Chapitre

Notions de fonctions et résolutions graphiques d'(in)équations

5

5.1 Définitions

■ **Exemple 5.1 — le domaine de définition d'une fonction.**

a) f est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
On écrit : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x^3 - 3x + 1$$

L'image de x par f est $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
L'image de 0 par f est $f(0) = 0^3 - 3 \times 0 + 1 = 1$
L'image de -5 par f est $f(-5) = (-5)^3 - 3(-5) + 1 = -109$.

à lire « f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x^3 - 3x + 1$ ».

b) Soit $g\colon t \mapsto \dfrac{1}{2t-1}$. L'expression $g(t)$ admet des valeurs interdites, on peut choisir $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ comme domaine de définition de g. On écrit $g\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x^3 - 3x + 1$$

c) Soit fonction $h\colon [0;4] \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto 2x + 3$$

L'image de 0 par h est 3.
Le nombre -1 n'admet pas d'image par h. Il n'est pas dans le domaine.

Le domaine de définition peut exclure des nombres qui ne sont pas des valeurs interdites.

d) La fonction $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est définie uniquement sur des valeurs

$$x \mapsto 2x + 3$$

entières.

Deux fonctions peuvent avoir la même expression mais pas le même domaine de définition.

Définition 5.1 — vieillotte. Soit un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ [1].

Une fonction f définie sur D est une **relation** qui à tout nombre $x \in D$ **associe un unique** $y \in \mathbb{R}$. On écrit :

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

[1] (généralement un intervalle ou une réunion d'intervalles)

lire « fonction f de D dans $\mathbb{R}$ qui à $x \in D$ associe f de x »

Dans les cas courants au lycée la relation est décrite par une **expression** (une règle de calcul) pour calculer l'image $f(x)$ connaissant la valeur de x. Mais beaucoup de fonction n'ont pas d'expression algébrique[2].

[2] $d \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto$ **nbr de diviseurs de** x

Définition 5.2 Une fonction f est un **ensemble de couples** (x, y) (x est l'abscisse, y est l'ordonnée), tel qu'il n'y ait pas 2 couples ayant la même abscisse mais des ordonnées différentes.

$$\text{si } (x, y) \in f \quad \text{et } (x; y') \in f \quad \text{alors} \quad y = y'$$

Le domaine de f est l'ensemble noté D_f des abscisses de la fonction.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a 2 possibilités :

- L'abscisse $x \notin D_f$: Il n'existe pas de y tel que $(x, y) \in f$. x n'a pas d'image.
- l'abscisse $x \in D_f$: Il existe **exactement** une ordonnée y tel que le couple $(x, y) \in f$. On écrit $y = f(x)$ et on dira que « y est **l'image** de x » ou encore « x est **un** antécédent de y ». Noter cette asymétrie.

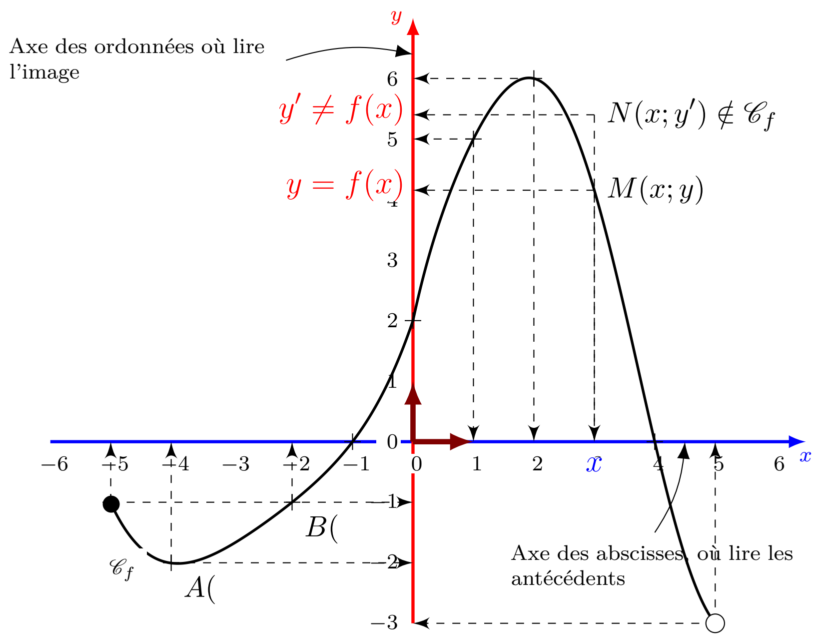


Figure 5.1 – La représentation graphique d'une fonction f dans un repère $(O; I, J)$ est l'ensemble de points notés $\mathscr{C}_f$:

$$M(u; v) \in \mathscr{C}_f \quad \iff \quad v = f(u)$$

On écrit $\mathscr{C}_f \colon y = f(x)$.
La représentation graphique d'une fonction ne peut pas avoir deux points ayant même abscisse et des ordonnées différentes.

Histoire des maths Le britannique **William Playfair** fut parmi les premiers à avoir recourt aux représentations graphiques de fonctions. Il est l'inventeur aussi de l'histogramme et du diagramme circulaire (camembert).

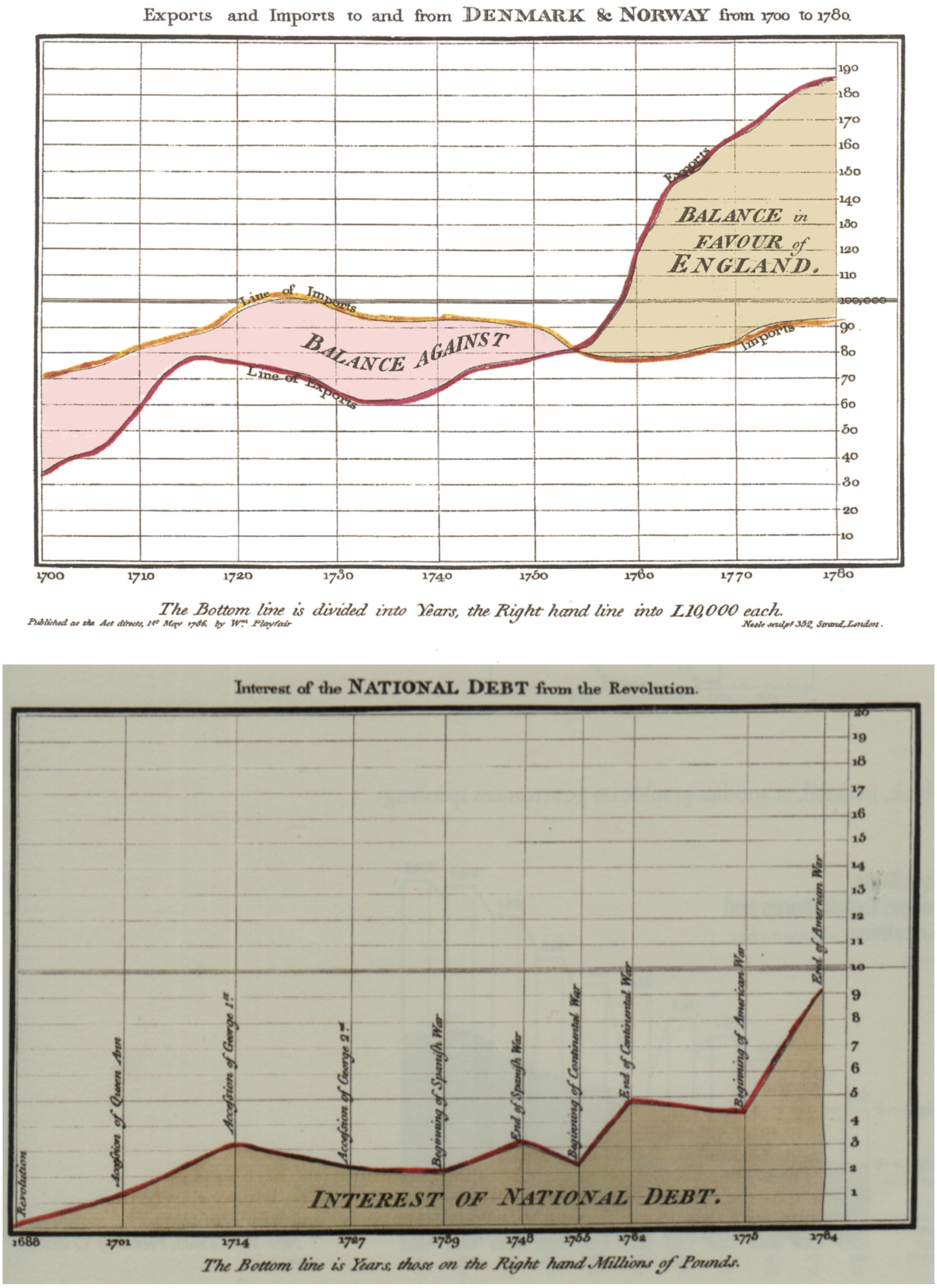
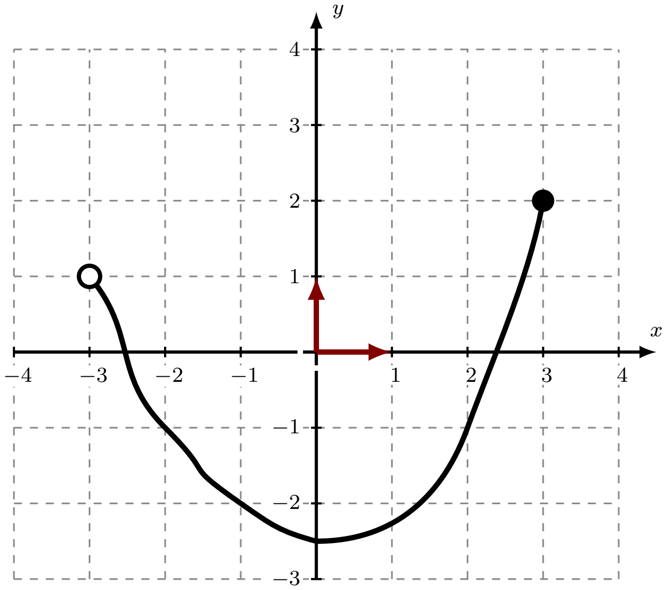
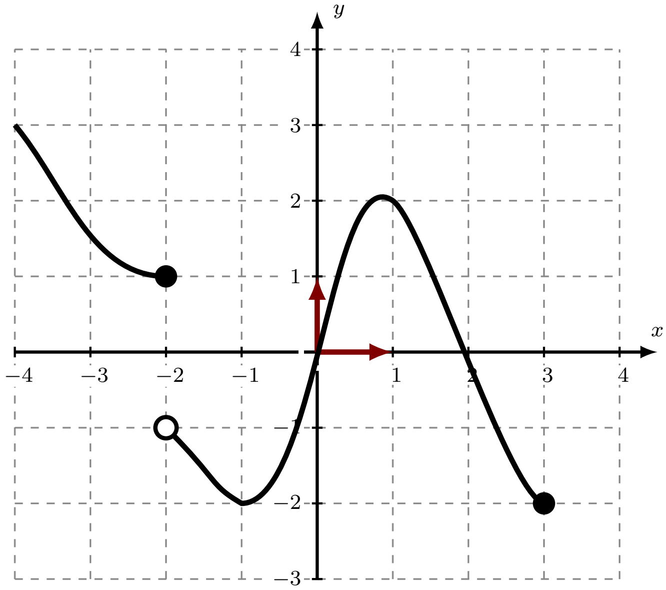


Figure 5.2 – Playfair dans « Commercial and Political Atlas » de 1786 : Série chronologique du déficit du commerce extérieur (haut) et représentation graphique de l'évolution des intérêts de la dette publique britannique au cours du 18^{e} siècle (bas).

