Chapitre

Probabilités 9

Une **expérience aléatoire** est une expérience **renouvelable à l'identique**, dont on connait les **issues**, et dont le résultat est **imprévisible**.

Chaque renouvellement de l'expérience s'appelle **épreuve**.

contrairement à une expérience **déterministe** comme en Physique, où des conditions identiques conduisent à des résultats identiques –aux erreurs de mesure près

■ **Exemple 9.1** a) On lance un jeton et on note la face obtenue. Appelons succès le fait d'obtenir pile. On répète cette expérience 100 fois, on compte le nombre de succès X, et calcule la proportion de succès $f = \dfrac{X}{100}$.

b) On lance le jeton jusqu'à obtenir un succès, et l'on note le nombre de lancers nécessaires S. On répète cette expérience 100 fois, et on calcule le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir le premier succès $\overline{S}$.

Utiliser une punaise au lieu d'un jeton donnerait un résultat similaire à l'exemple 9.1.

Ces résultats expérimentaux suggèrent l'existence d'une **loi du hasard** : *le nombre moyen de coups nécessaires pour obtenir le premier succès est l'inverse de la fréquence moyenne de succés.* On ne parle pas de nombres liés à une expérience donnée, mais de « nombres idéaux » dont ceux de l'expérience se rapprochent.

Postulat 9.2 — La loi naïve des grands nombres. Lorsqu'une expérience aléatoire a un nombre fini de résultats possibles, chacun de ces résultats possède une probabilité d'**apparaître**.

Quand on répète un grand nombre de fois l'expérience, la proportion d'apparition de chaque résultat est voisine de sa probabilité.

Principe fondamental. Vous en verrez d'autres versions plus formalisées au lycée et au delà.

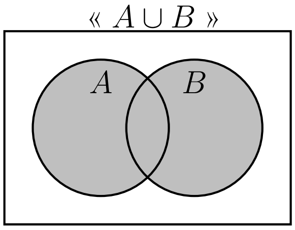
9.1 Vocabulaire

Pour une expérience aléatoire :

- une issue est notée ω, ou ω_1, $\omega_2, \ldots$. à lire « oméga »
- l'univers Ω désigne l'ensemble des issues possibles $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \ldots; \omega_n\}$.
  n désigne le nombre total d'issues.
- un événement E est une partie de Ω : $E \subset \Omega$
- ω **réalise** l'événement E signifie $\omega \in E$.

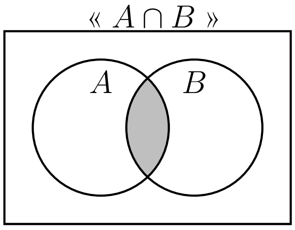
Card(E) est le **cardinal** (on dit aussi taille) d'un événement E. C'est le nombre d'issues qui réalisent E.

« $A \cup B$ »



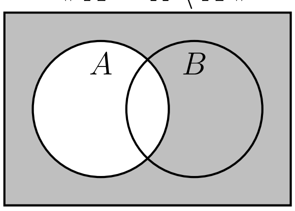
Ω

« $A \cap B$ »



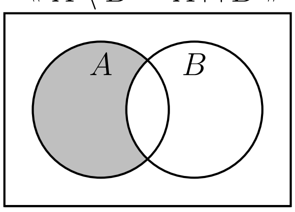
Ω

« $\overline{A} = \Omega \setminus A$ »



Ω

« $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ »



Ω

Définition 9.1 — Opérations sur les événements. Pour tous événements A et B d'un univers Ω :

- l'événement $A \cup B$ est l'**union** de A et B.
  L'événement ω réalise $A \cup B$ s'il réalise A **OU** s'il réalise B.
  $\omega \in A \cup B$ si $\omega \in A$ **ou** $\omega \in B$
- l'événement $A \cap B$ est l'**intersection** de A et B.
  L'événement ω réalise $A \cap B$ s'il réalise A **ET** s'il réalise B.
  $\omega \in A \cap B$ si $\omega \in A$ **et** $\omega \in B$
- l'événement $\overline{A}$ est l'événement **contraire** de A.
  L'événement ω réalise $\overline{A}$ si ne réalise **PAS** A
  $\omega \in \overline{A}$ si $\omega \notin A$

- $E = \Omega$ est un **événement certain** : si on choisit un élément ω quelconque de Ω, on est *certain* qu'il appartient à E.
- $\emptyset$ est l'**événement impossible** : si l'on choisit un élément ω il est impossible qu'il appartienne à $\emptyset$.
- Deux événements E et F sont **incompatibles** si $E \cap F = \emptyset$.
  Les événements sont **disjoints**

R On peut écrire $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
L'événement ω réalise $A \setminus B$ s'il réalise A **ET** ne réalise pas B.
$\omega \in A \cap \overline{B}$ si $\omega \in A$ et $\omega \notin B$.

9.2 Loi de probabilité

Une fois défini l'univers aléatoire on se dote d'un moyen de calculer des probabilités.

Définition 9.2 — définition constructive d'une loi de probabilité.
Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

a) on attribue à chaque événement élémentaire ω une probabilité positive $p(\omega) \geqslant 0$
b) la somme des probabilité des événements élémentaires est égale à 1 :
$p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_n) = 1$
c) Pour tout événement E, la probabilité $P(E)$ est égale à la probabilité des événements élémentaires qui le composent.

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

$$P(\{\omega\}) = p(\omega)$$
$$P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)$$

■ **Exemple 9.3** Expérience aléatoire : lancer un dé cubique et noter la surface.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On choisit la loi de probabilité :

$\omega_i \in \Omega$	1	2	3	4	5	6	Total
$p(\omega_i)$	0	0,5	0,1	0,3	0,01	0,09	

$$P(\Omega) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) =$$

$A =$ « obtenir un nombre pair », $P(A) = p(2) + p(4) + p(6) =$
$B =$ « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 » ; $P(B) =$
$C =$ « obtenir un 7 » ; $P(C) =$
$\overline{A} =$ $P(\overline{A}) =$
$\overline{B} =$ $P(\overline{B}) =$

Convention lycée Dans tout exercice où figurent des expressions tel que « dés équilibrés », « tirage au hasard », « urnes opaque et

Expérience aléatoire *Exemple : lancer de dé cubique*	Univers aléatoire Ω *Exemple :* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Résultat d'une expérience aléatoire *Exemple : le dé est tombé sur 1*	Élément de Ω, appelé événement élémentaire ou éventualité *Exemple :* $\omega = 1$
Évenement $\mathcal{E}$ *Exemple :* $\mathcal{E} =$ *« obtenir un numéro pair »*	Partie E de Ω, appelé événement *Exemple :* $E = \{2, 4, 6\}$
Réalisation d'un événement $\mathcal{E}$	Élément $\omega \in E$
L'événement $\mathcal{E}$ ne se produit pas *Exemple : « le numéro n'est pas multiple de 2 »*	Partie complémentaire $\overline{E}$ de Ω *Exemple :* $\overline{\{2, 4, 6\}} = \{1; 3; 5\}$
Les événements $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ se réalisent	Intersection $E \cap F$ de Ω
Au moins l'un des événements $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{F}$ est réalisé	Union $E \cup F$ de Ω
Probabilité d'un événement $\mathcal{E}$	Somme des probabilités $p(\omega)$ des éléments ω de E

Table 9.1 – Mini dictionnaire : énoncés en francais $\leftrightarrow$ modélisation mathématique

jetons indiscernables au toucher »... le modèle choisi sera celui de l'équiprobabilité : tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Définition 9.3 — situation d'équiprobabilité. Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

a) $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_n) = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$

b) Pour tout événement E on a $P(E) = \dfrac{\mathrm{Card}(E)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

