Chapitre

Équations 8

8.1 Vocabulaire

Une **équation à une inconnue** est une égalité dans laquelle apparaît une ou plusieurs lettres.

Une solution de l'équation est une valeur de la ou les inconnues pour lesquelles l'égalité est vraie.

■ Exemple 8.1

Soit l'équation $2x + 3 = x - 5$ d'inconnue x.

a) $x = 0$ n'est pas solution de l'équation car l'égalité $2 \times 0 + 3 = 0 - 5$ est fausse

b) $x = -8$ est une solution de l'équation, car $2 \times (-8) + 3 = (-8) - 5$ est vraie.

Définition 8.1 Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs des inconnues qui rendent l'égalité vraie.

Définition 8.2 Deux équations sont dites **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions c.à.d elles sont vraies pour les mêmes valeurs de x.

■ Exemple 8.2

a) L'équations $x^2 = x$ d'inconnue x a pour solutions $x = 0$ et 1.
L'équation $2x = x + 1$ d'inconnue x a une solution unique $x = 1$.
Les équations ne sont pas équivalentes.

b) Les équations $2x = x+1$ et $4x = x+3$ d'inconnues x ont pour seule solution $x = 1$. Elles sont équivalentes.

Pour résoudre une équation on est amené à la modifier vers une équation **équivalente** plus simple.

8.1.1 Exercices : résolutions d'équations du premier degré

Exercice 1 — Vérifier si une valeur est solution d'une équation à 1 inconnue.

	Vrai	Faux
1/ $x=7$ est une solution de l'équation $-2x+14=0$ d'inconnue x	☐	☐
2/ $x=6$ est une solution de l'équation $-2x+14=0$ d'inconnue x	☐	☐
3/ 2 est une solution de l'équation $2x+1=5$ d'inconnue x	☐	☐
4/ 2 est la seule solution de l'équation $2x+1=5$ d'inconnue x	☐	☐
5/ 3 est une solution de l'équation $x^2=3x$ d'inconnue x	☐	☐
6/ 9 est une solution de l'équation $3x+9=5x-9$ inconnue x	☐	☐
7/ 2 est une solution de l'équation $3x+9=5x-9$ inconnue x	☐	☐
8/ -2 est une solution de l'équation $x^2=-4$ inconnue x	☐	☐
9/ 2 est une solution de l'équation $x^2-10x+16=0$ inconnue x	☐	☐
10/ 3 est la seule solution de l'équation $(x-3)(x-2)=0$ inconnue x	☐	☐

On ne change pas les solutions d'une équation si :

- on **ajoute** aux **2 membres** de l'équation une même expression.
- on **multiplie** les **2 membres** de l'équation par **une même** expression **non nulle**.
- on **développe, factorise, réduit ...** un des deux membres de l'équation.

Pour éliminer le terme d'une somme on ajoutera aux deux membres l'opposé de ce terme.
Pour éliminer un facteur d'un produit on multiplie les deux membres par l'inverse de ce terme.

■ **Exemple 8.3 — Isoler l'inconnue en une étape.**

$7x=-25$ $\quad$ $x+7=-25$ $\quad$ $-3x=7$ $\quad$ $-3+x=7$ $\quad$ $\dfrac{2}{3}x=8$

Exercice 2 — résolution en une étape. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

(E_1) $3+x=8$	(E_4) $-15=-4x$	(E_7) $-7=x-6$	(E_{10}) $-\frac{5}{3}x=21$
(E_2) $-15=3x$	(E_5) $9=x-4$	(E_8) $7+x=0$	(E_{11}) $\frac{x}{4}=12$
(E_3) $x-3=8$	(E_6) $-3x=21$	(E_9) $42x=0$	(E_{12}) $13=-x$

■ **Exemple 8.4 — Isoler l'inconnue en deux étapes.**

$2x+5=6$ $\quad$ $-3x-9=0$ $\quad$ $2x-1=5$ $\quad$ $-3=7x-5$

Exercice 3 — résolutions d'équations en 2 étapes.

