Chapitre 9

Fonctions de référence (1) : fonction carré et racine carrée

Dans l'étude d'une fonction ou d'une classe de fonctions on doit savoir :

1) calculer l'image/l'ordonnée $y = f(x)$ d'une abscisse donnée.
2) connaitre le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3) Pour $k \in \mathbb{R}$, connaitre le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ inconnue x, et la résoudre. En particulier résoudre $f(x) = 0$
4) Pour $k \in \mathbb{R}$, savoir résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant k$ inconnue x.
   En particulier dresser son tableau de signe.
5) connaitre les propriétés de sa représentation graphique.

9.1 Fonction carré

Définition 9.1 La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Un carré est toujours positif ou nul : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geqslant 0$.

Proposition 9.1 — sens de variation. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; -\infty[$:
- Si $a < b \leqslant 0$ alors $a^2 > b^2 \geqslant 0$
- Si $0 \leqslant a < b$ alors $0 \leqslant a^2 < b^2$

Figure 9.1 – Tableau de variation de la fonction carré

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	

Démonstration. Exigible en fin de seconde

■

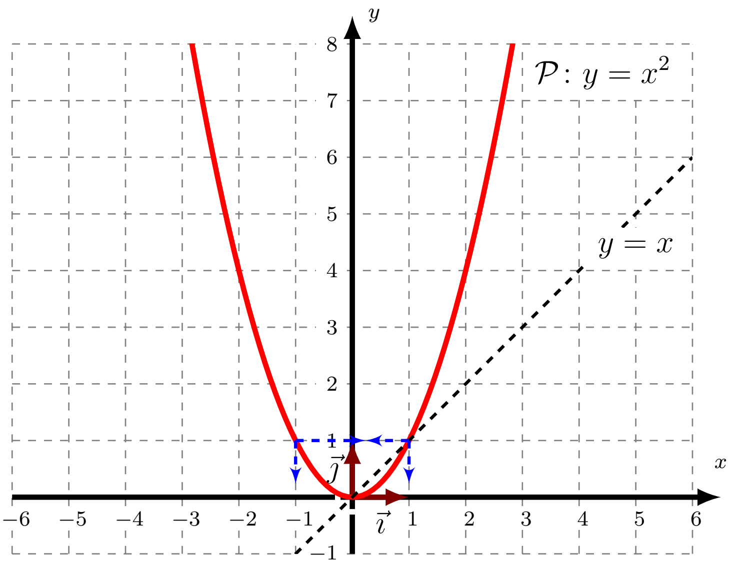
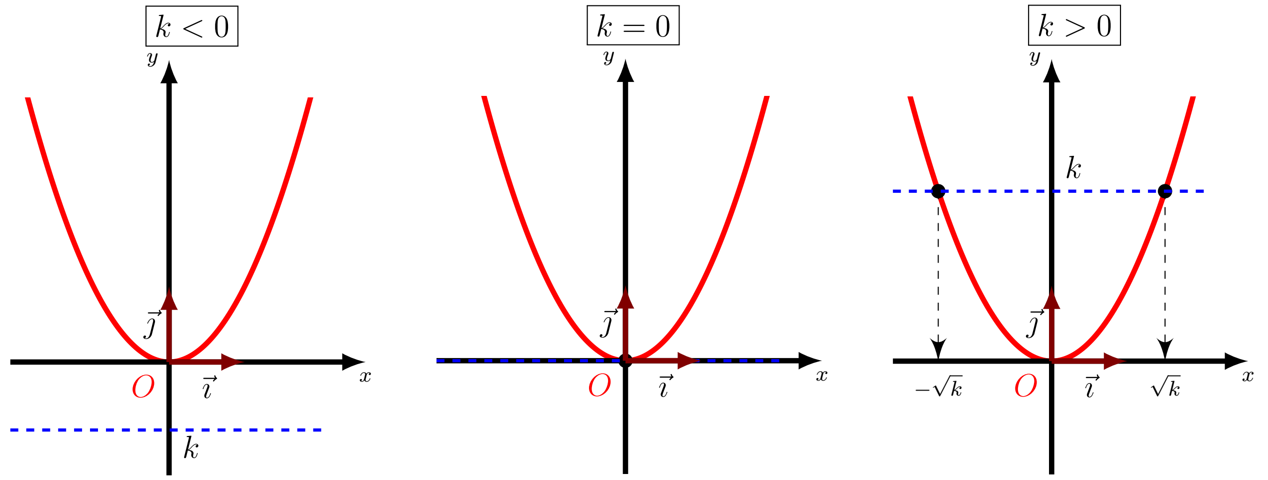
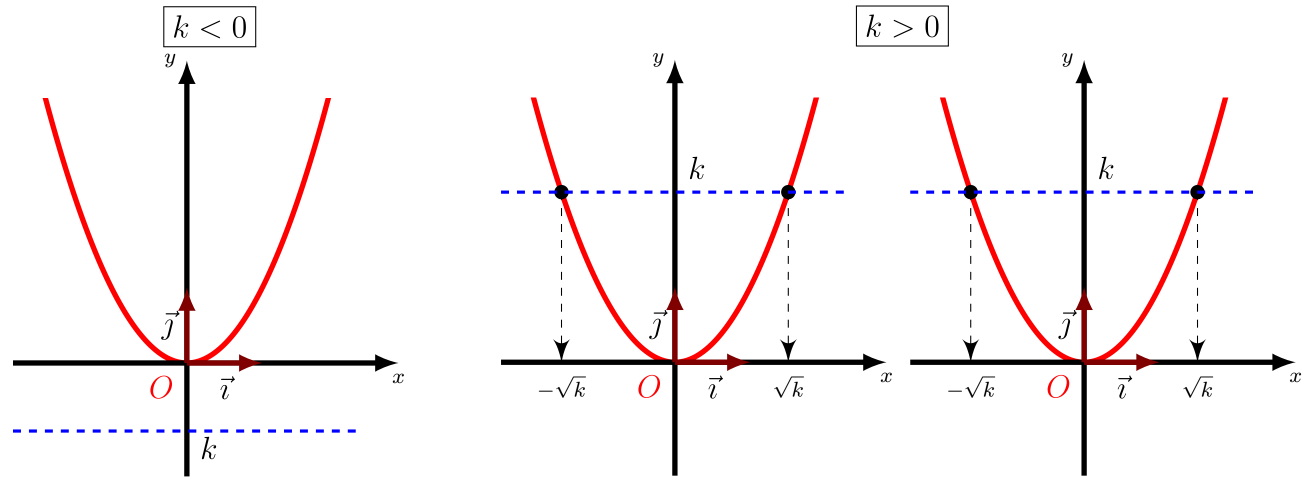


