2.4 Événements indépendants, applications

Théorème 2.8 — Théorème de Bayes. Pour deux événements A et B (avec $P(A)$ et $P(B) \neq 0$), on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$$

On peut désormais dire que A et B sont indépendants.

Démonstration. Pour $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ on a :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)} = \frac{P_A(B)}{P(B)} = \frac{P_B(A)}{P(A)}$$

■

Corollaire 2.9 Pour deux événements A et B de probabilité non nulle. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) B est indépendant de A $(P_A(B) = P(B))$

(ii) A est indépendant de B $(P_B(A) = P(A))$

(iii) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

R Pour simplifier on considère que deux événments sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ même si leur probabilités sont nulles.

Théorème 2.10 Les énoncés suivants sont équivalents :

(i) A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(ii) A et $\overline{B}$ sont indépendants : $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$

(iii) $\overline{A}$ et B sont indépendants : $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B)$

(iv) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants : $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$

Démonstration. Si A et B sont indépendants. Nous allons montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

$$\begin{aligned}
P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \quad \text{\textit{A et B indépendants}} \\
&= P(B) - P(A)P(B) \\
&= P(B)(1 - P(A)) \\
&= P(\overline{A})P(B)
\end{aligned}$$

■

2.4.1 Exercices : Indépendance de deux événements. Application

Exercice 29 Cochez si les événements A et B sont indépendants ou non.

	Indépendants	Non indépendants
1/ $P(A)=\frac{7}{8}$, $P(B)=\frac{2}{7}$ et $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$.	☐	☐
2/ $P(A)=0,2$, $P(B)=0,8$ et $P(A\cap B)=0,9$.	☐	☐
3/ $P(A)=0,48$, $P(B)=0,25$. A et B sont incompatibles.	☐	☐
4/ $P(A)=0,4$, $P(B)=0,8$ et $P(A\cap B)=0,32$.	☐	☐

Exercice 30

Les événements A et B sont indépendants, calculez les probabilités demandées dans chaque cas.

1) $P(A)=0,8$ et $P(A\cap B)=0,45$. Calculer $P(B)$.
2) $P(A)=P(B)$ et $P(A\cap B)=0,25$. Calculer $P(A)$
3) $P(\overline{A})=0,6$ et $P(A\cap B)=0,3$. Calculer $P(A)$ puis $P(B)$.
4) $P(A)=0.5$ et $P(B)=0.7$, calculer $P(A\cap B)$ et $P(\overline{A}\cap B)$

Exercice 31

$P(X)=0.5$, $P(Y)=0.3$ et $P(X\cup Y)=0.65$. Montrer que X et Y sont indépendants.

Exercice 32

$P(X)=0.3$, $P(Y)=0.42$ et $P(X\cup Y)=0.594$. Montrer que X et Y sont indépendants.

Exercice 33

On lance un dé cubique équilibré. Soit les événements $A=$ « le résultat est $\geqslant 4$ » et $B=$ « le résultat est un nombre pair ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 34

On rappelle que, dans un jeu de 32 cartes, on trouve quatre couleurs (Carreau $\diamondsuit$ et Coeur $\heartsuit$ sont de couleur rouge. Trèfle $\clubsuit$ et Pique $\spadesuit$) et, dans chaque couleur, on a une série de 8 cartes (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As).

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Soit les événements $A=$ « la carte tirée est un roi », $B=$ « la carte tirée est un as » et $C=$ « la carte tirée est rouge »

1) Justifiez que les événements A et C sont indépendants.
2) Justifiez que les événements A et $\overline{B}$ ne sont pas indépendants.
3) Les événements $A\cup C$ et B sont-ils indépendants ?

