

Chapitre 1

Ensembles

Table 1.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 1...

	Pour m'entraîner 📌		
Je dois connaître... / savoir faire...	🏠	💎	🔗
Vocabulaire des ensembles			
écrire un ensemble	1,		
utiliser les symboles \in, \exists, \notin et \subset et \supset	2, 3		
intersection \cap , union \cup , et complémentaire	4, 5	6, 14, 15	
exploiter et produire des diagrammes de Venn	7, 8, 9	10, 11, 12	16, 17
Ensembles de nombres réels			
justifier qu'un nombre est dans \mathbb{D}	20		
justifier qu'un nombre est dans \mathbb{Q}	18,	21	22
classification des réels et généralités	19	24, 25	

1.1 Vocabulaire des ensembles

■ **Exemple 1.1** Les ensembles de la figure 1.1 s'écrivent : $A = \{43; 0; 7; 188\}$, $B = \{7; 4; 82\}$. L'ordre d'écriture des éléments entre accolades n'est pas important : $\{43; 0; 7; 188\} = \{7; 43; 188; 0\}$.

7 est un élément, $\{7\}$ est un ensemble.

43; 0; 7 et 188 sont les **éléments** de l'ensemble A.

$43 \in A$ se lit « 43 **appartient** à A ».

$82 \notin A$ se lit « 82 **n'appartient pas** à A ».

Tout élément de l'ensemble $D = \{188; 0; 43\}$ **appartient** à A.

On dira que $D \subset A$ (**inclus**) ou $A \supset D$ (**contient**).

$B \not\subset A$. B n'est pas un sous-ensemble de A.

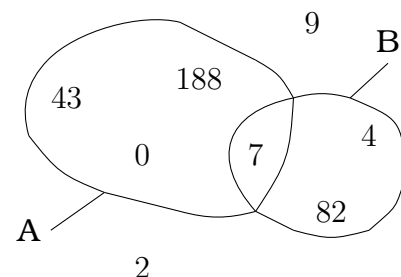


Figure 1.1 – Diagramme des ensembles A et B

🔒 Les éléments d'un ensemble sont distincts deux-à-deux. Il n'est pas correct d'écrire $\{0; 5; 0\}$.

1.2 Ensembles particuliers

Définition 1.1 — \mathbb{R} ensemble des nombres réels. est l'ensemble des nombres que nous connaissons.

\mathbb{R} est représenté par une droite graduée (figure 1.2).

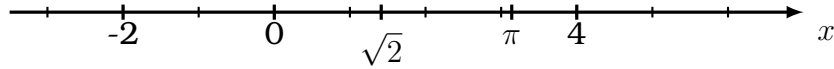


Figure 1.2 — Chaque nombre réel $x \in \mathbb{R}$ correspond à un unique point $M(x)$ de la droite graduée. Réciproquement, à chaque point de la droite graduée correspond un unique réel, appelé *abscisse* de ce point.

Définition 1.2 — \mathbb{N} ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$. $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$.

Définition 1.3 — \mathbb{Z} ensemble des entiers relatifs. $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

\mathbb{Z} est composé des nombres entiers naturels et de leurs opposés : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Définition 1.4 — nombres décimaux. L'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme du produit d'une puissance de 10 par un entier non divisible par 10 sont dit décimaux.

$$\mathbb{D} = \{a \times 10^n \mid a \in \mathbb{Z} \text{ non divisible par } 10 \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$$

Proposition 1.1 Tout nombre décimal s'écrit sous la **forme scientifique** $a \times 10^n$, ou $n \in \mathbb{Z}$ et la mantisse $a \in \mathbb{D}$ vérifie $1 \leq a < 10$. L'**ordre de grandeur** du nombre est alors le produit de l'entier le plus proche de a par 10^n .

■ **Exemple 1.2** Les nombres décimaux ont une écriture décimale finie :

x	justification $x \in \mathbb{D}$ au sens de la définition 1.4	écriture scientifique	ordre de grandeur
26 500	265×10^2	$2,65 \times 10^4$	3×10^4
42,5	425×10^{-1}	$4,25 \times 10^1$	4×10^1
0,001 65			
$\frac{3}{5} = 0,6$			

R Il est imprécis de parler de « nombres à virgule ». 1 et $\frac{2}{5} \in \mathbb{D}$ mais il n'y a pas de virgule dans 1 ou $\frac{2}{5}$. De plus il ne faut pas confondre **écriture décimale** et **nombre décimal**.

