Chapitre 5
Théorème de Pythagore

5.1 Le carré d'un nombre

Définition 5.1 a désigne un nombre. La puissance

$$a^2 = aa = a \times a$$

s'appelle aussi « le carré de a ».

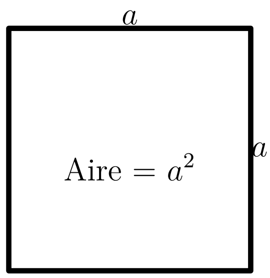


Figure 5.1 – Pour a nombre positif : $a \geqslant 0$. Le nombre a^2 s'interprète comme « l'aire d'un carré de côté a ».

Comme toutes les exposants, l'exposant « 2 » est prioritaire à la multiplication et l'addition.

■ **Exemple 5.1**

$$\begin{aligned} -5^2 &= -5 \times 5 = -25 & \quad 4 - 3^2 &= 4 - 3 \times 3 = 4 - 9 = -5 \\ (-5)^2 &= (-5) \times (-5) = 25 & (4-3)^2 &= 1^2 = 1 \end{aligned}$$

5.2 La racine carré d'un nombre

Définition 5.2 La racine carrée d'un nombre positif $b \geqslant 0$ est le nombre *positif* noté $\sqrt{b}$ dont le carré vaut b.

$$\left(\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{b} \times \sqrt{b} = b$$

En géométrie $\sqrt{b}$ est « la longueur du côté d'un carré d'aire b ».

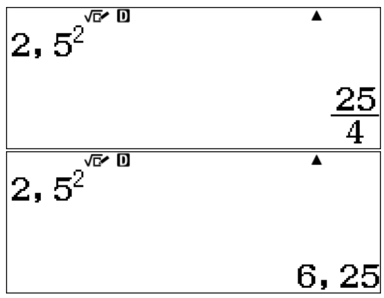


Figure 5.2 – Pour calculer le carré d'un nombre positif, on utilise la touche $\boxed{x^2}$ de la calculatrice. La touche $\boxed{S\Leftrightarrow D}$ sert à passer d'écriture décimale à fraction d'entier (lorsque c'est possible).

R Pour calculer le carré d'un nombre positif, on peut utiliser la touche $\boxed{\sqrt{\blacksquare}}$ ($\boxed{\text{SECONDE}}$ ou $\boxed{\text{SHIFT}}$ puis $\boxed{x^2}$).

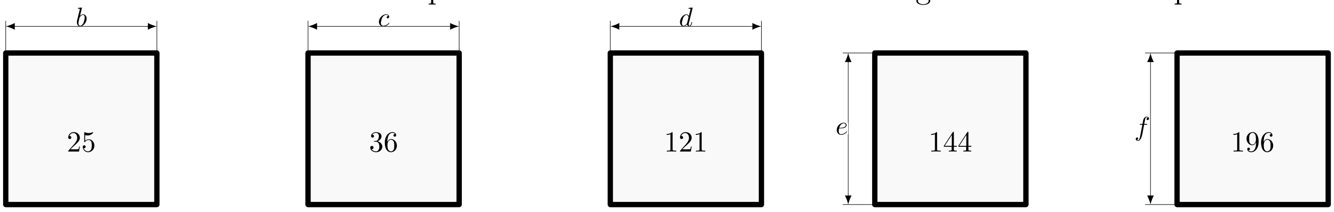
5.2.1 Exercices carrés et racines carrées

■ **Exemple 5.2 — Carrés parfaits à connaitre.** Les carrés de nombres entiers sont dits « carrés parfaits ».

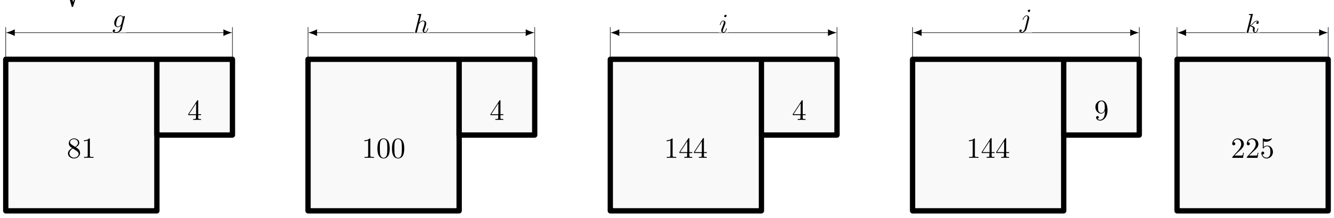
$1^2 =$	$4^2 =$	$7^2 =$	$10^2 =$	$13^2 =$
$2^2 =$	$5^2 =$	$8^2 =$	$11^2 =$	$14^2 =$
$3^2 =$	$6^2 =$	$9^2 =$	$12^2 =$	$15^2 =$

Exercice 1

Le nombre dans les carrés indique l'aire du carré. Détermine la longueur du côté indiqué.



