Chapitre 1

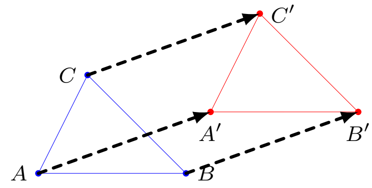
Transformations du plan

Table 1.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 1…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
Isométries			
déterminer une image par translation (réactivation 4^{e})	1		
déterminer une image par rotation	4, 5		
propriétés des isométries		3	
trouver l'image d'une figure dans un pavage	2	6	
Homothéties de rapport k			
tracer image d'un point par une homothétie	7, 9, 11	10, 12	
propriétés et calculs avec le rapport k	8,	13, 14	
Figures semblables			
identifier les côtés et angles homologues	15		
calculer des longueurs manquantes		16, 17	
calculer avec des rapports de longueurs et d'aires	18	19, 20, 21	22, 23
Algorithmique			
interpréter et compléter un script sratch	24	25	

1.1 Les isométries

Définition 1.1 — translation. Transformer une figure par translation, c'est la glisser sans la tourner.
La translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est la translation qui transforme le point P en Q.



Elle est caractérisée par :

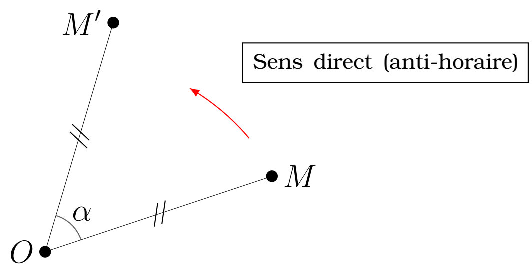
- une **direction** parallèle à la droite (PQ)
- un **sens** : de P vers Q.
- une **longueur** la longueur PQ.

Définition 1.2 — rotation. Transformer une figure par rotation c'est la faire tourner autour d'un point. Pour caractériser une rotation il faut préciser :

- **son centre de rotation** 0
- **son sens de rotation** : anti-horaire et horaire.
- **son angle de rotation** α

R Si M' est l'image de M par une rotation de centre O, alors :

1. O est équidistant de M et M'
2. le triangle OMM' est isocèle en O
3. O est sur la médiatrice du segment $[MM']$



1.2 Homothéties

L'homothétie de centre O et rapport k est une transformation qui permet d'agrandir ou de réduire une figure. Elle conserve les angles et les directions : un segment et son image sont parallèles.

Définition 1.3 Pour construire l'image M' d'un point M par rapport à l'homothétie de centre O et de rapport k il faut :

(1) tracer la droite (OM)

(2) mesurer la distance OM puis calculer $OM' = |k| \times OM$

(3) Si $k > 0$ on reporte la longueur OM' en plaçant M' du **même côté** que M par rapport à O

(4) Si $k < 0$, on place M' du **côté opposé** que M par rapport à O

1.3 Figures semblables

Deux figures sont semblables si l'une est un agrandissement (ou réduction) de l'autre. Elles ont les mêmes angles et les longueurs des côtés sont proportionnelles.

Définition 1.4 Les figures semblables ont des angles et des côtés homologues tel que :

- Les angles homologues sont égaux deux à deux.
- Les rapports $\dfrac{\text{longueur d'un côté de la nouvelle figure}}{\text{longueur du côté homologue de l'ancienne figure}}$ sont égaux.

Définition 1.5 Le **rapport d'échelle** est le rapport des longueurs homologues entre figures semblables.

Si le rapport d'échelle est > 1 on parle de rapport d'agrandissement.

Si le rapport d'échelle est < 1, on parle de rapport de réduction.

■ **Exemple 1.1** La figure image produite par une homothétie de rapport $k > 0$ est **semblable** à la figure de départ.

Postulat 1.1 Pour des figures avec un rapport d'échelle k :

- les longueurs (de côtés, périmètre) sont multipliées par k.
- les aires sont multipliées par k^2.
- les volumes sont multipliés par k^3

■ **Exemple 1.2** Réduire une figure d'un papier A3 vers un papier A4.

1.4 Exercices

On peut décrire une translation par un couple vertical $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

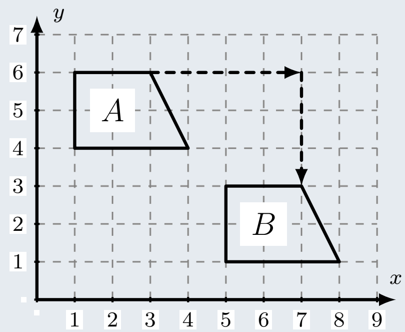
Le nombre du haut représente le déplacement horizontal :

vers la gauche si négatif ou *vers la droite si positif*

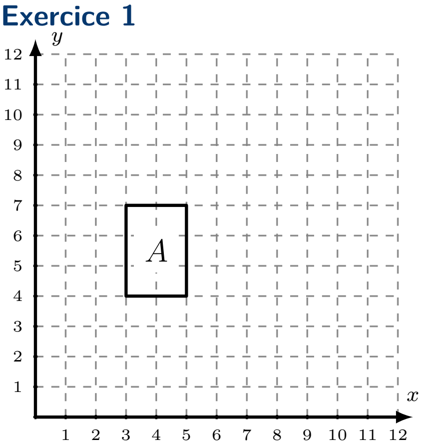
Le nombre du bas représente le déplacement vertical :

vers le bas si négatif ou *vers le haut si positif*

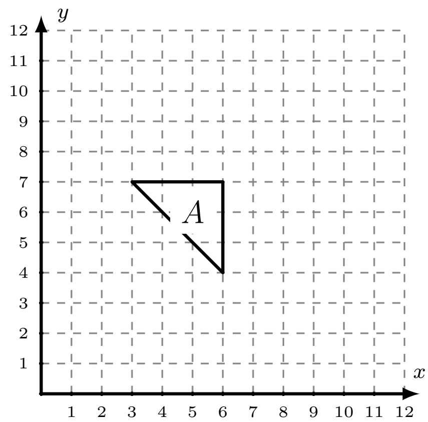
La figure B est l'image de la figure A par la translation $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.



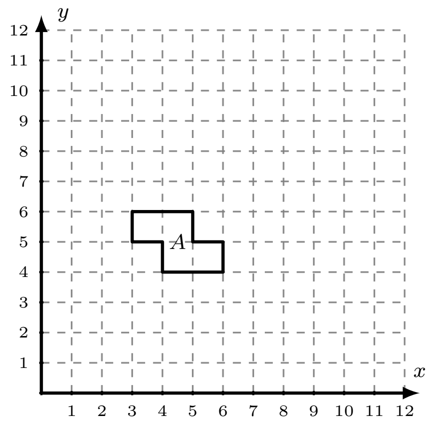
Exercice 1



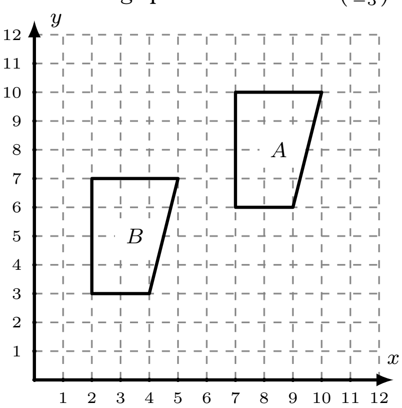
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.



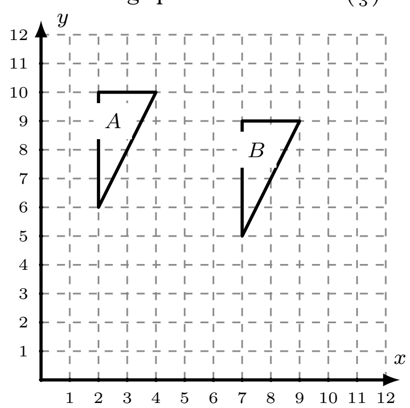
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.



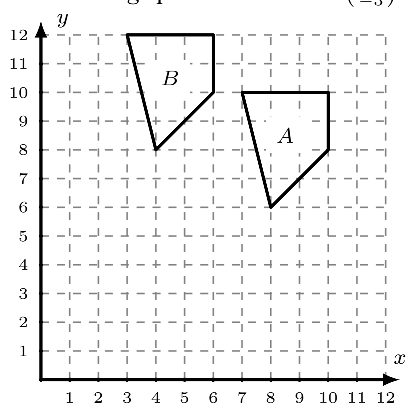
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$.



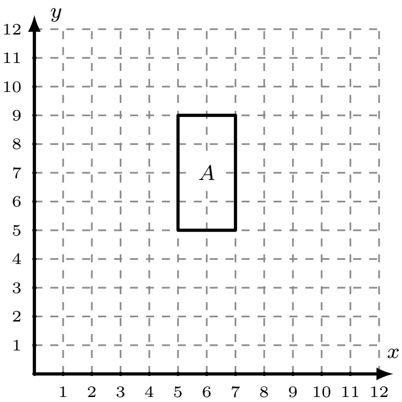
B est l'image de A par la translation $\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$.



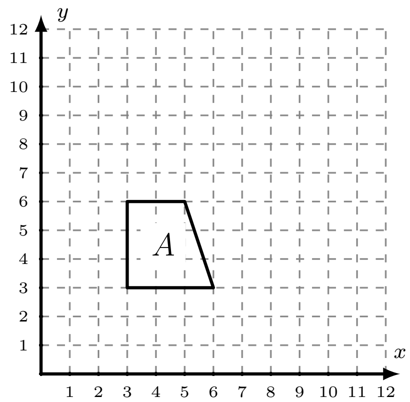
B est l'image de A par la translation $\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$.



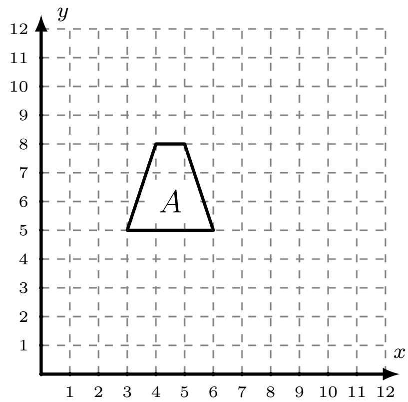
B est l'image de A par la translation $\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$.



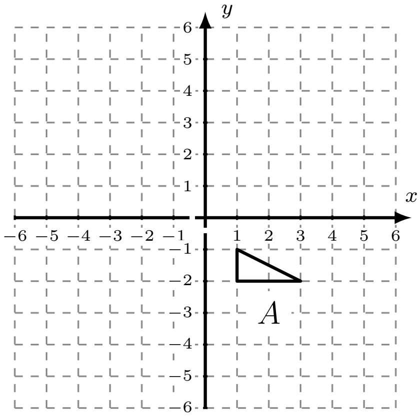
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.



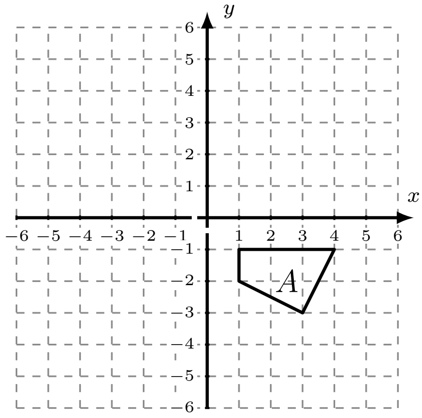
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.



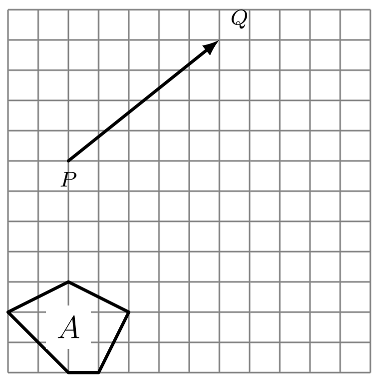
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$.



Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

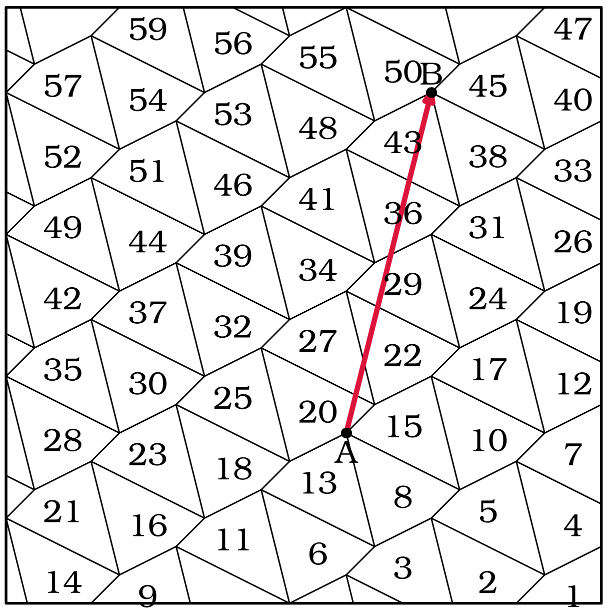


Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Tracer l'image par la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$

Exercice 2 Complétez



1. L'image du quadrilatère 25 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est .....
2. L'image du quadrilatère 44 par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ est .....
3. L'image du quadrilatère 6 par la translation qui transforme par la translation qui transforme le quadrilatère 18 en 24 est .....
4. L'image du quadrilatère 23 par la translation qui transforme par la translation qui transforme le quadrilatère 8 en 24 est .....
5. L'image du quadrilatère 42 par la translation qui transforme par la translation qui transforme le quadrilatère 51 en 17 est .....

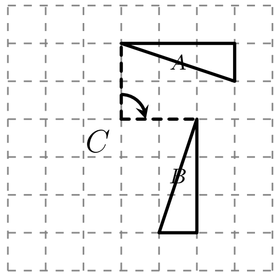
Exercice 3 — concepts. Complétez. Vous pouvez vous aider d'un schéma.

1. Dans une translation, chaque point d'une figure se déplace d'une .... distance dans la .... direction, et la figure image a la .... forme et la .... aire.
2. ABC est un triangle rectangle en C et d'hypoténuse de longueur 5 cm. A', B' et C' sont les images par une translation des points respectifs A, B et C. Alors $\widehat{A'C'B'} = \ldots$ et $A'B' = \ldots$
3. $MN = 6$ cm et P est le milieu du segment $[MN]$. Le segment $[PN]$ est l'image du segment $[MP]$ par la translation de ..... cm dans la directon .....
4. Si B est l'image de A par la translation qui transforme C en D, alors les droites (AB) et $(\ldots)$ sont parallèles. De plus $AC = \ldots\ldots$.

1.4.1 Exercices : rotations

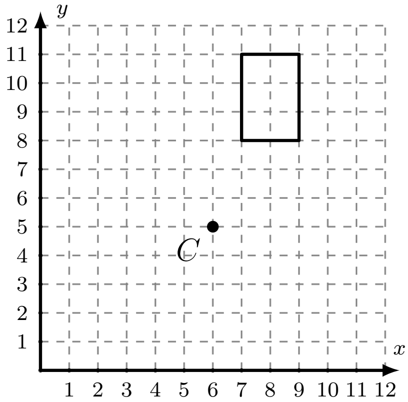
On décrit une rotation par (1) **son centre de rotation** (2) **son angle de rotation** (3) **son sens de rotation**

anti-horaire (direct) horaire (indirect)

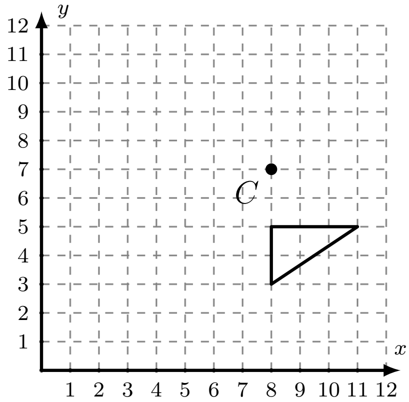


■ **Exemple 1.3** *B* est l'image de *A* par la rotation de centre *C* d'angle 90° sens horaire.

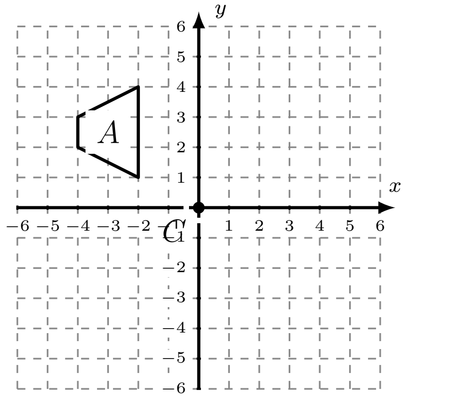
Exercice 4



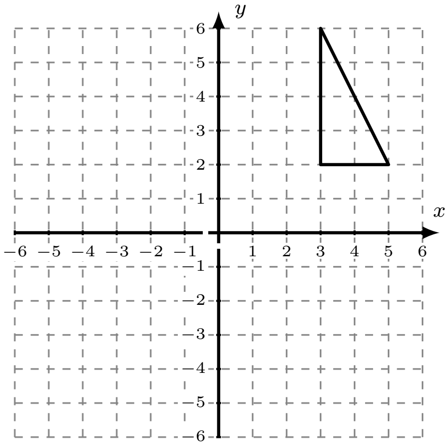
Tracer l'image par la rotation de centre C d' angle 90° sens horaire.



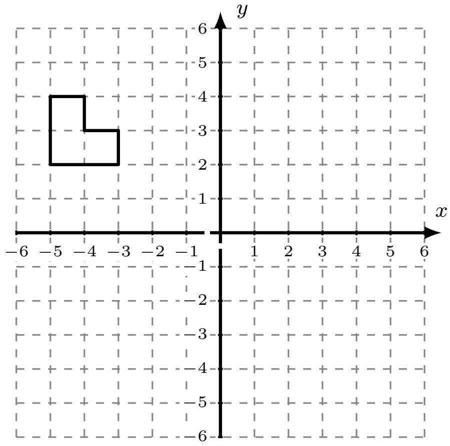
Tracer l'image par la rotation de centre C d' angle 180°.



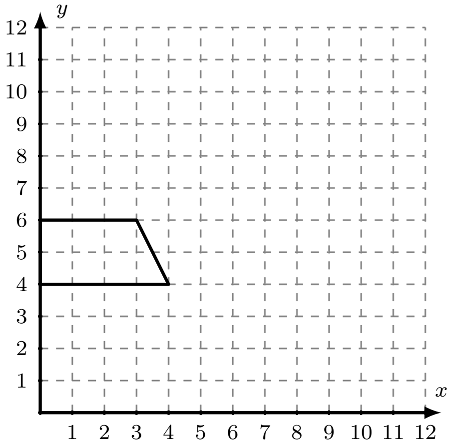
Tracer l'image par la rotation autour de l' origine d' angle 270° anti-horaire.



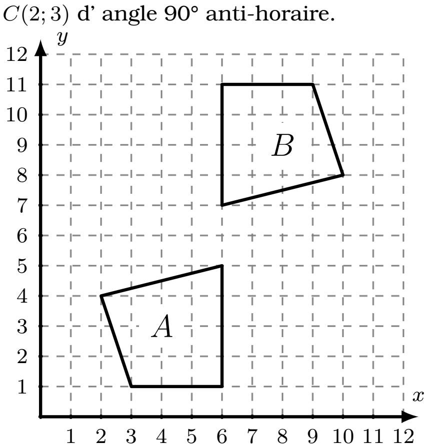
Tracer l'image par la rotation de centre $C(2;3)$ d' angle 90° anti-horaire.