Les nombres dont l'écriture décimale est infinie ne seront pas dans \mathbb{D} , en particulier :

Proposition 1.2 — admis provisoirement. $\frac{1}{3} = 0,333\ 333\ 3\dots$ n'est pas un nombre décimal $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

R L'écriture 0,999 999 9... n'est pas considérée une écriture décimale valable du nombre 1 $\in \mathbb{N}$.

Définition 1.5 — nombres rationnels. L'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme une fraction irréductible d'entiers sont dit rationnels.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, \text{ sans diviseurs communs} \right\}$$

■ **Exemple 1.3** Les nombres rationnels ont une écriture décimale finie ($\mathbb{Q} \supset \mathbb{D}$) ou **périodique** :

x	justification de $x \in \mathbb{Q}$	écriture décimale	classification
-13	$-13 = \frac{-13}{1}$ irréductible.	-13 (finie)	$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
9,75	$9,75 = \frac{975}{100} =$	9,75 (finie)	$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
$\frac{251}{25}$		$251 \div 25 = 10,04$ (finie)	$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
$\frac{150}{7}$		$150 \div 7 = 21,428571\dots$ (périodique)	$\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{D}}$

R L'écriture décimale d'un nombre rationnel peut avoir une longue période :

$\frac{1}{49} = 1 \div 49 = 0,020408163265306122448979591836734693877551\dots$

Définition 1.6 Les nombres réels mais pas rationnels $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ sont dit **irrationnels**.

Proposition 1.3 — admis provisoirement. $\sqrt{2}$ est un irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

■ **Exemple 1.4** Il n'est pas trivial de justifier que des nombres réels comme π ou $\sqrt{5}$ sont irrationnels. Néanmoins, on peut *supposer* qu'un nombre est irrationnel lorsque son écriture décimale *semble infinie et non périodique* (explorer **l'écriture décimale de π**).

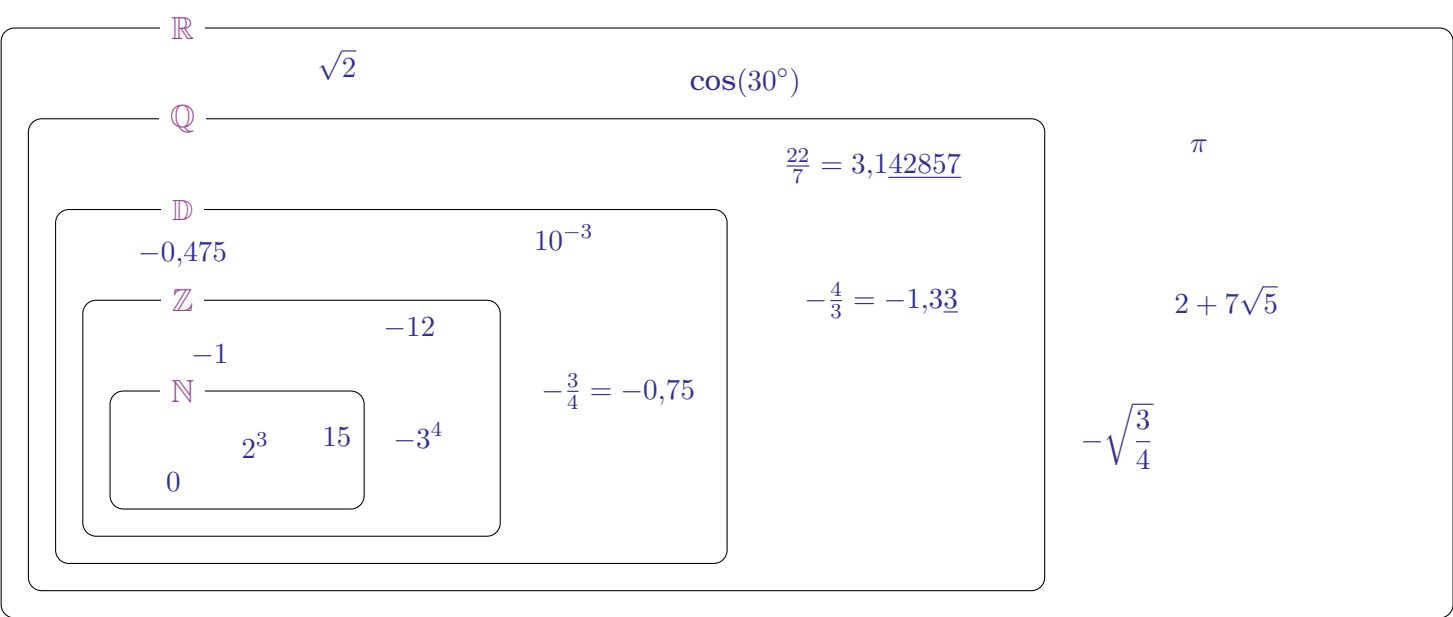
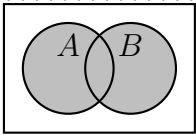