Exercice 35

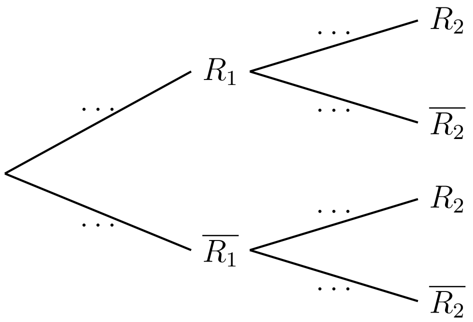
Les élèves d'un collège doivent choisir une option parmi « latin » et « théâtre » et une langue vivantes parmi « allemand » et « italien ». Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves.

1) Les événements « faire du théâtre et de l'italien » et « faire du théâtre » sont-ils indépendants ?
2) Les événements « faire du latin » et « faire de l'allemand » sont-ils indépendants ?
3) Les événements « faire du latin » et « faire du théâtre » sont-ils indépendants ?

	Italien	Allemand	Total
Latin	30	120	150
Théâtre	90	80	170
Total	120	200	320

Exercice 36 — tirage avec remise.

Une urne opaque contient 11 boules rouges et 12 boules vertes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur avant de la remettre, puis on tire de nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur.



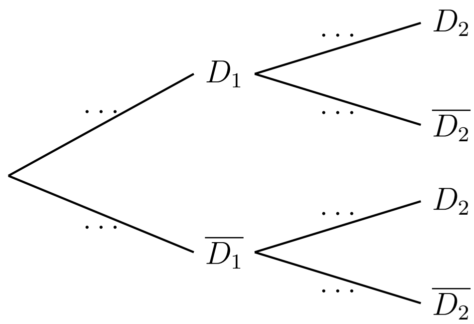
Soit les événements R_1 « la boule tirée au premier est rouge » et R_2 « la boule tirée au second tour est rouge ».

1) Complétez l'arbre de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire.
2) Quelle est la probabilité qu'une boule rouge soit tirée au deuxième tirage ?
3) Justifiez que les événements R_1 et R_2 sont indépendants.

Exercice 37

On lance un dé cubique équilibré 2 fois consécutives. Soit l'événement $D_1 =$« obtenir un 6 au premier lancer » et $D_2 =$ « obtenir un 6 au second lancer ».

1) Complétez l'arbre de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire.
2) Quelle est la probabilité d'obtenir deux 6 ?
3) Montrer que les événements $\overline{D_1}$ et D_2 sont indépendants.



Exercice 38 — Problème du Grand-Duc de Toscane.

On lance 3 dés cubiques équilibrés (D_1, D_2 et D_3), et on note la face obtenue pour chaque dans l'ordre. On suppose que les résultats des lancers de chaque dé sont indépendants.

1) Quelle est la probabilité $P(D_2 = 5)$ que le second dé tombe sur 5 ?
2) Quelle est la probabilité $P(D_2 = 5 \text{ et } D_3 = 2)$ que le second dé tombe sur 5 et le troisième sur 2.
3) Quelle est la probabilité $P(D_1 = 2; D_2 = 1; D_3 = 3)$ que le premier dé tombe sur 2, le second sur 1 et le dernier sur 3 ?
4) Quelle est la probabilité d'obtenir simultanément un 1, un 2 et un 3 ?
5) Identifier toutes les différentes façons d'obtenir une somme des 3 dés égale à 9.
6) Démontrer que la probablité d'obtenir une somme égale à 9 est $\dfrac{25}{216}$.
7) Démontrer que la probabilité d'obtenir une somme égale à 10 est de $\dfrac{27}{216}$.

2.4.2 Solutions et indications des exercices : indépendance

solution de l'exercice 29.

	Indépendants	Non indépendants
1/ $P(A)=\frac{7}{8}$, $P(B)=\frac{2}{7}$ et $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$.	☒	☐
2/ $P(A)=0,2$, $P(B)=0,8$ et $P(A\cap B)=0,9$.	☐	☒
3/ $P(A)=0,48$, $P(B)=0,25$. A et B sont incompatibles.	☐	☒
4/ $P(A)=0,4$, $P(B)=0,8$ et $P(A\cap B)=0,32$.	☒	☐

■

solution de l'exercice 30.