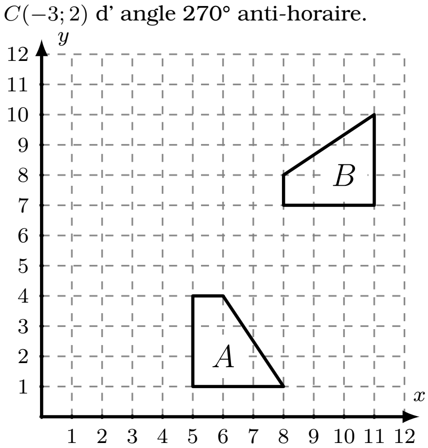
Tracer l'image par la rotation de centre $C(-3;2)$ d' angle 270° anti-horaire.



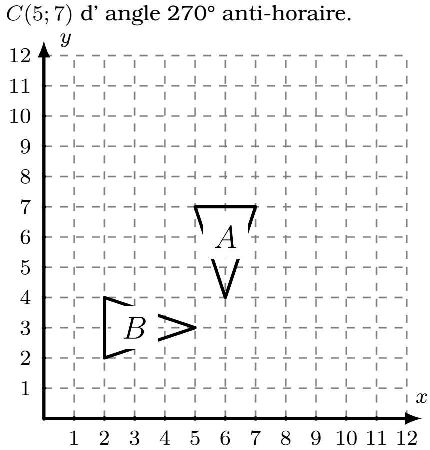
Tracer l'image par la rotation de centre $C(5;7)$ d' angle 270° anti-horaire.



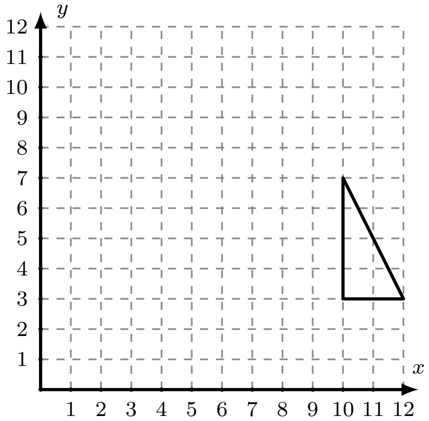
B est l'image de A par la rotation de centre $C(\ldots;\ldots)$ d' angle ....



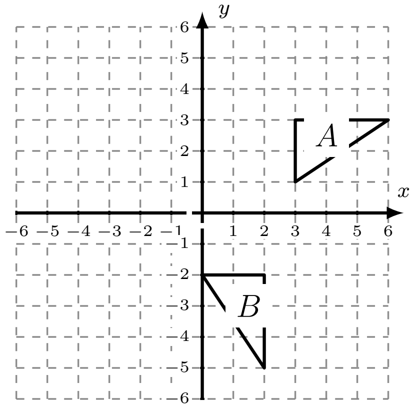
B est l'image de A par la rotation de centre $C(\ldots;\ldots)$ d' angle ....



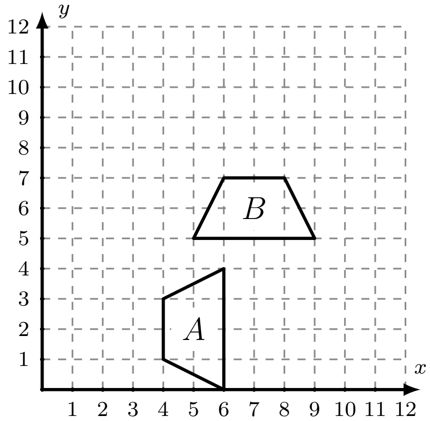
B est l'image de A par la rotation de centre $C(\ldots;\ldots)$ d' angle ....



Tracer l'image par la rotation de centre $C(7,7)$ d' angle 180°.



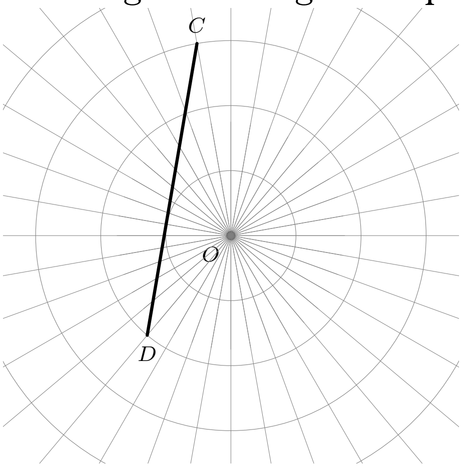
B est l'image de A par la rotation de centre $C(\dots;\dots)$ d' angle ....

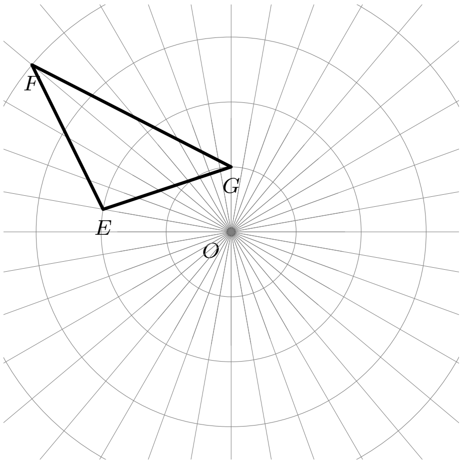


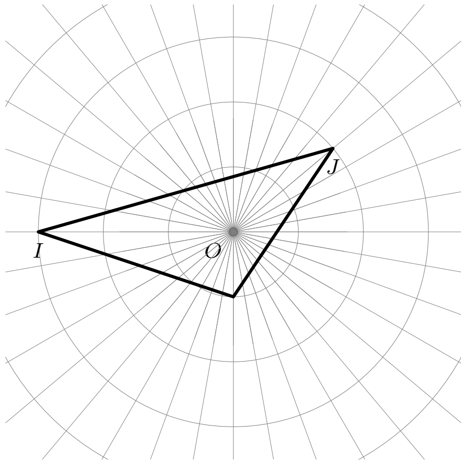
B est l'image de A par la rotation de centre $C(\dots;\dots)$ d' angle ....

Exercice 5 Réalise les constructions suivantes en t'aidant du quadrillage : l'angle formé par deux demi-droites de centre O consécutives mesure 10°. Tous les cercles ont pour centre O.

1. l'image du segment $[CD]$ par la rotation de centre O et d'angle 150° dans le sens direct.
2. l'image du triangle EFG par la rotation de centre O et d'angle 110° dans le sens indirect.
3. l'image du triangle IJK par la rotation de centre O et d'angle 70° dans le sens horaire.







Exercice 6 Complétez

1. L'image de 54 par la rotation de centre A et d'angle 90° dans le sens direct est ....
2. L'image de 29 par la rotation de centre B et d'angle 90° dans le sens anti-horaire est ....
3. L'image de 48 par la rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens indirect est ....
4. L'image de 110 par la rotation de centre D et d'angle 90° dans le sens horaire est ....
5. L'image de 69 par la rotation de centre E et d'angle 90° dans le sens anti-horaire est ....

114	115	116	117	118	119	120	121	122	123
104	105	106	107	108	109	110	111	112	113
94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

1.4.2 Exercices : homothéties

Une **Homothétie de rapport** $k > 1$ est un agrandissement de facteur k.

On peut tracer des demis-droites partant du centre de l'homothétie et passant par chaque sommet de la figure.

La distance au centre de chaque point est multipliée par le facteur k pour donner la distance au centre du point image.

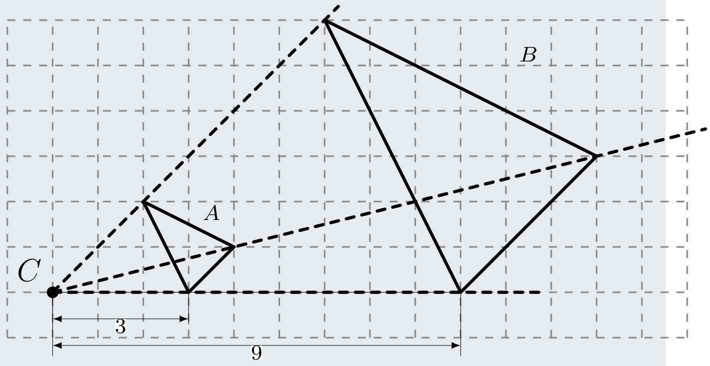
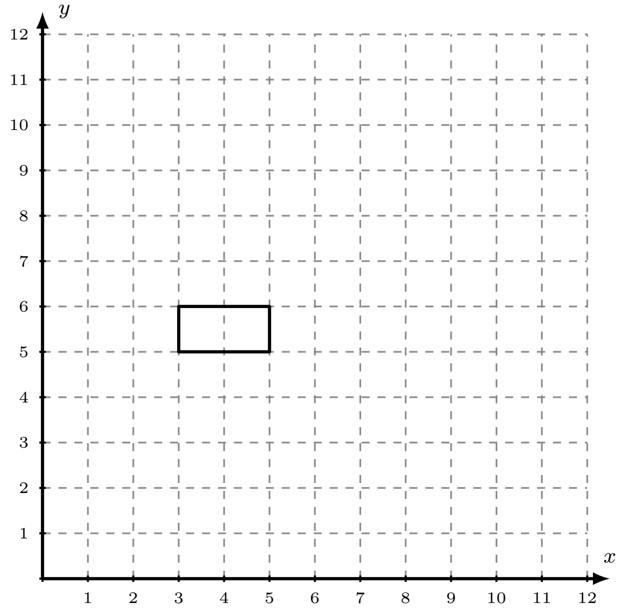
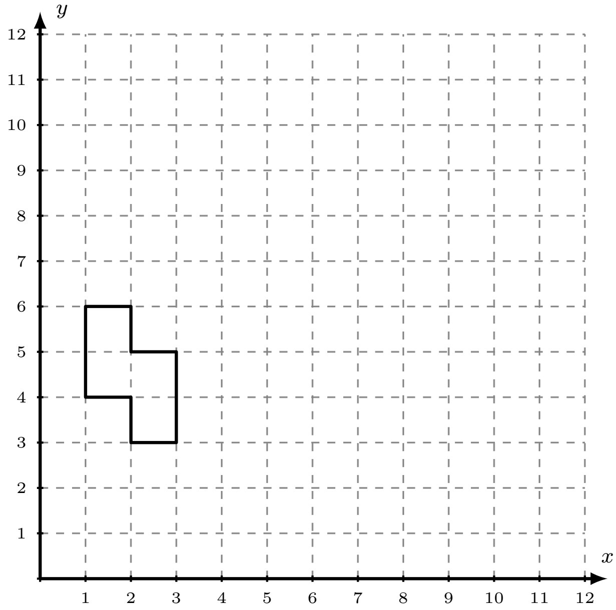


Figure 1.1 – B est l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport 3

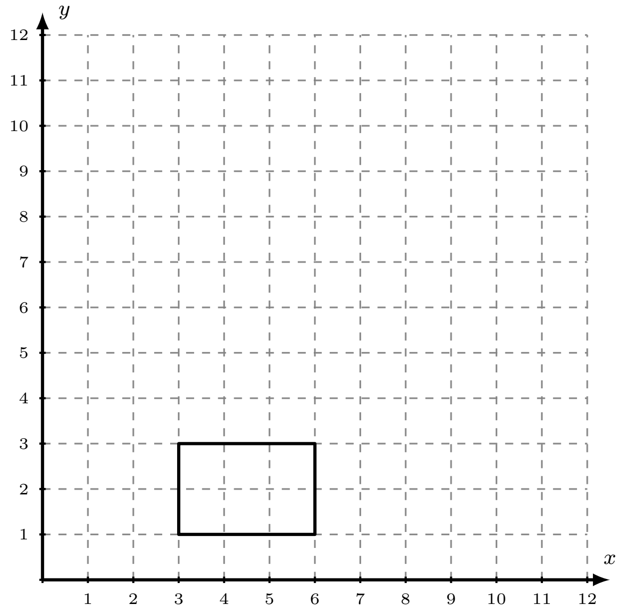
Exercice 7



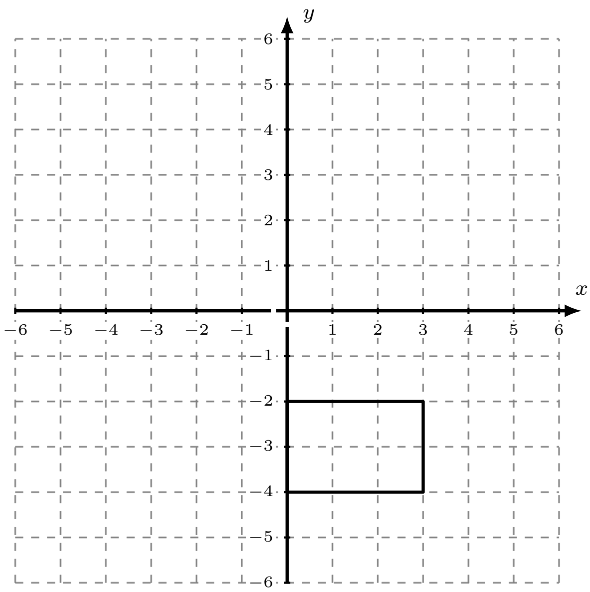
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(2; 8)$ et de rapport 2



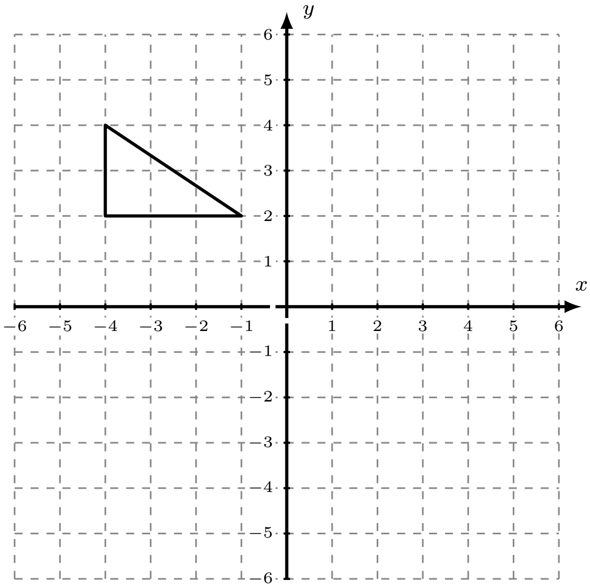
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(0; 4)$ et de rapport 4



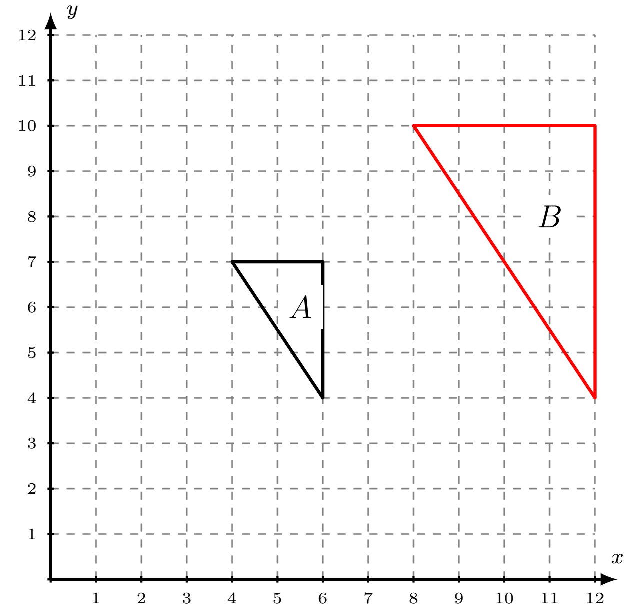
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(4; 0)$ et de rapport 3



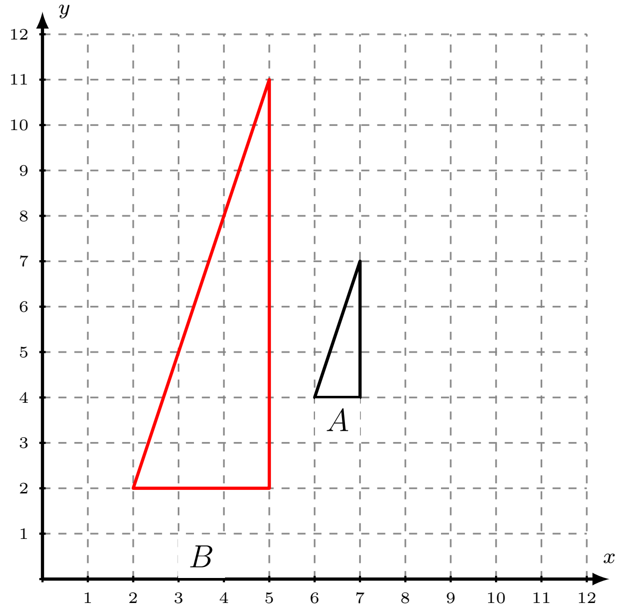
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(1; -5)$ et de rapport 2



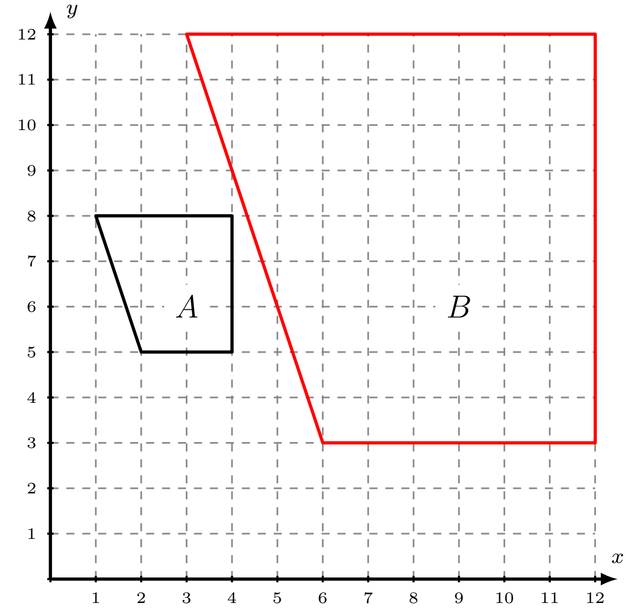
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(-5;4)$ et de rapport 2



B est l'image de A par l'homothétie de centre $C(\ldots;\ldots)$ et de rapport ...



B est l'image de A par l'homothétie de centre $C(\ldots;\ldots)$ et de rapport ...



B est l'image de A par l'homothétie de centre $C(\ldots;\ldots)$ et de rapport ...

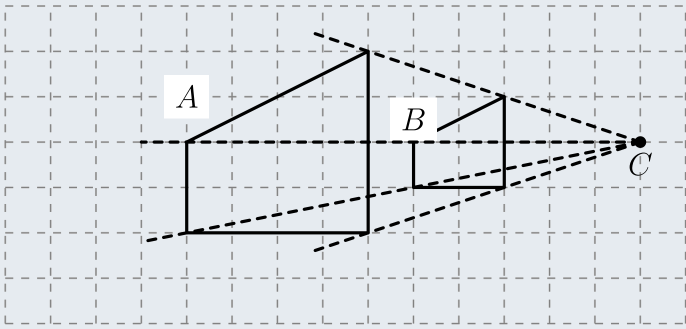
Exercice 8 — concepts. Complétez

1. ABC est un triangle rectangle en C et d'hypoténuse de longueur 5 cm. A', B' et C' sont les images par une homothétie de rapport 3. Alors $\widehat{A'C'B'} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $A'B' = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Dans la première figure de l'exercice 7, le rectangle a été agrandi par un rapport 2. Son aire a été multipliée par ....
3. Dans la 2ème figure de l'exercice 7, le rectangle a été agrandi par un rapport 3. Son aire a été multipliée par ....
4. Dans une homothétie, un point, son image et le centre sont ....