5.1.1 Exercices : Représentations graphiques, expressions et domaine

■ **Exemple 5.2** Complétez les pointillés





Domaine : $D = \ldots$		Domaine : $D = \ldots$	
Image de -1 :	$f(\ldots) = \ldots$	Image de -2 :	$f(\ldots) = \ldots$
Image de 3:	$f(\ldots) = \ldots$	Image de 1,5:	$f(\ldots) = \ldots$
Antécédent(s) de 3:	$f(\ldots) = \ldots$; $f(\ldots) = \ldots$	Antécédent(s) de 3:	$f(\ldots) = \ldots$; $f(\ldots) = \ldots$
Antécédent(s) de 2:	$f(\ldots) = \ldots$; $f(\ldots) = \ldots$	Antécédent(s) de 1:	$f(\ldots) = \ldots$; $f(\ldots) = \ldots$
Antécédent(s) de -1:	$f(\ldots) = \ldots$; $f(\ldots) = \ldots$	Antécédent(s) de -3:	$f(\ldots) = \ldots$; $f(\ldots) = \ldots$
Image de 0 : :	$f(\ldots) = \ldots$	Image de 0 : :	$f(\ldots) = \ldots$
Antécédent(s) de 0 :	$f(\ldots) = \ldots$; $f(\ldots) = \ldots$	Antécédent(s) de 0 :	$f(\ldots) = \ldots$; $f(\ldots) = \ldots$

Exercice 1 Complétez. $\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f.

1) $f(2) = 3$, l'image de ...... est ......, et le point $A(\ldots\ldots) \in \mathscr{C}_f$.

2) $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$, l'image de 3 est -4, et le point $A(\ldots\ldots) \in \mathscr{C}_f$.

3) $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$, l'image de ...... est ......, et le point $A(2; -3) \in \mathscr{C}_f$.

4) $f(0) = 5$, la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des (abscisses/ordonnées) au point $A(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$.

5) $f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point $A(2;\ldots\ldots)$.

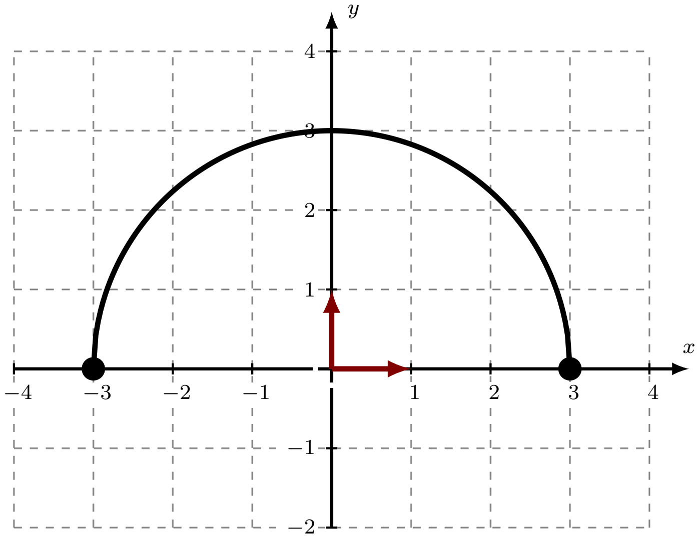
6) $f(3) = 5$ et $f(6) = 2$. Le point $A(3; 6)$ est (au-dessus/sur/en dessous) de $\mathscr{C}_f$

7) $f(2) = 1$ et $f(1) = 3$. Le point $A(1; 2)$ est (au-dessus/sur/en dessous) de $\mathscr{C}_f$

8) $f(-2) \ldots 4$, le point $A(-2; 4)$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$

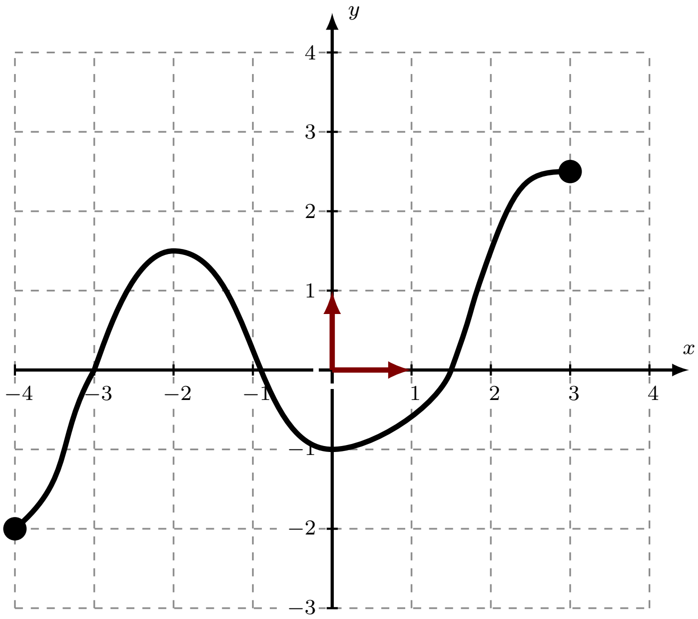
9) $f(\ldots)\ldots\ldots\ldots$, la courbe $\mathscr{C}_f$ passe en desssous du point $A(-2; 3)$.

Exercice 2 Soit la fonction f représentée ci-dessous



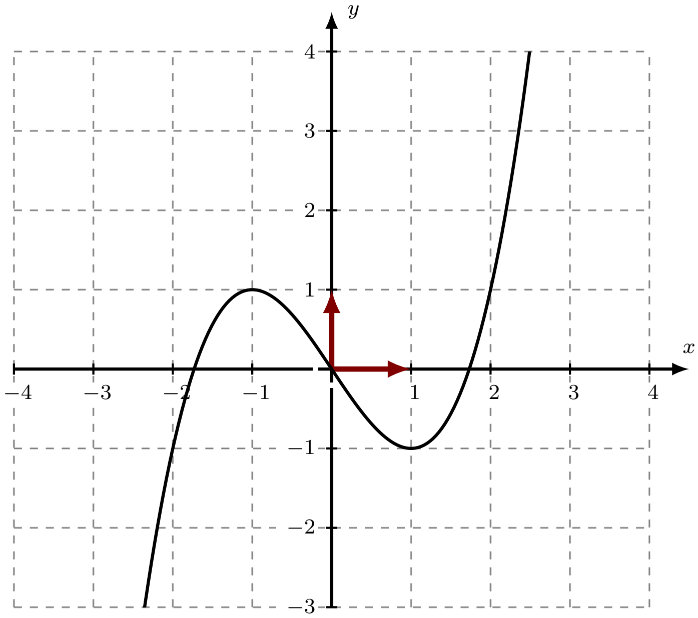
	Vrai	Faux
1/ Domaine est $[0;3]$	☐	☐
2/ L'image de 0 est -3	☐	☐
3/ $f(3)=0$	☐	☐
4/ $f(-2)=f(2)$	☐	☐
5/ $f(1+2)=3$	☐	☐
6/ $f(1)>2$	☐	☐
7/ 2 admet deux antécédents	☐	☐
8/ 3 admet deux antécédents	☐	☐
9/ -2 admet un antécédent	☐	☐

Exercice 3 Soit la fonction f représentée ci-dessous



	Vrai	Faux
1/ Domaine est $[-3;3]$	☐	☐
2/ $f(1{,}5)=2$	☐	☐
3/ $f(0)=0$	☐	☐
4/ $f(-2)=f(2)$	☐	☐
5/ $f(1+2)=2{,}5$	☐	☐
6/ $f(1)>0$	☐	☐
7/ 1 admet deux antécédents	☐	☐
8/ -1 admet deux antécédents	☐	☐
9/ L'image de l'image de -3 est -1	☐	☐
10/ $f(f(2))=0$	☐	☐

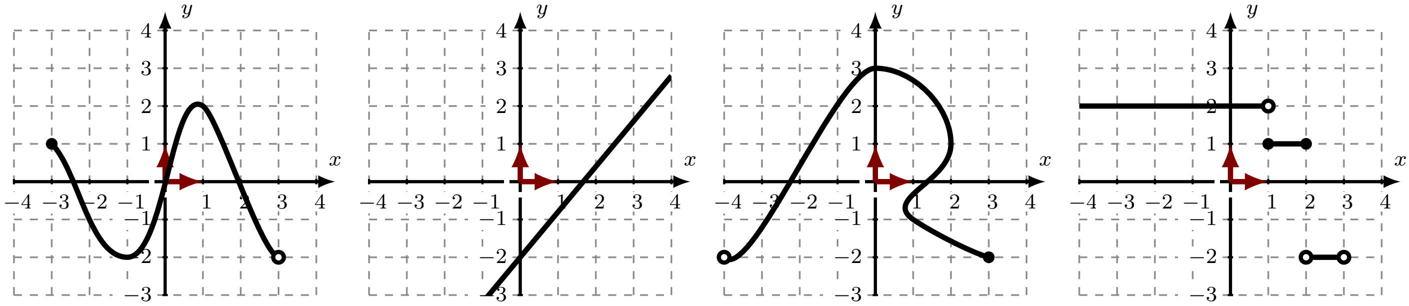
Exercice 4 Soit la fonction f représentée ci-dessous.



1) Donner le domaine de f : ....
2) Donner l'image de 2 : .... $f(\dots)=\dots$
3) Donner l'image de 0 : ....
4) Donner les antécédents de -1................
5) Combien a 0 d'antécédents ? ....
6) Quel est le nombre d'antécédents de -2 ? .....

	Vrai	Faux
1/ $f(-2)=-f(2)$	☐	☐
2/ $f(-1)=f(1)$	☐	☐
3/ $f(2)=2f(1)$	☐	☐
4/ $f(3)>4$	☐	☐
5/ $f(-1)>0$	☐	☐

Exercice 5



1) Parmi ces graphiques, lesquels correspondent à la représentation graphique d'une fonction ?
2) Pour chaque fonction donnez leur domaine et l'image de 2.
3) Pour chaque fonction donnez le nombre d'antécédents de 1.

Exercice 6 Complétez. $\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f.

1) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x + 3$. $f(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$. $f(-2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$. $f(-1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $A(\ldots\ldots;\ldots\ldots) \in \mathscr{C}_f$.
4) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x + 1$. $f(-2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $A(\ldots\ldots;\ldots\ldots) \in \mathscr{C}_f$.
5) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + p$. Si $f(0) = 4$, alors $p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + p$. Si $f(-1) = -4$, alors $p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
7) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx - 1$. Si $f(-2) = 3$, alors $m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
8) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx - 4$. Si $f(2) = 8$, alors $m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
9) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x - 2$. Le point $A(2; 1)$ est (au dessus/sur/en dessous) $\mathscr{C}_f$.
10) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas définie lorsque le dénominateur est nul. Son domaine est $D = \mathbb{R}\backslash \ldots\ldots\ldots\ldots$
11) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$ n'est pas définie lorsque $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$. Son domaine est $D = \mathbb{R}\backslash \ldots\ldots\ldots\ldots$
12) $f(x) = \sqrt{2x-3}$ n'est définie que si $\ldots\ldots\ldots\ldots \geqslant 0$. Son domaine est $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$
13) $f(x) = \sqrt{-5x+1}$ n'est définie que si $\ldots\ldots\ldots\ldots \geqslant 0$. Son domaine est $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$
14) Si $T(x)$ est la température de la classe à l'heure x de la journée, son domaine est $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 7

Soit la famille de fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_m(x) = mx + 3m - 2$.

1) Pour $m = 2$. Calculer $f(0)$ et $f(-5)$.
2) Sachant que $f(2) = 0$, trouvez m.

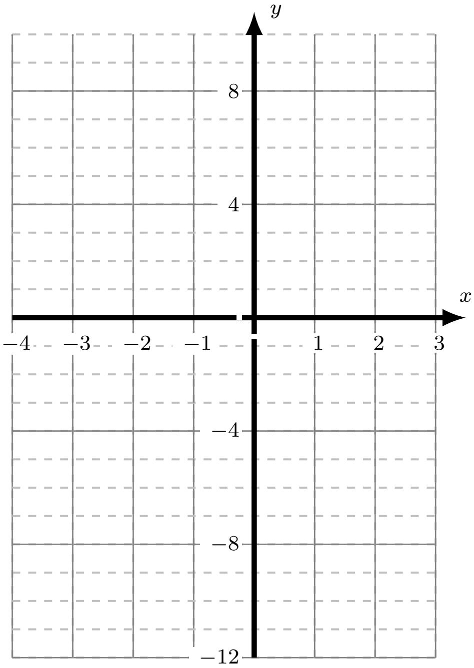
Exercice 8 Soit la fonction f d'expression $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$.

1) Déterminez les valeurs x pour lesquelles l'expression n'est pas définie.
2) En déduire le domaine de définition le plus large possible pour f.

Exercice 9 Représentez les fonctions données par leur expression et leur domaine

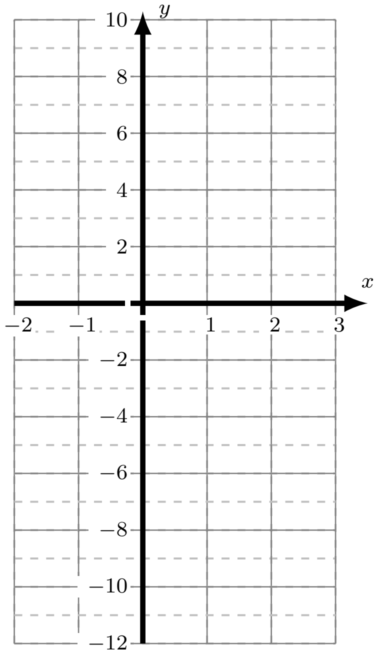
$f(x) = 4x + 1$ pour $x \in [-3; 2]$

x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	



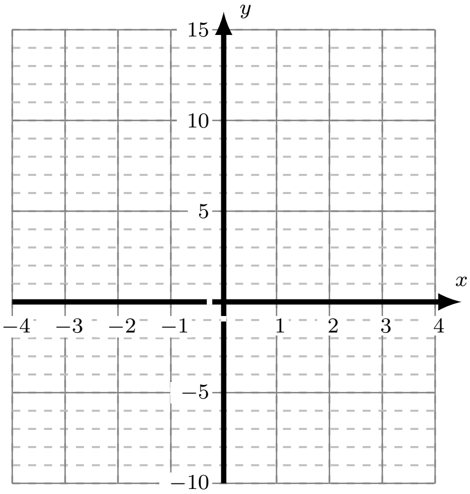
$f(x) = 5x - 6$ pour $x \in [-2; 3]$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



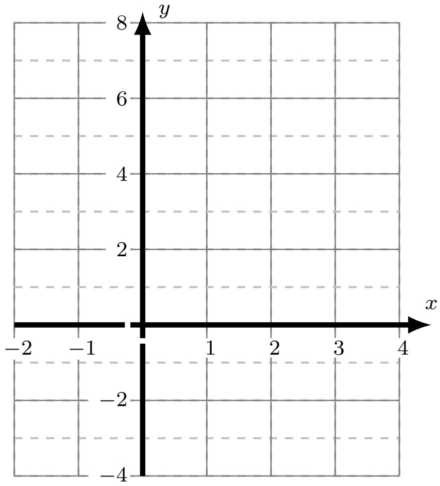
$f(x) = -3x + 4$ pour $x \in [-3; 3]$

x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



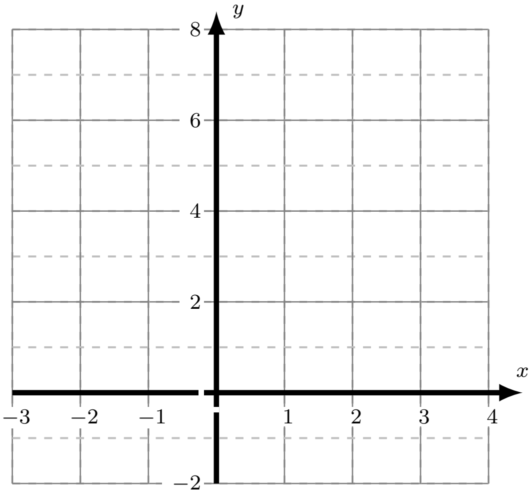
$f(x) = -2x + 5$ pour $x \in [-1; 4]$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	



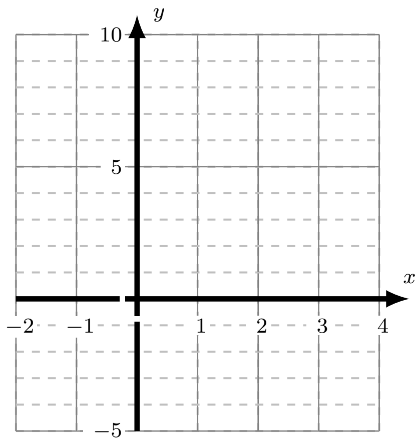
$f(x) = -x^2 + x + 6$ pour $x \in [-2; 3]$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	
3	



$f(x) = x^2 - 4x + 4$ pour $x \in [-1; 3]$

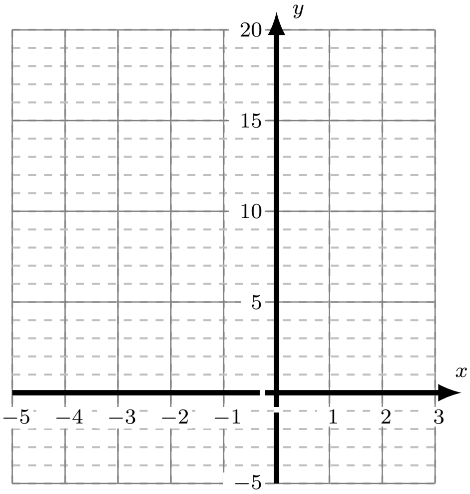
x	$f(x)$
-1	
0	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	



Pour tracer la représentation d'une fonction affine $f(x) = mx + p$ définie sur le domaine $[a; b]$, on trace le .... reliant les points $A(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$ et $B(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$.

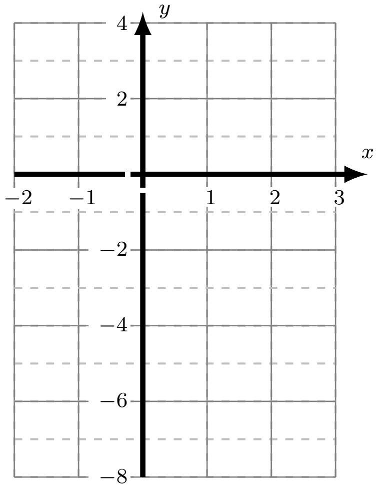
$f(x) = 2x^2 + 6x$ pour $x \in [-4; 2]$

x	$f(x)$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	



$f(x) = -2x^2 + 4x$ pour $x \in [-1; 2]$

x	$f(x)$
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	



■ **Exemple 5.3 — Tableau de signe.**

Il sera utile pour la suite de savoir identifier le signe d'une fonction selon les valeurs de l'abscisse x.

Il est possible de se faire idée rapite à partir d'une représentation graphique.

$f(x) = 2x^2 + 6x$ pour $x \in [-4; 2]$

x	
$f(x)$	

$f(x) = -2x^2 + 4x$ pour $x \in [-1; 2]$

x	
$f(x)$	

Exercice 10 Pour chaque fonction ci-dessous :

a) Représentez la fonction sur la pythonette.

b) Itentifier les abscisses x solution de l'équation $f(x) = 0$, et compléter la première ligne du tableau.

c) Complétez le tableau de signe.

$f_1(x) = 3x + 4$, avec $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1(x)$		

$f_2(x) = 5x + 2$, avec $x \in \mathbb{R}$

x	
$f_2(x)$	

$f_3(x) = 5(x + 1)(x - 6)$, avec $x \in [-5; 10]$

x	-5	10
$f_3(x)$		

$f_4(x) = -2(x - 2)(x - 9)$, avec $x \in [0; 10]$

x	
$f_4(x)$	

$f_5(x) = -5x^2 - 10x$, avec $x \in [-5; 5]$

x	
$f_5(x)$	

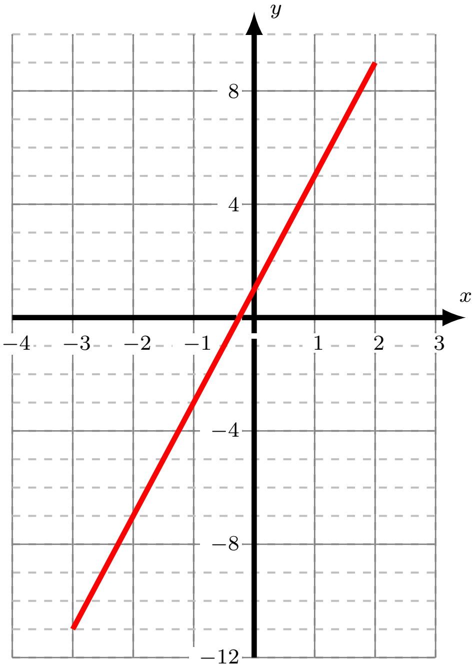
$f_6(x) = 4x^2 - 49$, avec $x \in [-5; 5]$

x	
$f_6(x)$	

solution de l'exercice 9. Représentez les fonctions données par leur expression et leur domaine ■