$b = \sqrt{\quad} =$

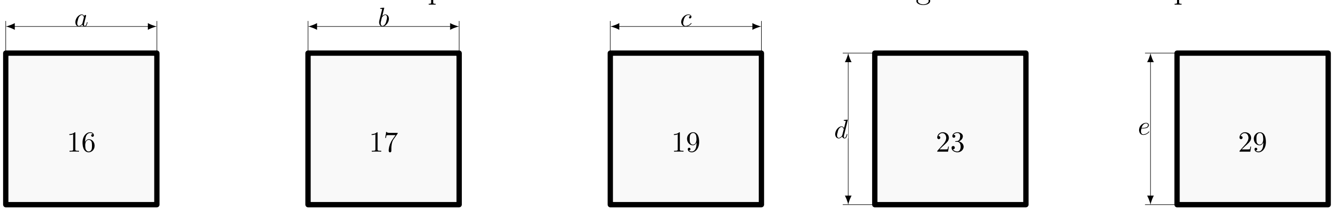


$g =$

> En regardant g et e, i et f, h et e, j et k, que dire de $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$.

Exercice 2

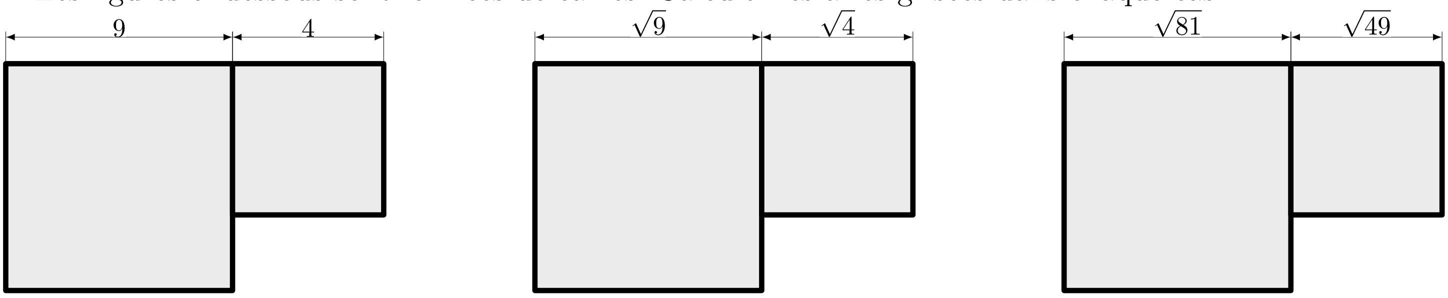
Le nombre dans les carrés indique l'aire du carré. Détermine la longueur du côté indiqué.

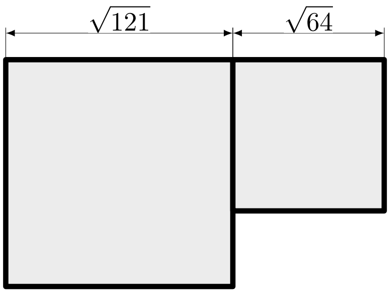


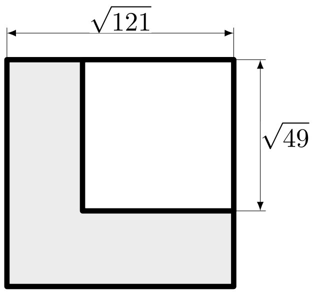
$a = \sqrt{\quad} =$

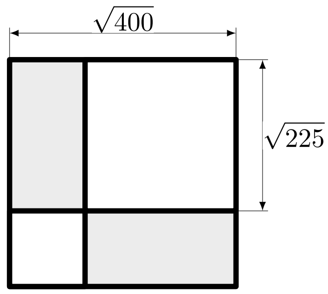
Exercice 3

Les figures ci-dessous sont formées de carrés. Calculer les aires grisées dans chaque cas.









■ **Exemple 5.3 — Racines de carrés parfaits.** sont aussi des entiers.

$\sqrt{\qquad} = 1$	$\sqrt{\qquad} = 6$	$\sqrt{\qquad} = 11$
$\sqrt{\qquad} = 2$	$\sqrt{\qquad} = 7$	$\sqrt{\qquad} = 12$
$\sqrt{\qquad} = 3$	$\sqrt{\qquad} = 8$	$\sqrt{\qquad} = 13$
$\sqrt{\qquad} = 4$	$\sqrt{\qquad} = 9$	$\sqrt{\qquad} = 14$
$\sqrt{\qquad} = 5$	$\sqrt{\qquad} = 10$	$\sqrt{\qquad} = 15$

Exercice 4

Exprimer les expressions suivantes à l'aide d'entiers.

a) $\sqrt{49}$	c) $\sqrt{3^2}$	e) $\sqrt{100}$	g) $-\sqrt{9^2}$	i) $\sqrt{(-9)^2}$	k) $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$
b) $\sqrt{7^2}$	d) $\sqrt{100^2}$	f) $\left(\sqrt{3}\right)^2$	h) $\sqrt{-9^2}$	j) $\left(\sqrt{9}\right)^2$	l) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

> Défi : Trouve des nombres tels que l'instruction $\sqrt{a}$ retourne un message d'erreur.