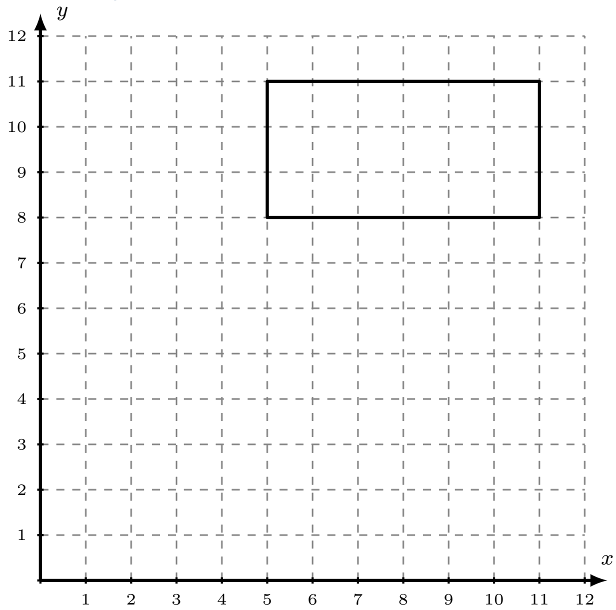
Une homothétie de rapport $0 < k < 1$ est une reduction.

La figure image est plus petite et plus proche du centre de l'homothétie.

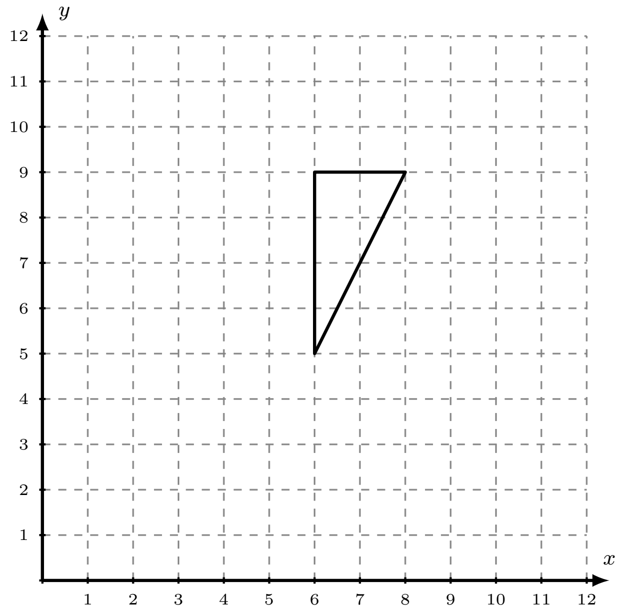
Ci-contre, B est l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$.



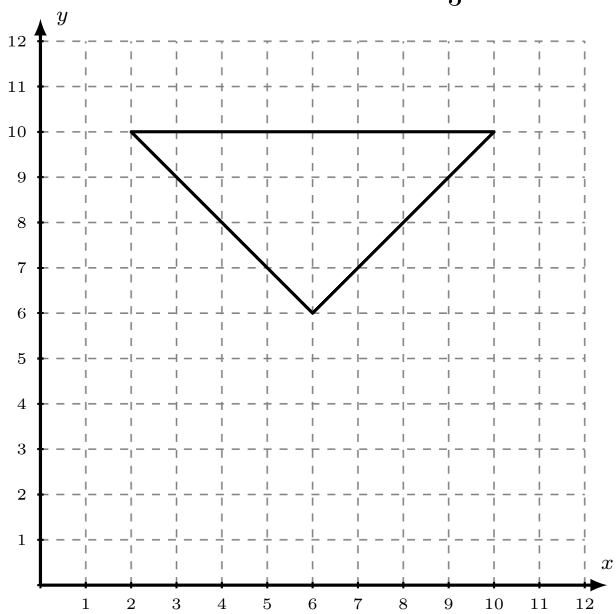
Exercice 9



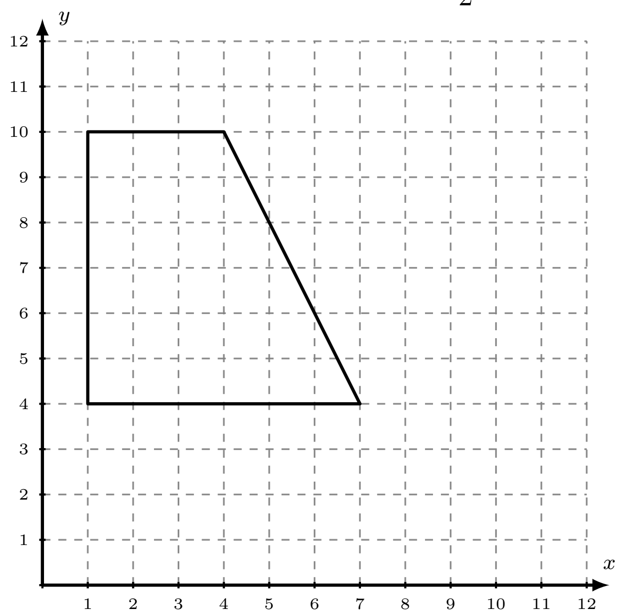
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(2;2)$ et de rapport $\dfrac{1}{3}$.



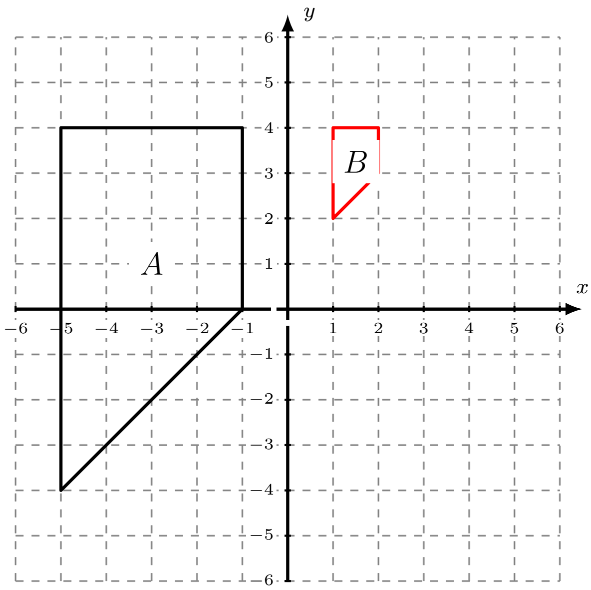
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(12;7)$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$



Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(6;2)$ et de rapport $\dfrac{1}{4}$

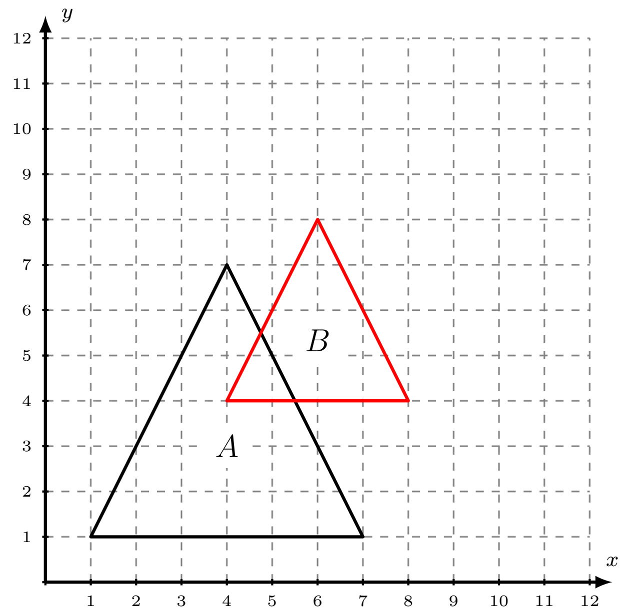


Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(7;1)$ et de rapport $\dfrac{2}{3}$



B est l'image de A par l'homothétie de centre

$C(\ldots;\ldots)$ et de rapport ...



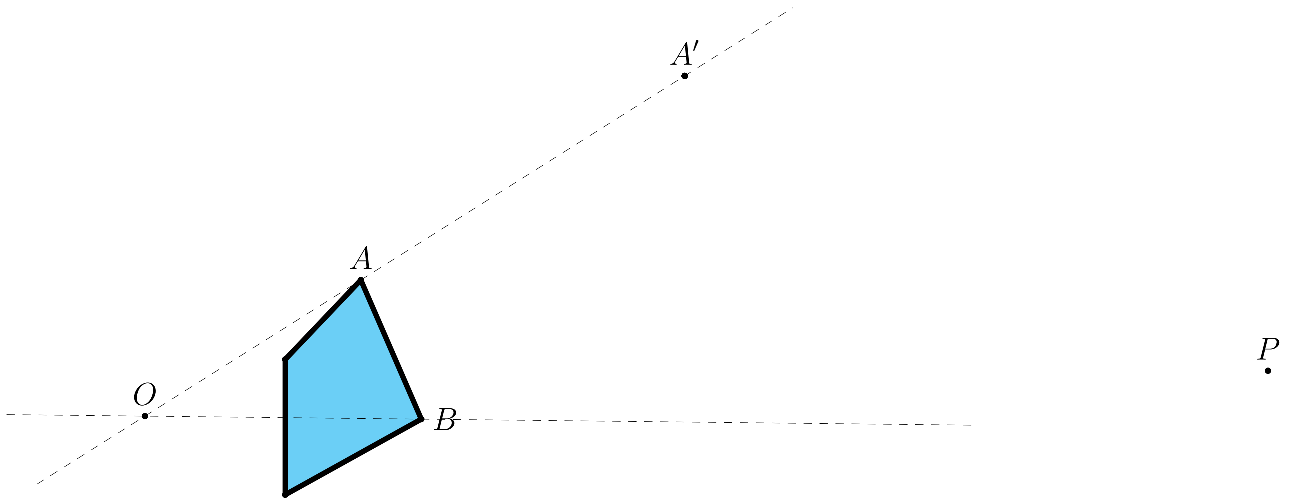
B est l'image de A par l'homothétie de centre

$C(\ldots;\ldots)$ et de rapport ...

Exercice 10 Sur le dessin, A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{5}{2}$.

a) Dessine l'image de B puis celle du quadrilatère par cette homothétie.

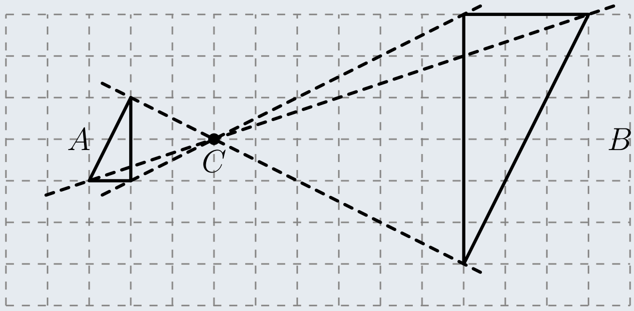
b) Dessine l'image de la **figure obtenue** par l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{2}{5}$



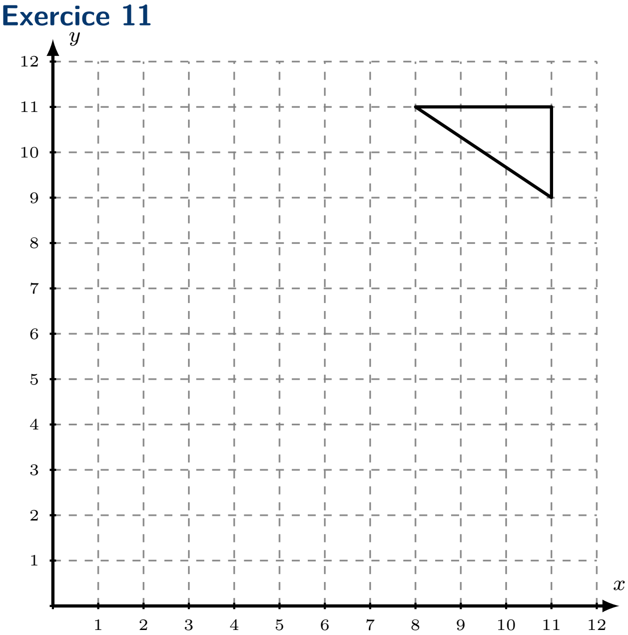
L'image par une homothétie de rapport négatif $k < 0$ est du **côté opposé** par rapport au centre.

La figure agrandie ou réduite est orientée comme si elle a été tournée de 180°.

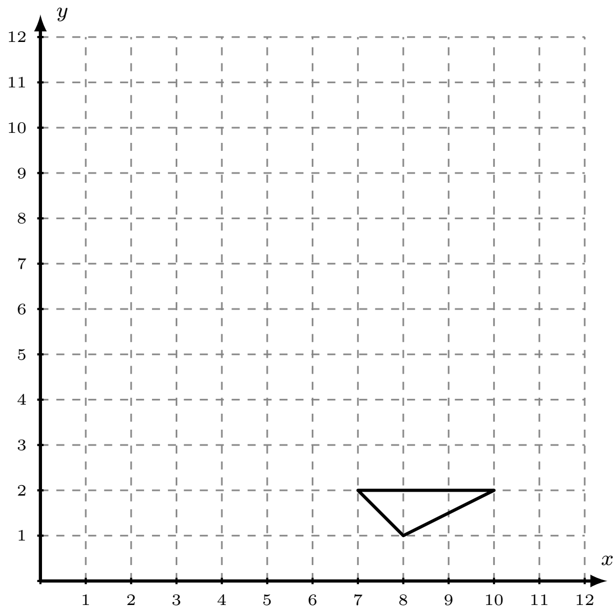
Ci-contre, B est l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport -3.



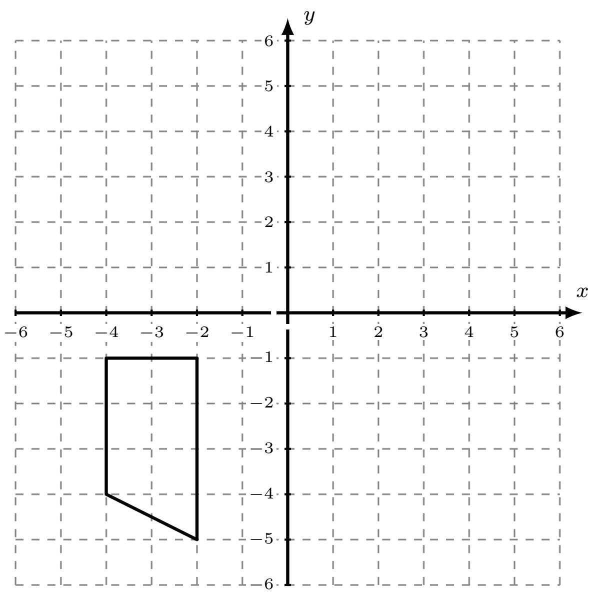
Exercice 11



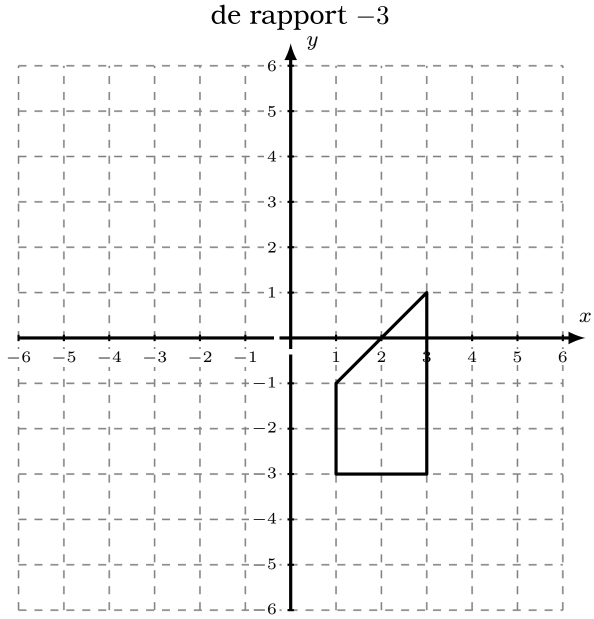
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(8;8)$ et de rapport -2



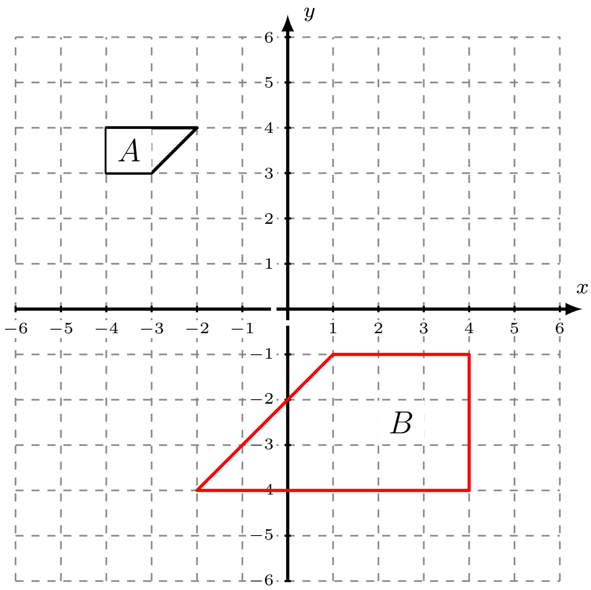
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(8;3)$ et de rapport -3



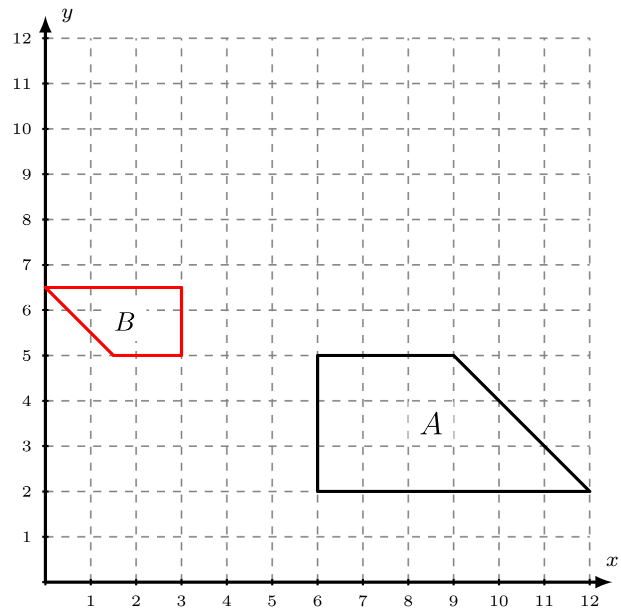
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(1;0)$ et de rapport -1



Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(-1;1)$ et de rapport $-\dfrac{1}{2}$

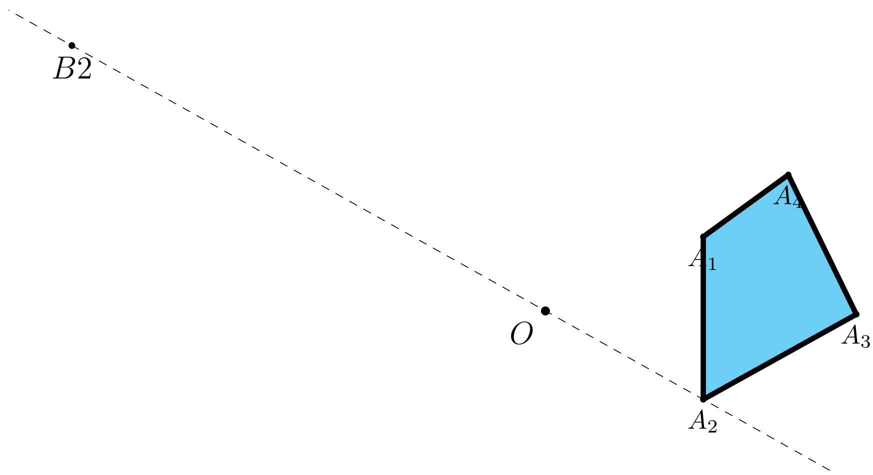


B est l'image de A par l'homothétie de centre $C(\ldots;\ldots)$ et de rapport …



B est l'image de A par l'homothétie de centre $C(\ldots;\ldots)$ et de rapport …

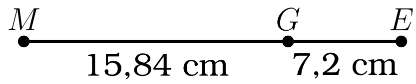
Exercice 12 Le point B_2 est l'image de A_2 par l'homothétie de centre O et de rapport -3. Trace les images de la figure bleue par les homothéties de centre O et de rapport -3 et -1.