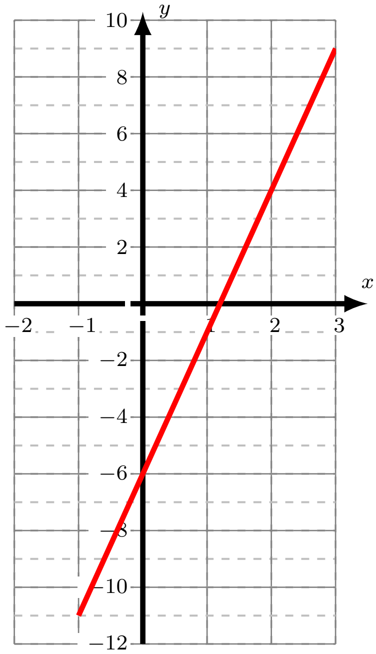
$f(x) = 4x + 1$ pour $x \in [-3; 2]$

x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	



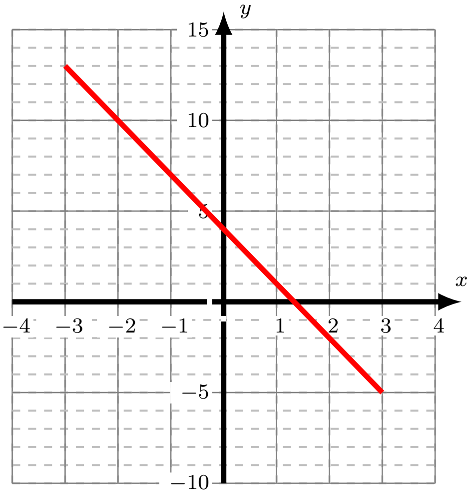
$f(x) = 5x - 6$ pour $x \in [-2; 3]$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



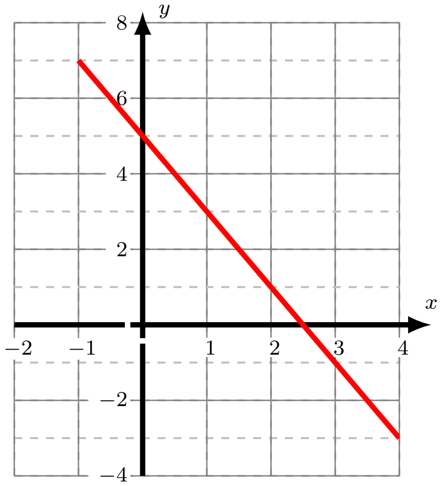
$f(x) = -3x + 4$ pour $x \in [-3; 3]$

x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



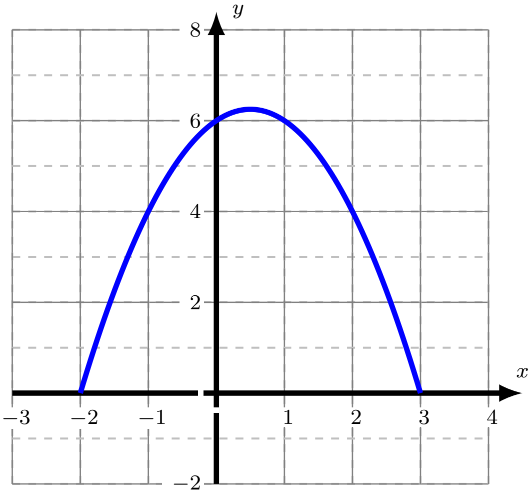
$f(x) = -2x + 5$ pour $x \in [-1; 4]$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	



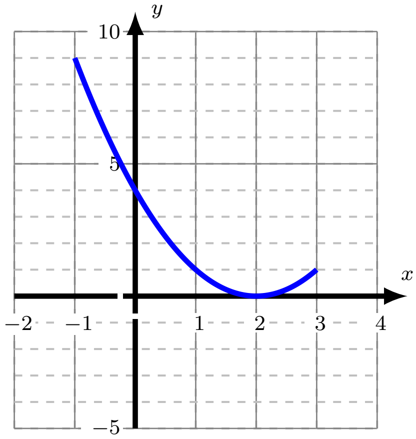
$f(x) = -x^2 + x + 6$ pour $x \in [-2; 3]$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	
3	



$f(x) = x^2 - 4x + 4$ pour $x \in [-1; 3]$

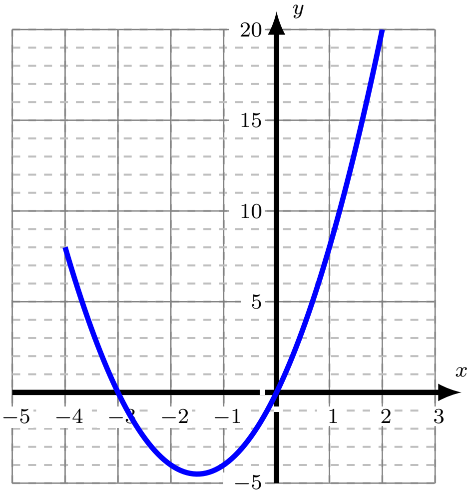
x	$f(x)$
-1	
0	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	



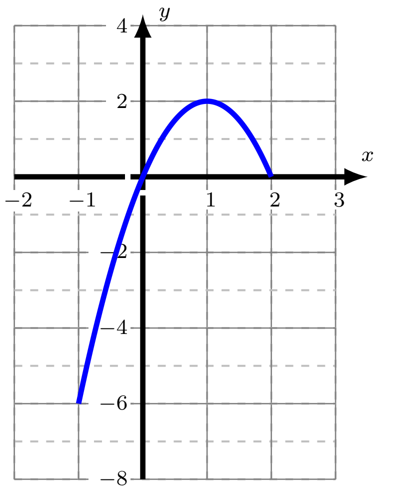
$f(x) = 2x^2 + 6x$ pour $x \in [-4; 2]$

$f(x) = -2x^2 + 4x$ pour $x \in [-1; 2]$

x	$f(x)$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	



x	$f(x)$
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	

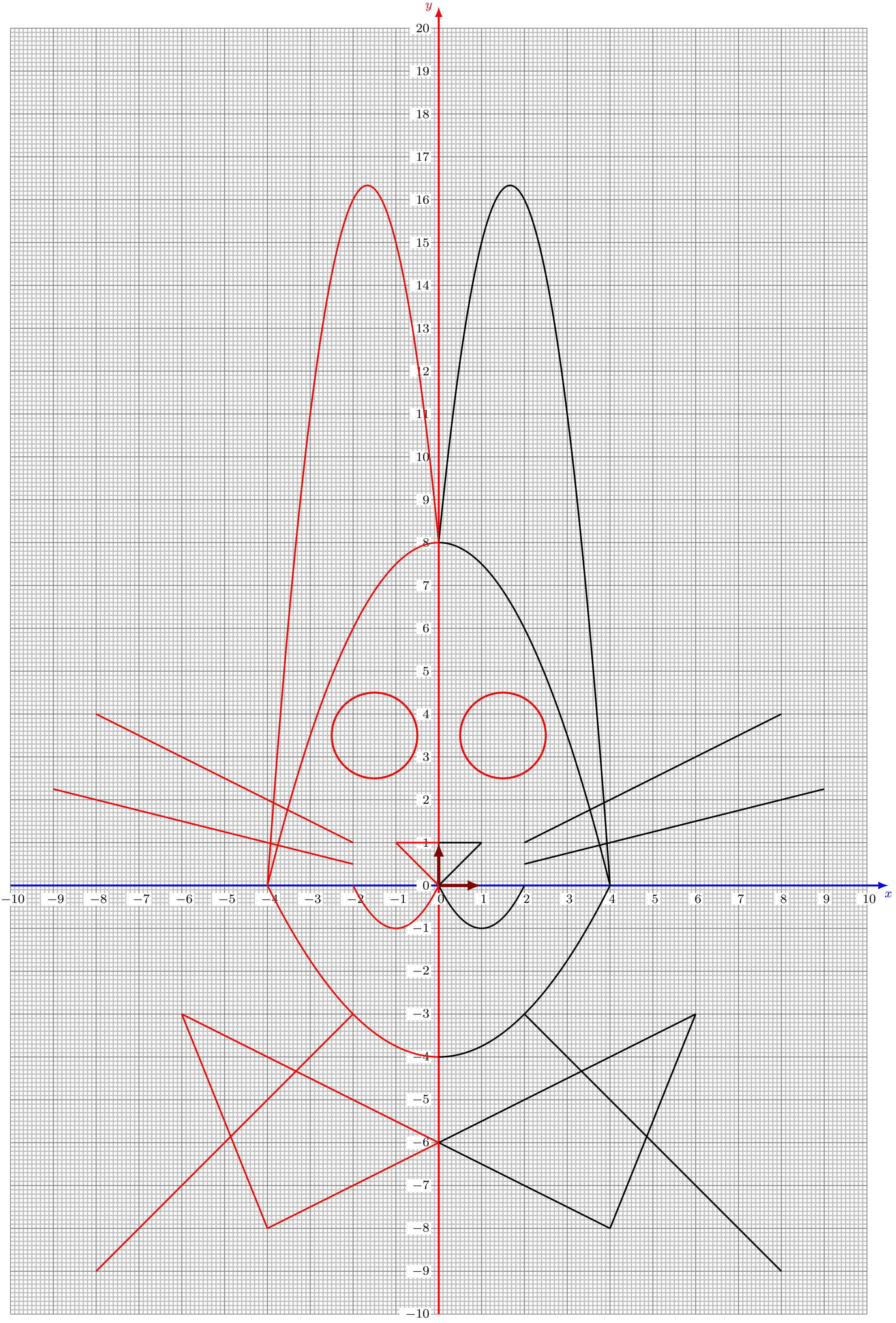


Problème 1

Voici 12 fonctions et leurs domaines de définitions.

n°	**fonctions**	**Ensemble de définition**
1	$f(x) = x$	$[0; 1]$
2	$g(x) = 0{,}5x$	$[2; 8]$
3	$h(x) = 0{,}25x$	$[2; 9]$
4	$i(x) = 1$	$[0; 1]$
5	$j(x) = 0{,}5x - 6$	$[0; 6]$
6	$k(x) = -x - 1$	$[2; 8]$
7	$l(x) = 2{,}5x - 18$	$[4; 6]$
8	$m(x) = -0{,}5x - 6$	$[0; 4]$
9	$n(x) = 0{,}25x^2 - 4$	$[0; 4]$
10	$p(x) = -0{,}5x^2 + 8$	$[0; 4]$
11	$q(x) = x^2 - 2x$	$[0; 2]$
12	$r(x) = -3x^2 + 10x + 8$	$[0; 4]$

1) Pour chaque fonction, à l'aide de la calculatrice, établir un tableau de valeurs sur l'ensemble de définition donné.
2) Sur la feuille de papier milimétrée A4 dans le sens portrait, tracer les représentations graphiques des douzes fonctions sur leurs ensembles de définitions.
   — Les courbes et le repère seront tracés au crayon 2H
   — le repère d'unité graphique 1 cm devra permettre de voir tous les tracés.
   — Ne notez pas le nom des fonctions sur ce graphique.
3) Tracer le cercle de centre $B(1{,}5\ ;\ 3{,}5)$ et de rayon 1.
4) Tracer les symétriques de ces courbes par rapport à l'axe des ordonnées.
5) Rendre le travail en classe.



y
x
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

5.2 Résolutions graphiques d'(in)équations

R La résolution graphique n'offre que des valeurs approchées.
C'est un outil de vérification ou de conjecture.

