Chapitre 7

# Calculs algébriques (1) puissances et développements

## 7.1 Puissances à exposants dans $\mathbb{Z}$

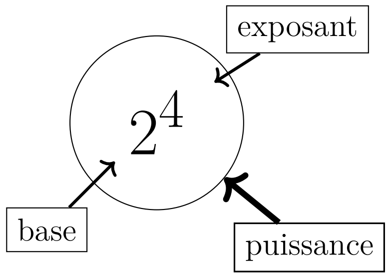



**Figure 7.1** – Vocabulaire

**Notation 7.1** Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ :

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^2 = a \times a \qquad a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{ fois}}$$

$$a^{-1} = \text{Inv de } a = \frac{1}{a} \qquad a^{-2} = \text{Inv de } a^2 = \frac{1}{a^2} \qquad a^{-n} = \text{Inv de } a^n = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

**R** Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, et $n \in \mathbb{N}$ : $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$.
En particulier $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ et $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$.

■ **Exemple 7.1** $2^5$; $3^{-2}$; $-3^2$; $(-3)^{-2}$; $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}$; $\left(\frac{-9}{7}\right)^{-1}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

**Théorème 7.1** Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ et tous $a, b \in \mathbb{R}^*$ :

Multiplication de puissances de même base

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^{m-n}$$

Puissance d'une puissance

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Multiplication de puissances de même exposant

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

**Règle 1**

« je multiplie des puissances, les bases sont les mêmes, j'ajoute les exposants »

**Règle 2**

« la puissance d'un produit est le produit des puissances ».

**Règle 2 cas particulier**

Pour tous réels $a \neq 0$ et $b \neq 0$

$$(ab)^2 = a^2 b^2$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

■ **Exemple 7.2** Illustrer et justifier les simplifications des expressions suivantes sous la forme $a^n$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

$$3^4 \times 5^4; \quad (-7)^3 \times (-7)^{-5}; \quad \frac{2^3}{2^{-2}}; \quad (3^4)^7$$

### 7.1.1 Exercices : puissances à exposant entier

$a \neq 0$, $n > 0$ : $\quad a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{ fois}}$ $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$

Préciser la base en rajoutant des parenthèses !

exposant

$3a^4$ signifie $3 \times a \times a \times a \times a$

ici la base est $a$

exposant

$(3a)^4$ signifie $3a \times 3a \times 3a \times 3a$

ici la base est $3a$

**Exercice 1** — Écrire sous forme d'une fraction irréductible ou un nombre décimal

$2^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$3^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$-3^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$-3^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-3)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$3 - 4^1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$3 - 2^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$3 - 5^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$2 \times 10^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(-\dfrac{9}{7}\right)^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\quad\right)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\quad\right)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(99)^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(0{,}7)^{-1} = \left(\frac{7}{10}\right)^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(0{,}8)^{-2} = \left(\frac{8}{10}\right)^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$0{,}25^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$0{,}25^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$0{,}2^{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$0{,}2^{-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

**Exercice 2** — Complétez par $>$ , $<$ ou $=$ :

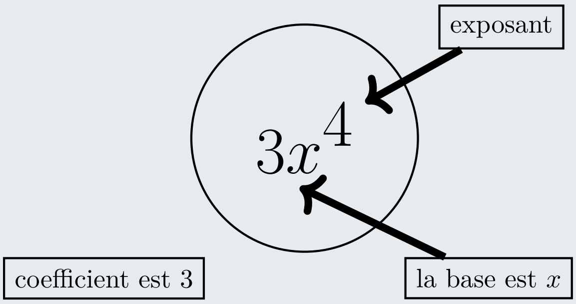
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $6^0 \ldots\ldots 0$ | $2^1 \ldots\ldots 1$ | $25^0 \ldots\ldots 0$ | $(-1)^{-1} \ldots\ldots 0$ | $\dfrac{1}{7^{-2}} \ldots\ldots 1$ |
| $5^{-1} \ldots\ldots 1$ | $4^{-2} \ldots\ldots 1$ | $1^{100} \ldots\ldots 1$ | $10^{-2} \ldots\ldots 1$ | $(-3)^{-4} \ldots\ldots 0$ |

**Exercice 3** —

1) $(-2)^1 = \ldots\ldots$ $(-2)^0 = \ldots\ldots$ $(-2)^{-1} = \ldots\ldots$ $(-2)^{-2} = \ldots\ldots$ $(-2)^{-3} = \ldots\ldots$

2) Sachant que $2^{15} = 32\,768$, on peut dire $(-2)^{15} = \ldots\ldots$ $2^{-15} = \ldots\ldots$ $(-2)^{-15} = \ldots\ldots$

3) Sachant que $4^5 = 1024$, on peut dire $(-4)^5 = \ldots\ldots$ $4^{-5} = \ldots\ldots$ $\left(\dfrac{1}{4}\right)^5 = \ldots\ldots$




Dans $3x^4$ est un monôme en $x$.