■ **Exemple 9.4** Reprenons l'exemple 9.3 en supposant l'équiprobabilité :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) =$$

$P(\Omega) =$

$A =$ « obtenir un nombre pair », $P(A) =$

$B =$ « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 » ; $P(B) =$

$C =$ « obtenir un 7 » ; $P(C) =$

$\overline{A} =$ $P(\overline{A}) =$

$\overline{B} =$ $P(\overline{B}) =$

Théorème 9.5 — formulaire. Toute loi de probabilité sur un univers Ω vérifie les propriétés suivantes :

(P1) $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$ — loi unitaire

(P2) Pour tout événement A $\quad 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ — loi positive

(P3) Pour tout événement A — $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

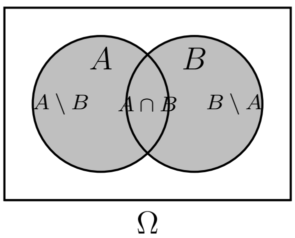
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

(P4) Si A et B sont des événements incompatibles alors : — loi additive

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(P5) Pour tous événements A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



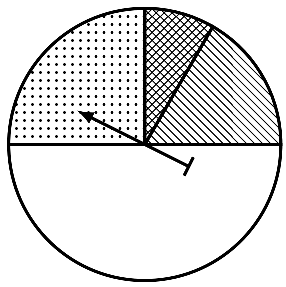
R Écriture alternative de P5 :

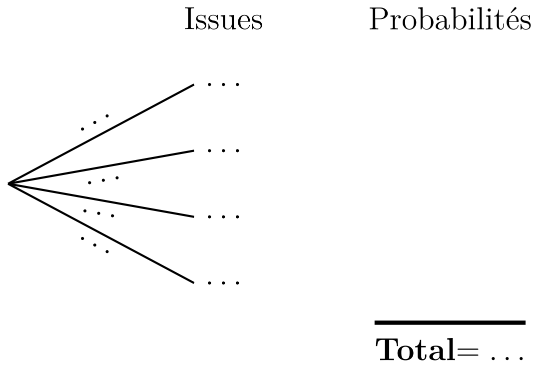
$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

9.3 Exercices

■ Exemple 9.6 — Représentation des événements : arbres des issues/arbre de probabilité.

On fait tourner l'aiguille sur la roue de loterie ci-dessous, et on note le motif indiqué.





a) Compléter l'arbre des isssues ci-dessus par issues de cette expérience.

b) Les issues sont elles équiprobables? Compléter l'arbre à l'aide des probabilités de chaque issue.

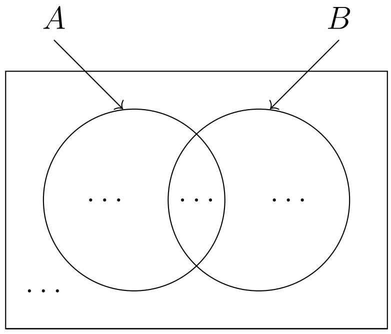
■ Exemple 9.7 — Représentation des événements : diagramme à double entrée et tableaux de Venn.

Il y a 11 garçons et 15 filles dans une classe de CE1, et 13 garçons et 10 filles dans la classe de CE2. On considère l'expérience aléatoire « choisir un élève au hasard parmi les élèves ».

Soit les événements $A =$« l'élève choisi est une fille » et $B =$ « l'élève choisi est en CE2 ».

1) Compléter le tableau double entrée et le diagramme de Venn par les effectifs correspondants.

	A	$\overline{A}$	**Total**
B			
$\overline{B}$			
Total			



$\text{Card}(\Omega) = \dots$

2) Décrire les événements suivants par une courte phrase puis déterminer leur probabilité.

a) $P(A) =$ .... $P(B) =$....................................

b) $\overline{A}$= .... $P(\overline{A}) =$

c) $A \cap B =$ .... $P(A \cap B) =$

d) $A \cap \overline{B} =$ .... $P(A \cap \overline{B}) =$

e) $\overline{A \cap B} =$ .... $P(\overline{A \cap B}) =$

f) $A \cup B =$ .... $P(A \cup B) =$

g) $\overline{A} \cup \overline{B} =$ .... $P(\overline{A} \cup \overline{B}) =$

Exercice 1

On considère l'expérience aléatoire ou un élève présente une excuse pour ne pas rendre son devoir.

Soit les événements $A =$« l'élève dit la vérité » et $B =$ « le professeur accuse l'élève de mentir ».

1) Énumérer les issues possibles de cette expérience aléatoire et donner Ω.
2) Traduisez à l'aide de A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\cap$ et $\cup$ chacun des événements suivants :
   a) l'élève dit la vérité et le professeur l'accuse à tort.
   b) l'élève ment.
   c) l'élève dit la vérité ou le professeur le croit.
3) Énoncer les événements $\overline{A} \cup B$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{\overline{A}}$.

Exercice 2 — **Diagrammes de Venn.**

Un docteur expérimente un nouveau traitement thérapeutique à des malades atteints de cancer. Ω désigne l'ensemble des patients. Soit les événements $A =$ « le patient est vivant », $B =$ « le patient a suivi le traitement » et $C =$ « le patient réside en ville »

1) Énoncer puis représenter les évenements suivants dans les 5 premiers diagrammes de Venn :

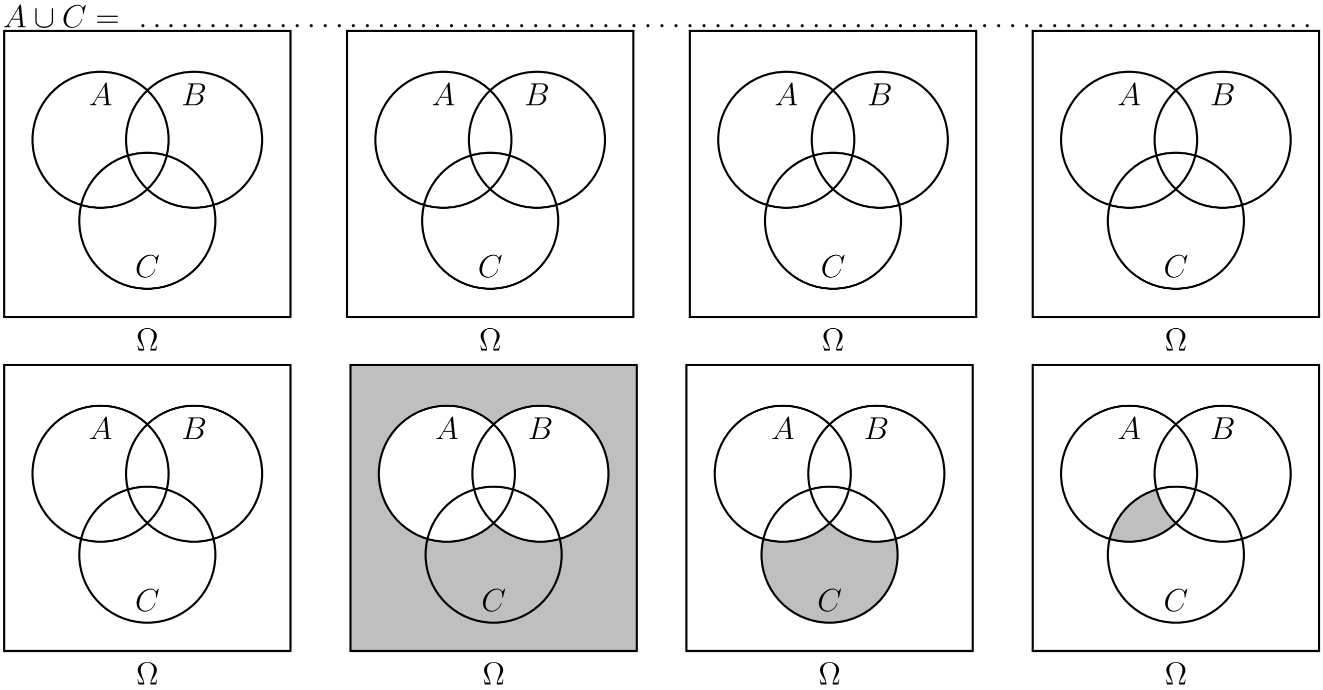
   $A \cap B =$ ....