Figure 9.2 – La courbe représentative de la fonction carré est la **parabole** d'équation $\mathscr{P}: y = x^2$.



pas de solution $S = \emptyset$ | solution unique $S = \{0\}$ | 2 solutions $S = \{-\sqrt{k}; \sqrt{k}\}$

Figure 9.3 – Les solutions de l'équation $x^2 = k$ inconnue x, selon les valeurs de k.



L'inéquation $x^2 \leqslant k$ n'a pas de solution : $S = \emptyset$
L'inéquation $x^2 \geqslant k$ est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$

L'inéquation $x^2 \leqslant k$ a pour ensemble solution $S = [-\sqrt{k}; \sqrt{k}]$
L'inéquation $x^2 \geqslant k$ a pour ensemble solution $S =]-\infty; -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}; +\infty[$

Figure 9.4 – Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant k$ inconnue x.

■ **Exemple 9.1** En isolant x^2, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x :

a) $5x^2 = 15$ | b) $x^2 - 5 < 11$ | c) $12 > 2x^2 - 2 > 7$ | d) $1 - 5x^2 \geqslant 2$

9.1.1 Exercices : fonction carré

> Dans les exercices qui suivent, f est la fonction carré définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Exercice 1 — calculer les images et antécédents par une fonction carré.

L'image de $-\sqrt{6}$ par la fonction f est ....