- $x$ est la variable, elle est aussi la base de la puissance
- L'exposant 4 est le degré du monôme.
- Le coefficient est 3.

$3x^4 = 3 \times x \times x \times x \times x$

■ **Exemple 7.3 — multiplication et puissances de monômes.** Simplifie :

$(2x^3)(4x^7) = 2 \times 4 \times x^3x^7 = 8x^{3+7} = 8x^{10}$

$\big(-3x^5\big)\big(6x\big) = -3 \times 6 \times x^5x = \dots\dots\dots\dots$

$\big(-x^2\big)^5 = (-x^2)(-x^2)(-x^2)(-x^2)(-x^2) = \dots\dots\dots\dots$

$\big(3x^5\big)^2 = (\quad)(\quad) = \dots\dots\dots\dots$

**Exercice 4** Simplifie les expressions suivantes.

$\big(x^2\big)\big(x^4\big) = \dots\dots\dots\dots$

$\big(7x^3\big)\big(2x^8\big) = \dots\dots\dots\dots$

$\big(-2x^5\big)\big(9x\big) = \dots\dots\dots\dots$

$\big(8x^3\big)\big(-2x^5\big) = \dots\dots\dots\dots$

$\big(-5x^6\big)^3 = \dots\dots\dots\dots$

$\big(2x^2\big)^6 = \dots\dots\dots\dots$

$-(-3x)^2 = \dots\dots\dots\dots$

$(-xy)^2 = \dots\dots\dots\dots$

$(-x^2)^3 = \dots\dots\dots\dots$

$(3x)^3 = \dots\dots\dots\dots$

$(3x^2)^3 = \dots\dots\dots\dots$

$(-4xy^2)^3 = \dots\dots\dots\dots$

$-(4x)^2 = \dots\dots\dots\dots$

$-(-2x)^3 = \dots\dots\dots\dots$

$\big(-x\big)^3\big(-x\big)^4 = \dots\dots\dots\dots$

$-\big(-x\big)^2\big(x\big)^3 = \dots\dots\dots\dots$

**Exercice 5** Écrire les expressions suivantes comme puissances de $(x - y)$. On utilisera $y - x = -(x - y)$.

$(x-y)^5 \times (x-y) \times (x-y)^3 = \dots\dots\dots\dots$

$(x-y)^5 \times (x-y)^6 \times (x-y)^7 = \dots\dots\dots\dots$

$(y-x)^3 = \big(-(x-y)\big)^3 = \dots\dots\dots\dots$

$(y-x)^2 = \dots\dots\dots\dots$

$(y-x)^2 \times (x-y) = \big(-(x-y)\big)^2 \times (x-y) = \dots\dots\dots\dots$

$(y-x)^3 \times (x-y)^4 = \dots\dots\dots\dots$

$(y-x)^2 \times (x-y)^m = \dots\dots\dots\dots$

■ **Exemple 7.4 — division de puissances.** Simplifie :

$3^5 \div 3^2 = 3^5 \times \dfrac{1}{3^2} = 3^5 \times 3^{-2} = 3^3$

$8^7 \div 8^{-4} = 8^7 \times \dfrac{1}{8^{-4}} = 8^7 \times 8^4 = 8^{11}$

$\dfrac{5}{5^2} = 5 \times 5^{-2} = 5^{1-2} = 5^{-1} = \dots\dots$

$\dfrac{2^2}{2^{-3}} = 2^2 \times 2^{-(-3)} = 2^{2+3} = 2^5 = \dots\dots$

$\dfrac{2x^5}{3x^8} = \dfrac{2x^5x^{-8}}{3} = \dfrac{2x^{-3}}{3} = \dots\dots$

$\dfrac{5x^3}{2x^{-2}} = \dfrac{5x^3x^{-(-2)}}{2} = \dfrac{5x^5}{2} = \dots\dots$