■ **Exemple 5.4** Encadrer $\sqrt{19}$, $\sqrt{30}$ et $\sqrt{134}$ par deux entiers consécutifs.

$16 < 19 < 25$ $\qquad$ $< 30 <$ $\qquad$ $< 134 <$

$\sqrt{16} < \sqrt{19} < \sqrt{25}$

$4 < \sqrt{19} < 5$

Exercice 5 Même consignes. Montrer les étapes.

a) $\sqrt{27}$	b) $\sqrt{41}$	c) $\sqrt{5}$	d) $\sqrt{89}$	e) $\sqrt{10}$	f) $\sqrt{122}$

Exercice 6

À l'aide de la touche $\boxed{\sqrt{\blacksquare}}$ ($\boxed{\text{SECONDE}}$ puis $\boxed{x^2}$) de la calculatrice, donner un encadrement décimal au centième près des racines carrées suivantes :

$< \sqrt{2} <$	$< \sqrt{3} <$	$< \sqrt{5} <$	$< \sqrt{10} <$

5.3 Le théorème de Pythagore

Théorème 5.1 — Théorème de Pythagore. Dans un triangle rectangle. Le carré du plus grand côté (l'hypoténuse) est égale à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

Le théorème est utilisé au collège pour calculer la 3^{e} longueur d'un triangle rectangle quand on connaît les longueurs de 2 de ses côtés.