1) $P(B)=0.45/0.8=0.5625$
2) $P(A)P(B)=P(A\cap B)$, donc $P(A)^2=0.25$; $P(A)=0.5$.
3) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.6=0.4$, $P(B)=P(A\cap B)/P(A)=0.3/0.4=0.75$
4) $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.5\times0.7=0.35$. $\overline{A}$ et B sont indépendants : $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})P(B)=(1-0.5)0.7=0.35$.

■

solution de l'exercice 31.

$P(X\cap Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cup Y)=0.5+0.3-0.65=0.15$, $P(X)P(Y)=0.5\times0.3=0.15$. ■

solution de l'exercice 32.

$P(X\cap Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cup Y)=0.3+0.42-0.594=0.126$, $P(X)P(Y)=0.3\times0.42=0.126$. Donc $P(X\cap Y)=P(X)P(Y)$ et les événements X et Y sont indépendants. ■

solution de l'exercice 33.

$P(A)=0.5$; $P(B)=0.5$ et $P(A\cap B)=2/6=\frac{1}{3}$. A et B ne sont pas indépendants. ■

solution de l'exercice 34.

1) $P(A)=1/8$; $P(C)=1/2$; $P(A\cap C)=2/32=1/16=P(A)P(C)$.
2) $P(A)=1/8$; $P(B)=1/8$. $P(A\cap B)=0$, A et B ne sont pas indépendants. A et $\overline{B}$ ne sont pas indépendants.
3) $P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)=18/32=9/16$. $P(B)=1/8$ et $P((A\cup C)\cap B)=2/32=1/16$. Les événements ne sont pas indépendants.

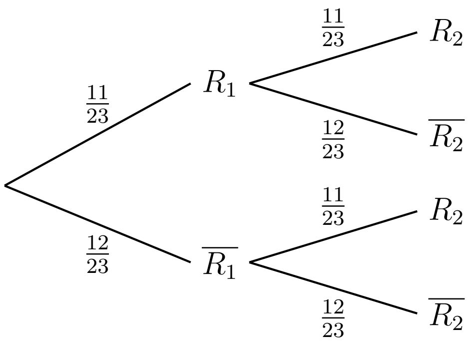
■

solution de l'exercice 35.

1) $P(I\cap T)=90/320$ et $P(T)=170/320$. NON
2) $P(L)=150/320$ et $P_A(L)=120/200$. NON
3) $P(L)=150/320$ et $P_T(L)=90/170$. NON

■

solution de l'exercice 36.

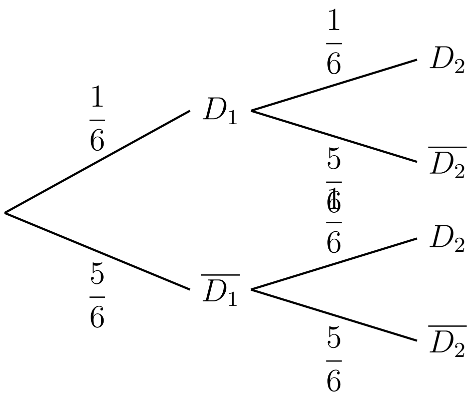
1) 

2) probabilité totale $P(R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) + P(\overline{R_1})P_{\overline{R_1}}(R_2) = \dfrac{11}{23} \times \dfrac{11}{23} + \dfrac{12}{23} \times \dfrac{11}{23} = \dfrac{11}{23}$

3) $P(R_2) = \dfrac{11}{23} = P_{R_1}(R_2)$

■

solution de l'exercice . 37

1) 

2) $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P_{D_1}(D_2) = 1/36$

3) $P_{\overline{D_1}}(D_2) = 1/6 = P(D_2)$. Les événements sont indépendants.

■

solution de l'exercice 38. réponses données dans l'énoncé. ■