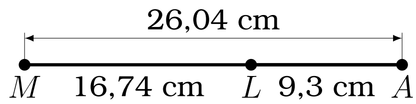
Exercice 13 — concepts. Complétez

1. Une homothétie de rapport -1 est une ……………………………………………
2. Dans une homothétie de rapport 3 les angles sont (A) agrandis (B) conservés (C) diminués

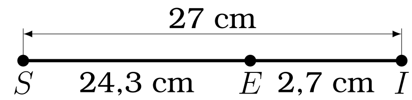
3. Une homothétie de rapport $\frac{-4}{3}$ est (A) un agrandissement (B) une réduction
4. Dans une homothétie de rapport -2, les longueurs sont multipliées par ....
5. Dans une homothétie de rapport -3, les aires sont multipliées par ....
6. Dans une homothétie de rapport $\frac{1}{4}$, les longueurs sont divisées par ...
7. Dans une homothétie de rapport $\frac{1}{4}$, les aires sont divisées par ...
8. Dans une homothétie de rapport $\frac{2}{3}$, les aires sont multipliées par : (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{4}{9}$
9. M est l'image de E par l'homothétie de centre G de rapport k. tel que $GM = 15{,}84$ cm et $GE = 7{,}2$ cm. Sans effectuer de calculs, on peut dire que : (A) $k < -1$ (B) $-1 < k < 0$ (C) $0 < k < 1$ (D) $k > 1$



   Le rapport $k =$ ....
10. A est l'image de L par une homothétie de centre M et rapport k tel que $LA = 9{,}3$ cm et $AM = 26{,}4$ cm. Sans effectuer de calculs, on peut dire que : (A) $k < -1$ (B) $-1 < k < 0$ (C) $0 < k < 1$ (D) $k > 1$



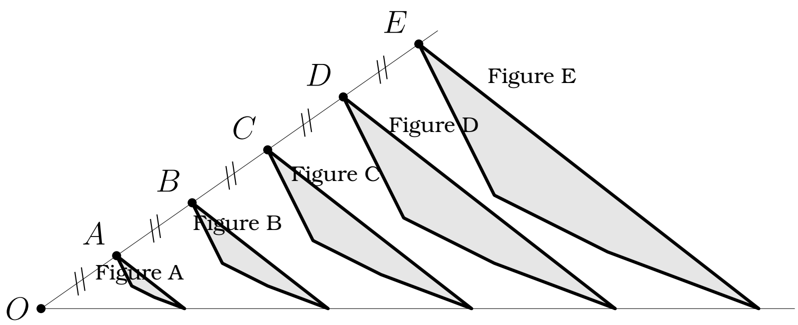
   Le rapport $k =$ ....
11. E est l'image de I par une homothétie de centre S et de rapport k, tel que $SI = 27$ cm et $IE = 2{,}7$ cm. Sans effectuer de calculs, on peut dire que : (A) $k < -1$ (B) $-1 < k < 0$ (C) $0 < k < 1$ (D) $k > 1$



   Le rapport $k =$ ....

Exercice 14 — **Brevet 2018.** (*environ 10 min*) Avec un logiciel de géométrie dynamique, on a construit la figure A. En appliquant à la figure A des homothéties de centre O et de rapports différents, on a ensuite obtenu les autres figures.

1. Quel est le rapport de l'homothétie de centre O qui permet d'obtenir la figure C à partir de A ? ....
2. On applique l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{5}$ à la figure E. Quelle figure obtient-on ? ....



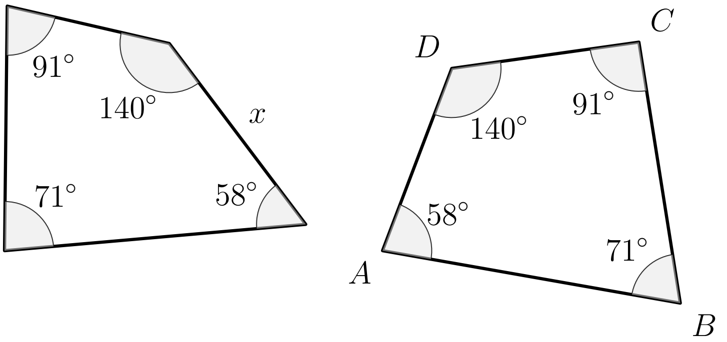
3. Quelle figure a une aire quatre fois plus grande que celle de la figure A ? Justifier ....
   ....

1.4.3 Exercices : figures semblables

■ **Exemple 1.4 — identifier les côtés homologues.**

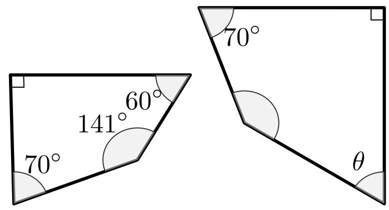
Sachant que ces polygones sont semblables, déterminer le côté homologue à x.

Solution : x est adjacent à l'angle de 140° et l'angle de 58°, donc homologue au côté $[AB]$ de la nouvelle figure



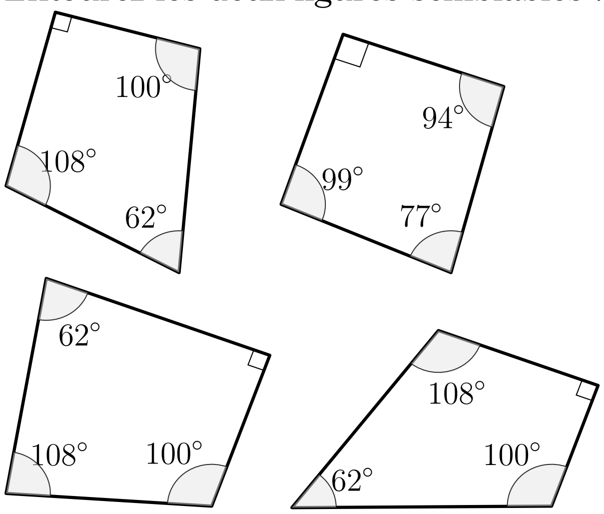
■ **Exemple 1.5 — identifier les angles homologues.** Sachant que les figures sont semblables, déterminer l'angle θ.

Solution : L'angle de 60° est homologue à l'angle θ. $\theta = 60°$.

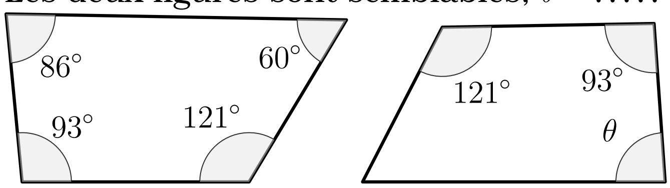


Exercice 15

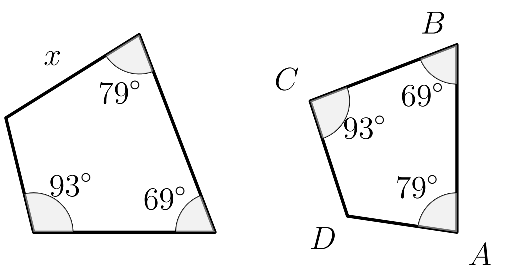
1. Entourez les deux figures semblables :



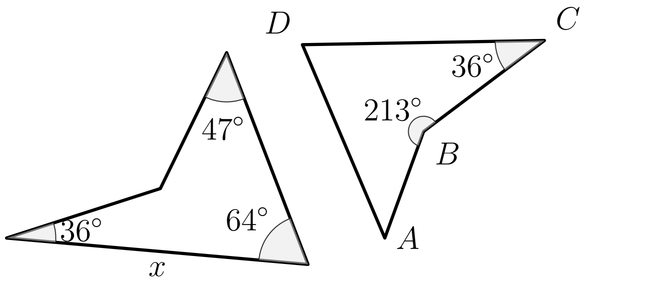
2. Les deux figures sont semblables, $\theta =$.....



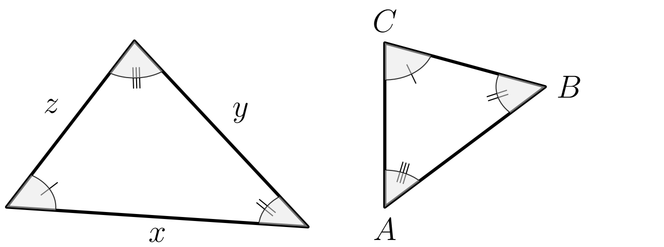
3. Les deux figures sont semblables, le côté homologue à x est ....



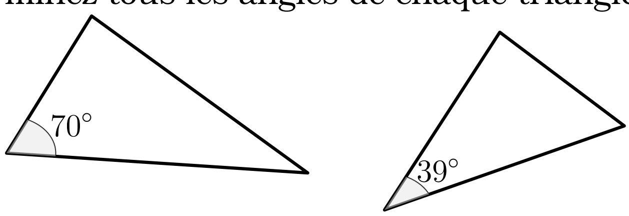
4. Les deux figures sont semblables, le côté homologue à x est ....



5. Les deux figures sont semblables, le côté homologue à x est ...., à y est ...., à z est ....



6. Les deux triangles sont semblables. Déterminez tous les angles de chaque triangle.



7. Représenter un contre-exemple à l'affirmation « deux triangles isocèles sont semblables ».

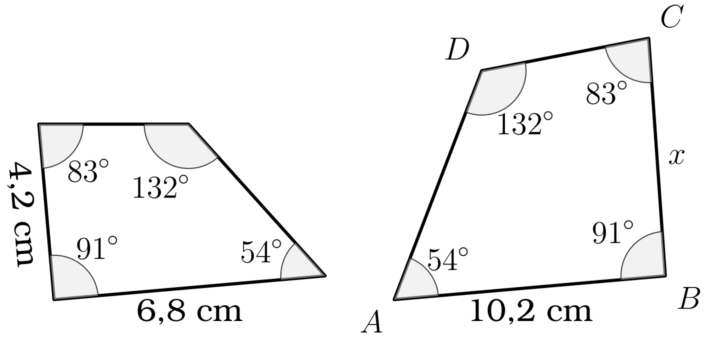
■ **Exemple 1.6 — calculer des longueurs manquantes.** Ces quadrilatères sont semblables. Trouvez x.

Solution : x est adjacent aux angles de 91° et 83°, il est homologue au côté de longueur 4,2 cm.

AB est homologue au côté de longueur 10,2 cm.

On a : rapport d'échelle $= \frac{10.2}{6.8} = \frac{x}{4.2}$

L'échelle est 1.5 et $x = \frac{10.2\times4.2}{6.8} = 1.5 \times 4.2 = 6.3$.



Exercice 16 — communiquer. Complétez la rédaction.

1. Les triangles sont semblables.

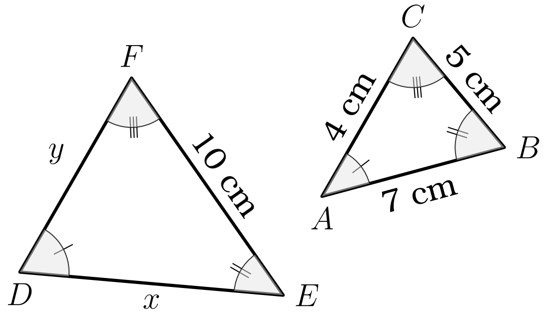
Les longueurs des côtés sont ....

$$\frac{\boxed{}}{AB} = \frac{\boxed{}}{BC} = \frac{\boxed{}}{AC} = k$$

$$\frac{\boxed{}}{7} = \frac{\boxed{}}{5} = \frac{\boxed{}}{4} = \boxed{}$$

$x =$..........

$y =$..........



2. Les triangles sont semblables.

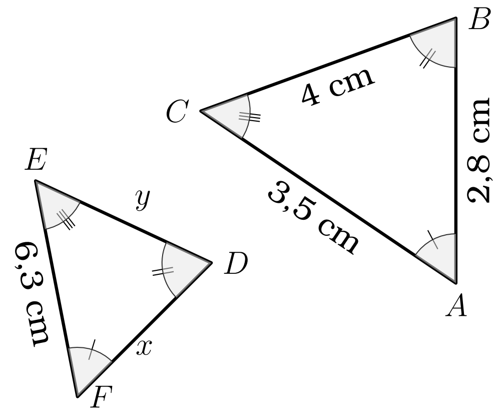
Les longueurs des côtés sont ....

$$\frac{\boxed{}}{AB} = \frac{\boxed{}}{BC} = \frac{\boxed{}}{AC} = k$$

$$\frac{\boxed{}}{2.8} = \frac{\boxed{}}{4} = \frac{\boxed{}}{3.5} = \boxed{}$$

$x =$..........

$y =$..........



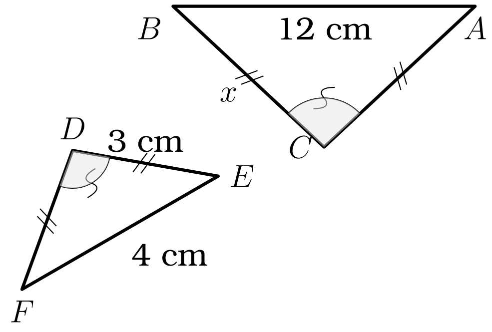
3. Les triangles sont semblables.

Les longueurs des côtés sont ....

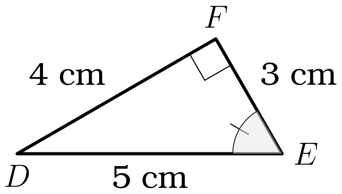
$$\frac{\boxed{}}{AB} = \frac{\boxed{}}{BC} = \frac{\boxed{}}{AC} = k$$

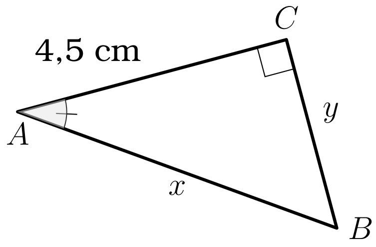
$$\frac{\boxed{}}{12} = \frac{\boxed{}}{x} = \frac{\boxed{}}{x} = \boxed{}$$

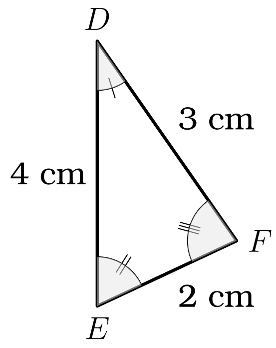
$x =$..........

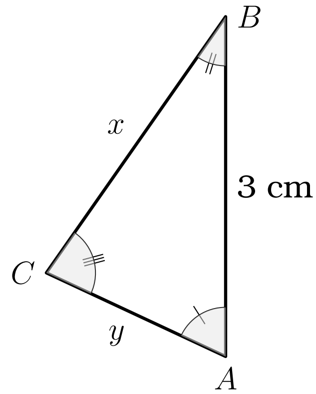


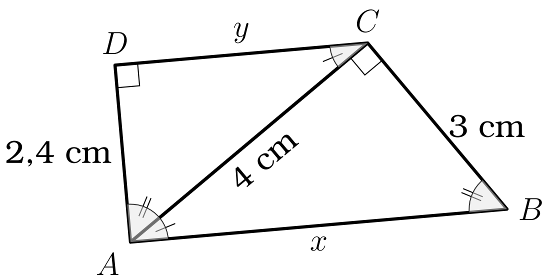
Exercice 17 — entrainement. Trouvez les longueurs manquantes. Détaillez les étapes.

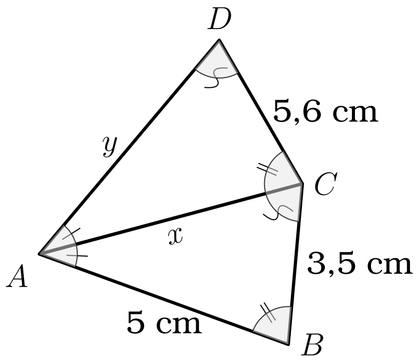












■ **Exemple 1.7** Une carte est à l'échelle $\frac{1}{5000} = 1\colon 5000$. Cela signifie $\frac{\text{distance sur la carte}}{\text{distance réelle}} = \frac{1}{5000}$.

⚠ Il faut exprimer les distances dans la même unité ⚠

Exercice 18 — echelles et cartes : calculer avec des rapports de longueurs. Complétez

1. On représente le plan d'une chambre de largeur 380 cm et longueur 450 cm à l'échelle $\frac{1}{50}$.

   On a : $\frac{\boxed{}}{\text{largeur réelle}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{1}{50}$ et $\frac{\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}}{\text{longueur réelle}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{1}{50}$.

   La largeur de chambre sur le plan est .... = ... cm.

   Sa longueur est ....

2. Sur carte à l'échelle $\frac{1}{50000}$ on représente une distance réelle de 1,3 km.

   On a : $\frac{\boxed{}}{\text{largeur réelle}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{1}{5000}$

   La distance sur la carte est .... = ... cm

3. Sur carte à l'échelle $\frac{1}{5000000}$ on représente une distance réelle de 6,4 cm.

   La distance réelle est ....=... km

4. 3 cm sur une carte représente 15 km. La carte est à l'echelle $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{1}{\boxed{}}$.

5. 12 m sont représentés par 15 cm sur un plan. L'echelle est $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{1}{\boxed{}}$.

6. cahier indigo exercices 11 et 12 page 45.

Postulat 1.2 — calculer avec des rapports de longueurs et d'aires.

Pour des figures semblables de rapport d'échelle k :

- le rapport des longueurs (de côtés, périmètre) est k.
- le rapport des aires est k^2.
- le rapport des volumes est k^3

Exercice 19 — concepts. Compléter sachant que les figures A et B sont semblables.

1. Les carrés A et B sont de côtés 5 cm et 3 cm.

   B est une (A) agrandissement (B) réduction de A de rapport ....
2. Les triangles équilatéraux A et B sont de côtés 12 cm et 24 cm.

   B est une (A) agrandissement (B) réduction de A de rapport ....

   Il faut multiplier l'aire de A par .... pour obtenir l'aire de B.
3. A est d'aire 112,7 cm^2. B est d'aire 11 270 cm^2. Le rapport des aires est $k^2 =$ ....