   $A \cap \overline{C} =$ ....

   $\overline{A} \cap B \cap C =$ ....

   $A \cap \overline{B} \cap C =$ ....

   $A \cup C =$ ....



2) Pour les 3 derniers diagrammes de Venn, donnez la notation correspondant à la partie colorée et énoncez les événements. Plusieurs écritures sont possibles.

   $E =$ ....

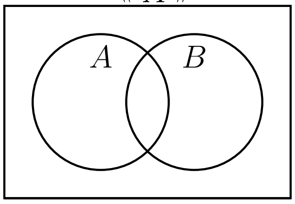
   $F =$ ....

   $G =$ ....

Exercice 3 — relations de De Morgan. Soit un univers Ω, et deux événements A et B.

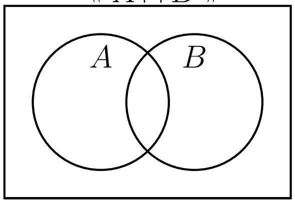
1) Représenter dans les diagrammes de Venn les événements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$.

« $\overline{A}$ »



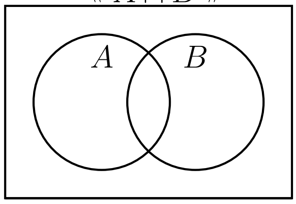
Ω

« $\overline{A} \cap \overline{B}$ »



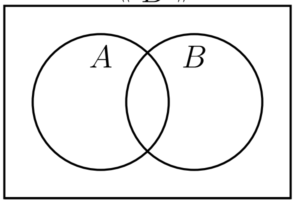
Ω

« $\overline{A \cap B}$ »



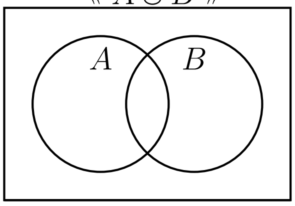
Ω

« $\overline{B}$ »



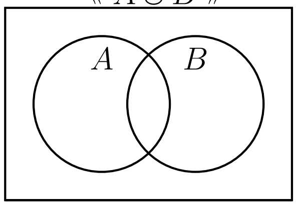
Ω

« $\overline{A} \cup \overline{B}$ »



Ω

« $\overline{A \cup B}$ »



Ω

2) Compléter les formules suivantes :
$\overline{A \cap B} =$ ....
$\overline{A \cup B} =$ ....

Expériences aléatoires

Exercice 4

On lance cinq fois une pièce de monnaie. La sortie de Pile rapporte 1 point. La sortie de Face ne rapporte rien. On s'intéresse à la somme des points obtenus à l'issue des cinq lancers.

1) Décrire l'univers associé à l'expérience aléatoire.
2) Préciser le nombre d'éventualités qui le composent.

Exercice 5 Mêmes questions que l'exercice précédent.

On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on soustrait le plus petit résultat obtenu du plus grand. Le résultat est nul si le lancer produit un double.

Exercice 6

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. On rappelle que, dans un jeu de 32 cartes, on trouve quatre couleurs (Carreau $\diamondsuit$ et Coeur $\heartsuit$ sont de couleur rouge. Trèfle $\clubsuit$ et Pique $\spadesuit$) et, dans chaque couleur, on a une série de 8 cartes (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As). On appelle:

- C l'événement « la carte tirée est un cœur ($\heartsuit$) »
- F l'événement « la carte tirée est une figure (A, R, D, V) »

1) Décrire par une phrase l'événement $C \cap F$. Combien compte-t-il d'issues?
2) Décrire par une phrase l'événement $C \cup F$. Combien compte-t-il d'issues?
3) Décrire par une phrase l'événement $\overline{C}$. Combien compte-t-il d'issues?
4) Décrire par une phrase l'événement $\overline{C} \cap F$. Combien compte-t-il d'issues?
5) Décrire par une phrase l'événement $\overline{C \cup F}$. Combien compte-t-il d'issues?

Exercice 7 Deux épidémies sévissent en même temps dans un lycée, la gastro-entérite et un rhume. On choisit un élève au hasard et on nomme:

- G l'événement « l'élève a la gastro-entérite »
- R l'événement « l'élève a un rhume »

Décrire à l'aide de ces deux événements:

1) « l'élève a la gastro-entérite et le rhume »
2) « l'élève a le rhume mais pas la gastro-entérite »
3) « l'élève a au moins une des deux maladies »
4) « l'élève n'a aucune des deux maladies »

Calcul de probabilité

Exercice 8

Robin des Bois atteint sa cible avec une probabilité de $0,7$. Quelle est la probabilité qu'il la rate?

Exercice 9

Soit A et B deux événements tels que : $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,3$.

En s'aidant d'un diagramme de Venn (ou diagramme en patate), calculer:

a) $P\left(\overline{A}\right)$ b) $P\left(A \cup B\right)$ c) $P\left(\overline{A} \cap B\right)$

Exercice 10

Soit S et T deux événements tels que : $P(S) = 0,5$, $P(T) = 0,6$, $P(S \cup T) = 0,9$.

Calculer les probabilités suivantes:

a) $P\left(S \cap T\right)$ b) $P\left(\overline{S \cup T}\right)$ c) $P\left(\overline{S \cap T}\right)$

Exercice 11

A et B sont deux événements incompatibles. On a : $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,22$.

Déterminer la probabilité des événements suivants:

a) $\overline{A}$ b) $\overline{B}$ c) $A \cup B$

Exercice 12

On considère 2 événements V et F tels que : $P(V) = 0,4$, $P(F) = 0,3$ et $P(V \cup F) = 0,8$.

Quark prétend que ce n'est pas possible. Confirmer ou infirmer sa déclaration.

Exercice 13

On considère 2 événements V et F tels que : $P(V) = 0,6$, $P(F) = 0,4$ et $P(V \cap F) = 0,5$.

Quark (encore lui !) prétend que ce n'est pas possible. Confirmer ou infirmer sa déclaration.

Exercice 14 — Entrainement formules.

Dans chacun des cas suivants, calculer les probabilités des événements demandés.

