Chapitre

Inéquations produit et quotient

16

Lors de l'étude de la fonction carré, nous avons appris à résoudre des équations se ramenant à $x^2 \geqslant k$ ou similaire. Ce chapitre aborde une approche plus systématique qui s'adapte à des situations plus complexes.

16.1 Signe d'expressions

■ Exemple 16.1 — Signe évident.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 9(8x-4)^2 + 7$ est strictement positive
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = -7(9x+3)^2 - 3$ est strictement négative
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = -8(3x-1)^2$ est négative. S'annulle pour $x = \dfrac{1}{3}$.

■ Exemple 16.2 — Signe d'un produit. Étudier le signe de $f(x) = (9x+10)(3x+1)$ selon les valeurs de x.

On dresse le tableau de signe du produit après avoir cherché ses zéros de chaque facteur :

x	$-\infty$			$+\infty$
$9x + 10$				
$3x + 1$				
$(9x+10)(3x+1)$				

On peut dire que $(9x+10)(3x+1) < 0$ lorsque ....

■ Exemple 16.3 — Signe d'un quotient. Étudier le signe de $f(x) = \dfrac{-3x+6}{9x+4}$ selon les valeurs de x.

Valeurs interdites : $9x+4 \neq 0 \iff x \neq$.

Le domaine de l'expression est ....

On dresse le tableau de signe du quotient après avoir cherché les zéros de chaque facteur :

x	$-\infty$			$+\infty$
$-3x + 6$				
$9x + 4$				
$\dfrac{-3x+6}{9x+4}$				

On peut dire que $\dfrac{-3x+6}{9x+4} > 0$ lorsque ....

16.1.1 Exercices : tableaux de signes d'expressions

Exercice 1 Compléter les tableaux de signes suivants

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x-3$			
$(2x-3)^2$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$x-6$			
$\dfrac{1}{x-6}$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x-2$			
-10			
$-10(-3x-2)$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x+2$			
5			
$\dfrac{5}{3x+2}$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x-2$			
$-10(-3x-2)^2$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x+2$			
$\dfrac{5}{(3x+2)^2}$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$5(-x+2)^2$			

x	$-\infty$		$+\infty$
$\dfrac{5}{-x+2}$			

Exercice 2 Cochez les expressions dont le tableau de signe est donné. Plusieurs réponses sont possibles

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

- ❏ $-x-2$
- ❏ $-5(-x-2)$
- ❏ $(-x-2)^2$
- ❏ $-5(-x-2)^2$
- ❏ $\dfrac{1}{-x-2}$
- ❏ $\dfrac{-5}{-x-2}$
- ❏ $\dfrac{-5}{(-x-2)^2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	

- ❏ $-x+1$
- ❏ $9(-x+1)$
- ❏ $(-x+1)^2$
- ❏ $9(-x+1)^2$
- ❏ $\dfrac{1}{-x+1}$
- ❏ $\dfrac{9}{-x+1}$
- ❏ $\dfrac{9}{(-x+1)^2}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{10}{3}$		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$-$	

- ❏ $-3x-10$
- ❏ $-7(-3x-10)$
- ❏ $(-3x-10)^2$
- ❏ $-7(-3x-10)^2$
- ❏ $\dfrac{1}{-3x-10}$
- ❏ $\dfrac{-7}{-3x-10}$
- ❏ $\dfrac{-7}{(-3x-10)^2}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{7}{2}$		$+\infty$
$D(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	

- ❏ $2x+7$
- ❏ $3(2x+7)$
- ❏ $(2x+7)^2$
- ❏ $3(2x+7)^2$
- ❏ $\dfrac{1}{2x+7}$
- ❏ $\dfrac{3}{2x+7}$
- ❏ $\dfrac{3}{(2x+7)^2}$

Exercice 3 Pour chaque fonction, déterminer les zéros des facteurs et compléter son tableau de signe.

x	$-\infty$			$+\infty$
$f(x) = (-2x+3)(-3x-5)$				

x	$-\infty$			$+\infty$
$g(x) = (5x-65)(7-2x)$				

x	$-\infty$			$+\infty$
$h(x) = (2x + 14)(6x + 24)$				

x	$-\infty$			$+\infty$
$i(x) = (-3x - 72)(-4x - 96)$				

x	$-\infty$			$+\infty$
$j(x) = \dfrac{-x}{x + 12}$				

x	$-\infty$			$+\infty$
$k(x) = \dfrac{2x - 5}{7 + 21x}$				

x	$-\infty$			$+\infty$
$l(x) = \dfrac{x^2}{5x+3}$				

x	$-\infty$			$+\infty$
$u(x) = \dfrac{-14x+12}{x^2+3}$				

x	$-\infty$				$+\infty$
$v(x) = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{1-9x}$					

x	$-\infty$				$+\infty$
$w(x) = \dfrac{5+x}{(x-6)(7x+8)}$					

16.2 Application à la résolution d'inéquations : exemples guidés

■ **Exemple 16.4** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \leqslant 4$ inconnue x.[1]

$x^2 \leqslant 4$

On transforme en une comparaison à zéro

$\iff \qquad \leqslant 0$

On factorise le membre non nul

$\iff \qquad \leqslant 0$

On dresse le tableau de signe de la forme factorisée après avoir cherché ses zéros :

x	$-\infty$			$+\infty$

$\iff \qquad \leqslant 0$

On utilise le tableau de signe de la forme factorisée

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 16.5** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > 5x$ inconnue x.