   B est (A) agrandissement (B) réduction de la figure A de rapport ....
4. A est d'aire 37 454,4 cm^2. B est d'aire 462,4 cm^2. Le rapport des aires est $k^2 =$ ....

   B est (A) agrandissement (B) réduction de la figure A de rapport ....
5. A est d'aire 23 346 cm^2. B est d'aire 648,5 cm^2 Le rapport des aires est $k^2 =$ ....

   B est (A) agrandissement (B) réduction de la figure A de rapport ....
6. L'aire de B est le double de celle de A. Le rapport d'agrandissement est ....

Exercice 20 Déterminer le périmètre et l'aire de la figure B dans chaque cas :

1. B est une réduction de rapport $0{,}6$ de la figure A de périmètre 8 cm et d'aire 4,7 cm^2.
2. B est un agrandissement de rapport 3 de la figure A de périmètre 15 cm et d'aire 9,3 cm^2.

Exercice 21 Déterminer l'aire de la figure A dans chaque cas :

1. Le triangle B est un agrandissement de A de rapport $4{,}7$. L'aire de B est 79,524 cm^2.
2. Le disque B est une réduction de A de rapport $0{,}3$. L'aire de B est 0,774 cm^2.

Exercice 22 Le rectangle B est d'aire 43,32 cm^2 est semblable au rectangle A de côtés 6 cm et 2 cm. Déterminer le périmètre du rectangle B.

Exercice 23 — vu au Brevet. Mon rectangle est semblable à un rectangle de côtés 3cm et 2cm. Sont aire est 37,5 cm^2. Quel est son périmètre ?

1.4.4 Exercices : Scratch

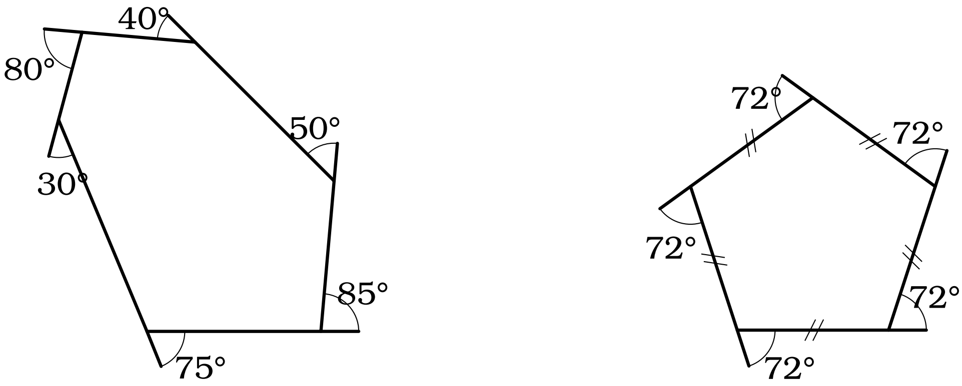
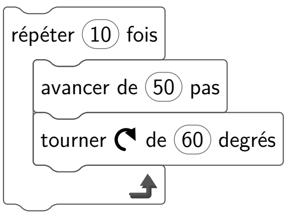


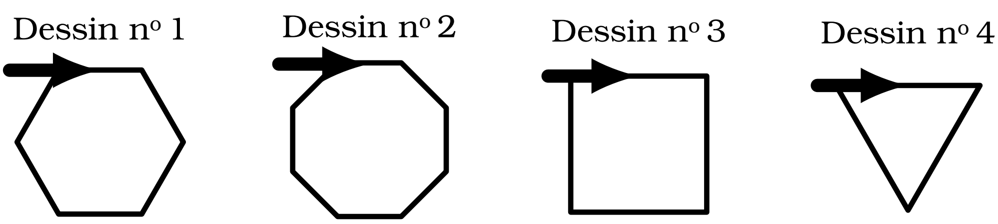
Figure 1.2 – Une figure est convexe lorsque les angles intérieurs sont inférieurs à 180°. Une figure est régulière si les angles intérieurs (ou extérieurs) sont égaux et les longueurs des côtés sont égales.

Postulat 1.3 La somme des angles extérieurs est égale à 360°.

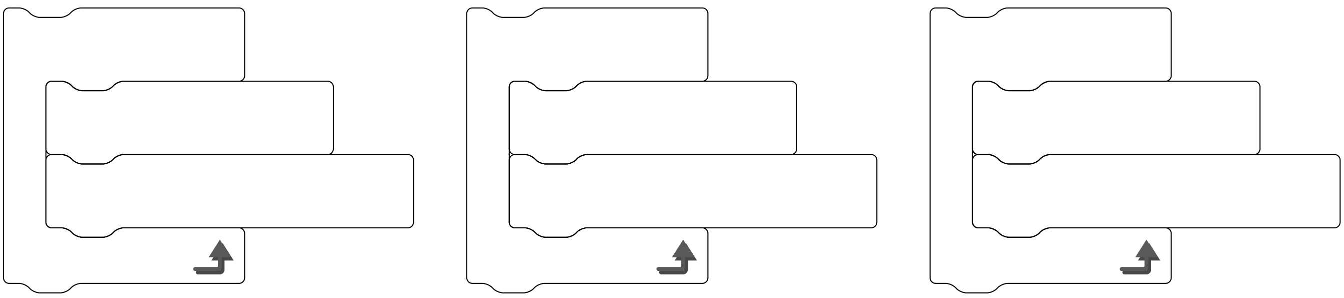
Exercice 24 — `Scratch`. Dans les figures de cet exercice la flèche indique la position et l'orientation du lutin au départ.

1. Indiquer le numéro du dessin correspondant au script ci-dessous.

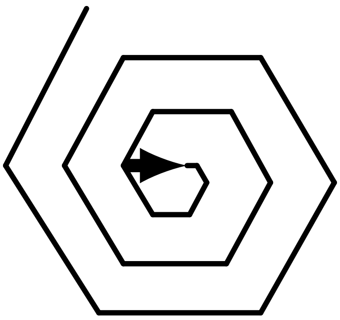


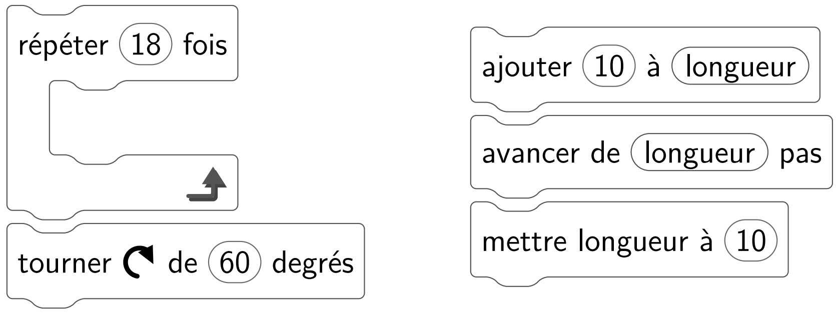


2. Compléter les scripts ci-dessous pour créer les autres dessins de la question précédente.



3. Pour ce script on a créé la variable longueur. En ordonnant les instructions proposées, donner le script permettant de réaliser la figure ci-dessous.





Exercice 25 — **Brevet Juin 2018 Métropole.** (*15 minutes*)

Les longueurs sont exprimées en pixels. On rappelle que l'instruction s'orienter à (90) degrés signifie que l'on s'oriente vers la droite.

On donne le programme suivant :

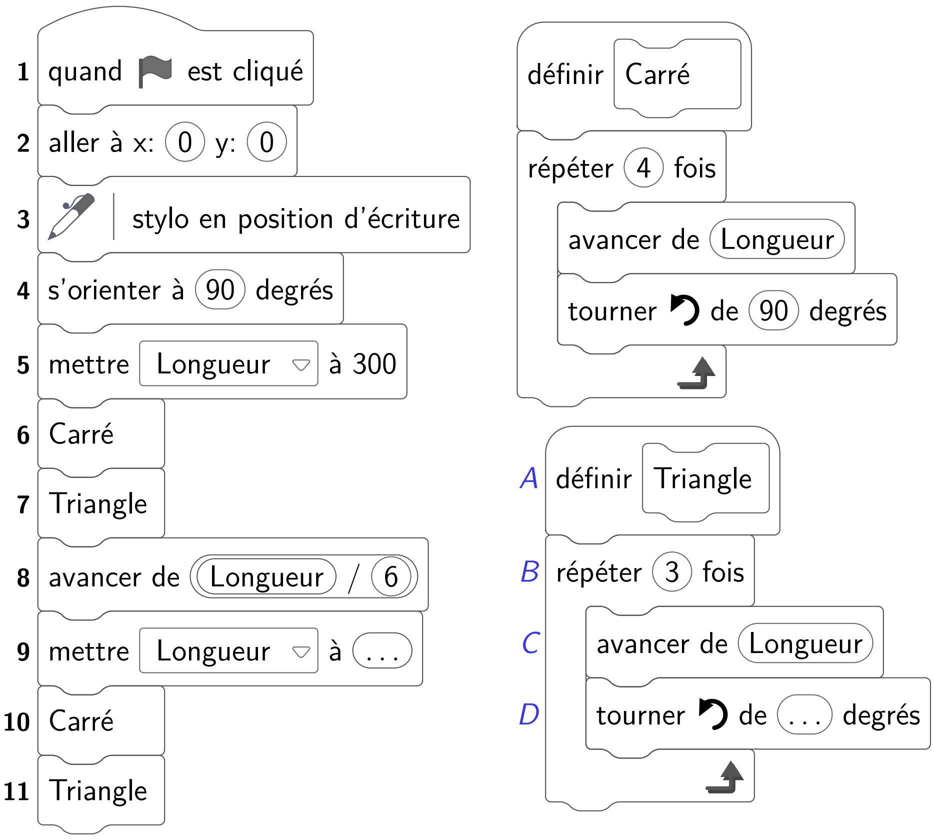
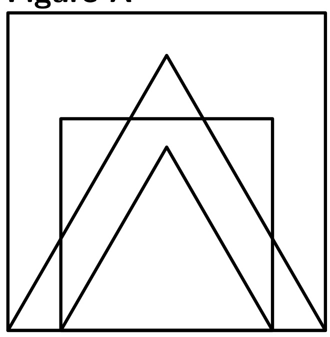


Figure A



1. Compléter la ligne D du script Triangle afin de tracer un triangle équilatéral.
2. On prend comme échelle 1 cm pour 50 pixels.
   a) Représenter sur votre copie la figure obtenue si le programme est exécuté jusqu'à la ligne 7 comprise.
   b) Quelles sont les coordonnées du stylo après l'exécution de la ligne 8 ?
3. On exécute le programme complet et on obtient la figure A qui possède un axe de symétrie vertical.

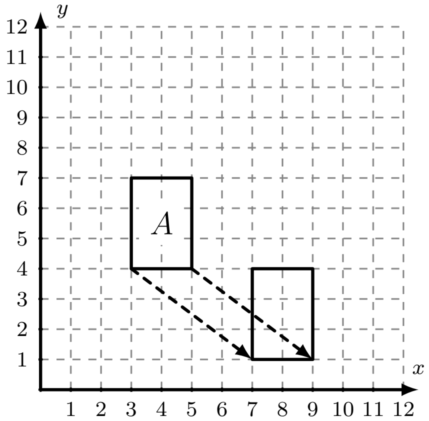
   Compléter la ligne 9 du programme pour obtenir cette figure.

4. a) Quelle est la transformation géométrique qui permet d'obtenir le petit carré à partir du grand carré ? Préciser le rapport de réduction.

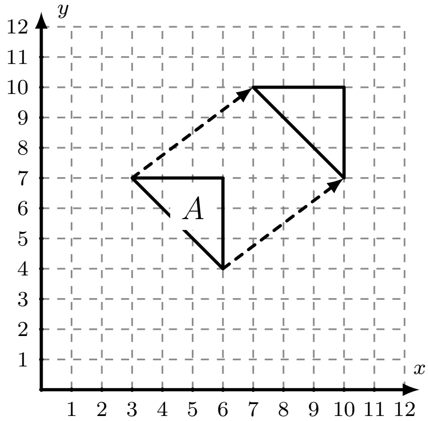
   b) Quel est le rapport des aires entre les deux carrés dessinés ?

1.5 Exercices : solutions et éléments de réponse

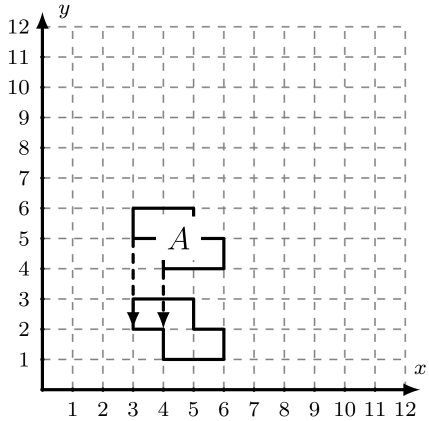
solution de l'exercice 1.



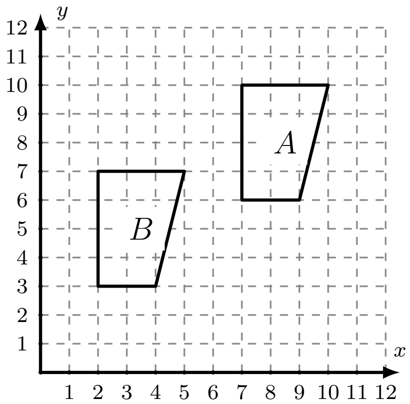
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.



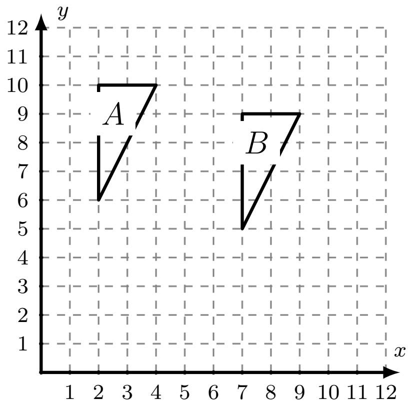
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.



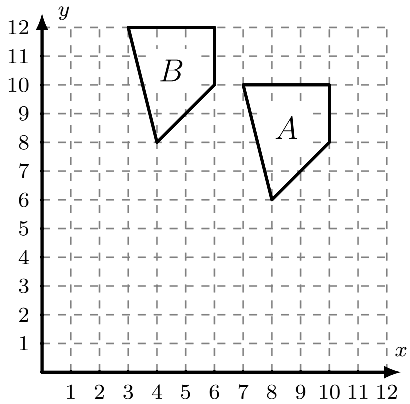
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$.



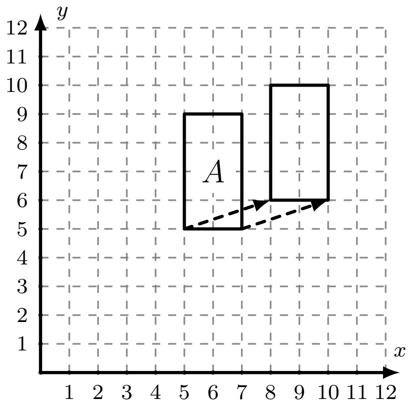
B est l'image de A par la translation $\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$.



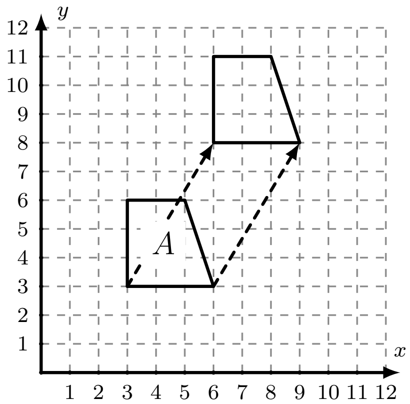
B est l'image de A par la translation $\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.



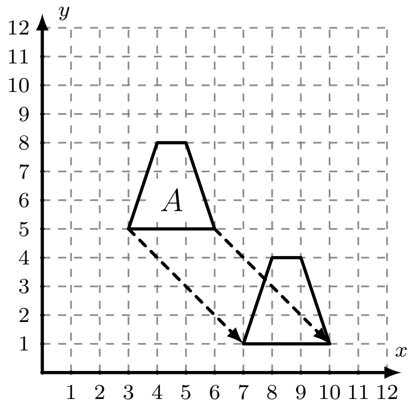
B est l'image de A par la translation $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.



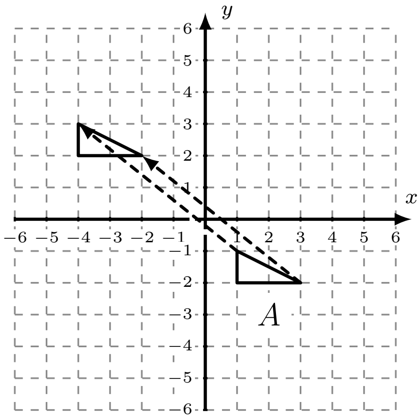
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.



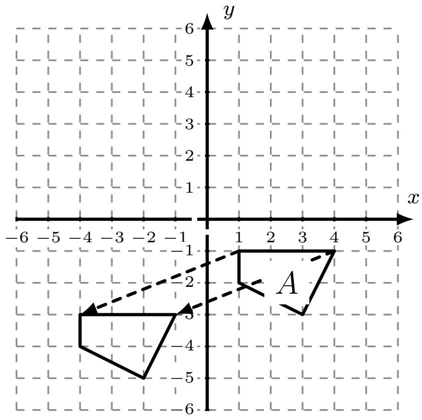
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.



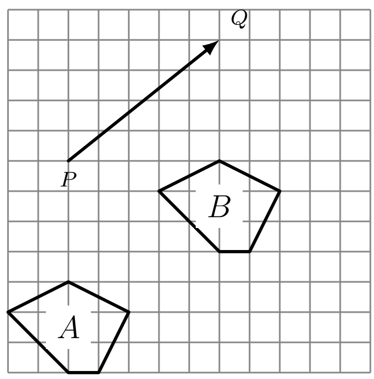
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$.



Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.



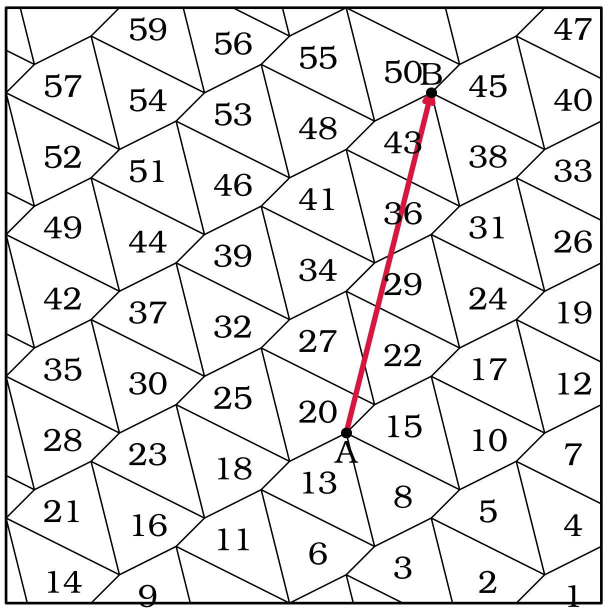
Tracer l'image par la translation $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Tracer l'image par la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$

■

solution de l' exercice 2.