Figure 1.3 – $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\{2; 4; 6\} \cap \{1; 3; 5\} = \dots\dots\dots$

$\{x|1 < x\} \cap \{x|x \leq 2\} = \dots\dots\dots$

L'ensemble noté « $A \cup B$ » désigne l'union des ensembles A et B .
C'est l'ensemble des éléments appartenants à A **OU** appartenants à B .



■ Exemple 1.9 $\{1; 2; 3; 6\} \cup \{1; 2; 4; 8\} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$

Exercice 5 Donner les unions dans chaque cas :

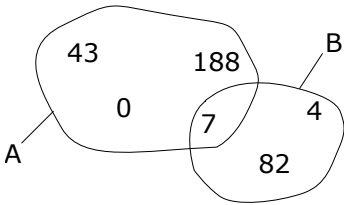
$\{3; 2; 1\} \cup \{1; 2; 4; 8\} = \dots\dots\dots$

$\{1; 3; 9\} \cup \{1; 3; 5; 7; 9\} = \dots\dots\dots$

$\{x|0 < x < 2\} \cup \{x|1 < x\} = \dots\dots\dots$

Exercice 6 Compléter à l'aide de $\in, \ni, \notin, \not\subset, \supset$:

7.....A	$\{43; 7; 188\}$A	$\{7\}$B
B.....0	A.....4	B.....43
43.....A	7.....B	B..... $\{4; 7\}$

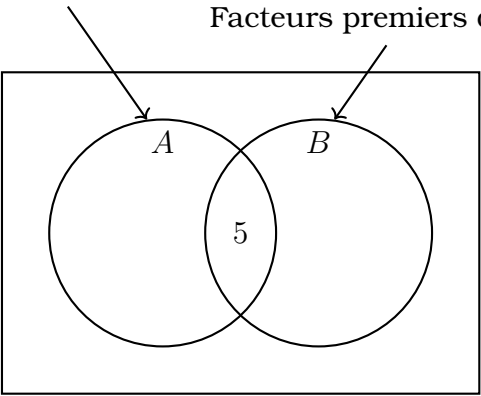


Les diagrammes de Venn nous permettent de représenter des ensembles ainsi que leurs éléments. L'univers noté Ω est l'ensemble de tous les éléments.

Exercice 7 Décomposer en facteurs premiers 585 et 455 puis compléter le diagramme de Venn :

