A.5.3 Savoir-faire 3 : nombre dérivé et équations de tangentes

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f : y = f(x)$ au point d'abscisse a est d'équation

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

■ **Exemple A.23 — déterminer l'équation d'une tangente.**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$, et sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$. Déterminer (algébriquement) l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

solution.

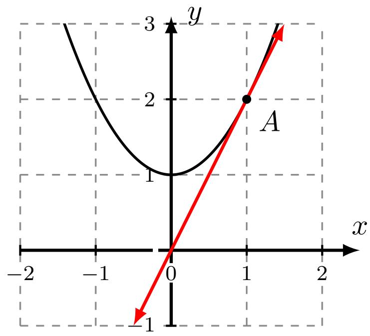
$f(1) = (1)^2 + 1 = 2$. $A(1\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_f$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$

$f'(1) = 2(1) = 2$

$T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$\therefore T : y = 2x$. ■



Exercice 1

On donne l'expression de la fonction f de représentation graphique $\mathscr{C}_f$. Déterminer pour chaque cas l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0.

1. pour tout x , $f(x) = x^2$ et $x_0 = 4$.
2. pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{3}{x}$ et $x_0 = -1$.
3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$ et $x_0 = -2$.
4. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x$ et $x_0 = 0$.
5. pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ et $x_0 = -1$.

Exercice 2 — utiliser l'équation de la tangente.

Déterminer l'équation de la tangente puis déduire les coordonnées du point demandé.

1. T est la tangente à $\mathscr{C} : y = 2x^3 + 3x^2 - x + 4$ au point d'abscisse -1. Déterminer l'intersection de T avec l'axe des abscisses.
2. T est la tangente à $\mathscr{C} : y = 3x^3 - 2x + 1$ au point d'abscisse 1. Déterminer le point d'intersection de T avec l'axe des ordonnées.
3. T est la tangente à $\mathscr{C} : y = x^3 + 5$ au point $A(-2\ ;\ -3)$. Déterminer l'abscisse du point de T d'ordonnée $y = 2$.
4. T est la tangente à $\mathscr{C} : y = \dfrac{2}{x} + 1$ au point $A(-2\ ;\ 0)$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de T avec $D : y = 2x - 3$.

■ **Exemple A.24 — trouver un autre point de rencontre avec la tangente.**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 6x + 8$ et sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$. Soit T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Déterminer les coordonnées du point ou T coupe $\mathscr{C}_f$ à nouveau.

solution.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 - 8x - 6$

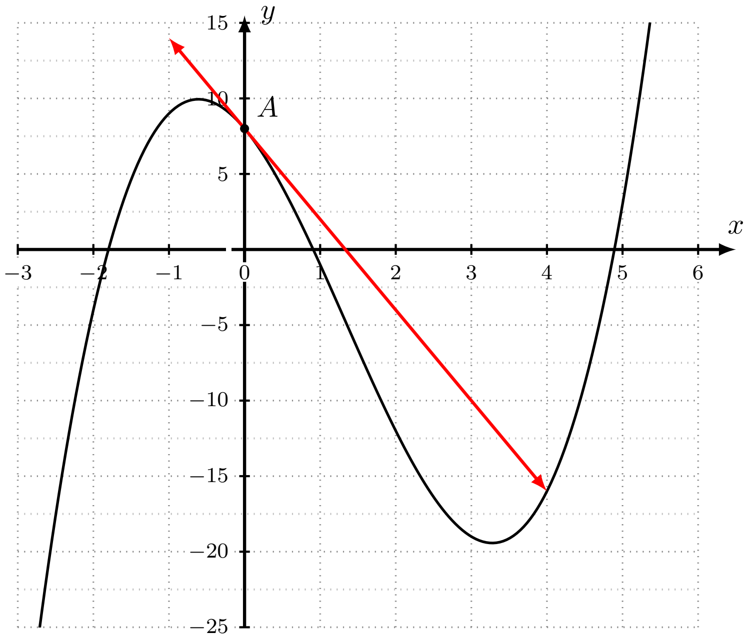
$f(0) = (0)^3 - 4(0)^2 - 6(0) + 8 = 8$, $A(0\ ;\ 8) \in \mathscr{C}_f$.