$f(10^{-3}) =$ .... $f\left(\dfrac{7}{13}\right) =$ .... $f(2\sqrt{3}) =$ ....

Les antécédent de 10 par f sont ....

La valeur .... a un unique antécédent par la fonction f.

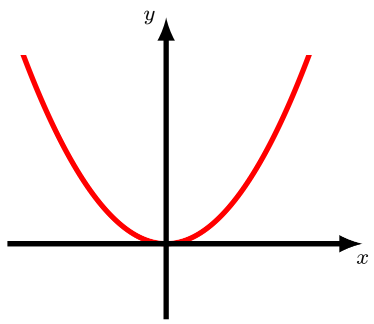
Lorsque .... alors l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solutions.

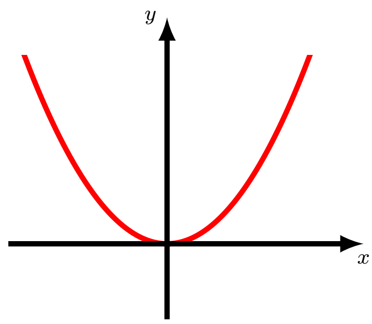
$f(1-\sqrt{2}) =$ ....

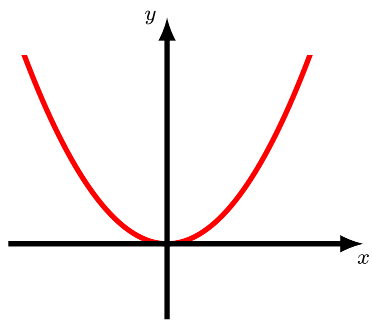
$f(x+1) =$ ....

■ **Exemple 9.2 — Utiliser le sens de variation de la fonction carré.**
Soit a un nombre réel. En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carré ou de son tableau de variation, encadrer au mieux a^2 dans les cas suivants :

$2\sqrt{3} < a \leqslant 4$ $\qquad$ $0 < a < 3$ $\qquad$ $-5 < a < 3$







Exercice 2 Encadrer a^2 et b^2 au mieux dans les cas suivants :

Si $a > 3\sqrt{2}$ alors	.... a^2	Si $-5 \leqslant a \leqslant 2$ alors	.... a^2 ....
Si $-2 < a \leqslant 0$ alors	.... a^2	Si $-5 < a$ alors	.... a^2 ....
Si $-5 \leqslant a < -2$ alors	.... a^2	Si $0 \geqslant a > b$ alors	.... a^2 ... b^2 ....
Si $0 < a < 2\sqrt{7}$ alors	.... a^2	Si $a < b < -2$ alors	.... a^2 ... b^2 ....
Si $3\sqrt{2} < a < 2\sqrt{7}$ alors	.... a^2	Si $a < b < 10$ alors	.... a^2 ... b^2 ....
Si $a < -5$ alors	.... a^2	Si $a < 0 < b\sqrt{7}$ alors	.... a^2 ... b^2 ....

■ **Exemple 9.3** Soit les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3(x+8)^2 - 4$ et $h(x) = -2(x+2)^2 - 1$.

Encadrer $g(x)$ lorsque $-7 \leqslant x < 3$.

$-7 \leqslant x < 3$

$x + 8$

$(x+8)^2$

$3(x+8)^2$

$3(x+8)^2 - 4$

Encadrer $h(x)$ lorsque $-6 \leqslant x < -3$.

$-6 \leqslant x < -3$

$x + 2$

$(x+2)^2$

$-2(x+2)^2$

$-2(x+2)^2 - 1$

Exercice 3 Pour chaque fonction h, donner un encadrement de $h(x)$ dans les cas suivants.