(E_1) $2x+3=21$	(E_3) $3=5x-7$	(E_5) $-5x+3=0$	(E_7) $3(x-7)=21$
(E_2) $-2x+5=21$	(E_4) $-3x+4=0$	(E_6) $4(x+2)=42$	(E_8) $-3(x+2)=21$

■ **Exemple 8.5 — inconnue des 2 côtés et membres à développer.**

$5x+1=2x+5$ $\qquad$ $3(x-5)=-2x+5$ $\qquad$ $5(x+2)=2(x-4)$

Exercice 4 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x

(E_1) $3x-12=7x$	(E_4) $x+5=3(x+1)$	(E_7) $-3(2x-1)=-3(x-5)$
(E_2) $3(x+5)=6x$	(E_5) $3(x+5)=x+1$	(E_8) $3(2x+5)=3(2x-1)$
(E_3) $4(x+1)=x+7$	(E_6) $-3(x+5)=-3(2x+1)$	(E_9) $4(x-1)=-7x+5$

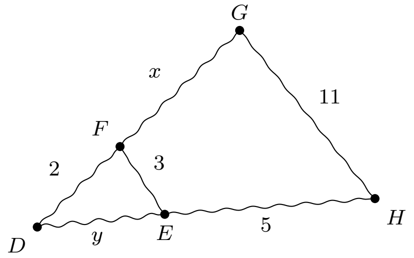
■ **Exemple 8.6** À l'aide de l'égalité des produit en croix, transformer et résoudre les équations suivantes.

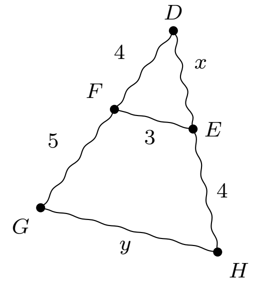
$\dfrac{x+4}{-3x-3}=\dfrac{7}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{6x-1}{3x-3}=5$ $\qquad$ $\dfrac{-5x+2}{x+3}=0$

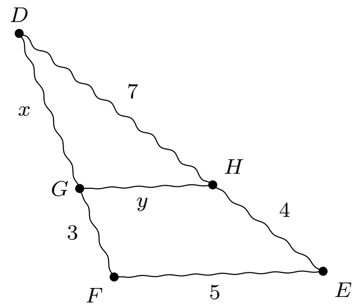
Exercice 5 Mêmes consignes

(E_1) $\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{2}{3}$	(E_2) $\dfrac{2x-3}{3x-2}=\dfrac{5}{6}$	(E_3) $\dfrac{5}{2x-3}=\dfrac{3}{4x-5}$

Exercice 6 — retour sur le théorème de Thalès. Sur les figures ci-dessous, les droites (EF) et (GH) sont parallèles. Les longueurs sont données en cm. Calculer x et y.







Exercice 7 — mise en équation 1. https://www.geogebra.org/m/fm8avkfs

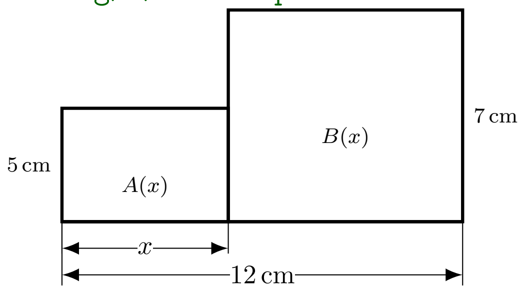
Tasha, Jadzia et Naomi ont un total de 2266 €. Jadzia a 241 € de moins que 8 fois la somme de Tasha. Naomi a 6 fois la somme de Jadzia. Déterminer les parts de chacune d'elles.

