$	(I_4) $\frac{1}{x} > -\frac{2}{5}$	(I_6) $\frac{1}{x} \leqslant \frac{2}{5}$

Exercice 4 — Utiliser le sens de variation de la fonction inverse. En s'aidant de la courbe de la fonction inverse ou de son tableau de variation donner un encadrement de $\frac{1}{x}$ dans chaque cas :

a) $x > 3$	d) $2 \leqslant x < 5$	g) $-4 \leqslant x < 0$	j) $-4 \leqslant x < 0$
b) $x > \frac{2}{3}$	e) $\frac{2}{5} < x \leqslant \frac{7}{8}$	h) $x \leqslant -8$	k) $-4 < x$
c) $3 > x > 0$	f) $-5 \leqslant x < -2$	i) $x \leqslant -\frac{2}{3}$	l) $x < 0$