$x^2 > 5x$

On transforme en une comparaison à zéro

$\iff \quad x^2 - 5x > 0$

On factorise le membre non nul

$\iff \quad x(x-5) > 0$

On dresse le tableau de signe de la forme factorisée après avoir cherché ses zéros :

x	$-\infty$			$+\infty$
x				
$x - 5$				
$x(x-5)$				

$\iff \quad x(x-5) > 0$

On utilise le tableau de signe de la forme factorisée

$\iff \quad x \in$

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 16.6** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-5(x-2)^2 \geqslant 7$ inconnue x.

$-5(x-2)^2 \geqslant 7$

On transforme en une comparaison à zéro

$\iff \qquad \geqslant 0$

Expression avec signe évident

$\mathscr{S} =$

1. Nous allons retrouver le résultat connu $\mathscr{S} = [-2;2]$

■ **Exemple 16.7** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{-3x+9}{-4x+7} < 0$ inconnue x.

Valeurs interdites : $-4x+7=0 \iff x \neq$. Le domaine de résolution est...........................

✔ comparaison à zéro ✔ même dénominateur ✔ facteurs affines

On dresse le tableau de signe du quotient après avoir cherché les zéros des facteurs :

x	$-\infty$			$+\infty$
$-3x+9$				
$-4x+7$				
$\dfrac{-3x+9}{-4x+7}$				

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 16.8** Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{-3x+9}{-4x+7} \geqslant 0$ inconnue x.

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 16.9** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2+4x}{2x^2+3} > 0$ inconnue x.

Valeurs interdites : ....

✔ comparaison à zéro ✔ même dénominateur ✗ facteurs affines

$$\frac{x^2+4x}{2x^2+3} > 0$$

On factorise au maximum

$\iff$ > 0 ✔ facteurs affines ou signe évident

On dresse le tableau de signe du quotient après avoir cherché les zéros des facteurs :

x	$-\infty$			$+\infty$

$\mathscr{S} =$

à retenir : On résout des inéquations sous la forme de comparaison à zéro en dressant le tableau de signe de la forme factorisée au maximum !

■ **Exemple 16.10** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{1}{4x-3} \geqslant 2$ inconnue x.

Valeurs interdites : ....

$$\frac{1}{4x-3} \geqslant 2$$

On transforme en une comparaison à zéro

$\iff \qquad \geqslant 0$

$\iff \qquad \geqslant 0$

On ramène au même dénominateur le membre non nul

$\iff \qquad \geqslant 0$ ✔ facteurs affines

x	$-\infty$			$+\infty$

$\mathscr{S} =$

■ **Exemple 16.11** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{1}{4x+3} \geqslant \dfrac{2}{x}$ inconnue x.

Valeurs interdites : ....

$$\frac{1}{4x+3} \geqslant \frac{2}{x}$$

On transforme en une comparaison à zéro

$\iff \qquad \geqslant 0$

$\iff \qquad \geqslant 0$

On ramène au même dénominateur

$\iff \qquad \geqslant 0$

$\iff \qquad \geqslant 0$ ✔ facteurs affines.

x	$-\infty$				$+\infty$

$\mathscr{S} =$

16.2.1 Exercices : résolution d'inéquations à l'aide de tableaux de signes

Point méthode

1. Pour les inéquations rationnelles, préciser le domaine de résolution (valeurs interdites).
2. Vous ramènerez l'inéquation à une **comparaison à zéro** (i.e. une étude de signe)
3. Déterminer la forme factorisée du membre non nul.
4. Pour les inéquations rationnelles (avec des quotients) mettre au même dénominateur et factoriser numérateurs et dénominateurs si nécessaire.
5. Vous chercherez les racines des termes affines de la forme **factorisée**.
6. Dresser le tableau de signe de la forme factorisée
7. Conclure.

Exercice 4] Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$(I_1)\ :\ (2x+5)(x-4)(-x-8)<0$

$(I_2)\ :\ (x+1)^2(5x-3)\leqslant 0$

$(I_3)\ :\ 3x(x+3)-(x+3)^2<0$

$(I_4)\ :\ x^3+2x^2+x\geqslant 0$

$(I_5)\ :\ (4x^2-9)(x+1)>0$

$(I_6)\ :\ (2x-\sqrt{3})(x-\sqrt{2})>0$

Exercice 5] Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$(I_1)\ :\ x^2-4x\leqslant -2x-1$

$(I_2)\ :\ (2x+3)^2>(2x+3)(x-3)$

$(I_3)\ :\ (x+1)(x-3)\geqslant x^2-9$

$(I_4)\ :\ x^2-4+(x+2)(2x+5)<0$

Exercice 6] Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$(I_1)\ :\ \dfrac{2x-4}{x+2}>0$