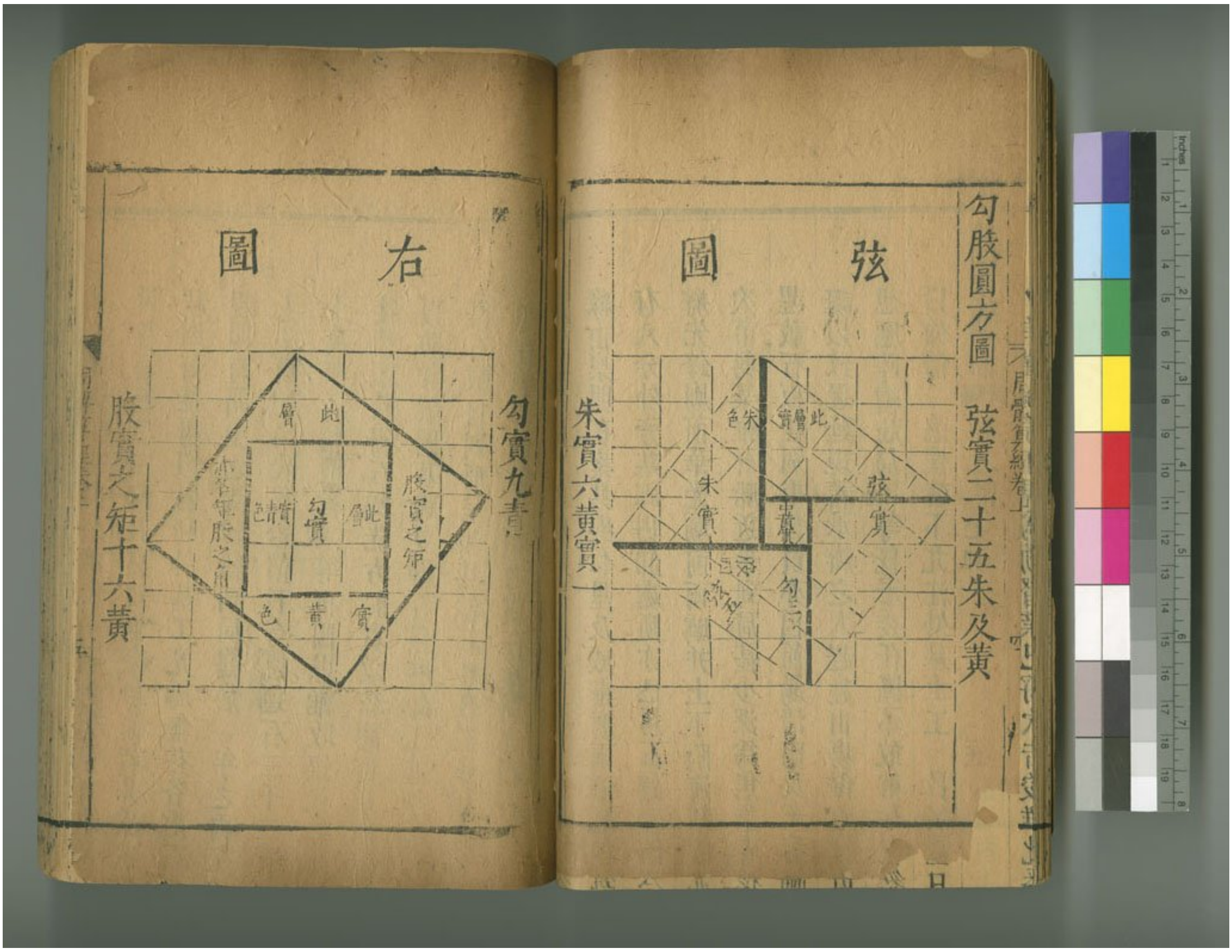
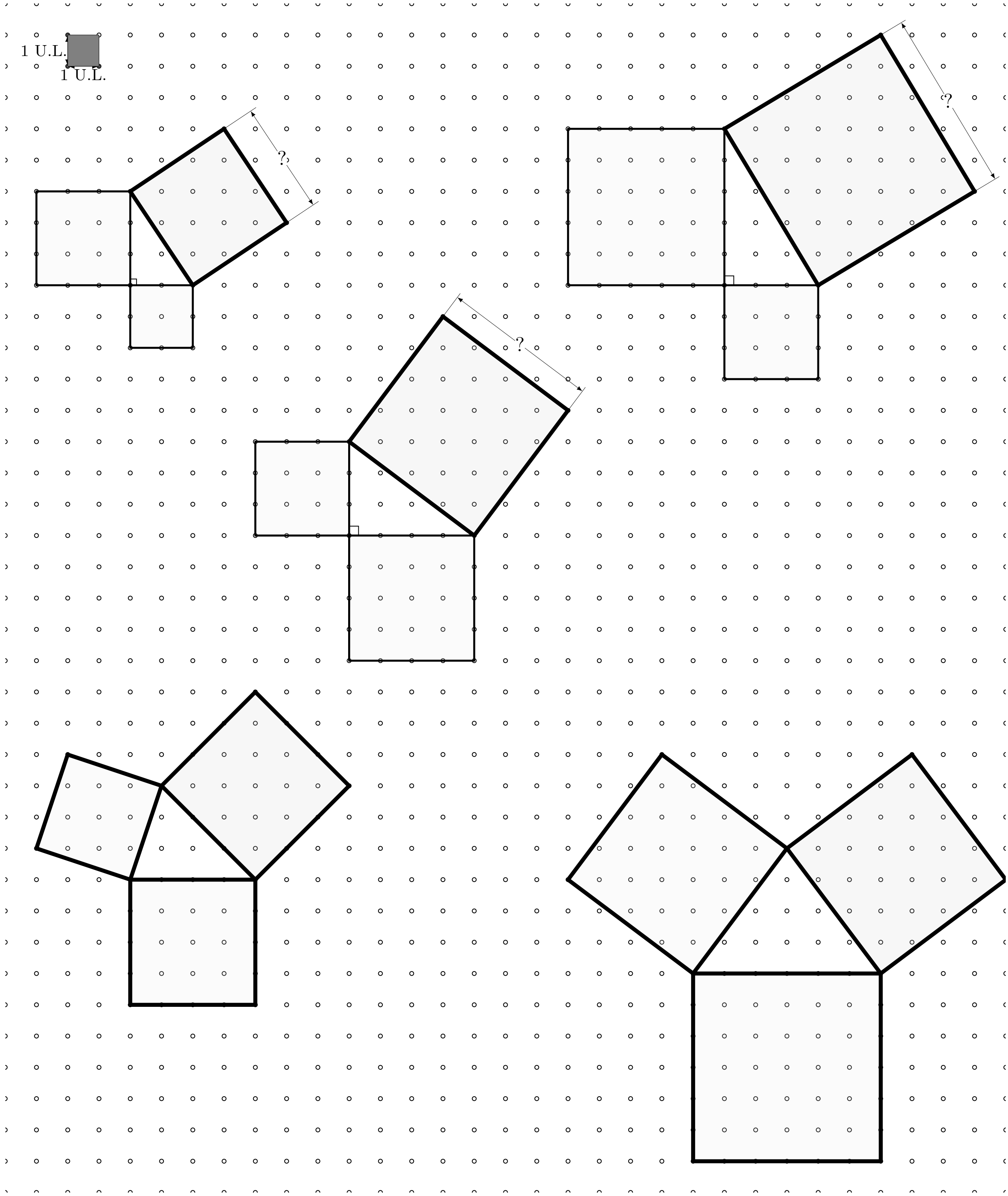


Figure 5.3 – la figure de l'hypoténuse du Zhoubi Suanjing *Classique mathématique du Gnomon des Zhou*. Un des textes mathématiques chinois des plus anciens, de la dynastie de Zhou (1046-771 av J.-C.). On y voit le cas 3-4-5 d'un triangle rectangle