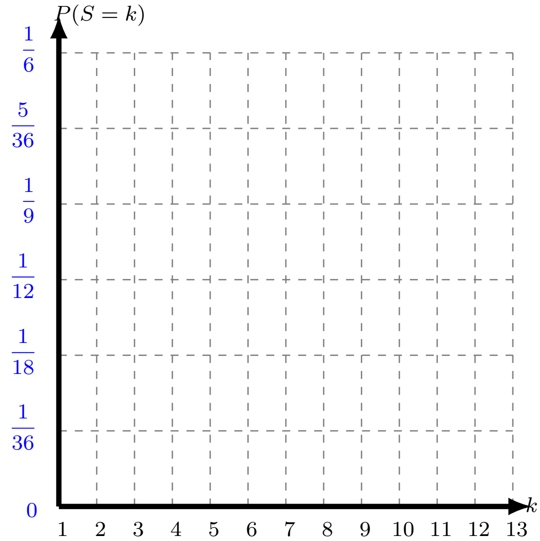
a) $P(E) = 0,35$, $P(\overline{F}) = 0,4$ et $P(E \cap F) = 0,1$. Calculer $P(F)$ puis $P(E \cup F)$
b) $P(E) = 0,34$, $P(E \cup F) = 0,65$ et $P(E \cap F) = 0,23$. Calculer $P(F)$.
c) $P(E) = 0,5$, $P(F) = 0,24$ et $P(E \cap F) = 0,1$. Calculer $P(\overline{E \cup F})$.
d) $P(\overline{E}) = 0,7$; $P(E \cap F) = 0,2$ et $P(E \cup F) = 0,7$. Calculer $P(\overline{F})$.

Équiprobabilité

Exercice 15 — Avec deux dés. On lance simultanément un dé Noir et un dé Bleu (cubiques) et on note la somme S des deux nombres obtenus. On cherche la loi de probabilité des sommes possibles.

1) Complète le tableau à double entrée ci-dessous avec les sommes obtenues.

		Dé n° 2					
		1	2	3	4	5	6
Dé n° 1	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						



2) Sachant que les deux dés sont équilibrés, en déduire la loi de probabilité des sommes obtenues

k	2											Total
$P(S = k)$												

3) Représenter dans le graphique ci-dessus la loi de probabilité de la somme.

4) Déterminer les probabilités des événements suivants (ÉCRIRE CLAIREMENT $P(\ldots) = \ldots$):

$A =$ « somme égale à 4 » ....

$B =$ « somme égale à 12 ....

$C =$ « somme supérieure ou égale à 7 » ....

$D =$ « somme strictement inférieure à 4 » ....

$E =$ « somme paire » ....

$F =$ « obtenir à la fois une somme égale à 7 et un produit égal à 12 » ....

Exercice 16

Soit un dé bien équilibré à six faces dont trois sont bleues, deux sont blanches et une est rouge.

1) On lance le dé et on note la couleur obtenue.
   a) Les trois couleurs sont-elles équiprobables?
   b) Déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur.

2) On lance désormais deux fois succesives ce dé, et on note les couleurs obtenues. À l'aide d'un tableau à double entrée déterminer les probabilités des événements :

   $A =$ « obtenir une face bleu puis une face blanche » ....

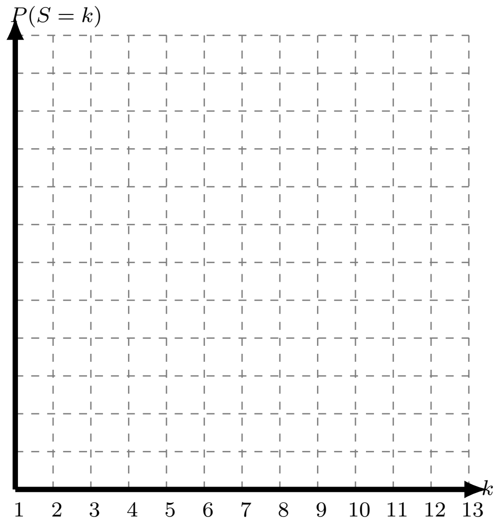
   $B =$ « obtenir une face bleu et une face blanche » ....

Exercice 17

On lance deux dés tétraédriques équilibrés (faces numérotées de 1 à 4) et note la somme obtenue.

1) Quels sont les résultats possibles? Les différentes sommes possibles sont-elles équiprobables ?
2) Déterminer la probabilité de chaque résultat.

		Dé n° 2			
		1	2	3	4
Dé n° 1	1				
	2				
	3				
	4				

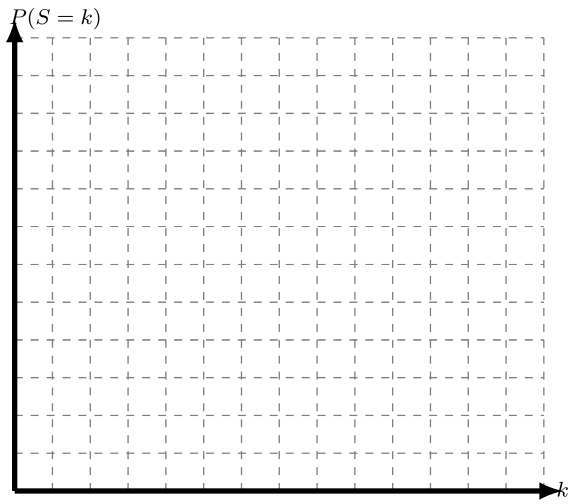


k											Total
$P(S = k)$											

Exercice 18

Détermine et représente la loi de la somme des faces pour les dés distribués. On supposera que les dés sont équilibrés.

		Dé n° 2					
Dé n° 1							

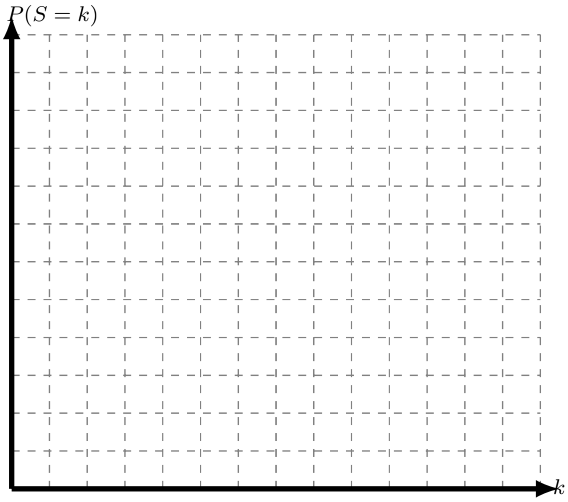


k											Total
$P(S = k)$											

Exercice 19 — Bis si le temps le permet.

Détermine et représente la loi de la somme des faces pour les dés distribués. On supposera que les dés sont équilibrés.

		Dé n° 2					
Dé n° 1							



k											Total
$P(S=k)$											

Exercice 20 — Bataille à 3 dés : Dés d'Oskar.

Dans une bataille de dés à 3 joueurs, chacun des joueurs A, B et C choisit un dé. Le joueur C est le dernier à choisir. Le vainqueur d'une manche est celui qui obtient le plus grand résultat.

Oskar van Deventer, créateur néerlandais de puzzles, a invente un jeu de 7 dés bien particulier : quel que soit le choix des joueurs A et B, le joueur C peut choisir un dé qui a plus de chance de donner un plus grand résultat que les deux autres.

1) Relevez les faces des 7 dés :
   - Blanc :
   - Ivoire :
   - Jaune :
   - Vert :
   - Rouge :
   - Bleu :
   - Marron :
2) À l'aide des tableaux double entrée suivants, montrer que le dé Blanc à plus de chance de donner un plus grand résultat face au dé ivoire et au dé Marron.
3) Face à quelles autres paires le dé Blanc a le plus de chance de gagner ?

		Dé		
Dé				

bat ;

		Dé		
Dé				

bat ;

Exercice 21 — Choix de menus.

Au restaurant, le menu proposé se compose :

- d'une entrée choisie parmi deux entrée : salade (S) ou charcuterie (C) ;
- d'un plat choisi parmi deux plats : viande (V) ou poisson (P) ;
- d'un dessert choisi parmi deux desserts : fruits (F) ou glace (G).

1) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre.
2) Le nombre de branches à « l'arrivée » indique le nombre de tous les choix possibles.
   a) Combien y-a-t-il de menus différents proposés au client ?
   b) Combien y-a-t-il de menus différents si un client veut manger du poisson ?
3) Le restaurateur propose une autre formule : soit une entrée et un plat, soit un plat et un dessert. Combien y-a-t-il de menus différents possibles dans cette formule ?

Exercice 22

Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix entre 2 entrées (Artichaut ou Betterave) puis entre 3 plats (Cheval, Daube ou Escalope) et enfin entre 2 desserts (Fromage ou Gâteau)

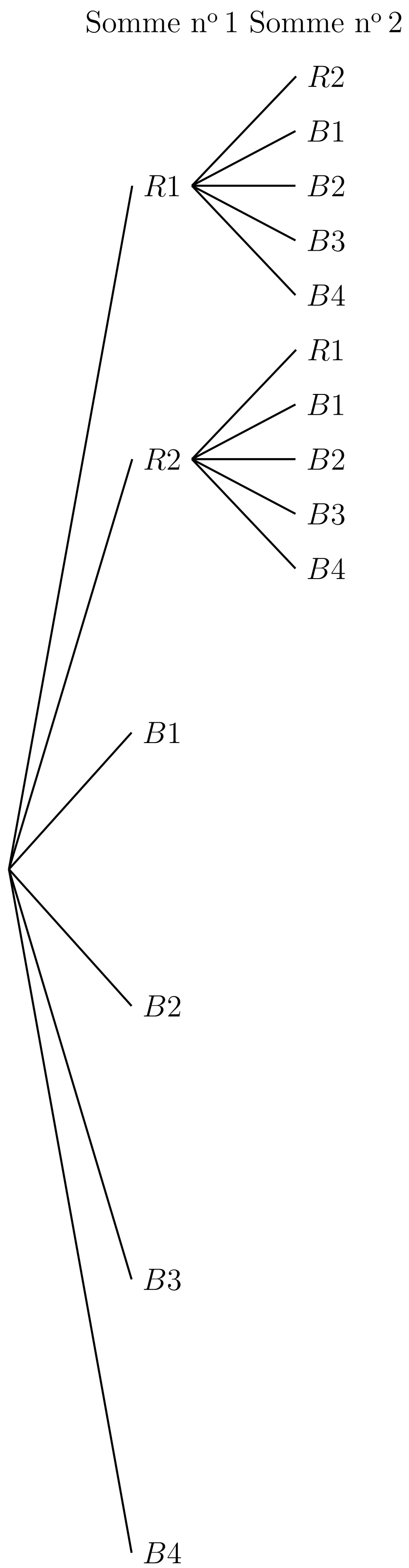
Un menu se compose forcement d'une entrée, d'un plat et d'un dessert.

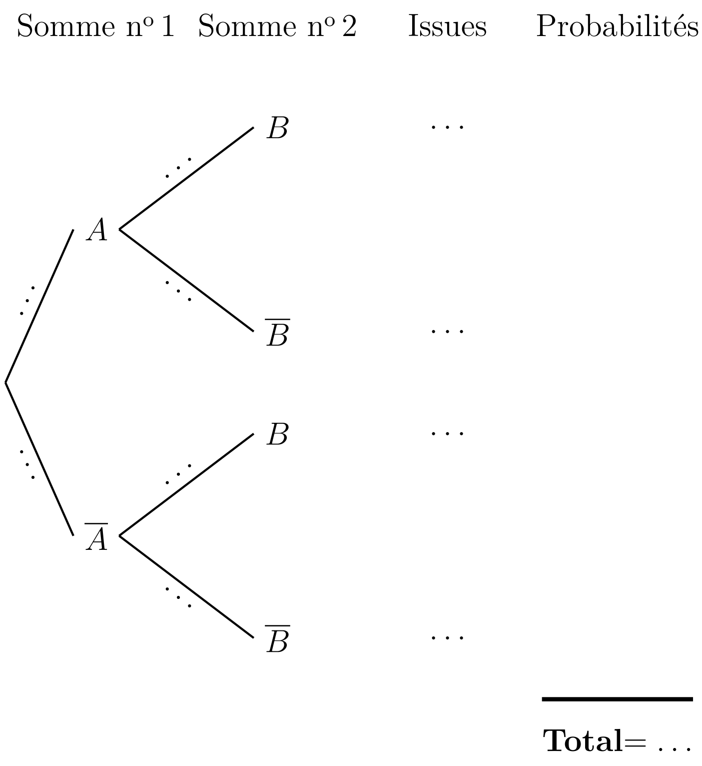
1) En utilisant un arbre, représenter tous les menus.
2) Combien de menus différents sont possibles ?
3) On choisit un menu au hasard. Quelle est la probabilité:
   a) qu'il comporte une escalope ?
   b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
   c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

■ **Exemple 9.8 — Modéliser à l'aide d'un arbre de probabilité.**

Une boite opaque contient 2 rubans rouges et 4 rubans bleu. On tire au hasard 1 premier ruban de la boite sans regarder (et sans le remettre), puis un second, et on note les couleurs de chaque.

a) Quelles sont les issues possibles ?
b) Sont elles équaprobables ?
c) Terminer l'arbre des issues et déterminer les probabilités des événements :
   $BB =$ « tirer deux rubans bleus »
   $RR =$ « tirer deux rubans rouges »
   $BR =$ « tirer un ruban bleu puis un ruban rouge »
   $E =$ « tirer un ruban bleu et un ruban rouge »
d) Retrouvons les probabilités précédentes plus rapidement à l'aide d'un arbre de probabilités. Notons :
   $A =$ « tirer un ruban rouge au premier tirage »
   $B =$ « tirer un ruban rouge au second tirage »


Somme n° 1 Somme n° 2
R1
R2
B1
B2
B3
B4
R2
B1
B2
B3
B4
R1
B1
B2
B3
B4


Somme n° 1
Somme n° 2
Issues
Probabilités
A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
...
...
...
...
...
Total= ...

■ **Exemple 9.9**

On considère l'expérience aléatoire suivante :

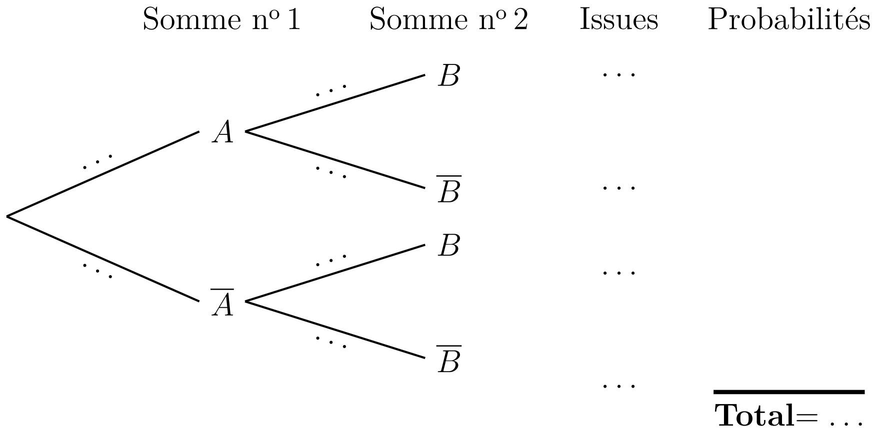
- On lance une première fois 2 dés cubiques équilibrés, et on note leur somme.
- On lance une seconde fois 2 dés cubiques équilibrés, et on note leur somme.

Soit les événements :

$A =$ « obtenir une somme de 8 au premier lancer »

$B =$ « obtenir une somme de 9 au second lancer »

Compléter l'arbre de probabilité et calculer la probabilité d'obtenir une somme de 8 au premier lancer, et une somme de 9 au second.