1. L'image du quadrilatère 25 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est 55
2. L'image du quadrilatère 44 par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ est 14
3. L'image du quadrilatère 6 par la translation qui transforme par la translation qui transforme le quadrilatère 18 en 24 est 12
4. L'image du quadrilatère 23 par la translation qui transforme par la translation qui transforme le quadrilatère 8 en 24 est 39
5. L'image du quadrilatère 42 par la translation qui transforme par la translation qui transforme le quadrilatère 51 en 17 est 08

■

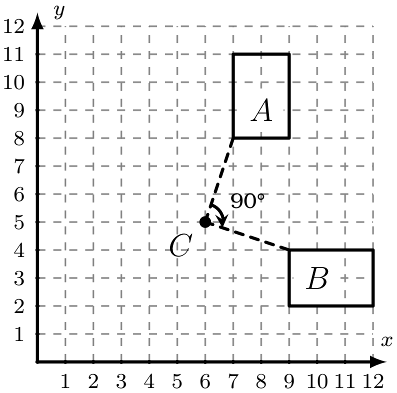
solution de l' exercice 3.

1. Dans une translation, chaque point d'une figure se déplace d'une même distance dans la même direction, et la figure image a la même forme et la même aire.
2. ABC est un triangle rectangle en C et d'hypoténuse de longueur 5 cm. A', B' et C' sont les images par une translation des points respectifs A, B et C. Alors $\widehat{A'C'B'} = 90°$ et $A'B' = 5$.
3. $MN = 6$ cm et P est le milieu du segment $[MN]$. Le segment $[PN]$ est l'image du segment $[MP]$ par la translation de 3 cm dans la directon (MP).

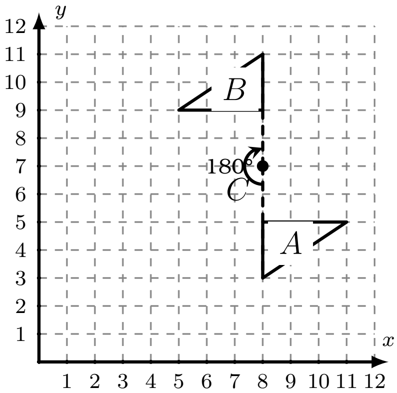
4. Si B est l'image de A par la translation qui transforme C en D, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles. De plus $AC = BD$.

■

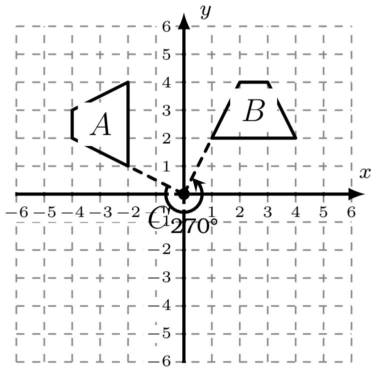
solution de l' exercice 4.



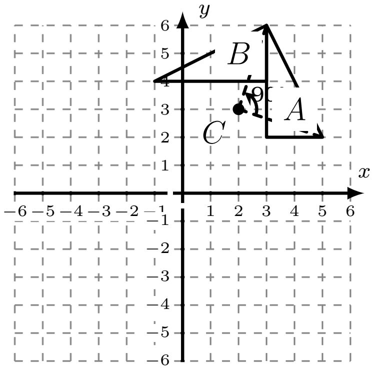
Tracer l'image par la rotation de centre C d' angle 90° sens horaire.



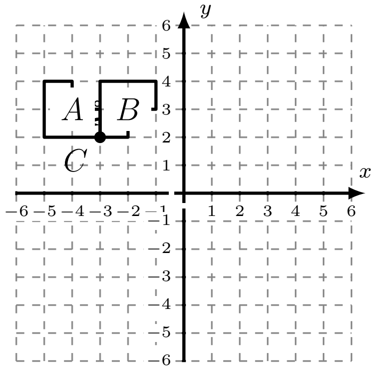
Tracer l'image par la rotation de centre C d' angle 180°.



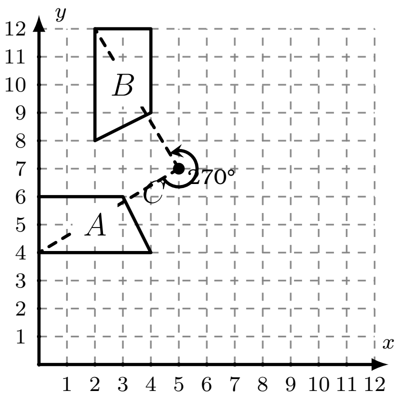
Tracer l'image par la rotation autour de l' origine d' angle 270° anti-horaire.



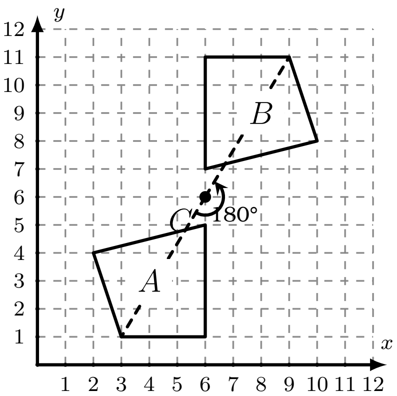
Tracer l'image par la rotation de centre $C(2;3)$ d' angle 90° anti-horaire.



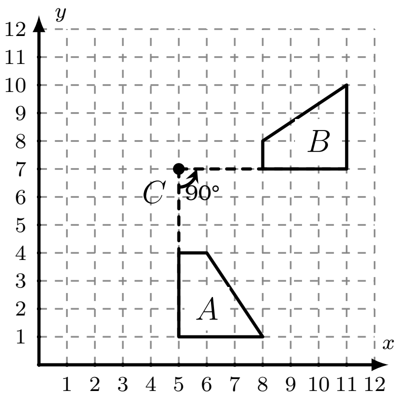
Tracer l'image par la rotation de centre $C(-3;2)$ d' angle 270° anti-horaire.



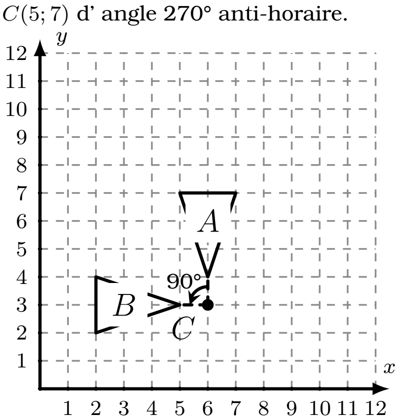
Tracer l'image par la rotation de centre $C(5;7)$ d' angle 270° anti-horaire.



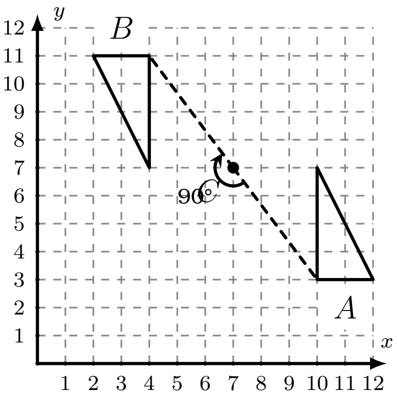
B est l'image de A par la rotation de centre $C(6;6)$ d' angle 180°



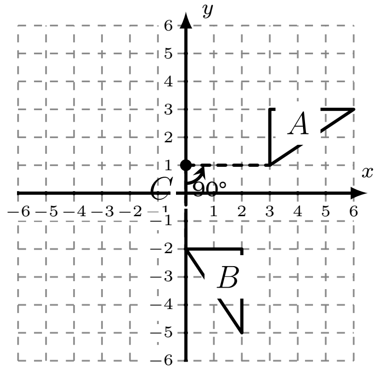
B est l'image de A par la rotation de centre $C(5;7)$ d' angle 90° sens anti-horaire.



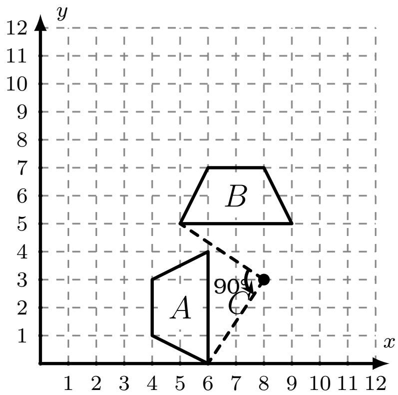
B est l'image de A par la rotation de centre $C(6;3)$ d' angle 90° sens horaire.



Tracer l'image par la rotation de centre $C(7,7)$ d' angle 180°.



B est l'image de A par la rotation de centre $C(0;1)$ d' angle 90° anti-horaire, 270° horaire

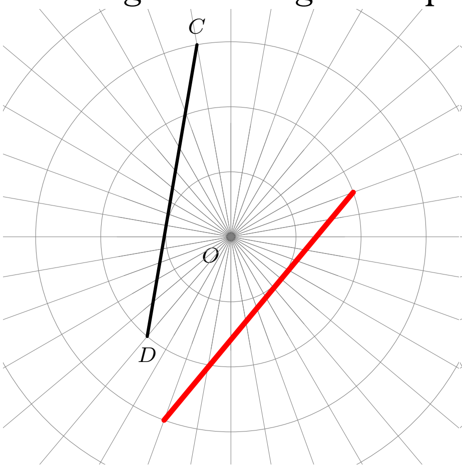


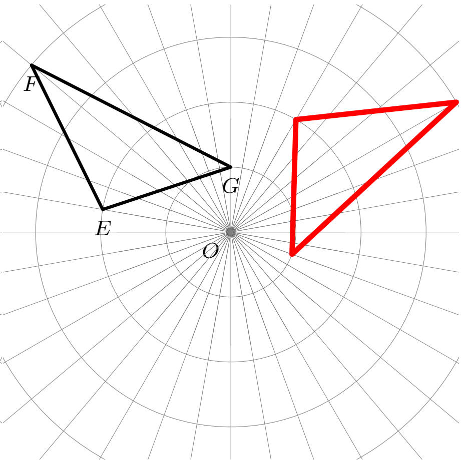
B est l'image de A par la rotation de centre $C(8;3)$ 90° horaire , 270° anti-horaire

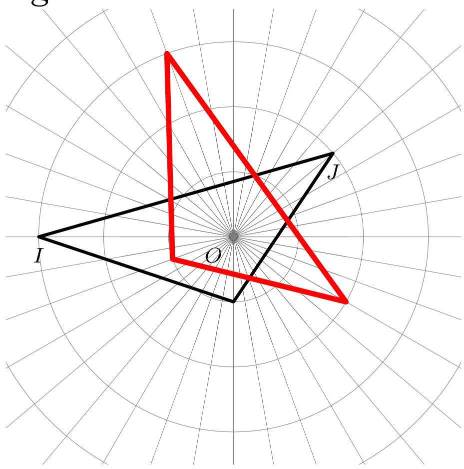
■

solution de l' exercice 5. Réalise les constructions suivantes en t'aidant du quadrillage

1. l'image du segment $[CD]$ par la rotation de centre O et d'angle 150° dans le sens direct.
2. l'image du triangle EFG par la rotation de centre O et d'angle 110° dans le sens indirect.
3. l'image du triangle IJK par la rotation de centre O et d'angle 70° dans le sens horaire.







■

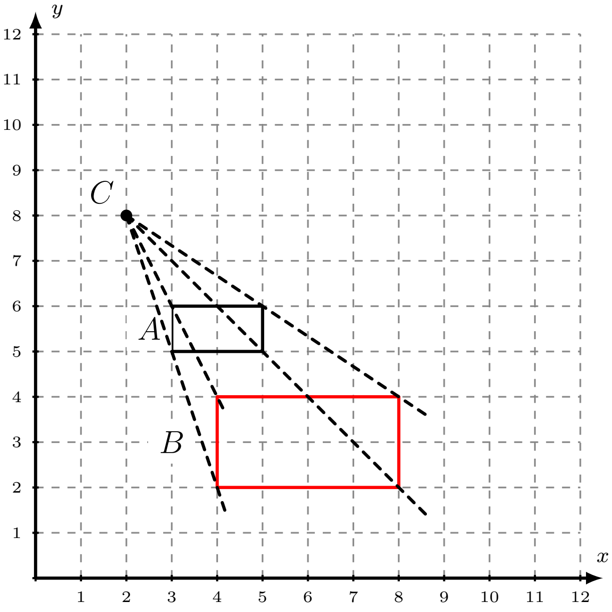
solution de l' exercice 6. Complétez

1. L'image de 54 par la rotation de centre A et d'angle 90° dans le sens direct est 112
2. L'image de 29 par la rotation de centre B et d'angle 90° dans le sens anti-horaire est 86
3. L'image de 48 par la rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens indirect est 107
4. L'image de 110 par la rotation de centre D et d'angle 90° dans le sens horaire est 31
5. L'image de 69 par la rotation de centre E et d'angle 90° dans le sens anti-horaire est 68

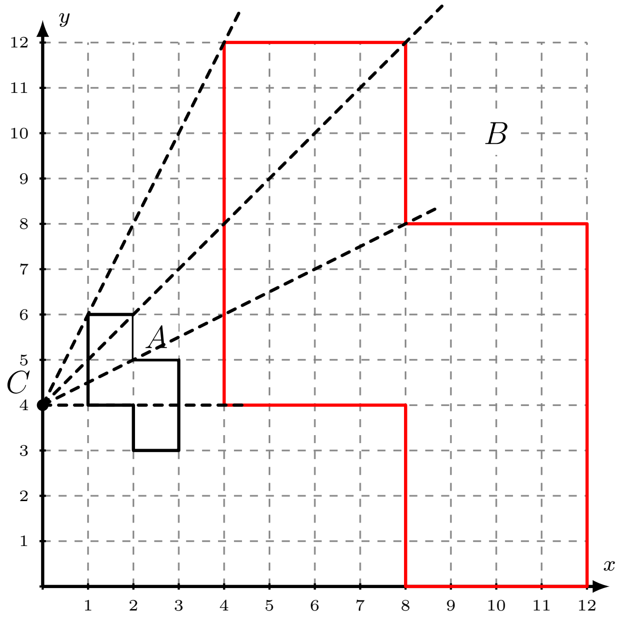
114	115	116	117	118	119	120	121	122	123
104	105	106	107	108	109	110	111	112	113
94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

■

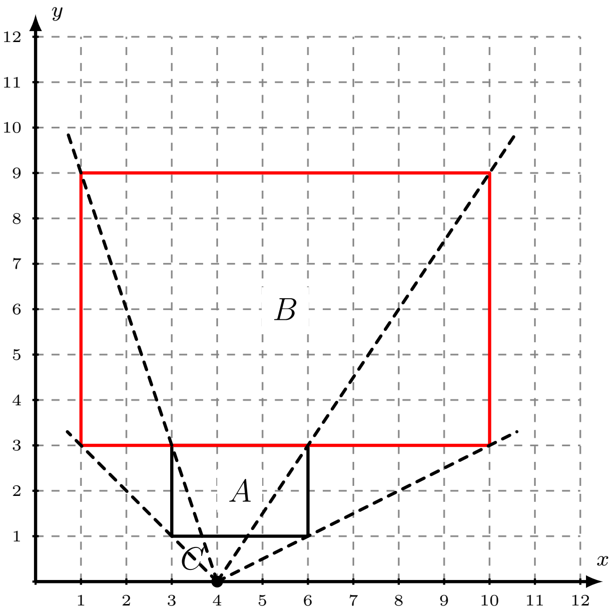
solution de l'exercice 7.



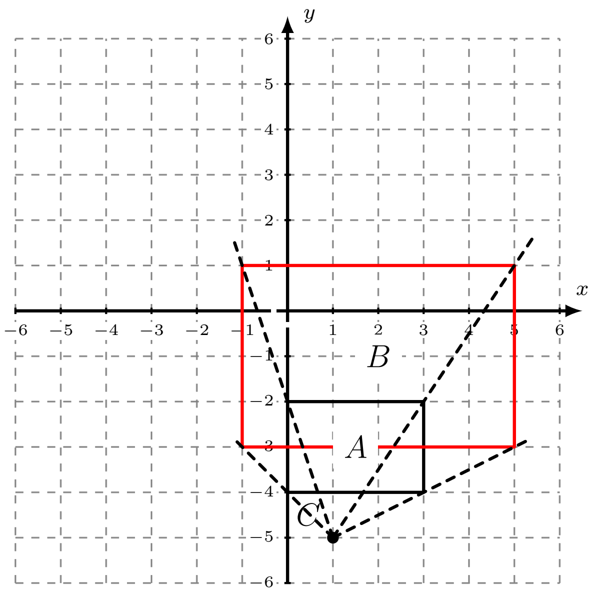
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(2;8)$ et de rapport 2



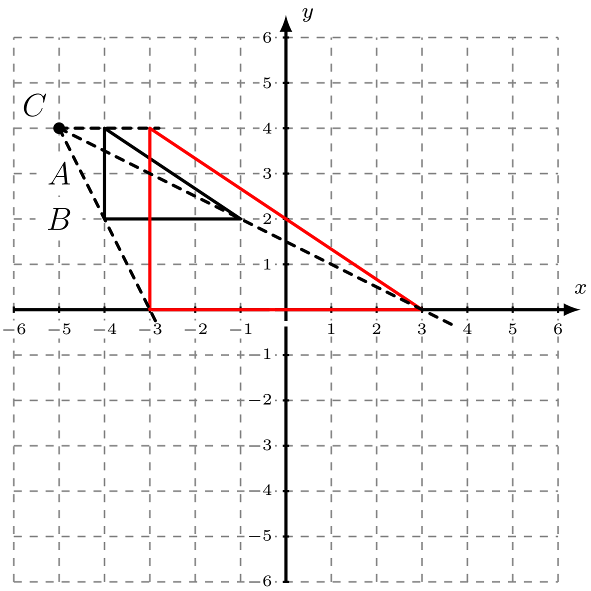
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(0;4)$ et de rapport 4



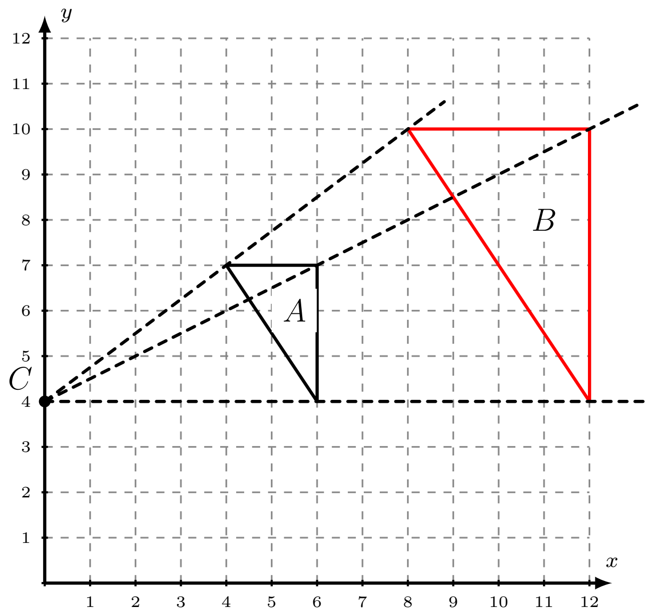
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(4;0)$ et de rapport 3