$(I_2)\ :\ \dfrac{-2x+8}{3x-2}<0$

$(I_3)\ :\ \dfrac{2x^2}{-(x+1)(x+3)}\geqslant 0$

$(I_4)\ :\ \dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2+2}\leqslant 0$

$(I_5)\ :\ \dfrac{-5x}{(2x-7)^2}\geqslant 0$

$(I_6)\ :\ \dfrac{1+2x^2}{7-x}\geqslant 0$

Exercice 7] Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$(I_1)\ :\ \dfrac{3x+1}{6-5x}\geqslant 2$

$(I_2)\ :\ \dfrac{3x+1}{5-2x}\leqslant -3$

$(I_3)\ :\ \dfrac{3}{x+1}>\dfrac{2}{x-1}$

$(I_4)\ :\ \dfrac{x+5}{x-1}\leqslant\dfrac{x-3}{x+2}$

solution de l'exercice 4. $\mathscr{S}_1=\left]-8,-\frac{5}{2}\right[\cup\left]4,\infty\right[$ $\mathscr{S}_2=\left]-\infty,\frac{3}{5}\right]$ $\mathscr{S}_3=\left]-3,3\right[$ $\mathscr{S}_4=\{-1\}\cup[0,\infty[$ $\mathscr{S}_5=\left]-\frac{3}{2},-1\right[\cup\left]\frac{3}{2},\infty\right[$ $\mathscr{S}_6=\left]-\infty,\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},\infty\right[$ ■

solution de l'exercice 5. $\mathscr{S}_1=\{1\}$ $\mathscr{S}_2=\left]-\infty,-6\right[\cup\left]-\frac{3}{2},\infty\right[$ $\mathscr{S}_3=\left]-\infty,3\right]$ $\mathscr{S}_4=\left]-2,-1\right[$ ■

solution de l'exercice 6. $\mathscr{S}_1=\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,\infty\right[$ $\mathscr{S}_2=\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[\cup\left]4,\infty\right[$ $\mathscr{S}_3=\left]-3,-1\right[$ $\mathscr{S}_4=[-1,2]$ $\mathscr{S}_5=\left]-\infty,0\right]$ $\mathscr{S}_6=\left]-\infty,7\right[$ ■

solution de l'exercice 7. $\mathscr{S}_1=\left[\frac{11}{13},\frac{6}{5}\right[$ $\mathscr{S}_2=\left]\frac{5}{2},\frac{16}{3}\right]$ $\mathscr{S}_3=\left]-1,1\right[\cup\left]5,\infty\right[$ $\mathscr{S}_4=\left]-\infty,-2\right[\cup\left[-\frac{7}{11},1\right[$ ■

16.3 Club de Maths : un carré est positif et applications

Un grand nombre de résultats reposent sur le principe simple suivant : le carré d'un réel est un réel positif, et ce carré est nul si et seulement si le réel est nul. Dans cette feuille, nous explorons plusieurs applications (simples et moins simples) de ce principe.

Problème 1 — Petites astuces à connaître.

Montrer les inégalités suivantes sont vraies pour tout a et $b \in \mathbb{R}$:

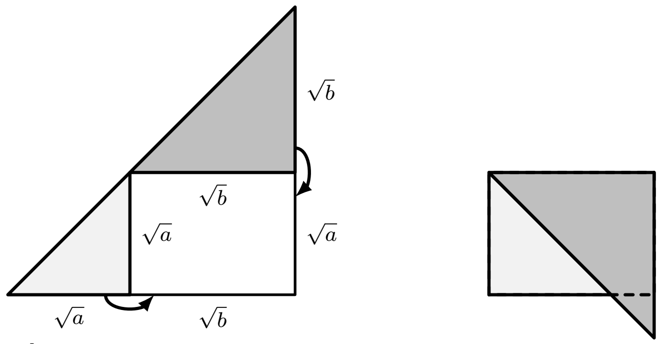
$$2ab \leqslant a^2 + b^2 \qquad ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4} \qquad (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$$

Problème 2 — Inégalité arithmético-géométrique.

a) Montrer que la figure ci-contre illustre l'inégalité pour $a, b \geqslant 0$, on a

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

b) Démontrer algébriquement l'inégalité précédente.



Problème 3 — Inégalité de Cauchy-Schwarz et application.

a) Montrer que pour tout $x, y, u, v \in \mathbb{R}$:

$$(x^2+y^2)(a^2+b^2) \geqslant \left(xa+yb\right)^2$$

b) En déduire pour $a > 0$ et $b > 0$ on a :

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$$

Problème 4 — Lemme du tourniquet. Montrer que pour tout a, b et $c \in \mathbb{R}$ on a :

$$ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$$

et que s'il y a égalité alors les trois réels sont égaux.

solution du problème 1. Il s'agit de montrer que la différence est positive. Quelle est cette différence ? Peut-on l'écrire sous forme factorisée ? ∎

solution du problème 3. Il s'agit de montrer que la différence est positive. Quelle est cette différence ? Peut-on l'écrire sous forme factorisée ? Pour la question b), choisir astucieusement x et y. ∎

solution du problème 4. Multiplier par deux des deux côtés, tout regrouper, reconnaître des identités remarquables ∎