■ **Exemple 5.4** On souhaite conjecturer les solutions de l'équation $x^2+2x-7=3$.

On introduit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x^2+2x-7$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

1) Compléter le tableau et placer les points correspondant sur le repère.
2) Relier les points harmonieusement pour tracer $\mathscr{C}_f$.
3) Tracer la droite d horizontale d'ordonnée 3.
4) Pour résoudre l'équation

$$x^2+2x-7=3$$

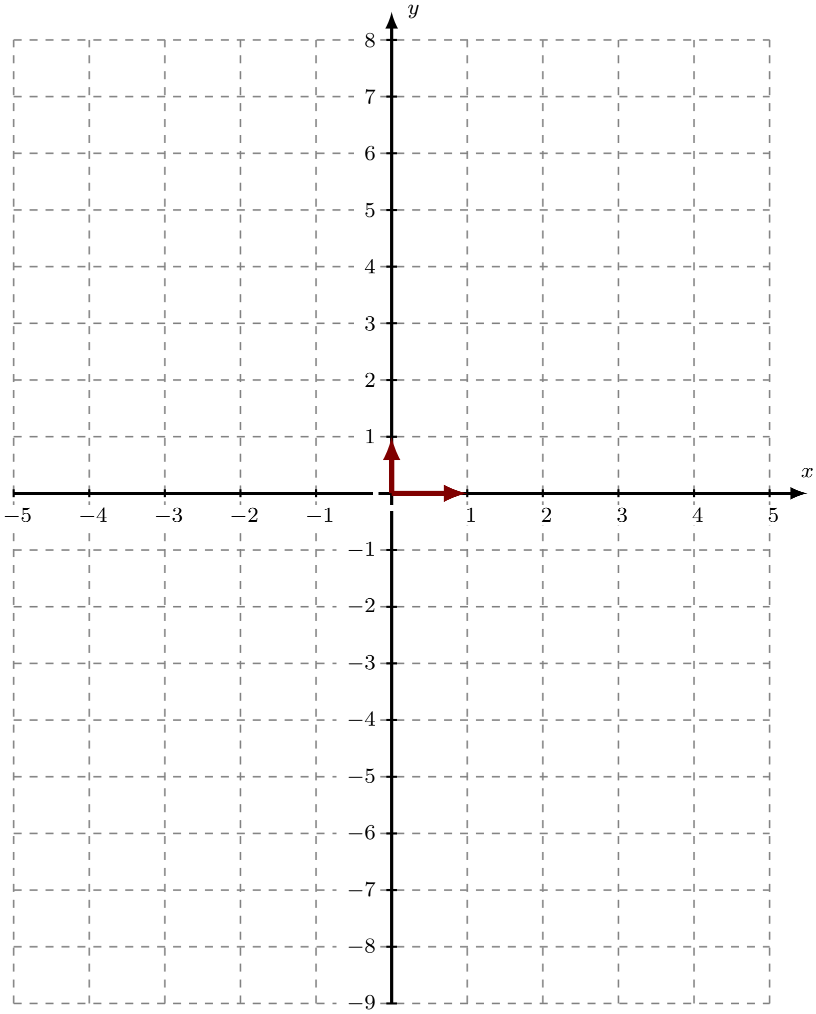
   a) Identifier les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec d.
   b) Lire les abscisses correspondantes.

   $S = \ldots$
5) Pour résoudre l'inéquation

$$x^2+2x-7 \leqslant 3$$

   a) Identifier les points de $\mathscr{C}_f$ en dessous de d
   b) Lire les abscisses correspondantes.

   $S = \ldots$



Définition 5.3 Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=k$ d'inconnue x » c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est égale à k

Définition 5.4 Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \leqslant k$ d'inconnue x » c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est inférieure à k

5.2.1 Exercices résolutions graphiques

Pour une fonction f, et un réel k. Lors de la résolution (algébrique ou graphique) d'une équation $f(x) = k$ ou d'une inéquation $f(x) > k$, on cherche les solutions dans le domaine de la fonction f.

■ Exemple 5.5
Résoudre graphiquement avec la précision permise par le graphique les équations et inéquations suivantes.

1) $f(x) = 5$ d'inconnue x

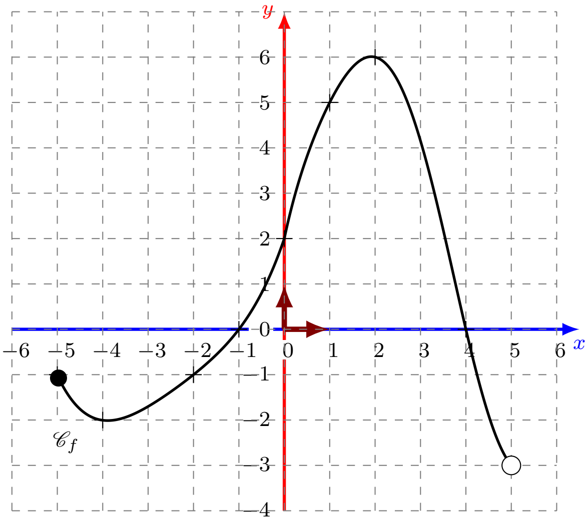
$S =$

2) $f(x) > 5$ d'inconnue x

$S =$

3) $f(x) \geqslant 5$ d'inconnue x

$S =$



Exercice 11
Résoudre graphiquement avec la précision permise par le graphique les équations et inéquations suivantes.

1) $f(x) = 2$ d'inconnue x

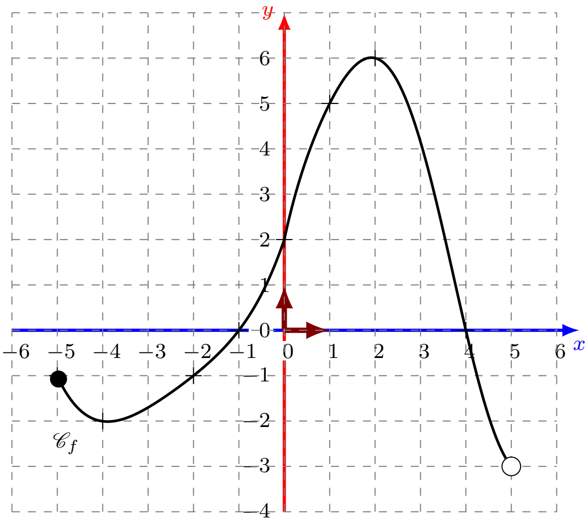
$S =$

2) $f(x) \geqslant 2$ d'inconnue x

$S =$

3) $f(x) > 2$ d'inconnue x

$S =$



4) $f(x) = -1$ d'inconnue x

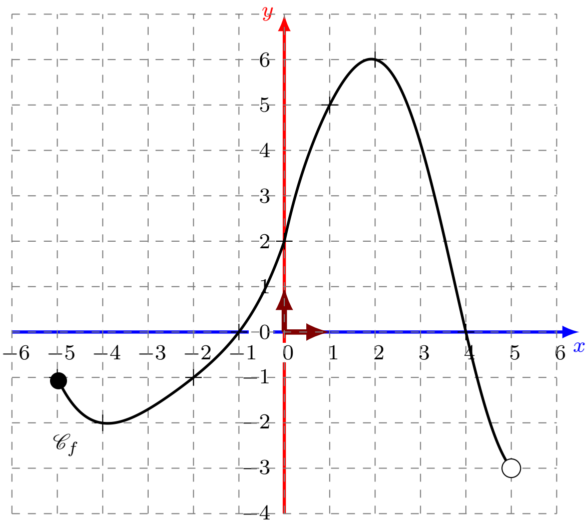
$S =$

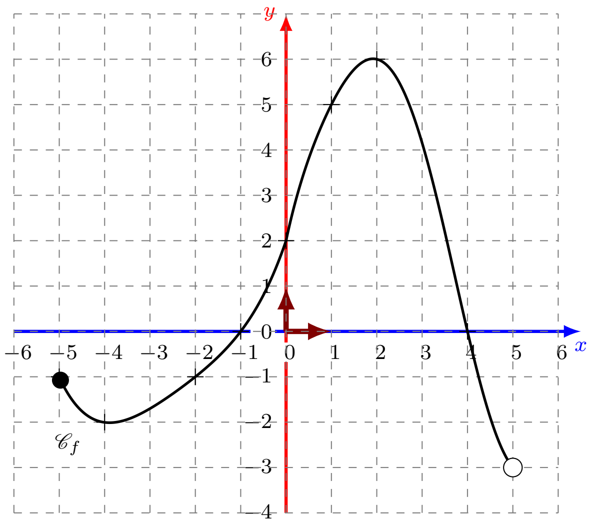
5) $f(x) \leqslant -1$ d'inconnue x

$S =$

6) $f(x) < -1$ d'inconnue x

$S =$





4) $f(x) = -2$ d'inconnue x

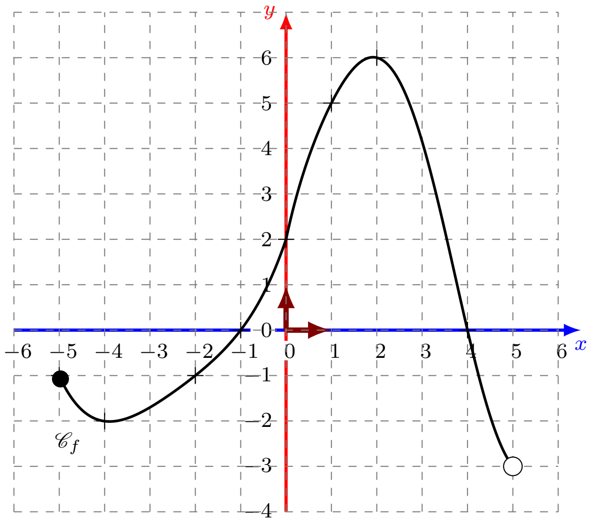
$S =$

5) $f(x) \geqslant -2$ d'inconnue x

$S =$

6) $f(x) > -2$ d'inconnue x

$S =$



4) $f(x) = 0$ d'inconnue x

$S =$

5) $f(x) < 0$ d'inconnue x

$S =$

6) Complétez le tableau de signe de f :

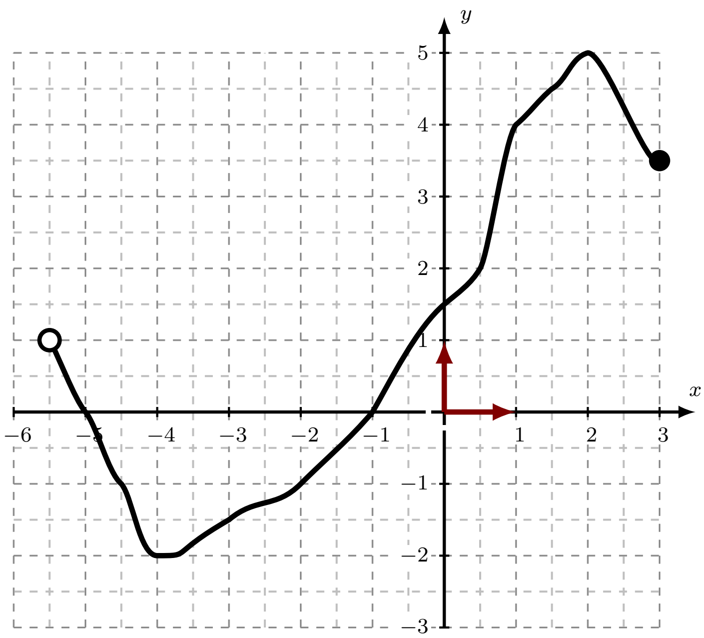
x	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
signe de $f(x)$				

Bilan Donner selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ inconnue x.