1) $-6 \leqslant x < -3$ et $h(x) = -2(x+9)^2 - 1$

2) $7 \leqslant x < 12$ et $h(x) = 2(x-4)^2 - 1$

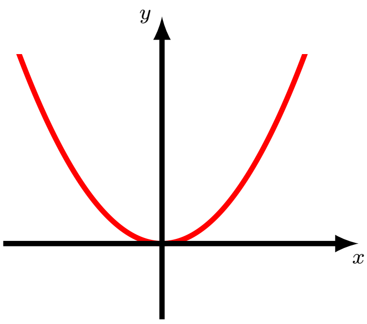
3) $-1 \leqslant x < 7$ et $h(x) = 5(x+4)^2 + 2$

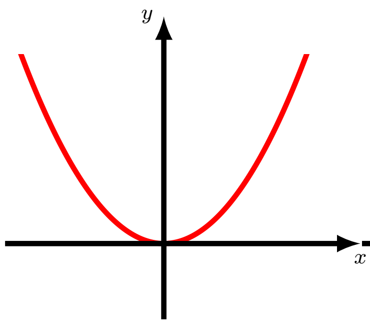
Exercice 4 — Résoudre des équations. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant x^2 :

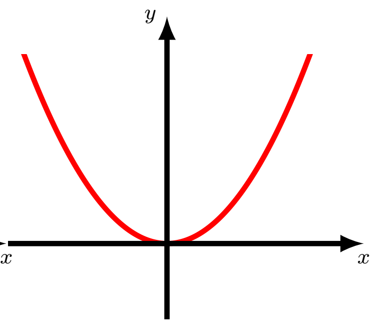
(E_1) $x^2 = 64$	(E_3) $x^2 + 5 = 0$	(E_5) $x^2 - 18 = 82$	(E_7) $3x^2 - 4 = 71$
(E_2) $x^2 - 81 = 0$	(E_4) $3 - x^2 = 0$	(E_6) $46 = x^2 - 3$	(E_8) $2x^2 + 5 = 3x^2 - 13$

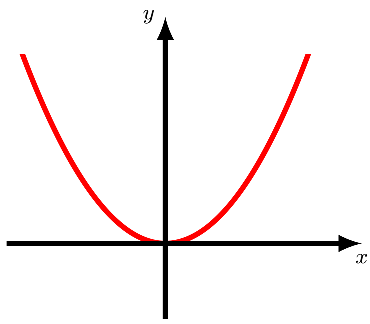
Exercice 5 — Résoudre des inéquations. En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carré, donner les solutions des inéquations suivantes d'inconnues x :

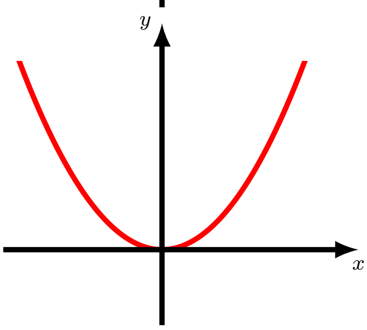
(I_1) $x^2 \geqslant 9$	(I_4) $x^2 < -5$	(I_7) $12 < x^2 < 18$	(I_{10}) $3x^2 - 2 < 13$
(I_2) $x^2 > 3$	(I_5) $x^2 > -5$	(I_8) $0 \leqslant x^2 < 27$	(I_{11}) $5 - x^2 > -11$
(I_3) $-2 < x^2$	(I_6) $5 \leqslant x^2 \leqslant 7$	(I_9) $-5 < x^2 \leqslant 2$	(I_{12}) $9 - 2x^2 < -16 + 3x^2$