**Exercice 6 —** . Simplifiez les expressions suivantes et éliminer les exposants négatifs .

$\dfrac{4^{10}}{4^3} = \dots\dots$

$\dfrac{3^8}{3^2} = \dots\dots$

$\dfrac{3^8}{3^8} = \dots\dots$

$\dfrac{3^5}{3} = \dots\dots$

$4^2 \div 4^{-3} = \dots\dots$

$\dfrac{x^5}{x^2} = \dots\dots$

$\dfrac{x^3}{x^4} = \dots\dots$

$\dfrac{x^{-2}}{x^7} = \dots\dots$

$x^{-5}x^3 = \dots\dots$

$x^{-2}x^{-4}x^5 = \dots\dots$

$\dfrac{x^{16}}{x^{10}} = \dots\dots$

$x^2x^{-5} = \dots\dots$

$x^5x^{-3}x^{-4} = \dots\dots$

$\dfrac{x^7x^0}{x^{10}} = \dots\dots$

**Exercice 7 —** . Simplifiez les expressions suivantes en éliminant les exposants négatifs .

$\dfrac{x^7}{x^8x^{-5}} = \dots\dots$

$x^4(x^{-2})^3x^5 = \dots\dots$

$\dfrac{x^4x^{-1}}{x^8} = \dots\dots$

$\dfrac{x^9x^{-2}}{x} = \dots\dots$

$\left(\dfrac{x}{2}\right)^3(5x^6) = \dots\dots$

$\left(x^{-4}x^3\right)^3 = \dots\dots$

$\left(\dfrac{2x^2}{5}\right)^{-1} = \dots\dots$

$\left(\dfrac{5x^3}{2}\right)^{-2} = \dots\dots$

■ **Exemple 7.5** Simplifiez les expressions suivantes et éliminer les exposants négatifs :

$\dfrac{6xy^{-4}}{2x^{-2}y^2} = \dfrac{6}{2}\dfrac{x}{x^{-2}}\dfrac{y^{-4}}{y^2} = 3x^3y^{-6} = \dfrac{3x^3}{y^6}$

$\left(\dfrac{y}{3x^3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3x^3}{y}\right)^2 = \dfrac{3x^3}{y} \times \dfrac{3x^3}{y} = \dfrac{9x^6}{y^2}$

**Exercice 8** Simplifiez les expressions suivantes et éliminer les exposants négatifs .

$\dfrac{8x^3y^{-4}}{2x^{-5}y^5} = \dots\dots$

$\dfrac{5xy^{-2}}{x^{-1}y^{-3}} = \dots\dots$

$\left(\dfrac{y}{5x^{-2}}\right)^{-3} = \dots\dots$

$\left(\dfrac{2x^{-1}y}{x^2y^{-3}}\right)^{-2} = \dots\dots$

$\left(\dfrac{3x}{y^3}\right)^{-1} = \dots\dots$

$\left(\dfrac{x^{-1}y^{-2}}{x^{-5}y}\right)^{-1} = \dots\dots$

■ **Exemple 7.6** Simplifiez les fractions suivantes sous forme d'une somme de multiples d'une puissance de $x$ :

$$\frac{2x^3-5x+5}{x}=2\frac{x^3}{x}-5\frac{x}{x}+\frac{5}{x}=2x^2-6+\frac{5}{x}$$

$$\frac{5x^2-2x+1}{x^5}=\frac{5x^2}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{1}{x^5}=5x^{-3}-2x^{-4}+x^{-5}=\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}$$

**Exercice 9** Mêmes consignes. Eliminer les exposants négatifs :

$\dfrac{-x^2+3x+1}{x}=$ ..........................................................................

$\dfrac{3x^2-x+2}{x^2}=$ ..........................................................................

$\dfrac{x^2-1}{x^4}=$ ..........................................................................

$\dfrac{x^3-x+2}{5x^3}=$ ..........................................................................

**Exercice 10 —** . Simplifier les expressions suivantes sans utiliser la calculatrice. Montrer les étapes.

$(-2)^{2022}+(-2)^{2023}=$ ..........................................................................

$2^{2024}-5\times 2^{2023}+6\times 2^{2022}=$ ..........................................................................

$3\times 2^{99}+6\times 2^{98}=$ ..........................................................................

**Exercice 11 — Je vérifie ma compréhension.** Entourez la ou les bonnes réponses.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1/** $\dfrac{1}{10^3}=\dots$ | $10^{-3}$ | 0,000 1 | 0,001 | 1000 |
| **2/** $10\times 10^{-3}\times 10^5=\dots$ | $10^{-8}$ | $10^{-15}$ | $10^2$ | $10^3$ |
| **3/** $5^{-7}\times 5\times 5^6=\dots$ | $5^4$ | $5^{16}$ | $5^{-4}$ | $5^{-16}$ |
| **4/** $\dfrac{7^{-5}}{7^{-9}}=\dots$ | $7^{-4}$ | $7^{-14}$ | $7^{14}$ | $7^4$ |
| **5/** $x^5+x^5=$ | $2x^5$ | $x^{10}$ | $x^{25}$ | $2x^{25}$ |
| **6/** $x^6=\dots$ | $(-x)^3\times(-x)^3$ | $(-x)^2\times(-x)^4$ | $(-x)^3\times(-x)^2$ | $x^3\times x^2$ |
| **7/** Si $x^n=2$ alors $3x^{n+1}=$ | 6 | $3x$ | $6x$ | $9x$ |
| **8/** Si $x^{n+5}=5$ alors $x^{n+6}=$ | 6 | $6x$ | $5x$ | $\dfrac{5}{x}$ |
| **9/** Si $x^{n+3}=2$ alors $x^{n+2}=$ | 1 | $2x$ | $x$ | $\dfrac{2}{x}$ |
| **10/** Si $x^m=a$ et $y^n=b$ alors | $x^{3m}=3a$ | $y^{2n}=b^2$ | $x^{3m}y^{2n}=ab^2$ | $x^{3m}y^{2n}=a^3b^2$ |
| **11/** Si $x^m=a$ et $x^n=b$ alors $x^{m+2n}=$ | $a+2b$ | $2ab$ | $(ab)^2$ | $ab^2$ |
| **12/** $x^{2n+1}x^{5-n}=$ | $x^{2n+6}$ | $x^{n+6}$ | $x^{2n-4}$ | $x^{n-4}$ |
| **13/** $\dfrac{x^{2n+1}}{x^{5-n}}=$ | $x^{n+6}$ | $x^{n+6}$ | $x^{3n-4}$ | $x^{n-4}$ |