Exercice 8 — mise en équation 2. https://www.geogebra.org/m/xsz3wtxt

Mon rectangle a un périmètre de 882 m. Sa longueur mesure 144 m de plus que 8 fois sa largeur. Détermine les dimensions de mon rectangle.

Exercice 9 — mise en équation 3. https://www.geogebra.org/m/uvrzbr5p

Déterminer la valeur de x pour laquelle les aires $A(x)$ et $B(x)$ des rectangles suivants sont égales.



Exercice 10

1) Ecrire en fonction de x, le résultat affiché par les programmes A et B ci-dessous.
2) Pour quelle(s) valeurs de x, le programme A affiche 21 ?
3) Même question pour le programme B.
4) Pour quelle(s) valeur(s) de x les programmes ci-dessous retournent-ils la même valeur ?

```
définir programme_A (x)
mettre y à (x) + (5)
mettre y à (y) * (6)
dire (y)
```

```
définir programme_B (x)
mettre y à (x) * (6)
mettre y à (y) + (5)
dire (y)
```

Exercice 11

Pour quelles valeurs de x, ces 2 programmes affichent la même chose.

```
définir programme_A (x)
mettre y à (x) + (6)
mettre z à (y) * (y)
dire (z)
```

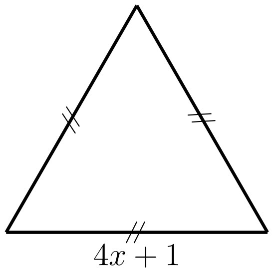
```
définir programme_B (x)
mettre y à (x) + (12)
mettre z à (y) * (3)
dire (z)
```

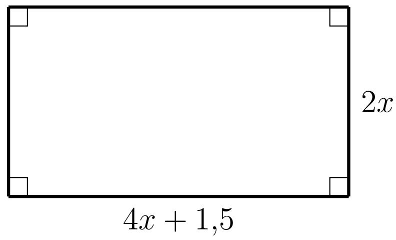
Exercice 12 — Brevet. Amérique du Sud, 2019.

1) Calculer $5x^2 - 3(2x+1)$ pour $x = 4$.
2) Montrer que pour tout nombre x on a : $5x^2 - 3(2x+1) = 5x^2 - 6x - 3$
3) Résoudre l'équation $5x^2 - 3(2x+1) = 5x^2 - 4x + 1$.

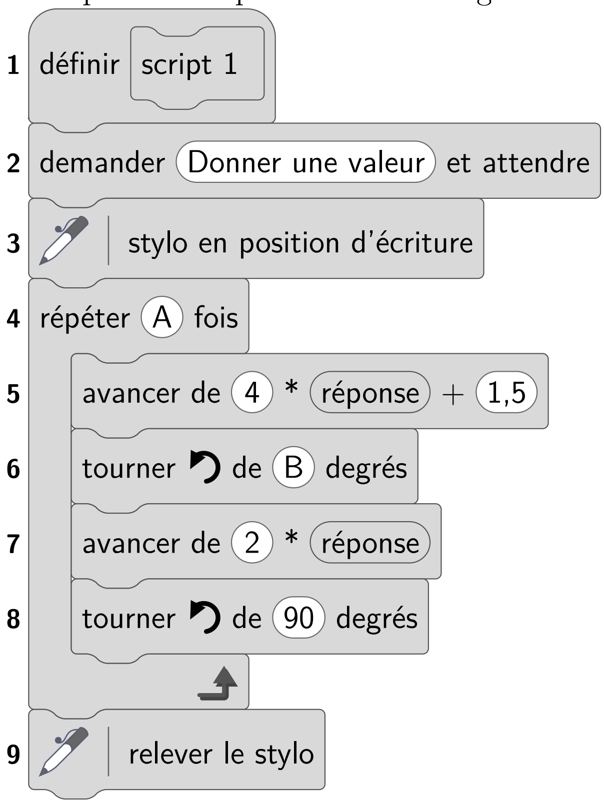
Exercice 13 — Brevet. Centres étrangers, 2019. environ 20 min