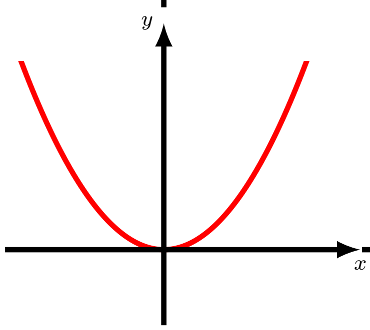


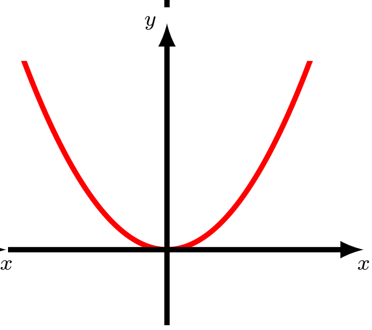


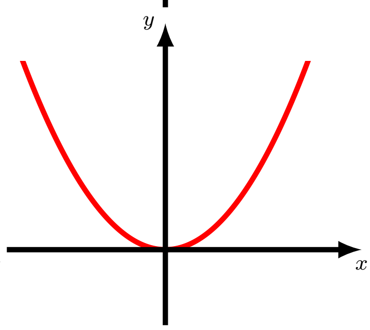












solutions de l'exercice 4. $S_1 = \{-8, 8\}$; $S_2 = \{-9, 9\}$; $S_3 = \{\}$; $S_4 = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$; $S_5 = \{-10, 10\}$; $S_6 = \{-7, 7\}$; $S_7 = \{-5, 5\}$; $S_8 = \left\{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right\}$; ■

solutions de l'exercice 5. $\mathscr{S}_1 =]-\infty, -3] \cup [3, \infty[$; $\mathscr{S}_2 = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, \infty\right[$; $\mathscr{S}_3 = \mathbb{R}$; $\mathscr{S}_4 = \emptyset$; $\mathscr{S}_5 = \mathbb{R}$; $\mathscr{S}_6 = [5, 7]$; $\mathscr{S}_7 = \left[15 - \sqrt{3}, \sqrt{3} + 15\right]$; $\mathscr{S}_8 = \left[-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right]$; $\mathscr{S}_9 = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$; $\mathscr{S}_10 = \left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[$; $\mathscr{S}_11 =]-4, 4[$; $\mathscr{S}_12 = \left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[$; ■

9.2 Fonction racine carrée

Définition 9.2 La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f\colon [0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \sqrt{x}$$

Sa représentation graphique est la courbe « $\mathscr{C}: y = \sqrt{x}$ »

Proposition 9.2 — sens de variation. La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0;+\infty[$.

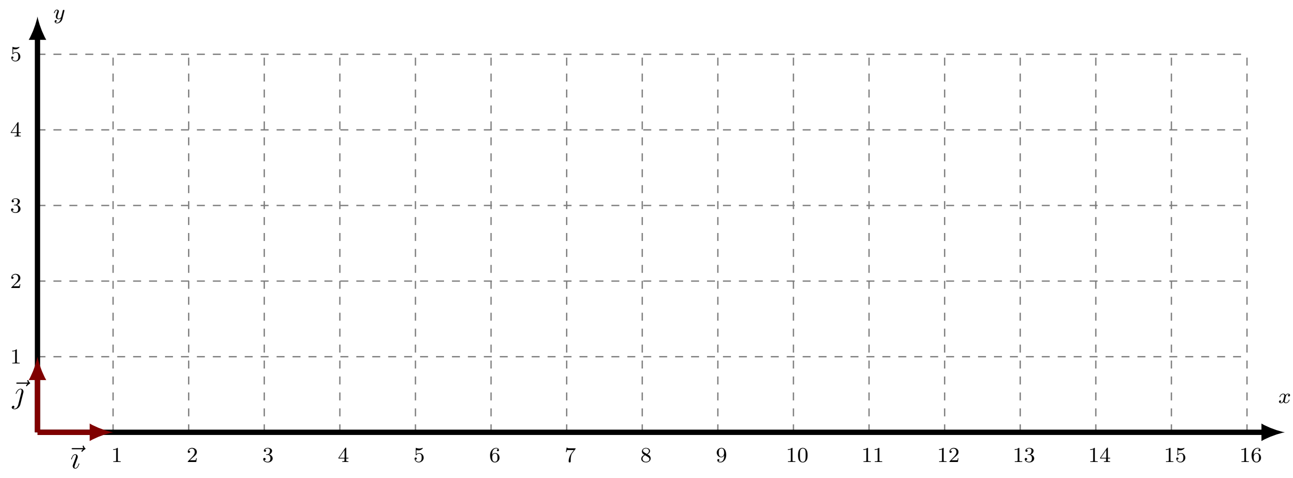
$$\text{Si} \qquad 0 \leqslant a < b \qquad \text{alors} \qquad 0 \leqslant \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

Démonstration. Exigible en fin de seconde

■

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	
Signe de $f(x)$	

Figure 9.5 – Tableau de variation de la fonction racine carrée. https://www.desmos.com/calculator/om0ozhtyjw



9.2.1 Exercices : fonction racine carrée

■ Exemple 9.4 — Résoudre équations et inéquations en isolant $\sqrt{x}$.