## 7.2 Multiplier des expressions algébriques

Une **expression littérale** est une écriture mathématique qui contient des lettres appelées **variables**. Une variable peut prendre des valeurs arbitraires.[1].

[1] En mathématiques, on utilise certaines lettres pour différentes type de variables :

- $n$ et $m$ ... pour les entiers positifs ou négatifs
- $x$, $y$ et $z$ pour des quantités inconnues.
- $a$, $b$ et $c$ sont réservés à des quantités connues.

**Définition 7.1 — Un monôme.** est une expression de la forme $ax^n$ :

- $x$ est la variable
- $n \geqslant 0$ est le degré du monôme
- $a$ est le coefficient.

Les monômes de même degré sont dit **similaires**.

■ **Exemple 7.7**

$$5\ \boxed{x^2} \quad + \quad 3\ \boxed{x} \quad + \quad \boxed{2}$$

- 2 est le terme constant, $3x$ le terme linéaire. Il est **similaire**[2] à $x$.
- $5x^2 + 3x + 2$ est une expression **réduite ordonnée**.

[2] proportionnel à

**Définition 7.2** Simplifier une expression algébrique revient à l'écrire sous forme réduite ordonnée.

**Règle 1 : Axiome de distributivité**

Pour tout réels $a,b,x \in \mathbb{R}$ : $(a+b) \times x = (a \times x) + (b \times x)$

interprétation simple : $a$ paquets de $x$ + $b$ paquets de $x$ = $(a+b)$ paquets de $x$ !

**Règle 2**

Pour tout réel $a$ : $a \times (-1) = (-a)$

**Définition 7.3** **Développer** est une activité qui consiste à exploiter les 2 règles précédentes jusqu'à plus possible pour écrire une expression égale sous forme d'une **somme de termes**.

■ **Exemple 7.8**

$A = -(a+b+c) = (-1)\times(a+b+c) = -a-b-c$

$B = -(2x-5) = -2x+5$

**La double distributivité**

Pour tout réels $a,b,x,y \in \mathbb{R}$ :

$$(x+y)(a+b) = x(a+b) + y(a+b) = xa + xb + ya + yb$$

■ **Exemple 7.9** Pour $x \in \mathbb{R}$. Développer :

| | |
|---|---|
| $A = -2(x-2) \times 5(x-3)$ | $B = -2(x-2) + 5(x-3)$ |

### 7.2.1 Exercices : développer simplifier réduire et ordonner

**Exercice 12 — Distributivité simple.** Développer simplifier réduire et ordonner les expressions suivantes :

$A = 4(x+3)$
$B = 5(6x+1)$
$C = 2(3x-5)$

$D = (4-3x)\times 2$
$E = -(4-3x)$
$F = 5\left(2x+4x^2-2\right)$

$G = 3(5x+2)-4x$
$H = 3(4x+3)+2(5x-3)$
$I = (5x+2)\times 4-3(5x+6)$

■ **Exemple 7.10**

$$\begin{aligned} A(x) &= 2(x+6) \quad +2(x-3) \\ &= 2x+12 \quad | \\ &= \quad | \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= 5(2x+6) \quad -2(3x+4) \\ &= 2x+2 \quad | +3x-12 \\ &= \quad | \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= 4(5x+6) \quad -5x(2x-3) \\ &= \quad | \\ &= \quad | \\ &= \end{aligned}$$

**Exercice 13** Développer simplifier réduire et ordonner les expressions suivantes :

$A = 2(x+4)+3(x+5)$
$B = 5(x+2)+4(x-2)$

$C = 3(4x+2)-2(x+2)$
$D = 7(x-2)-(3x+5)$

$E = 5(4x+2)-6(3x-1)$
$F = 3x(4x-5)-4\left(x^2+2\right)+2x$

■ **Exemple 7.11** Développer et simplifier réduire chacune l'expression suivante.

$$\begin{aligned} A(x) &= (2x+4)(x+5) \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= (x-5)(2x+3) \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= (3x-4)(4x-3) \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

