2.5 Club maths : conditionnements paradoxaux

Problème 1 — Paradoxe de Simpson.

Un test clinique vise à étudier l'efficacité d'un nouveau traitement thérapeutique à des malades atteints de cancer. On choisit un participant au hasard parmi les 21100. Soit les événements $A =$ « le patient est vivant », $T =$ « le patient a suivi le traitement » et $V =$ « le patient réside en ville ». Les effectifs sont rassemblés dans le tableau :

	V, en ville		$\overline{V}$	
	T	$\overline{T}$	T	$\overline{T}$
A	1000	50	95	5000
$\overline{A}$	9000	950	5	5000

1) Déterminez $P_T(A)$ et $P_{\overline{T}}(A)$.
2) Quel semble l'effet du traitement sur les chances de survie ?
3) Déterminez $P_{T\cap V}(A)$, $P_{T\cap\overline{V}}(A)$.
4) Déterminez $P_{\overline{T}\cap V}(A)$, $P_{\overline{T}\cap\overline{V}}(A)$.
5) Quel est l'effet du traitement lorsqu'on prend en compte le lieu de résidence ?

Problème 2 — le rouge et le noir.

Trois boites contiennent chacune une carte. Une des cartes a deux faces rouges, une a deux faces noires, et la troisième une rouge et une noire. On choisit au hasard une boite, et l'on voit que la face visible de la carte qu'elle contient est rouge. Quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Problème 3 — Paradoxe des prisonniers.

> Trois prisonniers sont dans une cellule. Ils savent que deux vont être condamnés à mort et un gracié, mais ils ne savent pas qui. L'un d'entre eux va voir le gardien et lui demande : « Je sais bien que tu ne peux rien me dire, mais tu peux au moins me montrer un de mes compagnons qui sera exécuté ». Le gardien réfléchit, se dit que de toute manière au moins l'un des deux autres prisonniers sera condamné, et s'exécute. Le prisonnier lui répond alors : « Merci, avant, j'avais une chance sur trois d'être gracié, et maintenant, j'ai une chance sur deux.

A-t-il raison de croire que sa probabilité d'être exécuté a varié ?

Désignons par r le prisonnier qui demande (le raisonneur), d le prisonnier désigné et t le troisième. Notons G le prisonnier qui est gracié et I la réponse du guardien à la demande du raisonneur.

1) Décrire les événements suivants par une courte phrase :

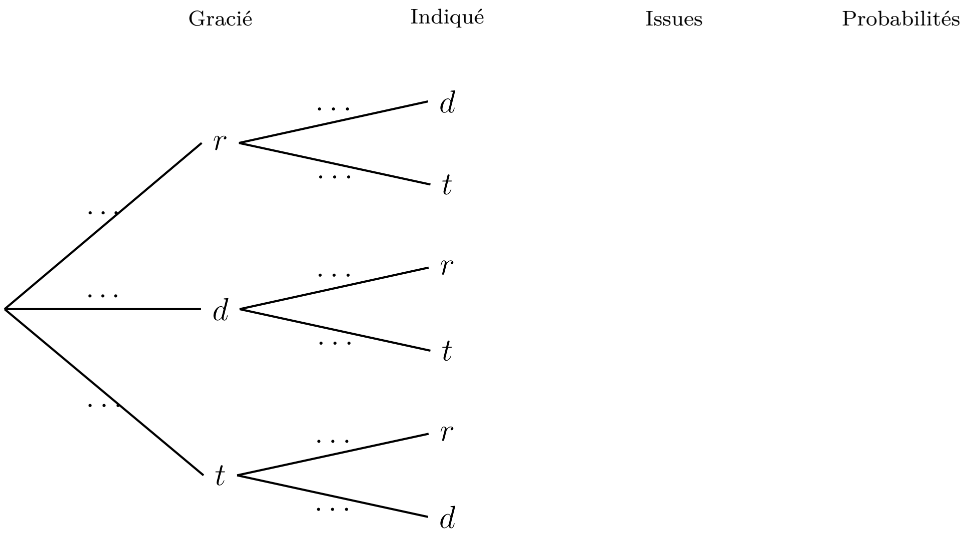
   $G = r$ est l'événement ....

   $I = t$ est l'événement ....

   $\{G = d\} \cap \{I = t\}$ est l'événement ....

   $\{G = r\} \cap \{I = d\}$ est l'événement ....

2) On modélise la situation par une expérience aléatoire. On suppose que le gracié est choisit au hasard, et que le guardien choisit au hasard un prisonnier qui sera exécuté à l'exception du raisonneur lui même. Complétez l'arbre de probabilité



3) Détérminez les probabilités suivantes.

a) $P(G = r) =$ .... $P(G = d) =$ .... $P(G = r) =$ ....

b) $P_{G\neq d}(G = r) =$ ....

c) $P_{G=r}(I = d) =$ .... $P_{G=r}(I = d) =$ ....

d) $P_{G=d}(I = r) =$ .... $P_{G=d}(I = r) =$ ....

e) $P(\{G = d\} \cap \{I = t\}) =$ ....

f) $P(\{G = t\} \cap \{I = d\}) =$ ....

4) Déterminez $P(I = d)$. En déduire $P_{I=d}(G = r)$ et $P_{I=d}(G = t)$.

5) Quelle confusion dans le calcul de probabilité commet le prisonnier ?

Problème 4 — Problème du Monty Hall.

Deux joueurs participent à un jeu :

- Le joueur A (maitre du jeu) cache un jeton sous une de 3 tasses à l'abri du regard du joueur B.
- Le joueur B pointe une des 3 tasses.
- Le joueur A révèle une tasse parmi les 2 restantes qui est vide. Si les deux tasses sont vides, il en choisit une au hasard.
- Le joueur A propose au joueur B de se tenir à son premier choix, ou bien de le changer.
- Le joueur B valide son choix définitif et note s'il a gagné ou perdu.

Le joueur B a-t-il intérêt à garder ou à modifier son choix de départ ?

Avant de vous précipiter dans une modélisation par expérience aléatoire, jouez une dizaine de parties avec votre binôme. Quelle tendance décelez vous ?

Joueur A	Joueur B	Nbrs de parties	nbr de victoires si B change d'avis	nbr de victoires si B se tient à son choix