Facteurs premiers de 585

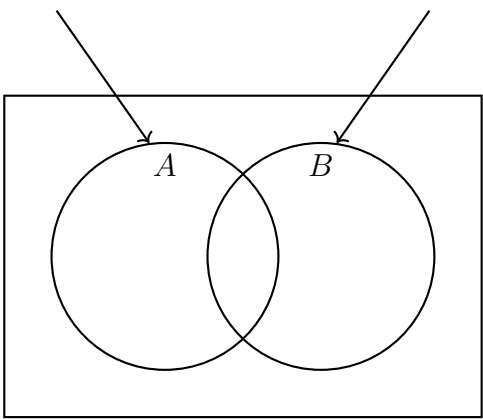
Facteurs premiers de 455



$A \cap B = \dots\dots\dots$

$A \cup B = \dots\dots\dots$

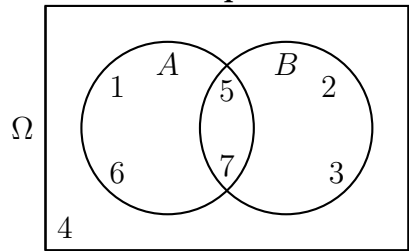
Exercice 8 Placer les éléments 750, 754, 755, 756, 758, 759 et 760 dans le diagramme de Venn :
Multiples de 2 Multiples de 3



$A \cap B = \dots\dots\dots$

$A \cup B = \dots\dots\dots$

Exercice 9 Complète les ensembles suivants à partir du diagramme de Venn.

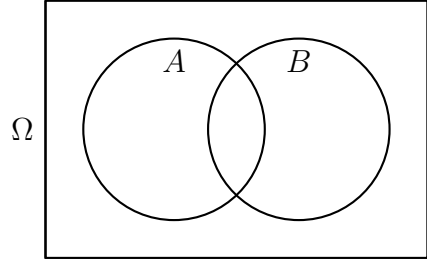


$A = \dots\dots\dots$

$A \cap B = \dots\dots\dots$

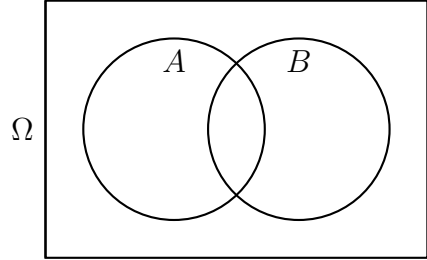
$A \cup B = \dots\dots\dots$

Exercice 10 Placer les nombres dans la bonne partie du diagramme de Venn



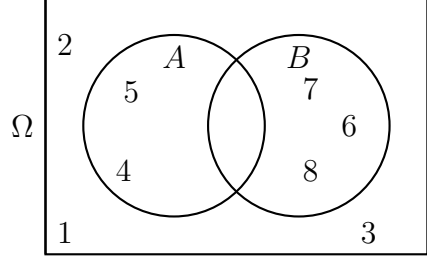
$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
 A = les nombres sont premiers
 B = les nombres sont pairs
 $A \cap B =$
 $A \cup B =$

Exercice 11 Placer les nombres dans la bonne partie du diagramme de Venn



$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
 A = les nombres sont des carrés parfaits
 B = les nombres sont impairs
 $A \cap B =$
 $A \cup B =$

Exercice 12 — Vrai ou Faux.



	Vrai	Faux		Vrai	Faux
1/ $4 \in A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1/ $A \cap B \supset \{5; 6\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2/ $5 \in B$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2/ $\{5; 8\} \subset A \cup B$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3/ $6 \in A \cup B$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3/ $A \cap B = \emptyset$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Exercice 13 Coloriez les ensembles indiqués sur chaque diagramme de Venn.

« A »

« $A \cap B$ »

$A \cup B$

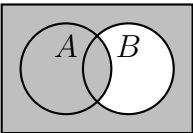
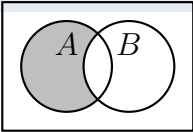
$A \cap C$

$A \cup C$

$B \cup C$

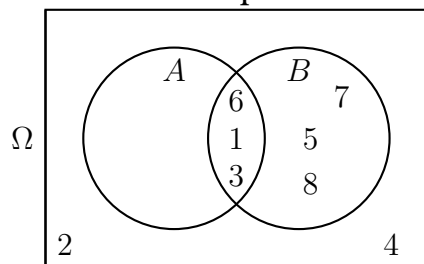
\overline{A} est le complémentaire de A dans Ω . C'est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A .

■ **Exemple 1.10** « $A \cap \overline{B}$ » est l'ensemble des éléments qui sont dans A et pas dans B .



■ **Exemple 1.11** « $A \cup \overline{B}$ » est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou ne sont pas dans B .

Exercice 14 Complète les ensembles suivants à partir du diagramme de Venn.