$f'(0) = 3(0)^2 - 8(0) - 6 = -6$.

La tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A est $T\colon y = -6(x - 0) + 8 = -6x + 8$.

Un point $P(x\ ;\ y)$ est sur $\mathscr{C}_f$ et sur T si ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} y = x^3 - 4x^2 - 6x + 8 \\ y = -6x + 8 \end{cases},$$



Donc x est solution de

$x^3 - 4x^2 - 6x + 8 = -6x + 8$.

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 &= 0 \\ x^2(x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

On sait que $x = 0$ est solution, on factorise par $(x - 0)$

$\therefore x = 0$ ou $x = 4$.

Si $x = 1$ alors $A(0\ ;\ 8)$ que l'on connait déjà.

Si $x = 4$, $y = -6(4) + 8 = -16$. Donc la tangente T rencontre à nouveau $\mathscr{C}_f$ au point $B(4\ ;\ -16)$. ■

Exercice 3

Pour chaque fonction f donnée, déterminer :

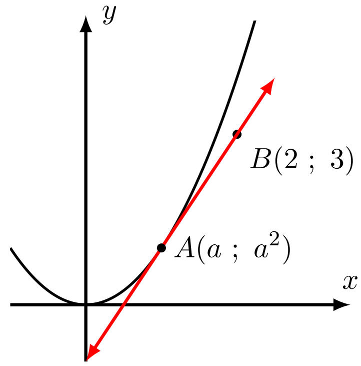
— l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point x_0

— le point ou la tangente rencontre la courbe $\mathscr{C}_f$ à nouveau.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$ et $x_0 = -1$
2. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{x} + 2$ et $x_0 = 3$
3. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5$ et $x_0 = 1{,}5$
4. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$ et $x_0 = -1$

■ **Exemple A.25 — trouver une tangente.**

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par le point $B(2\ ;\ 3)$ (extérieur à $\mathscr{C}_f$).



Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$, le point $A(a\ ;\ a^2) \in \mathscr{C}_f$.

$f'(x) = 2x$, donc $f'(a) = 2a$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A a pour équation $T_a\colon y = 2a(x-a) + a^2$.

On cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que $B(2\ ;\ 3) \in T_a$. Donc a vérifie :

$$2a(2-a) + a^2 = 3 \quad .$$

$$0 = a^2 - 4a + 3$$

$$a = 1 \quad \text{ou} \quad a = 3$$

Pour $a = 1$, alors $T_1\colon y = 2x - 1$ au point $A_1(1\ ;\ 1)$.

Pour $a = 3$, alors $T_3\colon y = 6x - 9$ au point $A_3(3\ ;\ 9)$. ■

Exercice 4

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$. On cherche à trouver les tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui passent par le point $B(3; -4)$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, et T la tangente en A.

1. Préciser les coordonnées de A en fonction a.
2. Montrer que $T\colon y = (2a-3)x - a^2$.
3. Sachant que T passe par B, donner l'équation l'équation vérifiée par a et la résoudre en a.
4. Déterminer les points A et les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par B.

Exercice 5

Soit la $\mathscr{C}_f$ la représentation grpahique de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Déterminer les équations réduites de(s) tangente(s) à $\mathscr{C}_f$ passant par le point $B(-2\ ;\ 0)$ (extérieur à $\mathscr{C}_f$).

Exercice 6

Soit la courbe $\mathscr{C}\colon y = \sqrt{x}$.

1. Quelle fonction est repréntée par la courbe $\mathscr{C}$. Préciser domaine et domaine de dérivabilité.
2. Déterminer les équations réduites de(s) tangente(s) à $\mathscr{C}$ passant par $B(5\ ;\ 3)$ (extérieur à $\mathscr{C}_f$).