■ **Exemple 5.5 — Illustration du théorème de Pythagore.** Vidéo

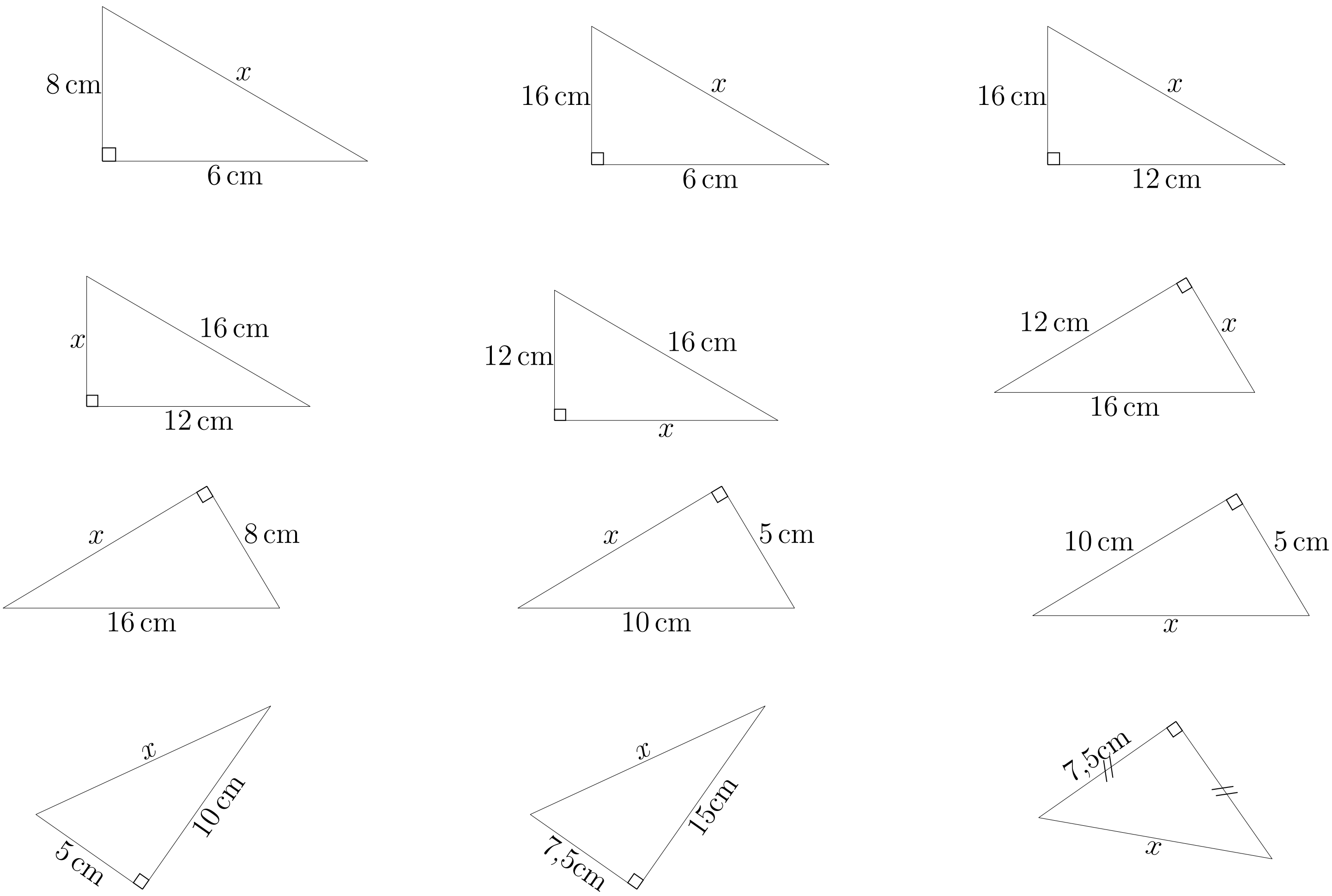
À l'aide du quadrillage, retrouver les aires des carrés ci-dessous. En déduire la longuer de l'hypoténuse dans chaque cas.



5.3.1 Exercices application : je sais que le triangle est rectangle

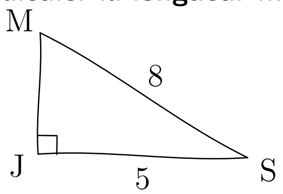
■ **Exemple 5.6 — Je fais.** Calculer la valeur de x puis donner une valeur approchée au centième près.