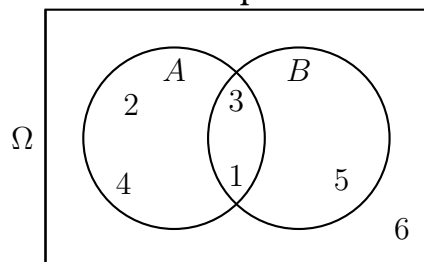
$$\overline{A} = \dots\dots\dots$$

$$A \cap \overline{B} = \dots\dots\dots$$

$$\overline{A} \cap B = \dots\dots\dots$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \dots\dots\dots$$

Exercice 15 Complète les ensembles suivants à partir du diagramme de Venn.



$$\overline{A} = \dots\dots\dots$$

$$A \cup \overline{B} = \dots\dots\dots$$

$$\overline{A} \cup B = \dots\dots\dots$$

$$\overline{A \cup B} = \dots\dots\dots$$

Exercice 16 — raisonner. Complète le diagramme de Venn à l'aide des informations suivantes
 $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 20\}$

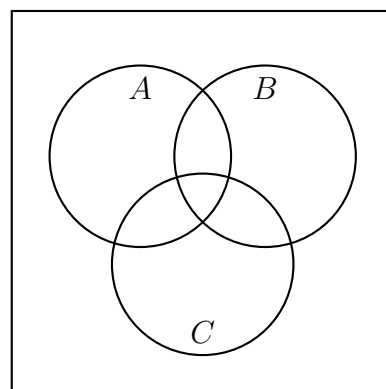
$$A = \{3; 5; 7; 9\}$$

$$B = \{0; 4; 6\}$$

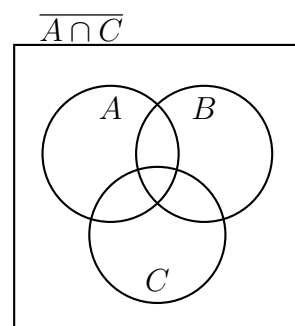
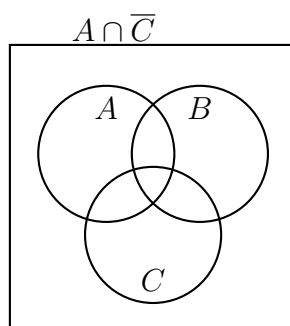
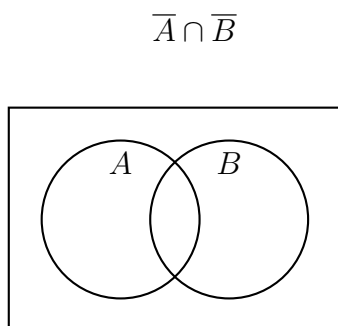
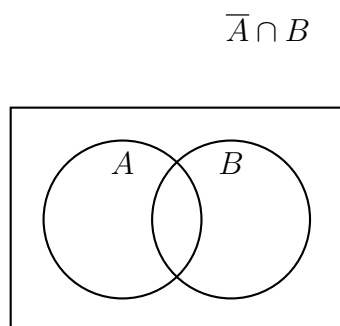
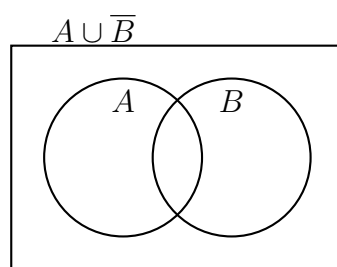
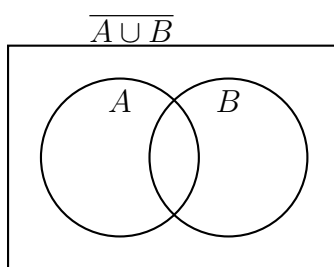
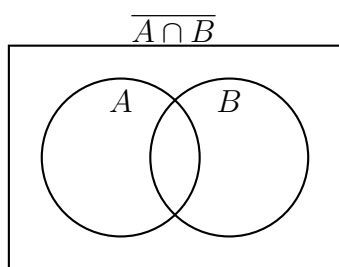
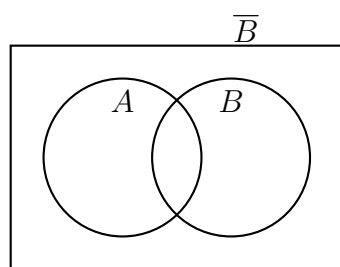
$$\overline{C} = \{1; 3; 4; 6; 9; 20\}$$

$$A \cap C = \{5; 7\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$



Exercice 17 Coloriez les ensembles indiqués sur chaque diagramme de Venn. Que constatez-vous?