Exercice 23 — Tirage successif avec remise.

Une urne opaque contient 1 boule bleue, 2 rouges et 3 vertes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet. On tire de nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur.

1) Est-ce une situation d'équiprobabilité?
2) Représenter l'expérience par un arbre des issues et identifier les combinaisons de couleurs possibles. Ces issues sont elles équiprobables ?
3) Compléter l'arbre avec les probabilités.
4) Calculer la probabilité de:

$A =$ « tirer 2 boules Bleues »

$B =$ « une boule Bleu puis une boule Rouge »

$C =$ « une boule Bleu et une boule Rouge »

$D =$ « deux boules de même couleurs »

à retenir

Chaque chemin le long de l'arbre de probabilité conduit à un événement différent.

Les événements correspondant à deux chemins différents sont incompatibles.

La probabilité d'un événement auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin

La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud vaut 1.

Exercice 24 — Tirage successif sans remise.

Une urne opaque contient 9 boules : 4 boule rouges, 3 bleues et 2 vertes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur sans la remettre. On tire de nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur.

1) Est-ce une situation d'équiprobabilité?
2) Représenter l'expérience par un arbre des issues et identifier les combinaisons de couleurs possibles. Ces issues sont elles équiprobables ?
3) Compléter l'arbre avec les probabilités.
4) Calculer la probabilité de:

$A =$ « tirer 2 boules Bleues »

$B =$ « tirer une boule Rouge puis une boule Verte »

$C =$ « une des boules tirées est Rouge, et une Verte »

$D =$ « deux boules de même couleurs »

Exercice 25 — Tirage successif avec remise.

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes, on note sa couleur (Cœur, Carreau, Pique ou Trèfle), puis on la remet dans le jeu avant d'en tirer une seconde.

1) Est-ce une situation d'équiprobabilité?
2) Combien y a-t-il d'issues?
3) Calculer la probabilité de:
   a) tirer 2 cœurs;
   b) ne pas tirer de cœur;
   c) tirer exactement 1 cœur;
   d) tirer deux fois la même carte;
   e) tirer deux cartes différentes;

Exercice 26 — Tirage successif sans remise.

On tire au hasard deux cartes d'un jeu de 32 cartes, l'une après l'autre.

1) Est-ce une situation d'équiprobabilité?
2) Combien y a-t-il d'issues?
3) Calculer la probabilité de tirer
   a) deux cœurs;
   b) exactement 1 cœur;
   c) deux fois la même carte;
   d) deux cartes différentes;
   e) le roi de cœur.
   f) aucun cœur

Exercice 27

On lance une punaise trois fois. On note p la probabilité qu'elle tombe sur la tête.

1) Quelle est la probabilité de tomber sur l'aiguille au premier lancer ?
2) Dresser l'arbre des issues. Ces issues sont elles équiprobables ?
3) Compléter avec les probabilités.
4) Exprimer en fonction de p les probabilités de:

$A =$ « la punaise tombe trois fois sur la tête »

$B =$ « la punaise tombe deux fois sur la tête et une fois sur l'aiguille »

$C =$ « la punaise tombe au plus deux sur la tête »

Sans équiprobabilité

Exercice 28

On lance un dé pipé. Le tableau suivant regroupe les probabilités.

F	1	2	3	4	5	6
$p(F)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	?

1) Calculer $p(6)$.
2) Calculer la probabilités des événements suivants.
   $A =$ « La face obtenue est paire »;
   $B =$ « la face obtenue est supérieur ou égale à 5 ».

Exercice 29

Voici le cycle d'allumage d'un feu tricolore:

- 45s pour le feu vert;
- 5s pour le feu orange;
- 20s pour le feu rouge.

En admettant qu'un automobiliste arrive par hasard devant un feu tricolore fonctionnel, déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience.

Exercice d'approfondissement

Exercice 30

Afin de mieux connaître sa clientèle, une station de sports d'hiver a effectué une enquête auprès de 250 skieurs. Voici la synthèse des réponses au sondage:

- deux tiers des personnes qui viennent tous les week-ends possèdent leur matériel;
- la moitié des personnes venant deux semaines par an possèdent également leur matériel;
- 44% des personnes interrogées louent sur place.

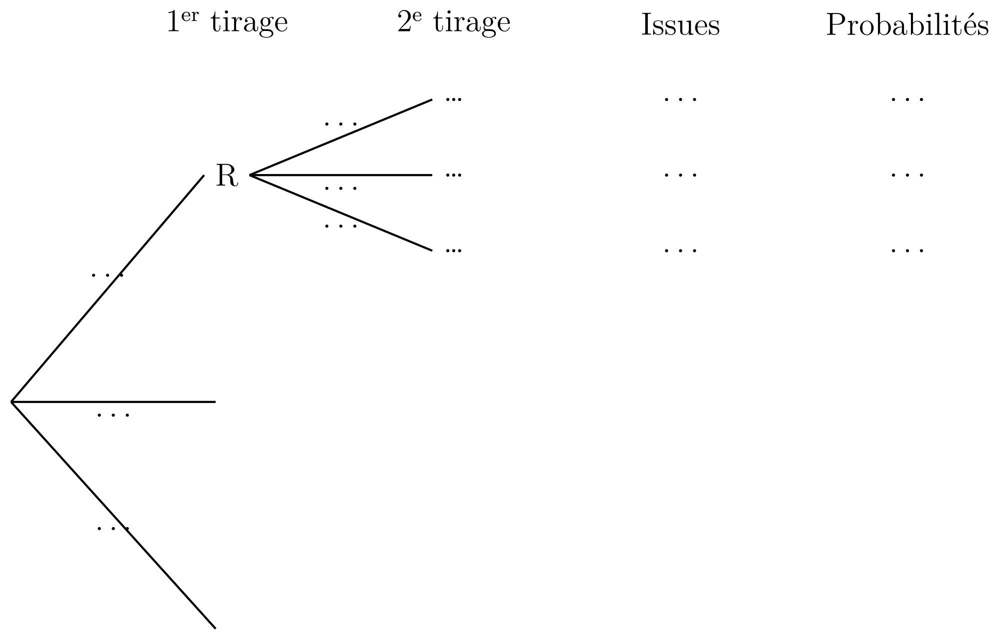
On considère les événements suivants.

— M: « la personne possède son matériel »;
— L : « la personne loue ses skis sur place »;
— A : « la personne loue ses skis ailleurs »;
— S : « la personne vient une semaine par an »;
— W : « la personne vient tous les week-ends »;
— Q : « la personne vient deux semaines par an ».