$-9\sqrt{x}-15=-69$ $\quad$ $\sqrt{x}\leqslant 2$ $\quad$ $4\sqrt{x}+4\leqslant 16$ $\quad$ $-5\sqrt{x}+6\geqslant 16$

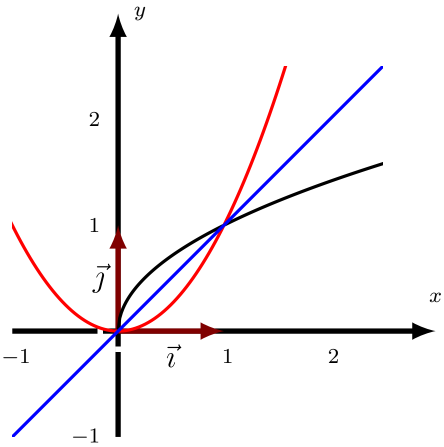
Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant $\sqrt{x}$.

(E_1) $\sqrt{x}=9$ | (E_2) $\sqrt{x}=-6$ | (E_3) $7-4\sqrt{x}=-9$ | (E_4) $-2\sqrt{x}-15=-21$

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en isolant $\sqrt{x}$.

(I_1) $\sqrt{x}<-9$ | (I_2) $\sqrt{x}\geqslant 4$ | (I_3) $-5\sqrt{x}-5<-25$ | (I_4) $3\sqrt{x}-6>0$

Exercice 8 — Comparer x^2 x et $\sqrt{x}$ pour différentes valeurs de $x>0$.



Les courbes d'équation $y=x^2$, $y=x$ et $y=\sqrt{x}$ sont représentées ci-contre.

1) Associer chaque courbe avec l'équation donnée.
2) Sans aucun calcul ordonner les nombres suivants :
   a) 1, 0,15, $\sqrt{0{,}15}$, $0{,}15^2$
   b) 1, 2,5, $\sqrt{2{,}5}$, $2{,}5^2$
   c) 1, 1,10, $\sqrt{1{,}10}$, $1{,}10^2$
   d) 1, 0,95, $\sqrt{0{,}95}$, $0{,}95^2$
   e) 1, $\sqrt{1}$, 1^2

Exercice 9

1) Compléter pour démontrer que si $0<x<1$ alors $0<x^2<x<\sqrt{x}<1$.

$$\begin{array}{l} 0<x<1 \\ \quad xx \\ \quad x^2 \end{array} \quad \text{on multiplie par } x>0$$

$$\begin{array}{l} 0<x<1 \\ \quad \sqrt{x} \\ \quad \sqrt{x}\sqrt{x} \\ \quad x \end{array} \quad \begin{array}{l} \textit{la fonction } x\mapsto\sqrt{x} \textit{ est } \dots\dots\dots\dots\dots \\ \textit{on multiplie par } \sqrt{x}>0 \end{array}$$

2) En s'inspirant de la démarche précédente, montrer que si $x>1$ alors $1<\sqrt{x}<x<x^2$.

Exercice 10 — Révisions.

Après deux augmentations successives de taux t, le prix d'un produit a globalement augmenté de 17,75%. Montrer que $(1+t)^2=1.1775$ et en déduire t au dixième de %.

Exercice 11 — Révisions.

Après une augmentation de taux t suivie d'une baisse de taux t, le prix d'une chemise a diminué de 19%. Montrer que $0{,}81=1-t^2$ et en déduire t au dixième de %.

solutions de l'exercice 6. $S_1=\{81\}$; $S_2=\{\}$; $S_3=\{16\}$; $S_4=\{9\}$; ■

solutions de l'exercice 7. $\mathscr{S}_1=\emptyset$; $\mathscr{S}_2=[16,\infty[$; $\mathscr{S}_3=[0,\infty[$; $\mathscr{S}_4=]4,\infty[$; ■