1.3.2 Exercices : réels, classification et opérations

■ Exemple 1.12 — Organiser un calcul. avec des fractions :

- On simplifie des **facteurs communs** : $\frac{5+3}{5+7} = \frac{8}{12} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{3}$
- On multiplie deux fractions en multipliant les numérateurs et les dénominateurs :
 $\frac{9}{4} \times \frac{10}{21} = \frac{9 \times 10}{4 \times 21} = \frac{90}{84} = \frac{30}{28}$
- On ajoute deux fractions en ramenant au même dénominateur :
 $\frac{3}{4} - \frac{2}{7} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} - \frac{2 \times 4}{7 \times 4} = \frac{21-8}{28} = \frac{13}{28}$
- En l'absence de parenthèses, attention aux priorités :
 $\frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{5}{3} - \frac{2}{5} = \frac{19}{15}$

Exercice 18 —  Exprimer les expressions suivantes sous forme d'une fraction irréductible

- $\frac{91}{21} = \dots\dots\dots$
- $\frac{3}{2} \times 13 = \dots\dots\dots$
- $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \dots\dots\dots$
- $\frac{3}{7} + \frac{6}{2} = \dots\dots\dots$
- $\frac{4}{1} - \frac{5}{3} = \dots\dots\dots$
- $\frac{32}{7} - \frac{1}{6} \times \frac{9}{5} = \dots\dots\dots$

Exercice 19 Compléter par \in , \notin et \ni :

$245 \dots \mathbb{N}$; $-3^2 \dots \mathbb{N}$; $\frac{3}{15} \dots \mathbb{N}$; $\frac{15}{3} \dots \mathbb{Z}$; $0 \dots \mathbb{N}^*$; $-5 \dots \mathbb{Z}$; $4,3 \dots \mathbb{Q} \cap \mathbb{D}$ $-\frac{12}{7} \dots \mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$

Exercice 20 Pour chaque nombre x , justifier l'appartenance à \mathbb{D} et donner l'écriture scientifique et l'ordre de grandeur.

x	justification $x \in \mathbb{D}$ au sens de la définition 1.4	écriture scientifique	ordre de grandeur
0,042 5			
470,84			
637,8			
97,65			
0,001 52			
10,42			
0,948 7			
$\frac{7}{2,5} = 2,8$			

Exercice 21 Simplifier les expressions pour justifier l'appartenance à \mathbb{Q} . Préciser le plus petit ensemble auquel chacune appartient

x	justification de $x \in \mathbb{Q}$	écriture décimale	classification
$\frac{3\pi}{5\pi}$	$\frac{3\pi}{5\pi} = \frac{3}{5}$ fraction irréductible	$3 \div 5 = 0,6$ (finie)	$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
$\frac{1}{9}$	fraction irréductible	$1 \div 9 = 0,\underline{1}\dots$ (périodique)	$\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{D}}$
10^{-1}			
7^{-1}			
$\frac{5}{4} + \frac{7}{4}$	$= \frac{5+7}{4} =$		
$5 - \frac{4}{9}$			
$\frac{12}{5} \times \frac{1}{9}$			
$\frac{5}{4} + \frac{13}{12} =$	$\frac{5 \times}{4 \times} + \frac{13}{12}$		
$\frac{8}{3} - \frac{11}{12}$			
$\frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{9}{12}$			

■ **Exemple 1.13** Retrouver l'écriture en fraction irréductible du nombre réel donné par son écriture décimale périodique.