	M	L	A	Total
S	25			
W			5	30
Q		30		100
Total				250

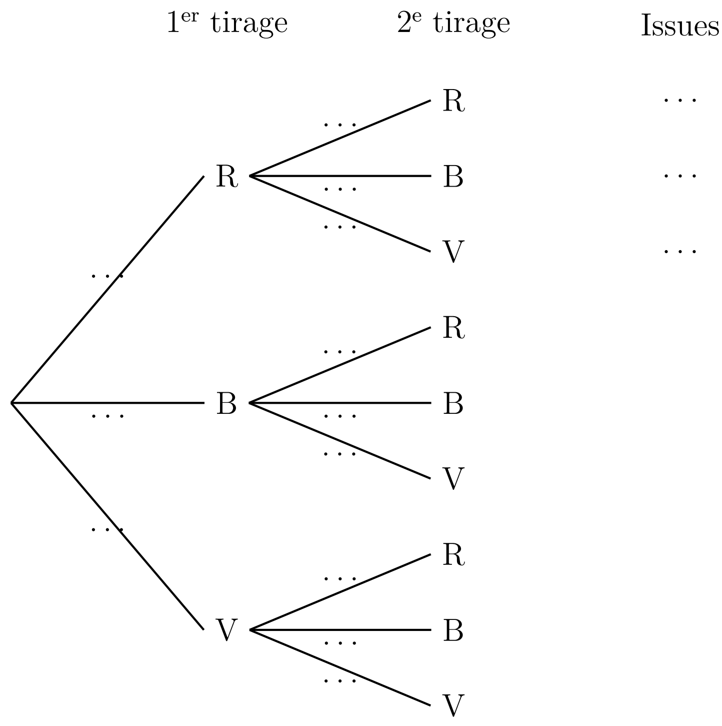
1) Compléter le tableau ci-contre présentant la synthèse des réponses.
2) On choisit au hasard un client parmi les 250 personnes interrogées, toutes ayant la même chance d'être choisies.
   a) Calculer les probabilités $p(Q)$ et $p(L)$.
   b) Décrire par une phrase l'événement $Q \cap L$ .Calculer $p(Q \cap L)$.
   c) Calculer $p(Q \cup L)$.
3) On choisit au hasard un client qui possède son propre matériel.
   Quelle est la probabilité qu'il vienne toutes les semaines?

éléments de réponse de l'exercice 23.



■

éléments de réponse de l'exercice 24.



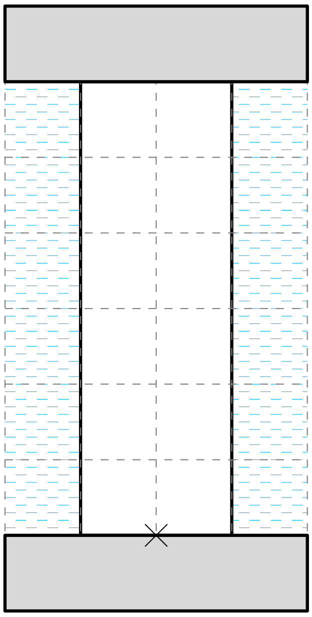
■

9.4 TP : La traversée du pont

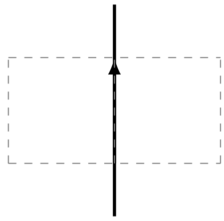
Objectif : estimation d'une probabilité dans le cas où celle-ci est difficile à calculer

Pour rentrer chez lui, maitre "Drunken fist" Lee doit traverser une passerelle rectigne de deux mètres de largeur qu'habituellement il traverse en 6 pas en ligne droite. Après une fête bien arrosée, il a une chance sur 2 de faire un pas en avant et tout droit, une chance sur 4 de faire un pas en avant et vers la droite et une chance sur 4 de faire un pas en avant et vers la gauche...

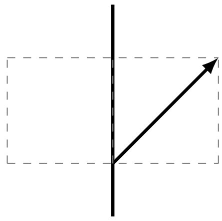
Quelles sont ses chances d'arriver au bout sans tomber dans l'eau ?



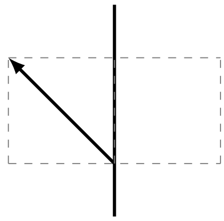
Une chance sur 2



Une chance sur 4

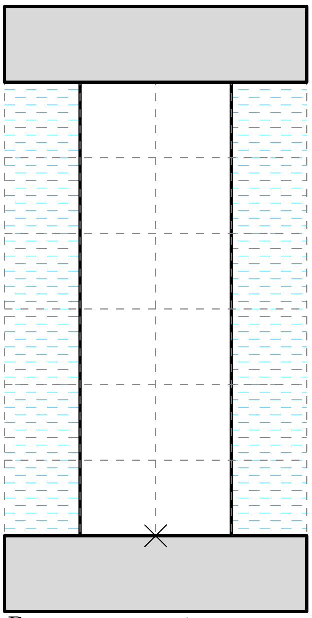


Une chance sur 4

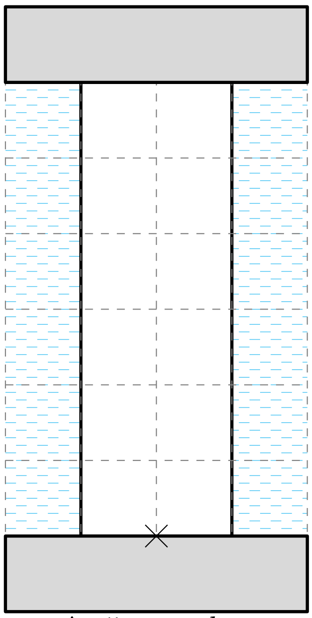


1) Donner une règle permettant de **simuler** sa traversée à l'aide du dé à 4 faces donné.
   Tracer son parcours sur le pont. Faire trois essais successifs.

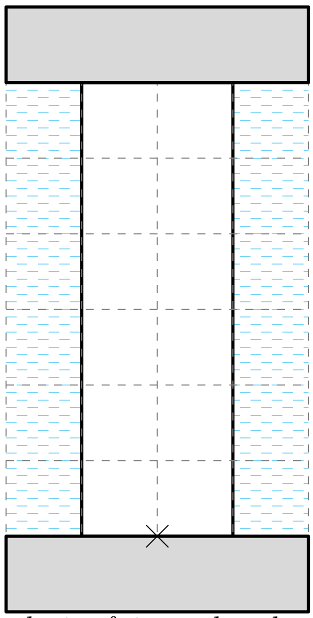
essai n° 1



essai n° 2

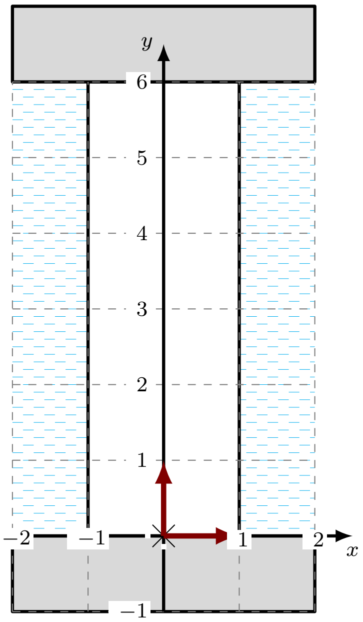


essai n° 3



Remarque : si on est au bord droit après 5 pas, alors avancer vers la droite fait tomber dans l'eau.

2) **Mise en commun** des résultats de tous les élèves de la classe : compter le nombre de fois où on est arrivé au bout sans tomber dans l'eau parmi les $3 \times \ldots\ldots$ élèves de la classe.
3) En déduire une **estimation de la probabilité** d'arriver au bout sans tomber dans l'urne.
4) **Simulation à l'aide d'un script Python**



Code incomplet à télécharger sur la pythonette depuis le lien.
La fonction d'appel `traverse()` retourne `True` si on traverse le pont, et `False` s'il tombe à l'eau.

a) Préciser la condition de sortie de boucle à la ligne 4.
b) Compléter la ligne 13 pour que `traverse()` retourne `True` si la traversée est réussie.
c) La fonction d'appel `frequence()` retourne la proportion de traversées réussies sur un total de 1000 essais.
Compléter le script de la fontion `frequence()`.
d) Tester le programme. Est il en accord avec l'expérience menée en 1) ?

```
1  from random import randint
2  def traverse() :
3      x , y = 0 , 0          # point de départ est l'origine du repère
4      while ......... and ......... and ......... :
5          i = randint(1,4)     # choisir au hasard un entier entre 1 et 4
6          if i == 1 :
7              x = x - 1          # avancer vers la gauche
8          elif i == 4 :
9              x = x + 1          # avancer vers la droite
10         else :
11             x = x              # avancer droit
12         y = y + 1              # avancer d'un pas
13     if ......... and ......... and ......... :
14         return True          # traversée réussie
15     else :
16         return False         # tombé à l'eau
17
18 def frequence() :
19     compteur = 0
20     for i in range(....) :
21         if traverse() :
22             ...
23     return  ...
```