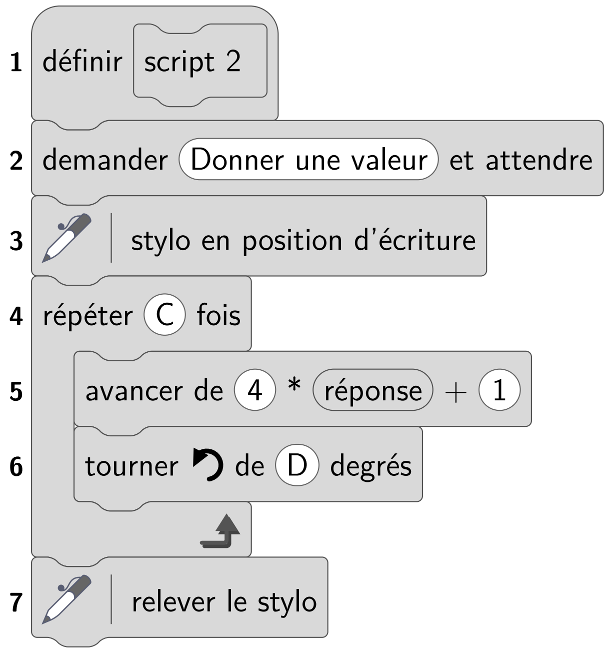
On considère les deux figures ci-dessous, un triangle équilatéral et un rectangle, où x représente un nombre positif quelconque. Toutes les longueurs sont exprimées en centimètre.





1) Construire le triangle équilatéral pour $x = 2$.
2) a) Démontrer que le périmètre du rectangle en fonction de x peut s'écrire $12x + 3$.
   b) Pour quelle valeur de x le périmètre du rectangle est-il égal à 18 cm ?
3) Est-il vrai que les deux figures ont le même périmètre pour toutes les valeurs de x ? Justifier.
4) On a créé les scripts (ci-dessous) sur `Scratch` qui, après avoir demandé la valeur de x à l'utilisateur, construisent les deux figures.
   Dans ces deux scripts, les lettres A, B, C et D remplacent des nombres.
   Donner des valeurs à A, B, C et D pour que ces deux scripts permettent de construire les figures de la partie 1 et préciser alors la figure associée à chacun des scripts.





solutions de l'exercice 1.

	Vrai	Faux
1/ $x = 7$ est une solution de l'équation $-2x + 14 = 0$ d'inconnue x	☒	☐
2/ $x = 6$ est une solution de l'équation $-2x + 14 = 0$ d'inconnue x	☐	☒
3/ 2 est une solution de l'équation $2x + 1 = 5$ d'inconnue x	☒	☐
4/ 2 est la seule solution de l'équation $2x + 1 = 5$ d'inconnue x	☒	☐
5/ 3 est une solution de l'équation $x^2 = 3x$ d'inconnue x	☒	☐
6/ 9 est une solution de l'équation $3x + 9 = 5x - 9$ inconnue x	☒	☐
7/ 2 est une solution de l'équation $3x + 9 = 5x - 9$ inconnue x	☐	☒
8/ -2 est une solution de l'équation $x^2 = -4$ inconnue x	☒	☐
9/ 2 est une solution de l'équation $x^2 - 10x + 16 = 0$ inconnue x	☒	☐
10/ 3 est la seule solution de l'équation $(x - 3)(x - 2) = 0$ inconnue x	☐	☒

■

solutions de l'exercice 2.

$S_1 = \{5\}$;
$S_2 = \{-5\}$;
$S_3 = \{11\}$;
$S_4 = \left\{\frac{15}{4}\right\}$;
$S_5 = \{13\}$;
$S_6 = \{-7\}$;
$S_7 = \{-1\}$;
$S_8 = \{-7\}$;
$S_9 = \{0\}$;
$S_{10} = \{-12.6\}$;
$S_{11} = \{48\}$;
$S_{12} = \{-13\}$;

■

solutions de l'exercice 3.