**Exercice 14 — Distributivité double.** Développer simplifier réduire et ordonner les expressions suivantes :

$A = (2x+3)(x+5)$
$B = (2x+4)(x-3)$

$C = (x-5)(2x-4)$
$D = (2x+3)(2x-5)$

$E = (3x-4)(2x-3)$
$F = (3x-4)(3x+4)$

**Exercice 15** Complétez les développements et simplifications suivantes :

$$\begin{aligned} A(x) &= (x+\dots)(x+\dots) \\ &= x^2+\dots x+\dots x+24 \\ &= x^2+10x+24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= (x+\dots)(x+\dots) \\ &= x^2+8x+\dots x+24 \\ &= x^2+\dots x+\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= (x+\dots)(x+\dots) \\ &= x^2+\dots x+\dots x+18 \\ &= x^2+11x+18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= (x+\dots)(x+\dots) \\ &= x^2+\dots x+10x+\dots \\ &= x^2+13x+\dots \end{aligned}$$

$$E(x) = (x + \ldots)(x - \ldots)$$
$$= x^2 - 2x + \ldots x - 14$$
$$= x^2 + 5x - \ldots$$

$$F(x) = (x + \ldots)(x + \ldots)$$
$$= x^2 + \ldots x + \ldots x + \ldots$$
$$= x^2 - 14x + 33$$

$$G(x) = (x + \ldots)(x + \ldots)$$
$$= x^2 + \ldots x + \ldots x + \ldots$$
$$= x^2 + 5x + 6$$

$$H(x) = (x + \ldots)(x - \ldots)$$
$$= x^2 + \ldots x - \ldots x + \ldots$$
$$= x^2 - 25$$

■ **Exemple 7.12** Développer et simplifier réduire chacune l'expression suivante.

$$A(x) = (x-3)(x+1)(x+4)$$
$$=$$
$$=$$
$$=$$
$$=$$

$$B(x) = (x+2)(x-4)(x+2)$$
$$=$$
$$=$$
$$=$$
$$=$$

**Exercice 16 — et si plus de facteurs ?.** Développer simplifier réduire et ordonner les expressions suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $A = x(x+2)(x+3)$ | $C = (x+4)(x-2)(x+3)$ | $E = (x-5)(x-1)(x+3)$ |
| $B = (x+1)(x+2)(x+2)$ | $D = (x-2)^3$ | $F = (2x+2)(3x-2)(x+3)$ |

**Exercice 17 — Mélange.** Développer simplifier réduire et ordonner les expressions suivantes :

| | |
|---|---|
| $A = 2(x-2)(x-4) - (2x+3)$ | $D = -(3x-2)(x-5) + (2x+3)(x-1)$ |
| $B = 2x(x-2) + (x-4) - 2(2x-3)$ | $E = 5\left(x^2+4\right)(2x-3) - (x-5)(2x-3)$ |
| $C = -2(3x-4)(4x+2) - 8(3-2x)$ | $F = 2(x+1)^2 - (x-5)(x+5)$ |

Une identité est une égalité toujours vraie. C'est une équation dont l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

**Exercice 18**

a) Montrer que les valeurs $x = 1$, $x = 3$ et $x = 5$ satisfont toutes l'équation $7(x-8) - 3(x-20) = 4(x+1)$
b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $7(x-8) - 3(x-20) = 4(x+1)$

**Exercice 19**

a) Montrer que les valeurs $x = 1$, $x = 3$ et $x = 5$ vérifient l'égalité $x^3 - 9x^2 + 23x = 15$
b) Montrer que l'égalité $x^3 - 9x^2 + 23x = 15$ n'est pas une identité.

**Exercice 20** Démontrer en développant **séparément** le membre de gauche et le membre de droite que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(2x-3)(5x-1) + 3(x+5)(x-5) = x(13x-17) - 72$.

## 7.3 Identités remarquables

**Théorème 7.2 — Carré de somme.** Pour deux nombres $a \neq 0$ et $b \neq 0$ :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

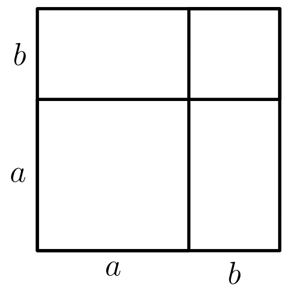



**Figure 7.2** – Illustration géométrique du carré de la somme de nombres positifs $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$

*Démonstration.*

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ $\qquad$ $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$ ∎

■ **Exemple 7.13**

$A = (2x-3)^2$ $\qquad$ $B = (2x+3)^2$

$=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$

**Théorème 7.3 — Le produit de conjuqués.** Pour tout réels $a$ et $b \in \mathbb{R}$ :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$(a-b)$ est le terme conjugué de $(a+b)$.