Exercice 12

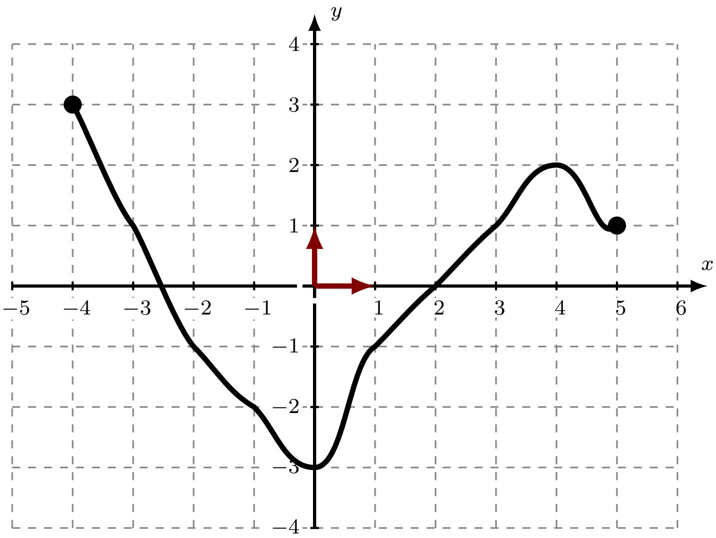
Ci-contre la représentation de la fonction f :

1) Donner le domaine D_f de la fonction f.
2) Résoudre graphiquement les équations suivantes :
   a) $f(x) = -2$ d'inconnue x.
   b) $f(x) = 4$ d'inconnue x.
3) Préciser selon les valeurs de k le nombre de solution de l'équation $f(x) = k$.
4) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :
   a) $f(x) \geqslant 2$ d'inconnue x.
   b) $f(x) > 1{,}5$ d'inconnue x.



Exercice 13 Ci-dessous la représentation de la fonction f :

1) Donner le domaine D_f de la fonction f.
2) Résoudre graphiquement les équations suivantes :
   a) $f(x) = 0$ d'inconnue x.
   b) $f(x) = 4$ d'inconnue x.
3) Préciser selon les valeurs de k le nombre de solution de l'équation $f(x) = k$.
4) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :
   a) $f(x) \geqslant 0$ d'inconnue x.
   b) $f(x) < 1$ d'inconnue x.



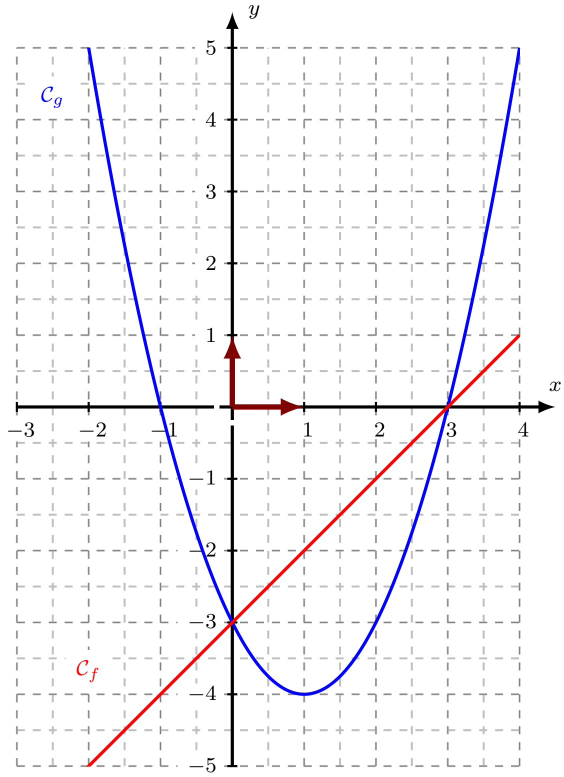
■ **Exemple 5.6 — (In)équations de la forme $f(x) = g(x)$ et $f(x) \geqslant g(x)$.**
On considère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1) Pour résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
   a) On identifie les points d'intersections entre les courbes : $A(\ldots;\ldots)$ et $B(\ldots;\ldots)$
   b) On lit les abscisses des points : $x_A = \ldots$ et $x_B = \ldots$
   c) On donne les solutions $\mathscr{S} = \ldots$

   $S =$

2) Pour résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant f(x)$.
   a) Identifier les points de la courbe $\mathscr{C}_g$ au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$
   b) Lire les abscisses des points correspondants :

   $S =$



Exercice 14 — Utilisation de la pythonette.

Dans chaque cas, représentez les fonctions f et g données par leur expressions algébriques à l'aide de la pythonette, puis résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ et l'inéquation $f(x) > g(x)$.

1) $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 5$
2) $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = -4x + 2$
3) $f(x) = 9x^2$ et $g(x) = 6x - 1$
4) $f(x) = 2x^3 - x$ et $g(x) = 3x^2 - x$.

Exercice 15 Résoudre algébriquement les équations et inéquations de l'exercice précédent.

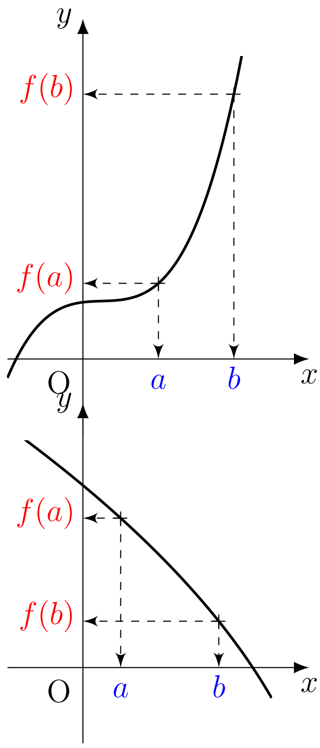
5.3 Sens de variation et extremums

Soit une fonction f continue sur un **intervalle** I.

Définition 5.5 f est **strictement croissante** sur I lorsque pour tout réels a, $b \in I$:

si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

$f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans le même ordre que a et b.



Définition 5.6 f est **strictement décroissante** sur I lorsque pour tout réels a, $b \in I$:

si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

$f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans l'ordre contraire de a et b.

Définition 5.7 Une fonction qui ne change pas de sens variation sur un intervalle est une fonction **monotone** sur cet intervalle.

Définition 5.8 — extremum.
La fonction f admet un **minimum** m sur un intervalle I, atteint en x_0 si :

pour tout $x \in I \quad f(x) \geqslant f(x_0) = m$

La fonction f admet un **maximum** M sur un intervalle I, atteint en x_0 si :

pour tout $x \in I \quad f(x) \leqslant f(x_0) = M$

Définition 5.9 — Parité d'une fonction. Le domaine D d'une fonction est **symétrique** par rapport à 0 lorsque :

$$\text{si } x \in D \text{ alors } -x \in D$$

Une fonction f à domaine symétrique par rapport à 0 est dite :

- **paire** lorsque pour tout $x \in D$: $f(-x) = f(x)$
- **impaire** lorsque pour tout $x \in D$: $f(-x) = -f(x)$

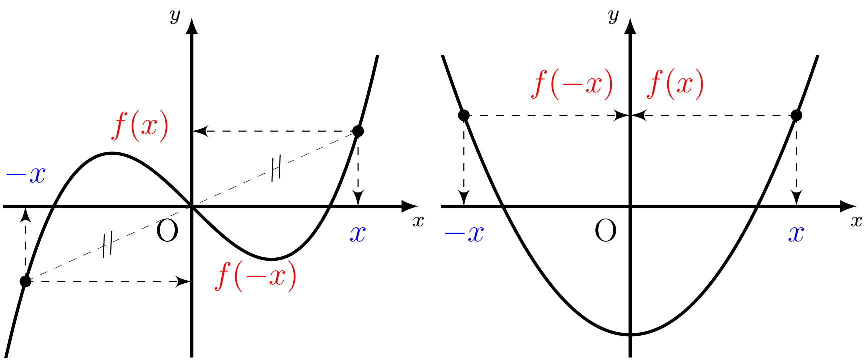
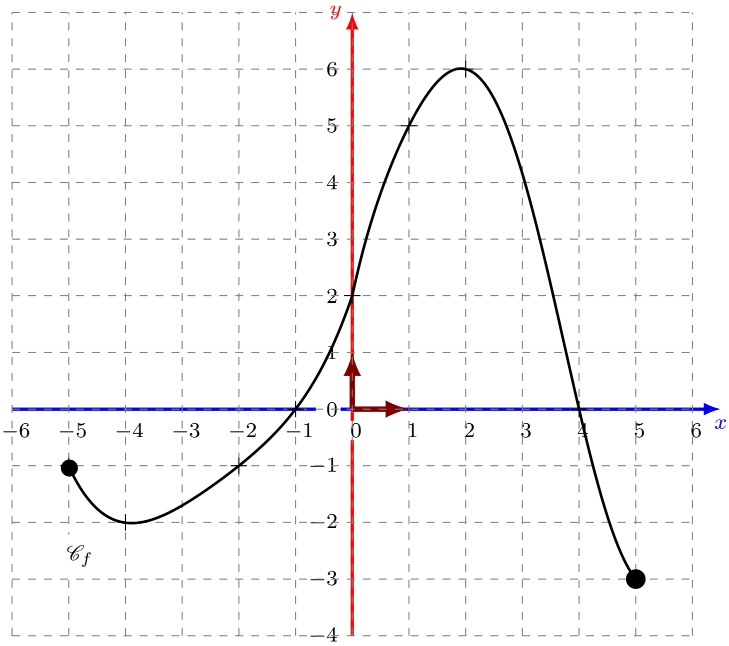


Figure 5.3 – Pour une fonction f impaire (à gauche), $\mathscr{C}_f$ admet l'origine $O(0;0)$ comme centre de symétrie.
Pour une fonction f paire (à droite), $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

5.3.1 Exercices : étude qualitative de fonctions

■ **Exemple 5.7**

	Vrai	Faux
1/ f est strictement croissante sur $[-1;1]$	☐	☐
2/ f est strictement décroissante sur $[4;5]$	☐	☐
3/ f est strictement décroissante sur $[-5;-4]$	☐	☐
4/ f est monotone sur $[3;5]$	☐	☐
5/ f est monotone sur $[1;3]$	☐	☐
6/ Le maximum de f sur $[-5;2]$ est atteint en $x=6$	☐	☐
7/ Le minimum de f sur $[-5;5]$ est atteint en $x=-4$	☐	☐



1) Compléter en donnant le meilleur encadrement possible :

a) Si $-3<x<1$ alors $\quad < f(x) < \quad$, car f est ....sur ....

b) Si $3<x<5$ alors $\quad < f(x) < \quad$, car f est ....sur ....

c) Si $-5<x<-4$ alors $\quad < f(x) < \quad$, car f est ....sur ....

d) Si $2<a<b<4$ alors $\ldots f(a) \ldots f(b) \ldots$, car f est ....sur ....

e) Si $-5<a<b<-4$ alors $\ldots f(a) \ldots f(b) \ldots$, car f est ....sur ....

f) Si $-5<a<-1$ alors $\quad < f(a) < \quad$.

g) Si $-5 \leqslant a \leqslant -1$ alors $\quad < f(a) < \quad$.