$S_1 = \{9\}$;
$S_2 = \{-8\}$;
$S_3 = \{2\}$;
$S_4 = \left\{\frac{4}{3}\right\}$;
$S_5 = \left\{\frac{3}{5}\right\}$;
$S_6 = \left\{\frac{17}{2}\right\}$;
$S_7 = \{14\}$;
$S_8 = \{-9\}$;

■

solutions de l'exercice 4.

$S_1 = \{-3\}$;
$S_2 = \{5\}$;
$S_3 = \{1\}$;
$S_4 = \{1\}$;
$S_5 = \{-7\}$;
$S_6 = \{4\}$;
$S_7 = \{-4\}$;
$S_8 = \{6\}$;
$S_9 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$;

■

solutions de l'exercice 5.

$S_1 = \{-13\}$;
$S_2 = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$;
$S_3 = \left\{\frac{8}{7}\right\}$;

■

8.2 Equations produit nul

Théorème 8.7 — produit nul. Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$

Démonstration. Supposons $A = 0$, alors $AB = 0$.

Supposons que $A \neq 0$, alors A admet un inverse $\dfrac{1}{A}$ et son inverse est non nul.

$$\begin{aligned} AB &= 0 \\ \underbrace{\frac{1}{A} \times A}_{1} \times B &= \frac{1}{A} \times 0 \quad \times \frac{1}{A} \\ B &= 0 \end{aligned}$$

■

L'équation $x^2 = k$, d'inconnue x admet :

$k > 0$ deux solutions $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$

$k = 0$ une solution $x = 0$.

$k < 0$ aucune solution.

8.2.1 Exercices : résolutions d'équations se ramenant à un produit nul

■ **Exemple 8.8** À l'aide de l'égalité des produit en croix, transformer et résoudre les équations suivantes.

$(5x-3)(2x+5)=0$ $\quad$ $(3x-2)^2(5x+2)^3=0$ $\quad$ $(-2x-7)^2=0$

$4x^2+7x=0$ $\quad$ $9x^2-36=0$ $\quad$ $5x^2=36x$ $\quad$ $(x+1)(2x+3)=5(x+1)$

Exercice 1 — produit nul. Mêmes consignes

(E_1) $(3x+2)(4-2x)=0$	(E_4) $(3x+1)^2=0$	(E_7) $(4x-3)(2x+5)=0$
(E_2) $(3x+6)+(4x+1)=0$	(E_5) $(4x-1)(4x+1)=15$	(E_8) $4x(2x+1)=0$
(E_3) $8x(x+3)=0$	(E_6) $0=(5x+3)(2x-4)$	(E_9) $(x+3)(2x-1)(5-3x)=0$

Exercice 2 — factoriser pour résoudre. Mêmes consignes

(E_1) $x^2+2x=0$	(E_4) $4x^2-9=0$	(E_7) $(8x+3)^2=5(8x+3)$
(E_2) $3x^2-2x=0$	(E_5) $9x^2=4x$	(E_8) $(8x+3)^2=25$
(E_3) $x^2-4=0$	(E_6) $9x^2=4$	(E_9) $(8x+3)^2=(5x+2)(2x-7)$

■ **Exemple 8.9 — isoler x^2.** Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

$x^2=5$ $\quad$ $x^2-9=0$ $\quad$ $2x^2+5=3x^2-13$

Exercice 3 Mêmes consignes

$(E_1)\ x^2 = 36$	$(E_3)\ x^2 - 5 = 0$	$(E_5)\ 3 - x^2 = 0$	$(E_7)\ 45 = 2x^2 - 5$
$(E_2)\ x^2 - 25 = 0$	$(E_4)\ x^2 = -25$	$(E_6)\ x^2 - 18 = 82$	$(E_8)\ 3x^2 - 4 = 71$

Exercice 4 — Brevet 2021, centres étrangers.]