$(a+b)$ est le terme conjugué de $(a-b)$

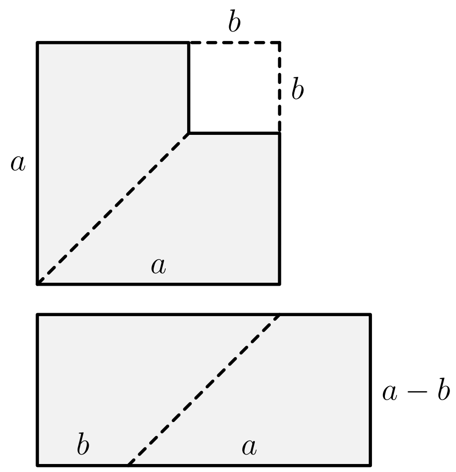



**Figure 7.3** – Illustration géométrique de la factorisation de la différence de deux carrés, avec $a \geqslant b \geqslant 0$

*Démonstration.*

$(a+b)(a-b) =$

$=$

$=$

$=$ ∎

■ **Exemple 7.14**

$A = (2x-3)(2x+3)$ $\qquad$ $B = (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$

$=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$

$(ab)^2 = a^2b^2$

### 7.3.1 Exercices : identités remarquables

**Exercice 21** Complétez les développements de carrés suivants à l'aide des identités remarquables :

$$\begin{aligned} A(x) &= (5x+3)^2 \\ &= (\ldots x)^2 + 2\times(\ldots\ldots)\times(\ldots\ldots) + (\ldots)^2 \\ &= (\ldots)^2x^2 + \ldots\ldots\ldots x + \ldots\ldots \\ &= \ldots x^2 + \ldots x + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= (3x-4)^2 \\ &= (\ldots x)^2 + 2\times(\ldots\ldots)\times(\ldots\ldots) + (\ldots)^2 \\ &= (\ldots)^2x^2 + \ldots\ldots\ldots x + \ldots\ldots \\ &= \ldots x^2 + \ldots x + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= (-x-2)^2 \\ &= (\ldots x)^2 + 2\times(\ldots\ldots)\times(\ldots\ldots) + (\ldots)^2 \\ &= (\ldots)^2x^2 + \ldots\ldots\ldots x + \ldots\ldots \\ &= \ldots x^2 + \ldots x + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= (-3x+4)^2 \\ &= (\ldots x)^2 + 2\times(\ldots\ldots)\times(\ldots\ldots) + (\ldots)^2 \\ &= (\ldots)^2x^2 + \ldots\ldots\ldots x + \ldots\ldots \\ &= \ldots x^2 + \ldots x + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x) &= (\ldots x + \ldots)^2 \\ &= (\ldots x)^2 + 2\times(\ldots\ldots)\times(\ldots\ldots) + (\ldots)^2 \\ &= 1^2x^2 + 2\times(\ldots\ldots)\times 4 + 4^2 \\ &= x^2 + \ldots x + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= (2x + \ldots)^2 \\ &= (2x)^2 + 2\times(\ldots\ldots)\times(\ldots\ldots) + (\ldots)^2 \\ &= 2^2x^2 + 2\times(\ldots\ldots)\times(\ldots\ldots) + 3^2 \\ &= 4x^2 + 18x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(x) &= (\ldots x - 7)^2 \\ &= (\ldots x)^2 - \ldots\times(\ldots\ldots)\times(\ldots\ldots) + (7)^2 \\ &= \ldots^2 x^2 - \ldots\times(\ldots\ldots)\times 7 + 7^2 \\ &= 25x^2 - \ldots x + 49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x) &= (\ldots x - \ldots)^2 \\ &= (\ldots x)^2 - \ldots\times(\ldots\ldots)\times(\ldots\ldots) + (\ldots)^2 \\ &= \ldots^2 x^2 - \ldots\times(\ldots\ldots)\times\ldots + \ldots^2 \\ &= 4x^2 - 20x + 25 \end{aligned}$$

**Exercice 22 — différence de carrés.** Complétez :

$(a+b)(a-b) = (\quad)^2 - (\quad)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x+2y)(x-2y) = (\quad)^2 - (\quad)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(3x-4y)(3x+4y) = (\quad)^2 - (\quad)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(2x+3y)(2x-3y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(6-8x)(6+8x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

**Exercice 23** — 

1) Développer puis simplifier $(a+b)(a-2b)$ donne :

(A) $a^2-2b^2$ ........... (B) $a^2+ab-2b^2$ ........... (C) $a^2-ab-2b^2$ ........... (D) $a^2+3ab-2b^2$

2) Entourez les expressions qui sont égales à $a^2-b^2$ :

$(a+b)(a-b)$ $\quad$ $(-a-b)(-a+b)$ $\quad$ $(-a+b)(-a+b)$ $\quad$ $(-b-a)(b-a)$

3) Entourez les multiplications qui correspondent à une multiplication de conjuguées :