2) Dressons le tableau de variation et de signe :

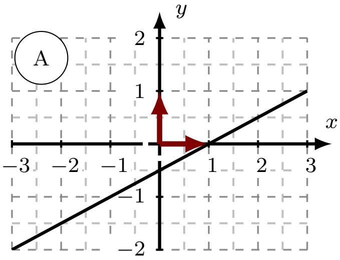
x	...	...	...	...
$f(x)$				

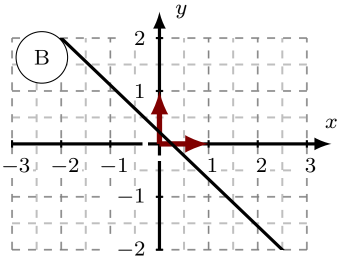
x	...	...	...	...
signe de $f(x)$				

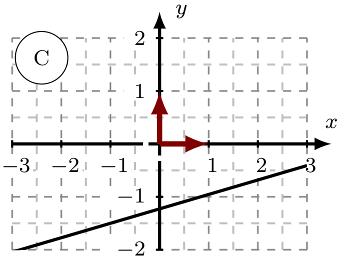
3) Un tableau de variations enrichi :

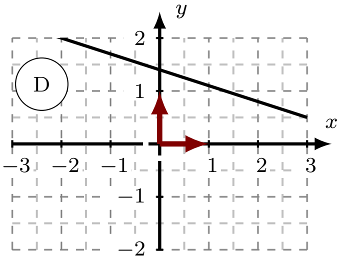
x	...	...	...	...
$f(x)$				

Exercice 16 Associer chaque courbe au tableau de variation qui lui correspond.









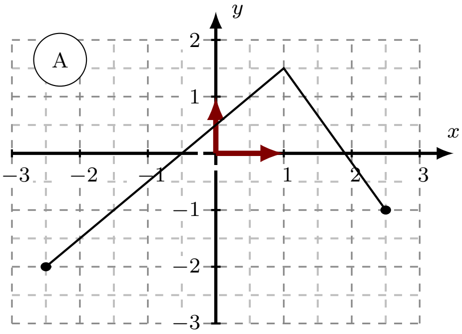
x	-2	3
$f(x)$	2 ↘	$0{,}5$

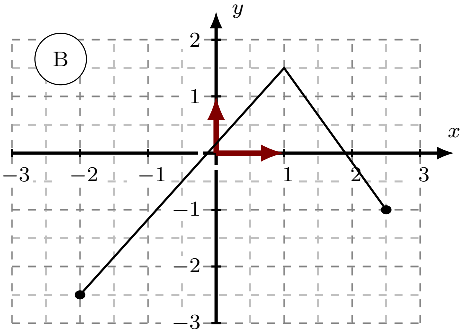
x	-3	3
$g(x)$	-2 ↗	$-0{,}5$

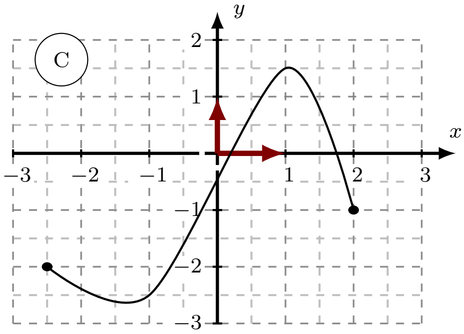
x	-3	3
$h(x)$	-2 ↗	1

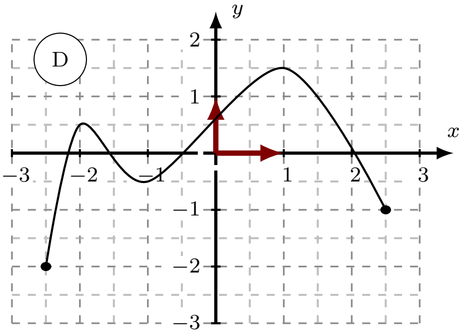
x	-2	$2{,}5$
$i(x)$	2 ↘	-2

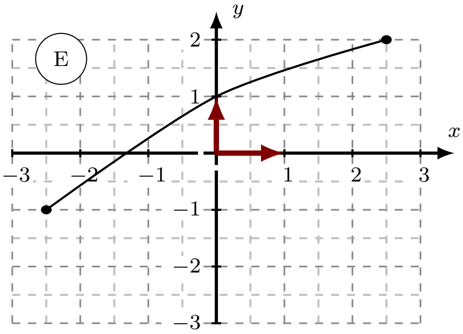
Exercice 17

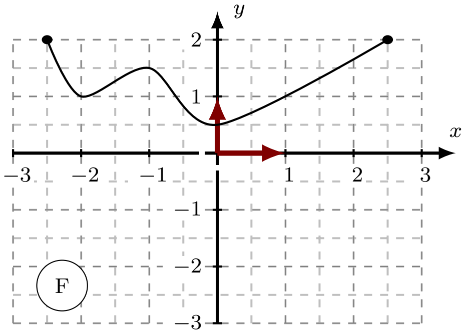












Quelle représentation graphique correspond à la fonction f dont le tableau de variation est donné ci-dessous ? Complétez les tableaux de variations des fonctions restantes.

x	-2	1	$2{,}5$
$f(x)$	$-2{,}5$ ↗	$1{,}5$ ↘	-1

x	
$\dots$	

x	
$\dots$	

x	
$\dots$	

x	
$\dots$	

x	
$\dots$	

Dresser les tableaux de variations de $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$, $h\colon x \mapsto x$,$h\colon x \mapsto x^2$,sur $[0;1]$

Exercice 18 Soit le tableau de variation d'une fonction f.

x	-5		-3		-1		2		4
$f(x)$	4	↘	2	↘	-2	↗	1	↗	4

1) Préciser le domaine de définition de f
2) Compléter les pointillés : $f(\ldots) = 2$; $f(2) = \ldots$
3) Décrire le sens de variation de la fonction f en précisant les intervalles ou f est monotone.
4) Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [-5; -1]$.
5) Même question pour $x \in [2; 4]$.
6) Comparer les valeurs suivantes.
   Préciser si l'on ne peut pas conclure à partir du tableau de variation.

   a) $f(-4) \ldots f(-2)$
   b) $f(-4) \ldots -2$
   c) $f(0) \ldots 2$
   d) $f(-2) \ldots 2$
   e) $f(0) \ldots f(-2)$
   f) $f(-4) \ldots f(1)$

7) Quel est le minimum de la fonction f sur $[-5; 4]$? En valeur de x est-il atteint ?
8) Quel est le nombre de solution de l'équation $f(x) = 1$? Donner un encadrement le plus précis possible de chaque solution.[1]

Exercice 19 Soit le tableau de variation d'une fonction f.

x	-4		-1		1		3		$3{,}5$
$f(x)$	-4	↗	-2	↘	-5	↗	0	↘	-1

1) Préciser le domaine de définition de f
2) Décrire le sens de variation de la fonction f en précisant les intervalles ou f est monotone.
3) Sur chaque intervalle ou f est monotone, donner un encadrement de $f(x)$.
4) Comparer les valeurs suivantes. Préciser si l'on ne peut pas conclure.

   a) $f(-3) \ldots f(-2)$
   b) $f(3) \ldots f(3{,}25)$
   c) $f(0) \ldots f(0{,}2)$
   d) $f(2) \ldots f(1{,}8)$
   e) $f(0) \ldots f(2)$
   f) $f(-3) \ldots f(0)$
   g) $f(0) \ldots f(3{,}25)$
   h) $f(-3) \ldots f(2)$

5) Quel est le maximum de la fonction f sur $[-4; 3{,}5]$?
6) Donner le nombre de solution de l'équation $f(x) = -4$ et un encadrement le plus précis possible de chacune.

1. Il est sous-entendu en seconde, qu'en l'absence d'indications supplémentaires, les fonctions sont strictement monotones et continues. Par exemple, si x varie de -3 à -1, alors $f(x)$ prend toutes les valeurs entre -2 et 2 (une seule fois). La justification est abordée en terminale.

Exercice 20 Soit le tableau de variation d'une fonction f.

x	-3		-1		0		2		4		5
$f(x)$	-2	↗	1	↘	0	↘	-3	↗	1	↗	3

1) Préciser le domaine de définition de f
2) Décrire le sens de variation de la fonction f en précisant les intervalles ou f est monotone.
3) Comparer les valeurs suivantes. Préciser si l'on ne peut pas conclure.

a) $f(-2)\dots 1$ | b) $f(1)\dots 0$ | c) $f(3)\dots 0$ | d) $f(-2)\dots f(4{,}5)$

4) Quel est le nombre de solution de l'équation $f(x)=0$? Donner un encadrement possible.

Exercice 21 Soit le tableau de variation d'une fonction f.

x	-2		1		3		$3{,}5$		4		6
$f(x)$	-7	↗	0	↘	-5	↗	0	↗	2	↘	-1

1) Donner le domaine de la fonction.
2) Comparer les valeurs suivantes. Préciser si l'on ne peut pas conclure.

a) $f(4{,}5)\dots f(5{,}5)$ | b) $f(-1)\dots f(0)$

3) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-1$?
4) Dresser le tableau de signe de la fonction f.

Exercice 22 Soit le tableau de variation d'une fonction f.

x	-10		-5		1		3		5		10
$f(x)$	-3	↘	-5	↗	0	↗	2	↘	0	↘	-1

1) Donner le domaine de la fonction.
2) Comparer les valeurs suivantes. Préciser si l'on ne peut pas conclure.

a) $f\left(-1\right)\dots f\left(-\frac{2}{3}\right)$ | b) $f(2)\dots f(4)$ | c) $f(-1)\dots f(4)$

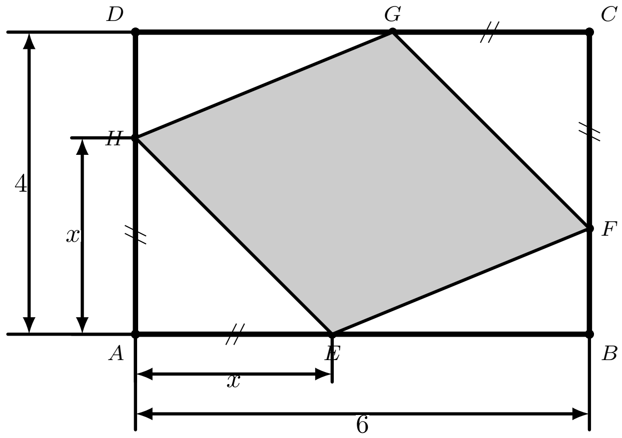
3) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=-0{,}5$.
Donner un encadrement de chacune, le plus précis possible.
4) Dresser le tableau de signe de la fonction f.