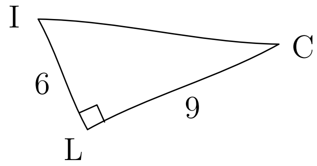
Exercice 7 — à vous. Mêmes consignes



Théorème 5.2 — Théorème de Pythagore. Dans un triangle rectangle, le carré du plus grand côté (l'hypoténuse) est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

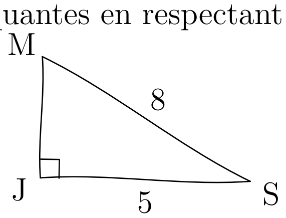
■ **Exemple 5.7 — Calculer la longueur manquante.** de triangles rectangles

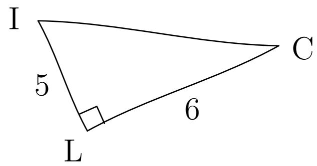




	Justification	**Affirmation**
	Calcul de la longueur du grand côté IC	
1		
2		$(\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots)^2 = (\ldots\ldots)^2$
3		$IC^2 =$
4		$IC =$
	Calcul d'un des côtés de l'angle droit JM	
1		
2		$(\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots)^2 = (\ldots\ldots)^2$
3		$MJ^2 =$
4		$MJ =$

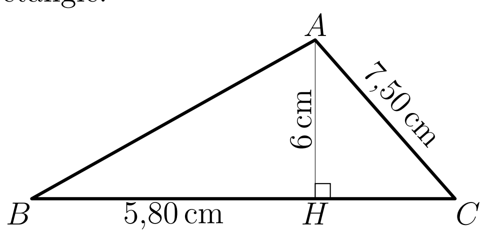
Exercice 8 — à vous. Calculer les longueurs manquantes en respectant la rédaction type.





Exercice 9

Dans le triangle ABC ci-contre, H est le pied de la hauteur issue de A. Le triangle ABC n'est pas a priori rectangle.

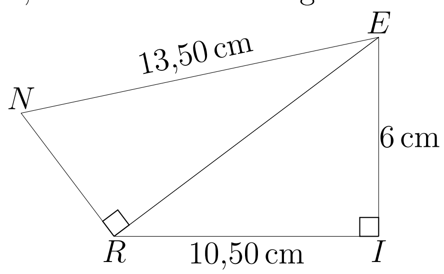


a) Calculer la valeur exacte de AB.

b) Calculer la valeur exacte de HC.

Exercice 10

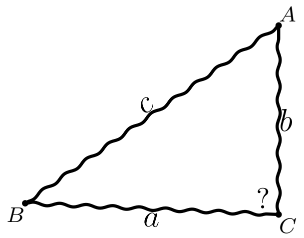
Dans la figure ci-contre, ERI est un triangle rectangle en I, et NRE est rectangle en R.

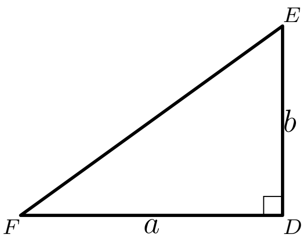


a) Calculer la valeur exacte de RE.

b) En déduire la valeur exacte de NR.

5.4 Identifier si un triangle est rectangle





Soit un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont désignés par a, b et c. Le côté le plus long est c.

On souhaite savoir si ABC est un triangle rectangle en C.

Considérons le triangle rectangle EDF dont les côtés de l'angle droit mesurent a et b. Le théorème de Pythagore dans le triangle EDF, indique que $EF^2 = a^2 + b^2$.

Il y a deux possibilités :

Cas n° 1 $c^2 = EF^2 = a^2 + b^2$. Dans ce cas, le triangle ABC a les mêmes longueurs de côtés que DEF. Les triangles sont superposables, et l'angle $\widehat{ACB}$ est droit.

Cas n° 2 $c^2 \neq a^2 + b^2$. Le triangle ABC ne peut pas être rectangle en C.

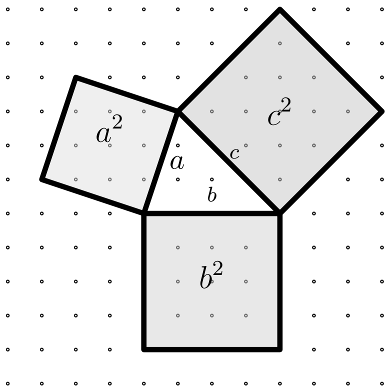
Théorème 5.3 — Réciproque du théorème de Pythagore. Si le carré du plus grand côté **est égal** à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, alors le **triangle est rectangle** et le plus grand côté est l'hypoténuse.