$(-x+2)(-x-2)$ $\quad$ $(x+2)(-x-2)$ $\quad$ $(x-2)(x+2)$ $\quad$ $(-x-2)(-x-2)$

$(3-4x)(3+4x^2)$ $\quad$ $(3x-4)(-3x+4)$ $\quad$ $(3x+4)(-3x-4)$ $\quad$ $(3+4x^2)(3-4x^2)$

4)

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** $(3a+2b)(3a-2b)=9a^2-4b^2$ | ☐ | ☐ |
| **2/** $(-3a+2b)(-3a-2b)=9a^2-4b^2$ | ☐ | ☐ |
| **3/** $(a+b+c)(a+b-c)=(a+b)^2-c^2$ | ☐ | ☐ |
| **4/** $(a+b+c)(a-b+c)=(a+b)^2-c^2$ | ☐ | ☐ |

5) Développer, simplifier et réduire les expressions suivantes :

$(1+x)(1-x)(1+x^2)=$ ..........................................................................

$(4+x^2)(2-x)(2+x)=$ ..........................................................................

$\left[(x-1)(x+1)\right]^2=$ ..........................................................................

$(x-2y)^2(x+2y)^2=$ ..........................................................................

$(3x-y)^2-(3x+y)^2=$ ..........................................................................

6) En appliquant la formule des différences des carrés on peut calculer :

$91\times 89=(90+\ldots\ldots)(90-\ldots\ldots)=(\qquad)^2-(\qquad)^2=$ ...............................

$49.8\times 50.2=(\ldots\ldots-\ldots\ldots)(\ldots\ldots+\ldots\ldots)=(\qquad)^2-(\qquad)^2=$ .....................

$99.9\times 100.1=$ ..........................................................................

**Exercice 24** Développer simplifier réduire et ordonner à l'aide d'identités remarquables adaptées :

$A=(3x+5)^2$

$B=(3x+5)(3x-5)$

$C=\left(\frac{3}{4}x-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}\right)$

$D=2(4x-3)^2$

$E=-(6x-5)(6x+5)$

$F=(6x+9)^2-(x-5)(x+5)$

$G=(5x+2)^2-(2x+3)(2x-3)$

$H=(3x+2)(3x-2)-2(x-5)^2$

**Exercice 25**

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $(3x-5)^2 - 49 = 9(x-4)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$.

**Exercice 26**

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-2(x-1)^2 + 8 = -2(x-3)(x+1)$.

**Exercice 27**

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $3(2x+1)^2 - 48 = 12\left(x+\dfrac{5}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$.

**Exercice 28**

Trouver deux nombres $a$ et $b$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+a)^2 - b = x^2 + 22x + 71$.

**Exercice 29**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $15(x+2)(x-2) - 3(2x+1)(2x-1) = (x-2)(3x+1)$, inconnue $x$.

*Indication : développer simplifier les deux membres*

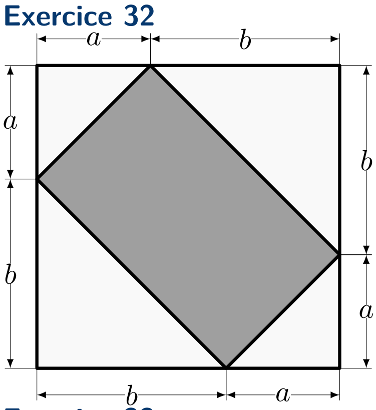
**Exercice 30**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(3x+1)(3x-1) + 2(x+2)(x-2) = 11(x+1)(x-3)$, inconnue $x$.

**Exercice 31**

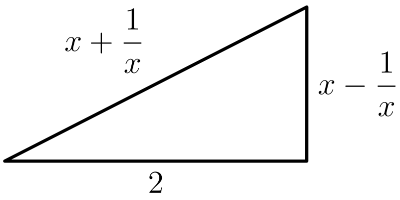
Une pelouse carrée de côté $a$m. On agrandi ses côtés nord et sud de 3 m, et on réduit ses côtés est et ouest de 3 m. La nouvelle aire de la pelouse est-elle supérieure ou inférieur à l'aire de départ ? Préciser la différence.

**Exercice 32**




Justifier que l'aire de la partie grise du carré ci-contre est égale à $2ab$.

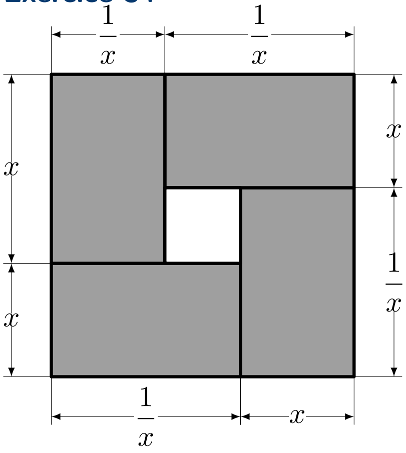
**Exercice 33**




Soit $x > 1$.