Démonstration.

a) On lance le dé D4, si on obtient 1, on fait 1 pas vers la gauche. Avec 4 on fait un pas vers la droite. Et pour 2 et 3 on fait un pas vers l'avant.

b) La mise en commun donne une valeur proche de 50 traversées.

c) La fréquence de traversées réussies est proche de 0.47.

d)

■

```python
from random import randint
def traverse() :
    x , y = 0 , 0
    while y < 6 and x >= -1 and x <= 1 :
        i = randint(1,4)
        if i == 1 :
            x = x - 1
        elif i == 4 :
            x = x + 1
        else :
            x = x
        y = y + 1
    if y == 6 and x >= -1 and x <= 1 :       #
        return True
    else :
        return False

def frequence() :
    compteur = 0
    for i in range(1000) :
        if traverse() :
            compteur = compteur + 1
    return  compteur/1000
```

9.5 TP : Principe de la surréservation

Une compagnie aérienne dispose d'un avion de 100 places. Des études statistiques révèlent que toutes les personnes ayant réservé leur place ne se présentent pas toujours à l'embarquement et qu'il reste ainsi, en général, des places libres dans l'avion. Ceci signifie donc que des personnes supplémentaires pourraient aussi voyager sur ce même avion, améliorant ainsi d'autant la rentabilité du voyage pour la compagnie.

Plus précisément, les études statistiques ont montré qu'une personne ayant réservé une place dans l'avion a une chance sur 10 de ne pas se présenter à l'embarquement. La compagnie décide alors de pratiquer de la « surréservation »: elle vend 107 réservations de ses 100 places disponibles.

L'expérience aléatoire On modélise un vol par une expérience aléatoire :

1) sur 107 réservations, chaque personne se comporte indépendamment des autres avec une chance sur 10 de ne pas se présenter à l'embarquement.
2) On note alors le nombre N de personnes qui se présentent à l'embarquement.
   a) Combien d'issues différentes compte cette expérience.
   b) Les issues sont elles équiprobables ?
   c) Décrire par une phrase les événements
      $A =$ « $N = 95$ ».
      $B =$ « $N = 107$ ».
      $C =$ « $N > 100$ ».
   d) La compagnie propose chaque réservation au prix de 500 euros non remboursables. Dans le cas de surréservation, pour satisfaire néanmoins les personnes ne pouvant embarquer et devant attendre le vol suivant, elle propose de leur rembourser 1500 euros.
      Pour chacun des événements précédents calculer la valeur de la recette réalisé sur le vol. Comparer la à la recette réalisée si la compagnie ne pratiquait pas la surréservation.
   e) Exprimer à l'aide de N la recette pour un vol avec surréservation (2 cas à considérer).

> Déterminer la loi de probabilité de N dépasse le cadre de la seconde. L'objectif de TP est de simuler l'expérience aléatoire afin d'évaluer la probabilité de surréservation de cette compagnie, c'est-à-dire la probabilité que plus de 100 personnes se présentent à l'embarquement.
> Combien peut espérer gagner cette compagnie ? Combien peut-elle espérer gagner de plus que si elle proposait exactement (et uniquement) 100 places à la réservation ?

Simulation à l'aide d'un tableur Tableur à compléter en ligne à l'adresse link.dgpad.net/6qGn (codes wims).

Simulation à l'aide de Python Code à compléter en ligne à l'adresse link.dgpad.net/JLZT (codes wims).

9.5.1 Utilisation d'un tableur

Simulation de la surréservation sur un vol

a) Saisir la formule « =SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;10)=1;0;1) » dans la cellule A1.
Que permet de calculer et simuler cette formule ? Expliquer son fonctionnement (*à l'aide de phrases avec sujet, verbe et complément*).

b) Recopier cette formule vers la droite pour en obtenir 107 réalisations (jusqu'en DC1)
Procédure : sélectionne la cellule A1 *> copie depuis la barre des outils (CTRL+C) > sélectionne les cellules* B1:DC1 *> coller (CTRL+V)*

c) Dans la cellule DD1, saisir la formule « =SOMME(A1:DC1) ».
Que représente le nombre calculé par cette formule ?
Cocher et décocher la case dans la cellule DG1 pour actualiser les calculs. Dans quel intervalle ce nombre semble-t-il varier ?

Simulation de la surréservation sur 1000 vols

a) Saisir la formule « =SI(DD1>100;1;0) dans la cellule DE1.
Expliquer le fonctionnement de cette formule et le résultat qu'elle retourne.

b) Réaliser une simlation de 1000 vols en recopiant les formules de la première ligne sur les 1000 premières lignes.
Procédure : sélectionne les cellules A1:DD1 *(clique et glisse) > copie (CTRL+C) > sélectionne les cellules* A2:A1000 *> coller (CTRL+V)*

c) Quelle formule peut-on utiliser pour comptabiliser le nombre de vols pour lesquels l'effectif des passagers se pésentant à l'embarquement est supérieur à 100.
Quelle est la fréquence (ou proportion) de vols pour lesquels l'effectif des passagers se présentant à l'embarquement est supérieur à 100 ?
Entre quelles valeurs semble varier cette fréquence ?

Bénéfices réalisés grâce à la surréservation On suppose que la compagnie aérienne vend 107 billets par vol au prix de 500 €. Pour éviter le mécontentement des éventuels clients qui ne pourraient pas embarquer sur le vol, la compagnie prévoit de les dédommager de 1500 €.

a) Quelle serait la recette réalisée par la compagnie pour un vol si elle ne vendait que les 100 réservation correspondant au nombre de place disponibles dans l'avion ?

b) Modifier la feuille de calcul du tableur pour calculer pour chacun des 1000 vols simulés le montant de la recette correspondante.
Indication : réfléchir à une formule à saisir dans la cellule DF1*, et la recopier dans la colonne* DF.

c) Quelle est la recette totale pour les 1000 vols simulés par le tableur ? Comparer la avec une recette pour 1000 vols sans surréservation.

9.5.2 Utilisation d'un script Python

```
1  from random import randint
2  def passagers() :
3      nbr = 0
4      for i in range(...) :
5          if randint(1,10) != 1 :
6              nbr = nbr + 1
7      return nbr
8
9  def recette(n) :
10     # n = nbr de passagers
11     if n <= 100 :
12         return ...
13     else :
14         return ...
15
16 def surreservations()
17     compteur = 0
18     for i in range(1000)
19         if passagers() > 100
20         compteur =  ...
21     return compteur
22
23 def recettes() :
24     r = 0
25     for
26         ...
27         ...
28     return r
```

a) Compléter la ligne 4 pour que la fonction `passagers()` retourne le nombre de passagers se présentant à un vol.

b) Compléter la fonction d'appel `recette()` qui prend pour agument le nombre de passagers se présentant à l'embarquement et retourne la recette totale du vol.

c) La fonction `surreservations()` retourne la **proportion** de vols en situation de surréservation sur 1000 vols simulés.
Compléter la ligne et corriger les erreurs du script (4 erreurs de syntaxe, et 1 erreur sur calcul à faire).

d) Ecrire le script de la fontion recette qui calcule la recette moyenne sur 1000 vols simulés.