Théorème 5.4 — Contraposée du théorème de Pythagore. Si le carré du plus grand côté **n'est pas égal** à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, alors le triangle **n'est pas rectangle**

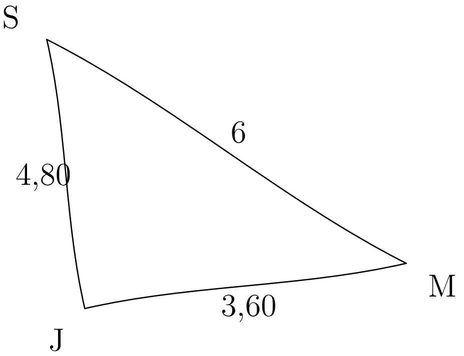
5.5 Exercices : identifier les triangles rectangles

Théorème 5.5 — Réciproque du théorème de Pythagore. Si le carré du plus grand côté **est égal** à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, alors le **triangle est rectangle** et le plus grand côté est l'hypoténuse.

Théorème 5.6 — Contraposée du théorème de Pythagore. Si le carré du plus grand côté **n'est pas égal** à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, alors le triangle **n'est pas rectangle**



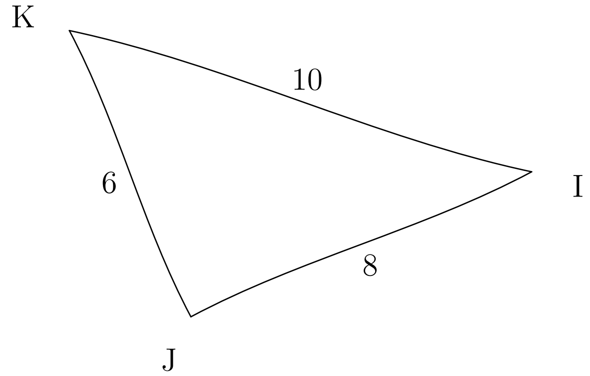
■ **Exemple 5.8 — Justifier ou réfuter si un triangle est rectangle.**



Dans le triangle MJS, $[MS]$ est le plus grand côté.

MS^2	$MJ^2 + JS^2$
6^2	$3{,}60^2 + 4{,}80^2$
	$12{,}96 + 23{,}04$
36	36

Comme $MS^2 = MJ^2 + JS^2$, alors le triangle MJS est rectangle en J d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

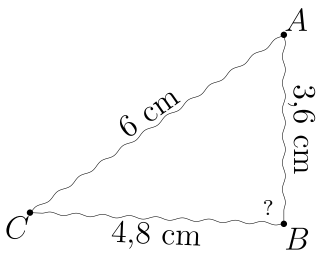


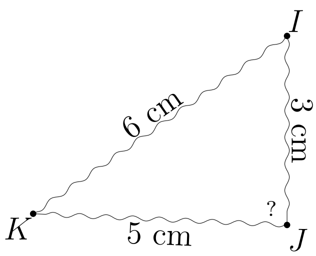
Dans le triangle IJK, $[IK]$ est le plus grand côté.

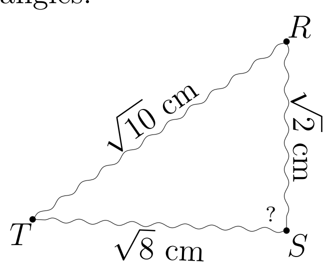
IK^2	$IJ^2 + JK^2$
10^2	$8^2 + 6^2$
	$64 + 36$
100	100

Comme $IK^2 = IJ^2 + JK^2$, alors le triangle IJK est rectangle en J d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

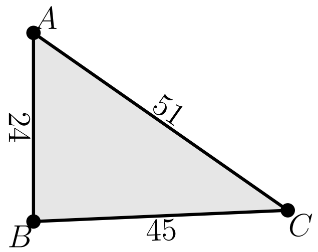
Exercice 11 Justifier si les triangles ABC, IJK ou RTS ci-dessous sont rectangles.

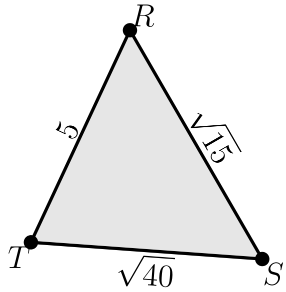


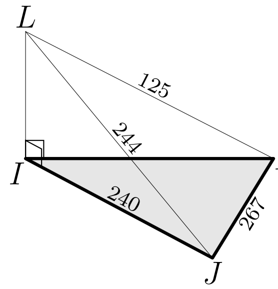




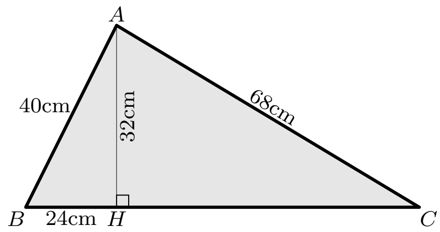
Exercice 12 Dire si le triangle colorié est un triangle rectangle, et si oui, en quel point.