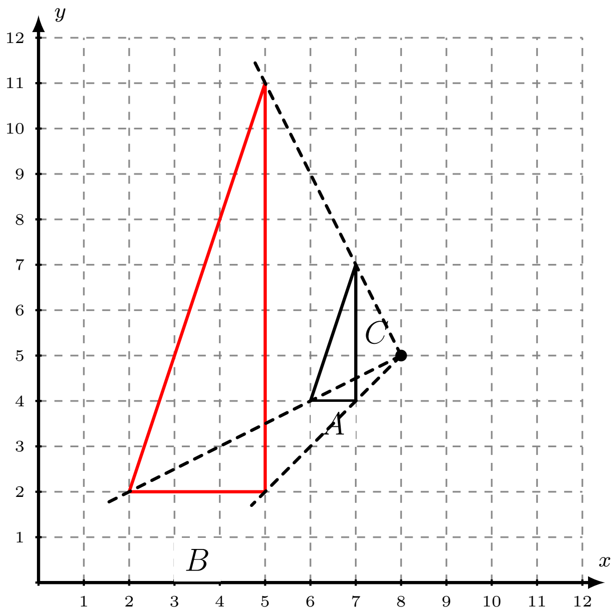
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(1;-5)$ et de rapport 2



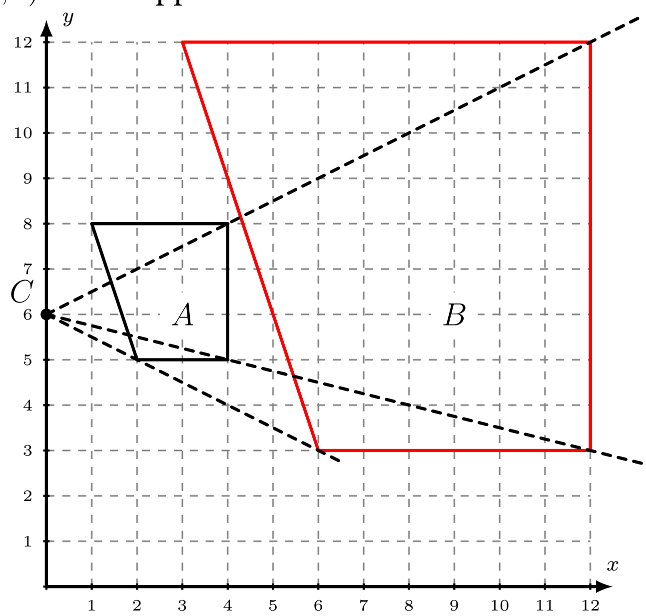
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(-5;4)$ et de rapport 2



B est l'image de A par l'homothétie de centre $C(0;4)$ et de rapport 2



B est l'image de A par l'homothétie de centre $C(8;5)$ et de rapport 3



B est l'image de A par l'homothétie de centre $C(0;6)$ et de rapport 3

■

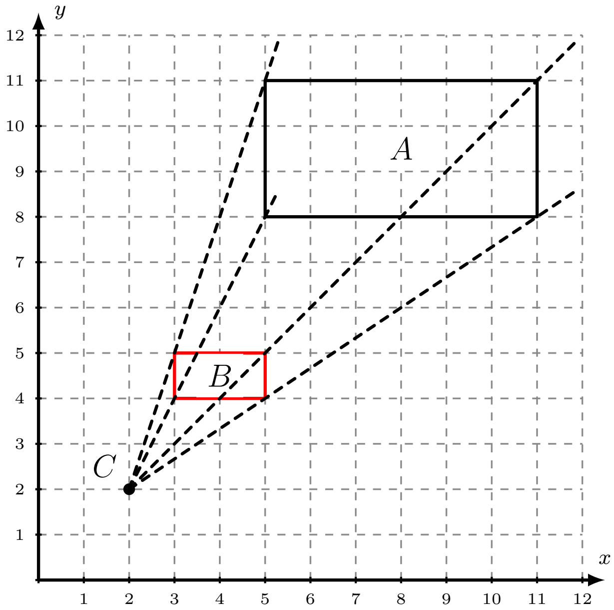
solution de l'exercice8.

1. ABC est un triangle rectangle en C et d'hypoténuse de longueur 5 cm. A', B' et C' sont les images par une homothétie de rapport 3. Alors $\widehat{A'C'B'} = \widehat{A'C'B'}$ et $A'B' = 15$.
2. Dans la première figure de l'exercice 7, le rectangle a été agrandi par un rapport 2. Son aire a été multipliée par 4.

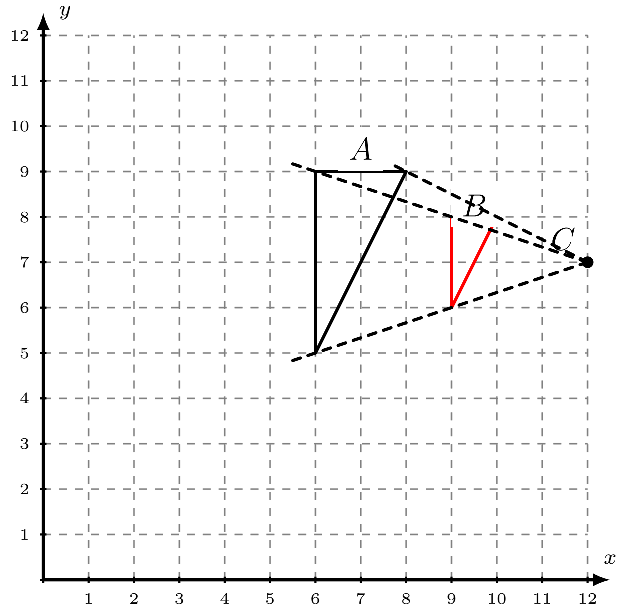
3. Dans la 2ème figure de l'exercice 7, le rectangle a été agrandi par un rapport 3. Son aire a été multipliée par 9.
4. Dans une homothétie, un point, son image et le centre sont alignés

■

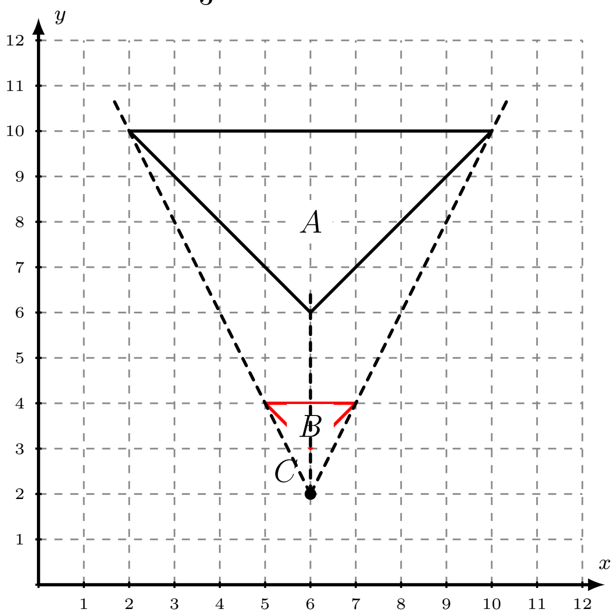
solution de 9.



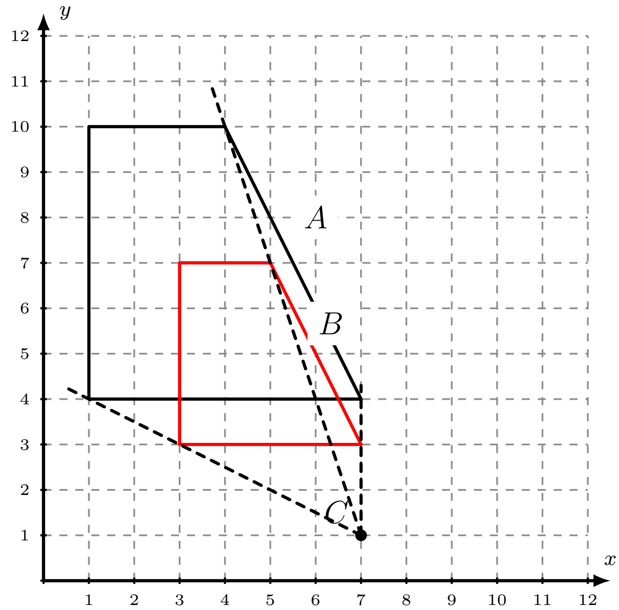
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(2;2)$ et de rapport $\frac{1}{3}$.



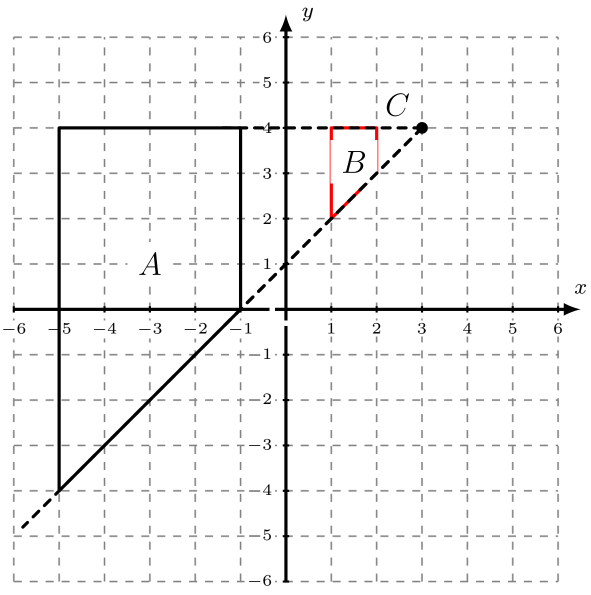
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(12;7)$ et de rapport $\frac{1}{2}$



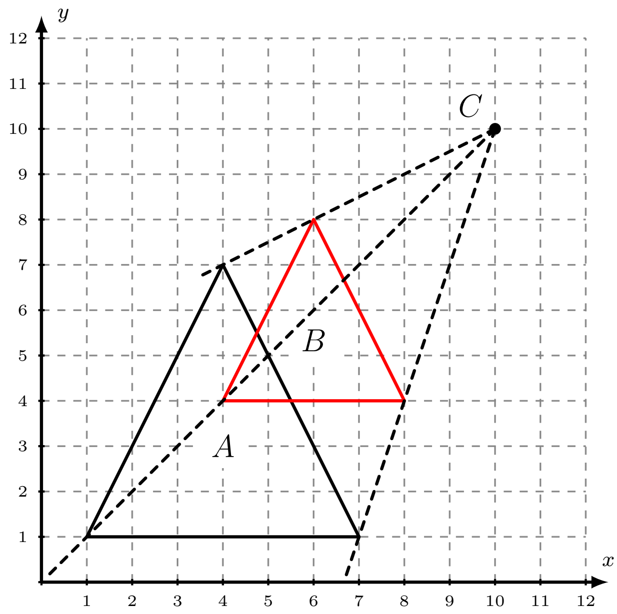
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(6;2)$ et de rapport $\frac{1}{4}$



Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(7;1)$ et de rapport $\frac{2}{3}$



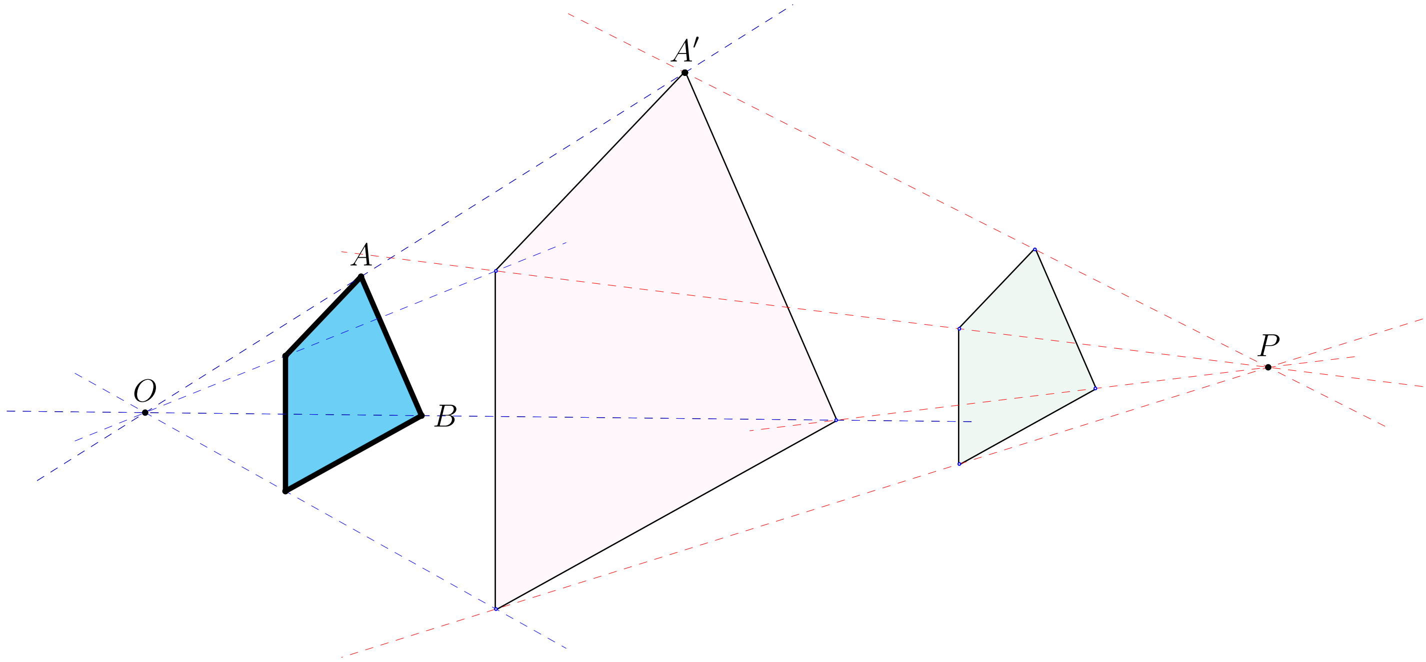
B est l'image de A par l'homothétie de centre $C(3; 4)$ et de rapport $\frac{1}{4}$



B est l'image de A par l'homothétie de centre $C(10; 10)$ et de rapport $\frac{2}{3}$

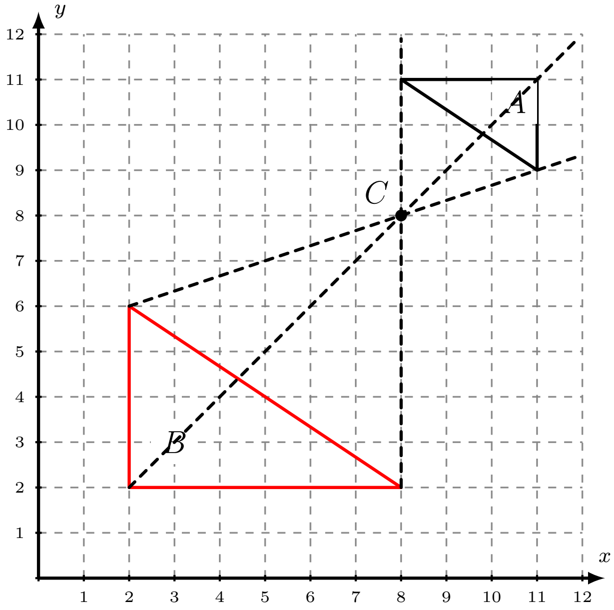
■

solution de l'exercice10.

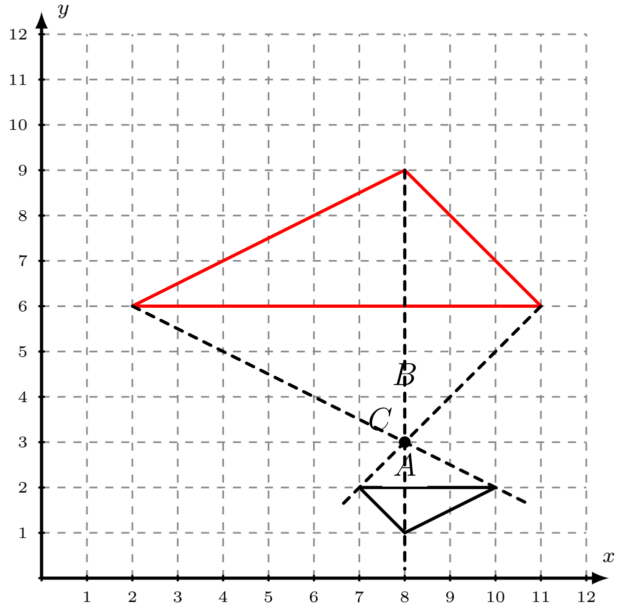


■

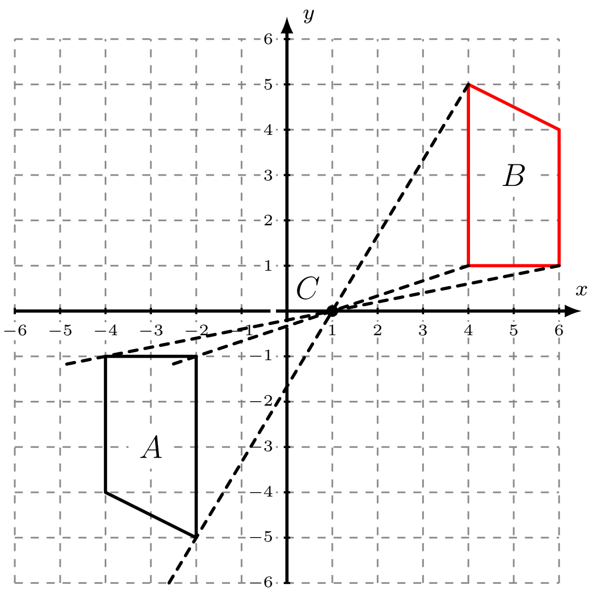
solution de 11.