1) Développer simplifier et réduire $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$ et $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$.
2) Montrer que pour tout $x > 1$, le triangle ci-contre est rectangle.

**Exercice 34**

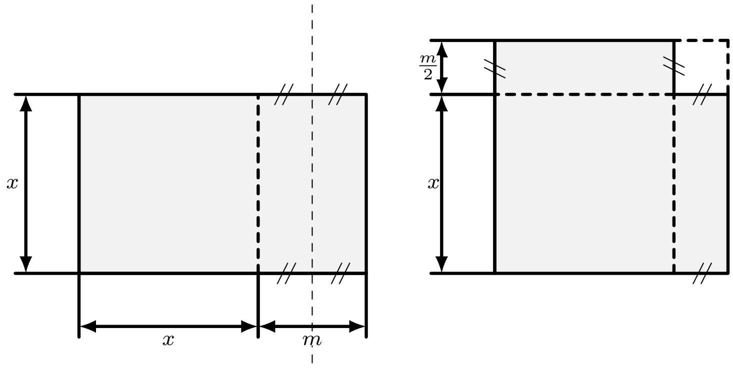



Les 4 rectangles ci-contre sont égaux.

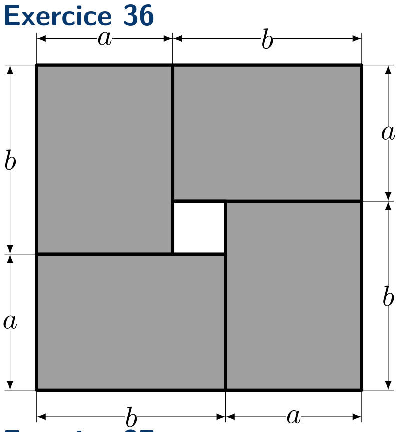
1) Développer simplifier et réduire $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$.
2) En déduire que pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} > 2$
3) Expliquer pourquoi l'inégalité précédente peut être illustrée par le graphique ci-contre.

### Exercice 35

1) Développer simplifier et réduire
$$\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2$$
2) Expliquer pourquoi l'identité précédente peut être illustrée par le graphique ci-contre.

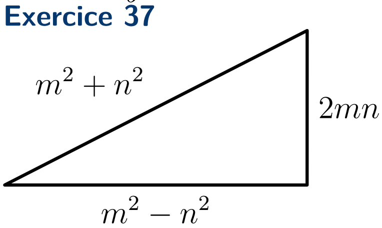



### Exercice 36




Les 4 rectangles ci-contre sont égaux.
1) Développer simplifier et réduire $(a+b)^2-(a-b)^2$.
2) Expliquer pourquoi l'identitée obtenue peut être illustrée par le graphique ci-contre.

### Exercice 37




Montrer que pour tout $m>n>0$ le triangle ci-contre est rectangle.

*solution de l'ex. 12.* $A(x)=4x+12$; $B(x)=30x+5$; $C(x)=6x-10$; $D(x)=8-6x$; $E(x)=3x-4$; $F(x)=20x^2+10x-10$; $G(x)=11x+6$; $H(x)=22x+3$; $I(x)=5x-10$; ■

*solution de l'ex. 13.* $A(x)=5x+23$; $B(x)=9x+2$; $C(x)=10x+2$; $D(x)=4x-19$; $E(x)=2x+16$; $F(x)=-4x^2+14x-23$; ■

*solution de l'ex. 14.* $A(x)=2x^2+13x+15$; $B(x)=2x^2-2x-12$; $C(x)=2x^2-14x+20$; $D(x)=4x^2-4x-15$; $E(x)=6x^2-17x+12$; $F(x)=9x^2-16$; ■

*solution de l'ex. 16.* $A(x)=x^3+5x^2+6x$; $B(x)=x^3+6x^2+11x+6$; $C(x)=x^3+5x^2-2x-24$; $D(x)=x^3-6x^2+12x-8$; $E(x)=x^3-3x^2-13x+15$; $F(x)=6x^3+20x^2+2x-12$; ■

*solution de l'ex. 17.* $A(x)=2x^2-6x-19$; $B(x)=2x^3-12x^2+12x+6$; $C(x)=-24x^2+36x-8$; $D(x)=-x^2+18x-13$; $E(x)=10x^3-17x^2+53x-75$; $F(x)=x^2+4x+27$; ■

*solution de l'ex. 24.* $A=9x^2+30x+25$; $B=9x^2-25$; $C=\frac{9x^2}{16}-0.64$; $D=32x^2-48x+18$; $E=25-36x^2$; $F=35x^2+108x+106$; $G=21x^2+20x+13$; $H=7x^2+20x-54$; ■

*solution de l'ex. 29.* $\mathscr{S}=\{11\}$; ■

*solution de l'ex. 30.* $\mathscr{S}=\left\{-\frac{12}{11}\right\}$; ■