Un professeur propose à ses élèves trois programmes de calculs, dont deux sont réalisés avec un logiciel de programmation.

Programme A

```
quand [drapeau] est cliqué
demander (choisir un nombre) et attendre
mettre [nombre choisi] à (réponse)
mettre [Valeur 1] à ((1) + (nombre choisi))
mettre [Valeur 2] à ((3) * (Valeur 1))
mettre [résultat] à ((Valeur 2) - (3))
dire (regrouper (On obtient) et (résultat)) pendant (2) secondes
```

Programme B

```
quand [drapeau] est cliqué
demander (choisir un nombre) et attendre
mettre [nombre choisi] à (réponse)
mettre [Valeur 1] à ((nombre choisi) + (3))
mettre [Valeur 2] à ((nombre choisi) - (5))
mettre [résultat] à ((Valeur 1) * (Valeur 2))
dire (regrouper (On obtient) et (résultat)) pendant (2) secondes
```

Programme C

- Choisir un nombre
- Multiplier par 7
- Ajouter 3
- Soustraire le nombre de départ

1) a) Montrer que si on choisit 1 comme nombre de départ alors le programme A affiche pendant 2 secondes « On obtient 3 ».

   b) Montrer que si on choisit 2 comme nombre de départ alors le programme B affiche pendant 2 secondes « On obtient -15 ».

2) Soit x le nombre de départ, quelle expression littérale obtient-on à la fin de l'exécution du programme C ?

3) Un élève affirme qu'avec un des trois programmes on obtient toujours le triple du nombre choisi. A-t-il raison ?

4) a) Résoudre l'équation $(x + 3)(x - 5) = 0$.

   b) Pour quelles valeurs de départ le programme B affiche-t-il « On obtient 0 » ?

5) Pour quelle(s) valeur(s) de départ le programme C affiche-t-il le même résultat que le programme A ?

solutions de l'exercice 1.

$S_1 = \left\{-\frac{5}{8}, 2\right\}$; $S_2 = \left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$; | $S_3 = \{-1\}$; $S_4 = \{-3, 0\}$; | $S_5 = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$; $S_6 = \{-1, 1\}$; | $S_7 = \left\{-\frac{3}{5}, 2\right\}$; $S_8 = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right\}$; | $S_9 = \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$; $S_{10} = \left\{-3, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right\}$;

■

solutions de l'exercice 2.

$S_1 = \{-2, 0\}$; $S_2 = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$; | $S_3 = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$; $S_4 = \left\{0, \frac{4}{9}\right\}$; | $S_5 = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$; $S_6 = \left\{-\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right\}$; | $S_7 = \left\{-1, \frac{1}{4}\right\}$; $S_8 = \left\{-\frac{3}{8}, -\frac{1}{3}\right\}$;

■

solutions de l'exercice 3.

$S_1 = \{-6, 6\}$; $S_2 = \{-5, 5\}$; | $S_3 = \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$; $S_4 = \{\}$; | $S_5 = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$; $S_6 = \{-10, 10\}$; | $S_7 = \{-5, 5\}$; $S_8 = \{-5, 5\}$;

■

solution de l'exercice 4.

1) Elle obtient : $4 \to -1 \to -4$.
2) Lucie obtient $-3 \to 9 \to 5$.
3) On a successivement avec le programme A : : $x \to x - 5 \to x(x-5)$.
4) On a successivement avec le programme B : : $x \to x^2 \to x^2 - 4$.
5) On veut trouver x tel que :
   $x(x-5) = x^2 - 4$ ou $x^2 - 5x = x^2 - 4$ ou encore $4 = 5x$, soit en multipliant chaque membre par $\frac{1}{5}$, $x = \frac{4}{5} = 0,8$.

■