$x = 0,\underline{7} = 0,777\dots$

$y = 0,\underline{371} = 0,371\ 371\ 371\dots$

$z = 1,\underline{432} = 1,432\ 323\ 2\dots$

solution. On commence par multiplier par 10^p , où p est la longueur de la période :

$x = 0,\underline{7} = 0,777\dots$ $y = 0,\underline{371} = 0,371\ 371\ 371\dots$ $z = 1,\underline{432} = 1,432\ 323\ 2\dots$

$10x = 7,\underline{7} = 7,777\dots$ $1000y = 371,\underline{371} = 371,371\ 371\dots$ $100z = 143,\underline{232} = 143,232\ 32\dots$

$10x - x = 7$ $1000y - y = 371$ $100z - z = 143,2 - 1,4$

$9x = 7$ $999y = 371$ $99z = 141,8$

$x = \frac{7}{9}$ $y = \frac{371}{999}$ $z = \frac{141,8}{99} = \frac{709}{495}$

■

Exercice 22 Mêmes consignes

$t = 0,\underline{45} = 0,454\ 545\dots$ $u = 5,\underline{41} = 5,414\ 141\dots$ $v = 1,\underline{276} = 1,276\ 767\ 6\dots$

$a \leq x \leq b$ est un encadrement décimal à 10^{-n} près du réel x si a et $b \in \mathbb{D}$ et $b - a = 10^{-n}$.

■ **Exemple 1.14** $3,141 \leq \pi \leq 3,142$ est un encadrement décimal à $3,142 - 3,141 = 0,001 = 10^{-3}$ près.

Exercice 23 À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement décimal à la précision demandée :

π à 10^{-5} près :

$\sqrt{2}$ à 10^{-4} près :

$\frac{22}{7}$ à 10^{-3} près :

$\cos(35^\circ)$ à 10^{-3} près :

Exercice 24 Cochez les cases auxquels chaque nombre appartient :

	N	Z	D	Q	R
1/ 2,25	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2/ $\frac{19}{25}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3/ $-\frac{4}{3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4/ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5/ $\frac{6 - (-5) + 1}{(-8)/2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6/ $1 + 2\sqrt{3}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7/ $\sqrt{25} - 2\sqrt{4}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8/ $3 - \sqrt{-4 + 5 \times 8}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9/ $2,3 \times 10^{-12}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10/ $\frac{\sqrt{10}}{100}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11/ $\frac{15\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
12/ $(\sqrt{5})^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Exercice 25 — Vrai ou Faux ?. Si faux, donner un contre-exemple à l'aide de l'exercice 24.

	Vrai	Faux
1/ Un nombre décimal ne peut jamais être un nombre entier.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2/ Un nombre décimal est toujours un rationnel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3/ Un nombre irrationnel peut être un entier.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4/ Un nombre entier relatif est toujours un décimal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5/ Le produit de deux nombres décimaux est toujours un décimal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6/ Le quotient de deux nombres décimaux est toujours un décimal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7/ Le produit de deux nombres rationnels est toujours un rationnel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8/ Le produit de deux nombres irrationnels est toujours un irrationnel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9/ Le quotient de deux nombres irrationnels peut être un entier.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1.4 Exercices : solutions et éléments de réponse

<i>solution de l'exercice 1.</i>	■
<i>solution de l'exercice 2.</i>	■
<i>solution de l'exercice 3.</i>	■
<i>solution de l'exercice 4.</i>	■
<i>solution de l'exercice 5.</i>	■
<i>solution de l'exercice 6.</i>	■
<i>solution de l'exercice 7.</i>	■
<i>solution de l'exercice 8.</i>	■
<i>solution de l'exercice 9.</i>	■
<i>solution de l'exercice 10.</i>	■
<i>solution de l'exercice 11.</i>	■
<i>solution de l'exercice 12.</i>	■
<i>solution de l'exercice 14.</i>	■
<i>solution de l'exercice 15.</i>	■
<i>solution de l'exercice 15.</i>	■
<i>solution de l'exercice 16.</i>	■
<i>solution de l'exercice 17.</i>	■
<i>solution de l'exercice 18.</i>	■
<i>solution de l'exercice 19.</i>	■
<i>solution de l'exercice 20.</i>	■
<i>solution de l'exercice 21.</i>	■
<i>solution de l'exercice 22.</i>	■

solution de l'exercice 24.



solution de l'exercice 25.