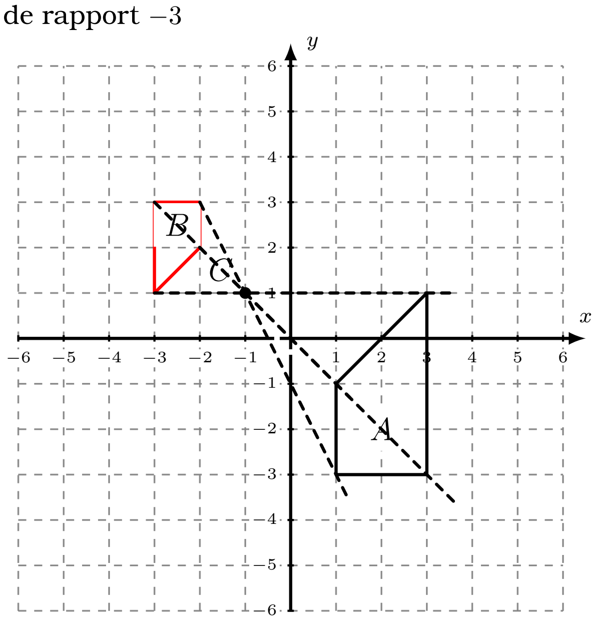
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(8;8)$ et de rapport -2



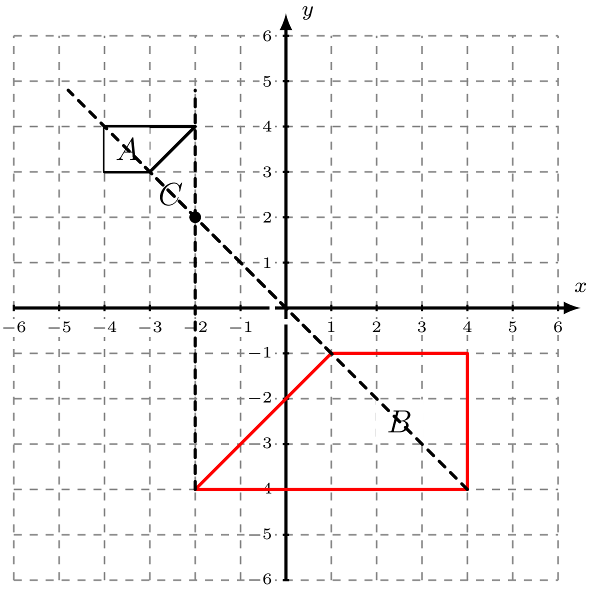
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(8;3)$ et de rapport -3



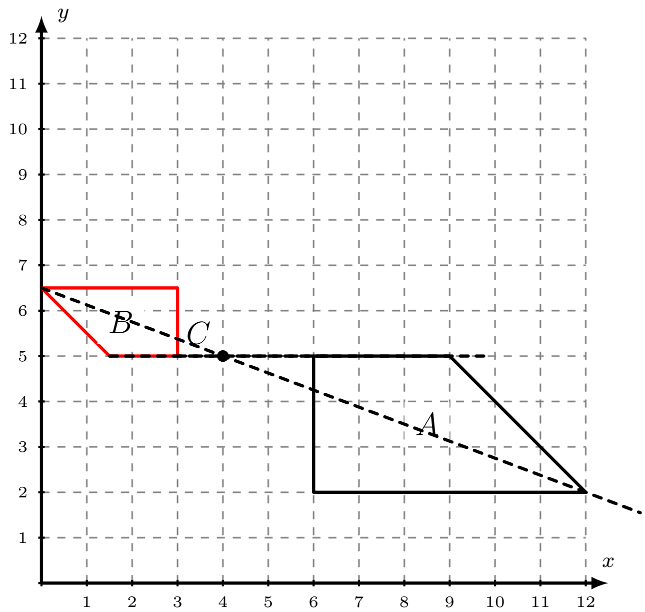
Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(1;0)$ et de rapport -1



Tracez l'image par l'homothétie de centre $C(-1;1)$ et de rapport $-\dfrac{1}{2}$

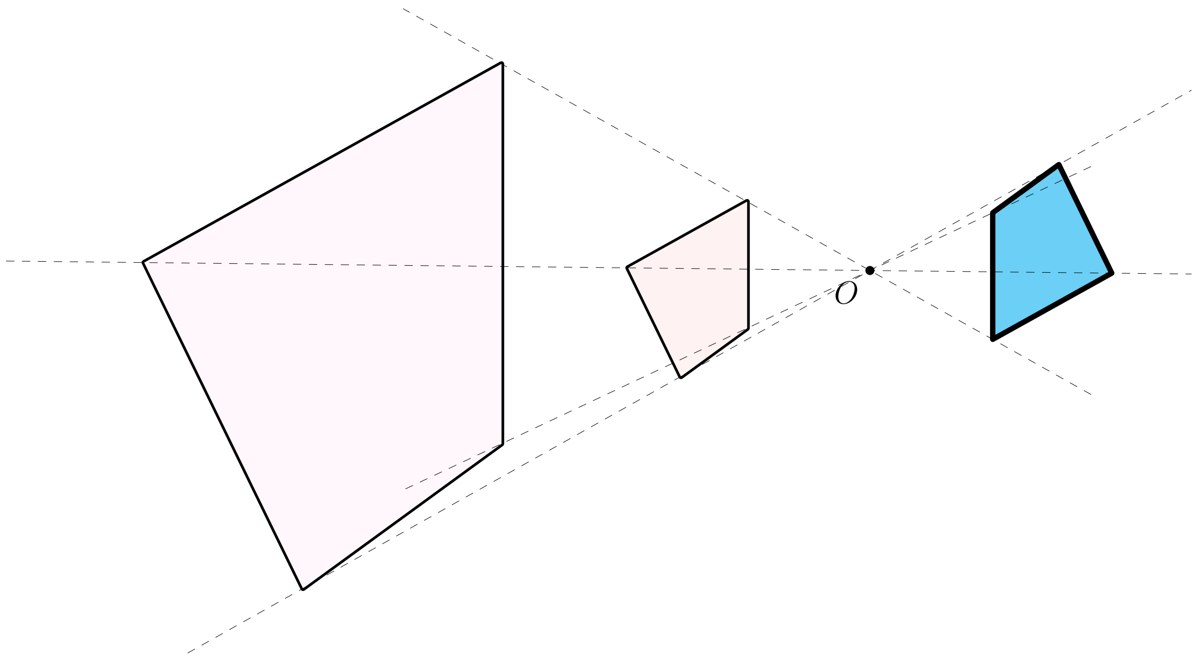


B est l'image de A par l'homothétie de centre $C(-2; 2)$ et de rapport $\frac{-1}{3}$



B est l'image de A par l'homothétie de centre $C(4; 5)$ et de rapport -0.5 ■

solution de l'exercice12.

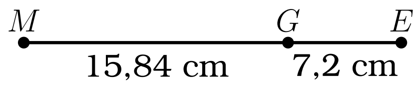


■

solution de l'exercice13. Complétez

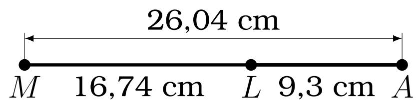
1. Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale
2. Dans une homothétie de rapport 3 les angles sont (B) conservés
3. Une homothétie de rapport $\frac{-4}{3}$ est (A) un agrandissement (B) une réduction
4. Dans une homothétie de rapport -2, les longueurs sont multipliées par 2
5. Dans une homothétie de rapport -3, les aires sont multipliées par $3^2 = 9$
6. Dans une homothétie de rapport $\frac{1}{4}$, les longueurs sont divisées par 4

7. Dans une homothétie de rapport $\frac{1}{4}$, les aires sont divisées par $4^2 = 16$
8. Dans une homothétie de rapport $\frac{2}{3}$, les aires sont multipliées par : $\frac{4}{9}$
9. M est l'image de E par l'homothétie de centre G de rapport k. tel que $GM = 15{,}84$ cm et $GE = 7{,}2$ cm. Sans effectuer de calculs, on peut dire que $k < -1$



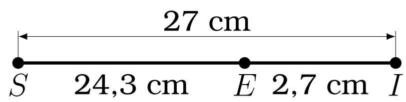
   Le rapport $k =$ ....

10. A est l'image de L par une homothétie de centre M et rapport k tel que $LA = 9{,}3$ cm et $AM = 26{,}4$ cm. Sans effectuer de calculs, on peut dire que :$k > 1$



   Le rapport $k = \dfrac{26.04}{16.74} = \dfrac{14}{9}$

11. E est l'image de I par une homothétie de centre S et de rapport k, tel que $SI = 27$ cm et $IE = 2{,}7$ cm. Sans effectuer de calculs, on peut dire que $0 < k < 1$



   Le rapport $k = \frac{24.3}{27} = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$

■

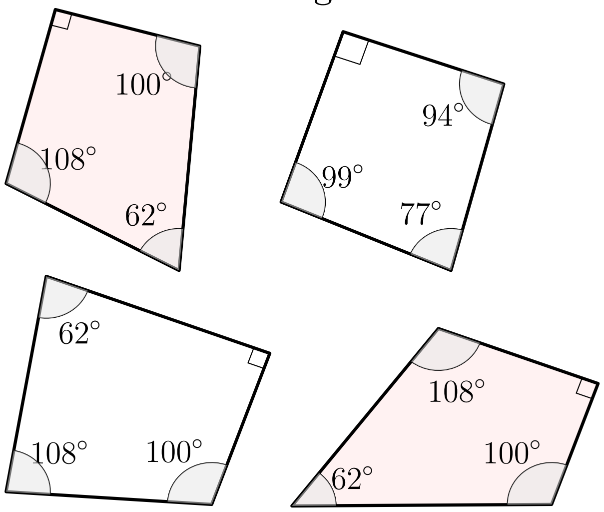
solution de l'exercice 14.

1. Quel est le rapport de l'homothétie de centre O qui permet d'obtenir la figure C à partir de A ? Le rapport est 3
2. On applique l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{3}{5}$ à la figure E. Quelle figure obtient-on ?
   La figure C
3. Quelle figure a une aire quatre fois plus grande que celle de la figure A ?
   Pour avoir une aire 4 fois plus grande, le rapport d'agrandissement de l'homothétie est $k = 2$. Il s'agit de la figure B.

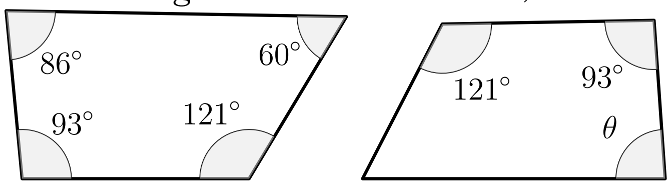
■

solution de l'exercice 15 .

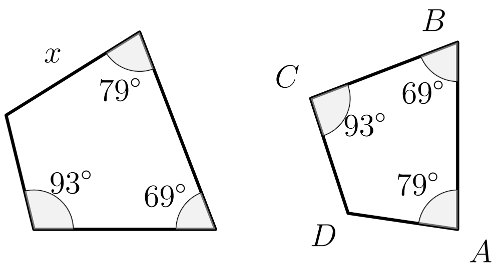
1. Entourez les deux figures semblables :



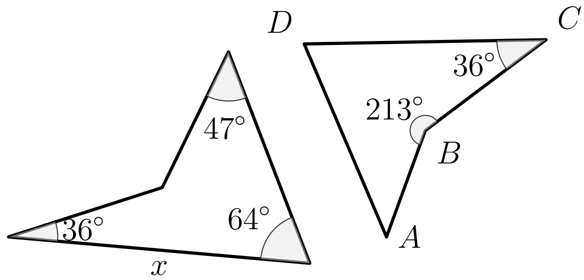
2. Les deux figures sont semblables, $\theta = 86°$



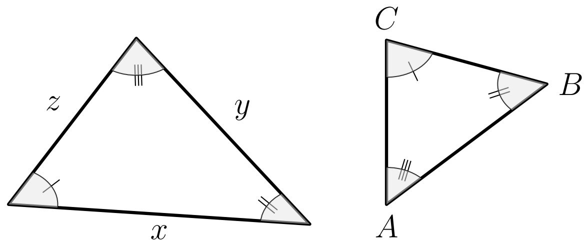
3. Les deux figures sont semblables, le côté homologue à x est AD



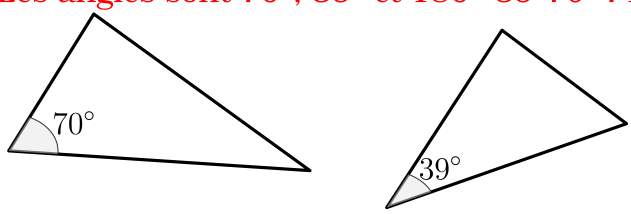
4. Les deux figures sont semblables, le côté homologue à x est DC



5. Les deux figures sont semblables, le côté homologue à x est BC,
à y est AB, à z est AC



6. Les deux triangles sont semblables. Déterminez tous les angles de chaque triangle.
Les angles sont 70°; 39° et 180°-39-70=71°



7. Représenter un contre-exemple à l'affirmation « deux triangles isocèles sont semblables ».

■

solution de l'exercice 16 .

1. Les triangles sont semblables.

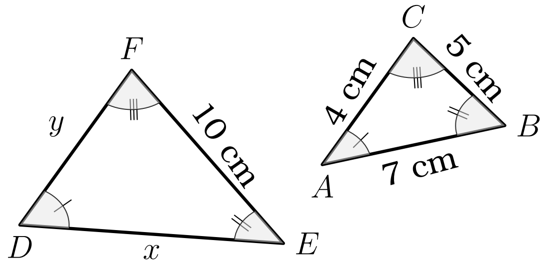
   Les longueurs des côtés sont proportionnelles

   $$\frac{DE}{AB} = \frac{FE}{BC} = \frac{EF}{AC} = k$$

   $$\frac{x}{7} = \frac{10}{5} = \frac{y}{4} = 2$$

   $$x = \frac{7 \times 10}{5} = 14$$

   $$y = 8$$



2. Les triangles sont semblables.

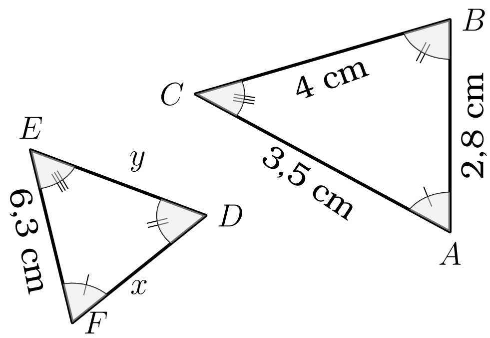
   Les longueurs des côtés sont proportionnelles

   $$\frac{FD}{AB} = \frac{ED}{BC} = \frac{EF}{AC} = k$$

   $$\frac{x}{2.8} = \frac{y}{4} = \frac{6.3}{3.5} = 1.8$$

   $$x = 5.04$$

   $$y = 7.2$$



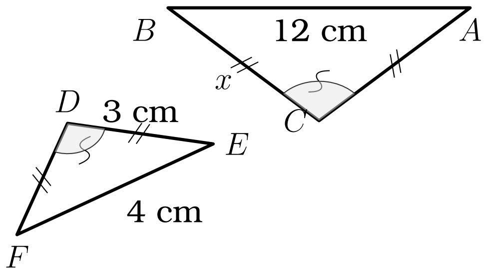
3. Les triangles sont semblables.

   Les longueurs des côtés sont proportionnelles

   $$\frac{FE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{DF}{AC} = k$$

   $$\frac{4}{12} = \frac{3}{x} = \frac{3}{x} = \frac{1}{3}$$

   $$x = \frac{12 \times 3}{4} = 9$$



■

solution de l'exercice 17 .

1. Les triangles ABC et EDF sont semblables.

   Les longueurs des côtés sont proportionnelles
   $$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{AC} = \frac{DF}{BC} = k$$
   $$\frac{5}{x} = \frac{3}{4.5} = \frac{4}{y} = \frac{2}{3}$$
   $$x = 7.5$$
   $$y = 6$$
2. Les triangles ABC et EDF sont semblables.

   Les longueurs des côtés sont proportionnelles
   $$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = k$$
   $$\frac{4}{3} = \frac{3}{y} = \frac{2}{x}$$
   $$x = 1.5$$
   $$y = 1.75$$
3. Les triangles ACD et ABC sont semblables.

   Les longueurs des côtés sont proportionnelles
   $$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{AD}{BC} = k$$
   $$\frac{4}{x} = \frac{y}{4} = \frac{2.4}{3}$$
   $$x = \frac{4 \times 3}{2.4} = 5$$
   $$y = \frac{4 \times 2.4}{3} = 3.2$$
4. Les triangles ABC et ACD sont semblables.

   Les longueurs des côtés sont proportionnelles
   $$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC} = k$$
   $$\frac{x}{5} = \frac{y}{x} = \frac{5.6}{3.5}$$
   $$x = \frac{5 \times 5.6}{3.5} = 8$$
   $$y = \frac{8 \times 5.6}{3.5} = 12.8$$

■

solution de l'exercice 18 . Complétez

1. On représente le plan d'une chambre de largeur 380 cm et longueur 450 cm à l'échelle $\frac{1}{50}$.
   On a : $\dfrac{\text{largeur sur plan}}{\text{largeur réelle}} = \dfrac{\text{largeur sur plan}}{380} = \dfrac{1}{50}$ et $\dfrac{\text{longueur sur plan}}{\text{longueur réelle}} = \dfrac{\text{longueur sur plan}}{450} = \dfrac{1}{50}$.
   La largeur de chambre sur le plan est $= \dfrac{380}{50} = 7.6$cm.
   Sa longueur est $= \dfrac{450}{50} = 9$cm.
2. Sur carte à l'échelle $\frac{1}{50000}$ on représente une distance réelle de 1,3 km.
   On a : $\dfrac{\text{distance sur carte}}{\text{largeur réelle}} = \dfrac{\text{distance sur carte}}{1{,}3 \text{ km}} = \dfrac{1}{500000}$
   La distance sur la carte est $= \dfrac{1.3}{50000}\text{km} = 0{,}000\ 026\text{km} = 2{,}6\text{cm}$
3. Sur carte à l'échelle $\frac{1}{5000000}$ on représente une distance réelle de 6,4 cm.
   La distance réelle est $= 5000000 \times 6{,}4 \text{ cm} = 32\,000\,000 \text{ cm} = 320\text{km}$
4. 3 cm sur une carte représente 15 km. La carte est à l'echelle $\dfrac{3 \text{ cm}}{1\,500\,000 \text{ cm}} = \dfrac{1}{500\ 000}$.
5. 12 m sont représentés par 15 cm sur un plan. L'echelle est $\dfrac{15 \text{ cm}}{1\,200 \text{ cm}} = \dfrac{1}{80}$.
6. cahier indigo exercices 11 et 12 page 45.

■

solution de l'exercice 19 . Compléter sachant que les figures A et B sont semblables.

1. Les carrés A et B sont de côtés 5 cm et 3 cm.

   B est une (A) ~~agrandissement~~ (B) réduction de A de rapport $k = \frac{3}{5}$.

2. Les triangles équilatéraux A et B sont de côtés 12 cm et 24 cm.

   B est une (A) agrandissement (B) ~~réduction~~ de A de rapport $k = \frac{24}{12} = 2$

   Il faut multiplier l'aire de A par $k^2 = 4$ pour obtenir l'aire de B.

3. A est d'aire 112,7 cm². B est d'aire 11 270 cm². Le rapport des aires est $k^2 = 100$.

   B est (A) agrandissement (B) ~~réduction~~ de la figure A de rapport $k = 10$.

4. A est d'aire 37 454,4 cm². B est d'aire 462,4 cm². Le rapport des aires est $k^2 = \frac{1}{81}$.

   B est (A) ~~agrandissement~~ (B) réduction de la figure A de rapport $k = \frac{1}{9}$

5. A est d'aire 23 346 cm². B est d'aire 648,5 cm² Le rapport des aires est $k^2 = \frac{1}{36}$.

   B est (A) ~~agrandissement~~ (B) réduction de la figure A de rapport $k = \frac{1}{6}$

6. L'aire de B est le double de celle de A. Le rapport d'agrandissement est $\sqrt{2}$

■

solution de l'exercice 20 .

1. Périmètre de B est $0.6 \times 8 = 4{,}8$ cm et Aire de B est $0.6^2 \times 4.7 = 1{,}692$ cm^2.
2. Périmètre de B est $3 \times 15 = 45$ cm et Aire de B est $3^2 \times 9.3 = 83{,}7$ cm^2.

■

solution de l'exercice 21 .

1. Aire de A $\times 4.7^2 =$ aire de B = $79{,}524$ cm^2. Donc Aire de A = $\frac{79.524}{4.7^2} = 3{,}6$ cm^2
2. Aire de A $\times 0.3^2 =$ aire de B = $0{,}774$ cm^2. Donc Aire de A = $\frac{0.774}{0.3^2} = 8{,}6$ cm^2

■

solution de l'exercice 22 .

Aire de $A = 6 \times 2 = 12$ cm^2

Le rapport des aires est $k^2 = \frac{43.32}{12} = 3{,}61$.

B est un agrandissement de la figure A d'un rapport $k = \sqrt{3.61} = 1.9$

Périmètre de B = $1.9\times$ périmètre de A = 30,4 cm ■

solution de l'exercice 23 . Périmètre de B est 25 cm ■

solution de l'exercice 24 .

■

solution de l'exercice 25 .

■