Exercice 23 Construire le tableau de variations de la fonction f sachant que :

- f est définie sur $[-1;6]$
- l'image de 3 par f est 1
- $f(-1)=3$
- 2 est un antécédent de -1 par f.
- 6 est un antécédent de 5 par f.
- f est décroissante sur $[-1;2]$
- f est croissante sur $[2;6]$

x	
$f(x)$	

Exercice 24



Les points E, F, G et H sont placés respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$ et $[AD]$ de façon à ce que $AE = AH = CF = CG = x$. On désigne par $A(x)$ l'aire du parallélogramme $EFGH$.

1) À quel intervalle appartient x ?
2) Justifier que $A(x) = 10x - 2x^2$.
3) Quel est le domaine de définition de la fonction A ?
4) À l'aide du menu fonction de la pythonette compléter le tableau de valeurs ci-dessous à l'aide de la calculatrice. Donner les résultats à 10^{-2} près.

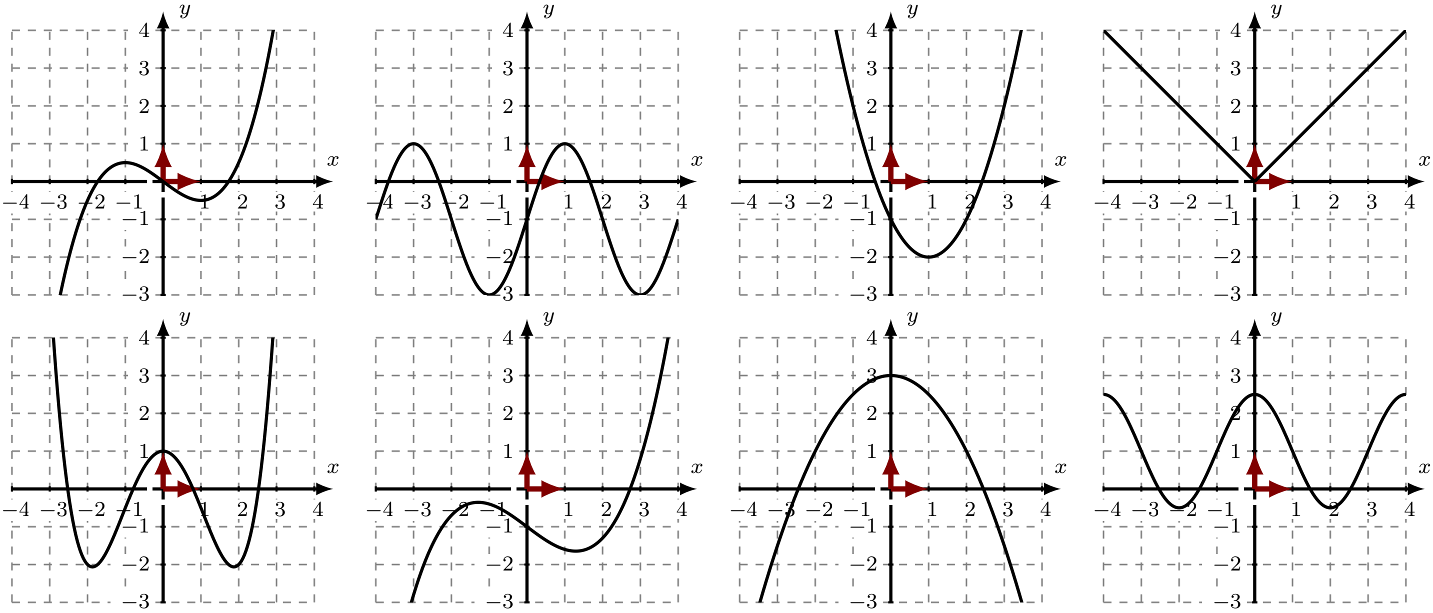
x	0.5	1	2	3	3.5	4
$A(x)$						

5) À l'aide du menu fonction de la pythonette dresser le tableau de variation de A.

x	$\cdots$ $\cdots$
$A(x)$	

6) a) Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle aire est égale à $4\,\text{cm}^2$.
   b) Résoudre graphiquement l'équation $A(x) = 8$ d'inconnue x.
7) a) Résoudre graphiquement l'inéquation $A(x) \geqslant 12$.
   b) Pour quelles valeurs de x, l'aire est elle inférieure à $4\,\text{cm}^2$.
   c) Pour quelle valeur de x l'aire est elle maximale ?

Exercice 25 — parité de fonctions. Visualisation graphique.



■ **Exemple 5.8** Pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, comparer les valeurs de $f(x)$ et de $f(-x)$ déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou aucun des deux. Utilise la numworks pour vérifiez ta réponse.

$f(x) = x^2 + 4$	$f(x) = x^3 - 2x$	$f(x) = x^2 - 3x + 4$
$f(-x) =$	$f(-x) =$	$f(-x) =$
$=$	$=$	$=$
$=$	$=$	$=$

Exercice 26 — parité de fonctions et expression. Mêmes consignes

$f(x) = 6$	$f(x) = 0$	$f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 2$	$f(x) = \|x\| + 4$
$f(x) = -x$	$f(x) = (x+2)^2 - 9$	$f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$	$f(x) = \|x + 4\|$
$f(x) = x^3 + x^4.$	$f(x) = -x^2 + 10$	$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 2$	$f(x) = x(x-1)(x+1)$

Exercice 27 f est une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}$.

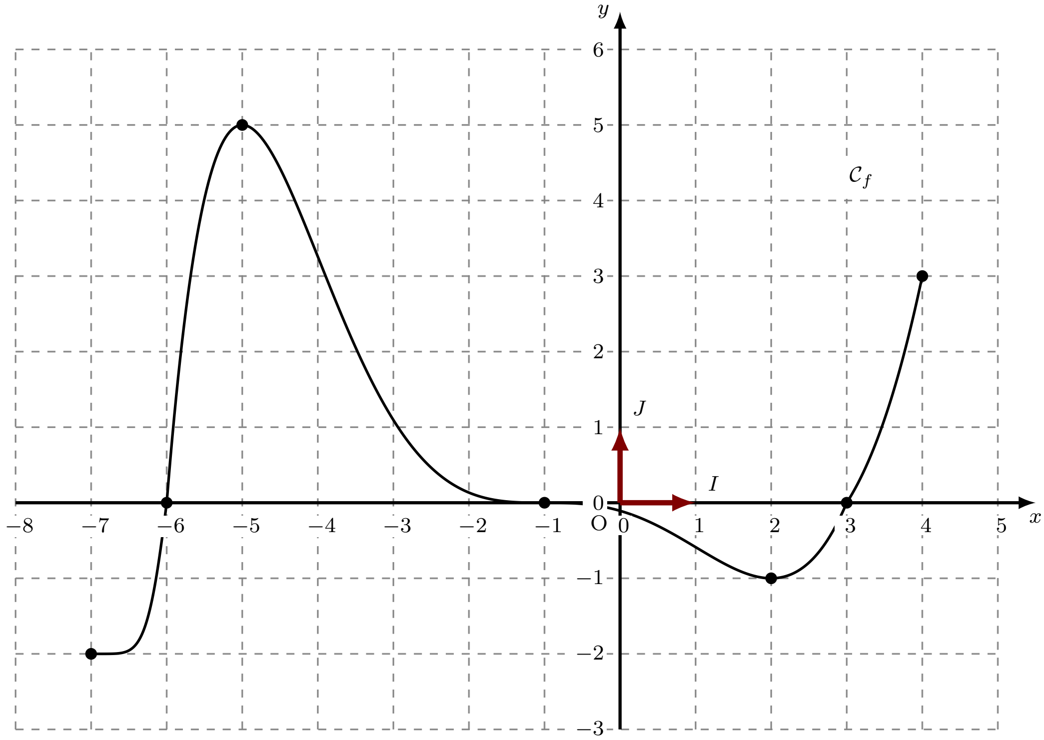
a) Montrer que la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + f(-x)$ est paire.

b) Montrer que la fonction $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f(-x)$ est impaire.

5.4 AP Fonctions

exercices du manuel **reconnaitre le graphe d'une fonction** à l'oral 31 et 33 pages 54-55
associer représentation graphique et tableau de variation : 27 page 81
erreurs à éviter : 29 page 81 ;
produire un tableau de variation à partir d'une représentation graphique : 28 page 81
interprétation de tableau de variation : 30 page 81, puis 22 à 25 page 80
résolution graphique équations : 50 et 52 page 59-60 et **inéquations** 20 et 21 page 79

Exercice 28 La fonction f est représentée dans le repère orthonormé $(O; I, J)$ par la courbe $\mathscr{C}_f$ Desmos



1) Préciser le domaine de f.
2) Décrire le sens de variation de la fonction f en précisant les intervalles ou f est monotone.
3) Peut-on dire que f est croissante sur $[-7; -5] \cup [2; 4]$? Justifier.
4) Complétez le tableau de variation de f.

x							
$f(x)$	...	↗	...	↘	...	↗	...

5) a) Les extremums de f sur l'intervalle $[-7; 4]$ sont ....
   b) Le minimum de f sur l'intervalle $[-3; 4]$ est ...., et il est atteint pour $x =$ ....
   c) Les extremums f sur l'intervalle $[-6; -3]$ sont ....
6) Complétez le tableau de signe de f.

x	...	...	...	...	...
signe de $f(x)$					

Exercice 29 Soit le tableau de variation d'une fonction f.

x	-5		-1		1		5
$f(x)$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

1) Préciser le domaine de définition.
2) Compléter $f(5) = \ldots$ et $f(\ldots) = 5$.
3) Comparer $f\left(-\frac{5}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{3}{2}\right)$
4) Peut-on comparer les images de 0 et de 3 ?
5) Pour chacune des propositions suivantes, justifier si elle est vraie ou fausse :
   a) Si a et b sont deux réels tels que $2 \leqslant a < b \leqslant 4$ alors $f(a) < f(b)$.
   b) Tous les réels de l'intervalle $[-5; 0]$ ont une image supérieure ou égale à 1.
   c) Il existe un seul réel de l'intervalle $[-5; 5]$ qui a une image négative.

Exercice 30

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 5]$. On donne son tableau de variations :

x	-5		-3		-1		2		5
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2

1) Tracer une courbe représentative possible de la fonction f à l'aide du tableau de son tableau de variation.
2) Déterminer (sans justifier) le nombre de solutions de chacune des équations suivantes. Pour chaque solution donner un encadrement le plus précis possible :
   - $f(x) = 3$
   - $f(x) = 1$
   - $f(x) = -\frac{1}{2}$
   - $f(x) = -1,5$
   - $f(x) = -2$
3) Justifier chacune des affirmations suivantes :
   a) $f(-4) \geqslant f(-3)$
   b) $f(3) \leqslant f(4)$
   c) Pour tout réel $x \in [-5; 5]$ on a $f(x) \geqslant -3$
   d) Pour tout réel $x \in [-5; 2]$ on a $f(x) \leqslant 0$.