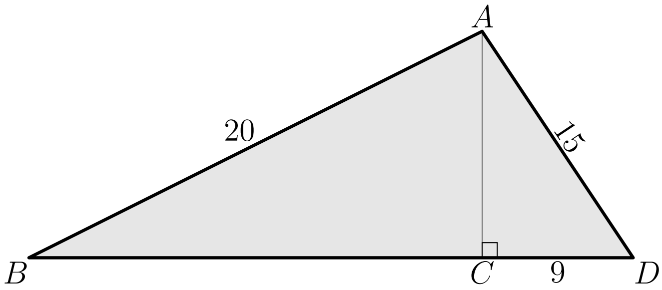


Exercice 13



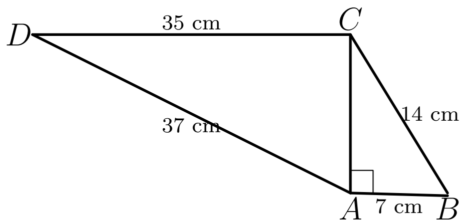
a) Donne la longueur exacte du côté $[HC]$.
b) Calculer l'aire du triangle ABC.
c) Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier votre réponse.

Exercice 14



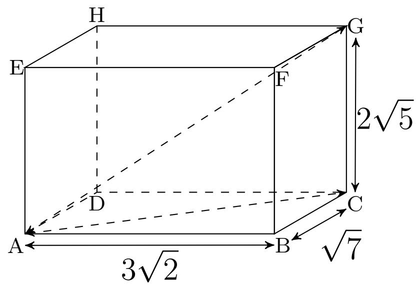
Le triangle ABD est-il rectangle? Justifie.

Exercice 15



a) Donne la longueur exacte du côté $[CA]$, puis calcule une valeur approchée au centimètre prés.
b) Le triangle ACD est-il rectangle? Justifie.

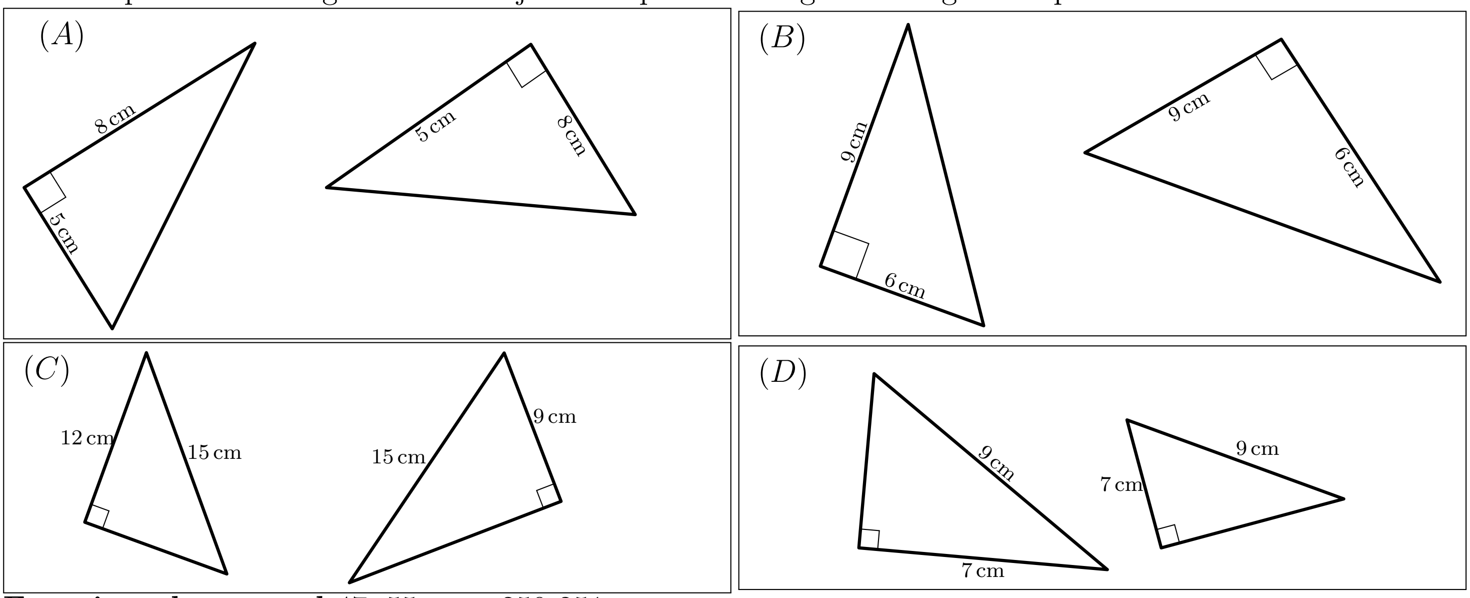
Exercice 16 — .



Soit le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-contre :
a) Montrer que $AC = 5$.
b) Calculer AG.

Exercice 17

Pour les paires de triangles suivantes justifier que les triangles sont égaux et préciser le critère utilisé.



Exercices du manuel 47, 55 page 250-251.