Chapitre 14

Calculs algébriques (2) : factorisations

La factorisation est le procédé qui consiste à écrire une expression algébrique comme produit d'expressions (facteurs) plus simples.

14.1 Factoriser par extraction du plus grand facteur commun

L'approche la plus simple est d'**extraire le plus grand facteur commun** à tous les termes d'une somme.[1]
Pour tout nombres relatifs a,b et c :

$$(ac) + (bc) = c(a + b)$$

Pour $c \neq 0$:

$$a + b = c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$$

[1] Utiliser l'exerciseur en ligne `https://www.mathix.org/exerciseur_calcul_litteral/`

■ **Exemple 14.1 — Application directe.**

$$\begin{aligned} A &= 3x - 15 \\ &= 3x - 3 \times 5 \\ &= 3(x - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2xy + 3xz \\ &= x(2y + 3z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 2x(3x + 2) + 3x(2x - 1) \\ &= x\big(2(3x + 2) + 3(2x - 1)\big) \\ &= x\big(6x + 4 + 6x - 3\big) \\ &= x\,(12x + 1) \end{aligned}$$

■ **Exemple 14.2 — Puissances.** Développer les puissances :

$$\begin{aligned} A &= 3x + 3^2 \\ &= 3x - 3 \times 3 \\ &= 3(x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= x^2 + 3x \\ &= xx + 3x \\ &= x(x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (2x - 3)^2 - 5(2x - 3) \\ &= (2x - 3) \times (2x - 3) - 5(2x - 3) \\ &= (2x - 3)(2x - 3 - 5) \\ &= (2x - 3)(2x - 8) \end{aligned}$$

■ **Exemple 14.3 — règle du 1.**

$$\begin{aligned} A &= 3x + 3 \\ &= 3x + 3 \times 1 \\ &= 3(x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2(x - 3)y - (x - 3) \\ &= (x - 3)(2y - 1) \end{aligned}$$

14.1.1 Exercices : factoriser par extraction du plus grand facteur commun

Exercice 1 Trouver le plus grand facteur commun pour chaque paire :

Paire	PGFC	Paire	PGFC
$24x^5$ et $32x^3$	$8x^3$	$10x$ et $15x$	
$6x$ et $9x$		$3x^2$ et $5x^2$	
18 et $12x$		$24x^2$ et $30x^3$	
$12x$ et $20x^2$		$15x^4$ et $45x$	
$12x^3$ et $15x^2$		$27x^4$ et $45x^3$	

Extraire le plus grand facteur commun d'une somme de termes, donne une somme de termes ayant pour facteurs communs 1 ou -1. On parle alors de **factorisation au maximum**

Exercice 2 Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$x^2 + 4x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$2x^2 + 6x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$3x^2 - 15x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$4x^2 + 24x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$15x^2 - 25x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$30x - 24x^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$20x^2 - 15x^3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$49x^2 - x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

- On regroupe la somme à l'aide du facteur commune $ab + ac = a(b + c)$.
- En présence de puissances, les transformer en produit de termes
- « Règle du 1 »

■ **Exemple 14.4 — Précautions.**

$$\begin{aligned} A &= 2x(3x+2) + 3x(2x-1) \\ &= x\big(2(3x+2) + 3(2x-1)\big) \\ &= x\big(6x + 4 + 6x - 3\big) \\ &= x\,(12x+1) \end{aligned}$$

avec les puissances

$$\begin{aligned} B &= (2x-3)^2 - 5(2x-3) \\ &= (2x-3) \times (2x-3) - 5(2x-3) \\ &= (2x-3)(2x-3-5) \\ &= (2x-3)(2x-8) \end{aligned}$$

règle du 1

$$\begin{aligned} C &= 3x + 3 = 3x + 3\times 1 \\ &= 3(x+1) \\ D &= 2(x-3)y - (x-3) \\ &= (x-3)(2y-1) \end{aligned}$$

Exercice 3 — Guidé. Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A(x) = 2(x+5) + (2x-3)(x+5)$

$=$

$=$

$=$

$B(x) = (2-8x)(7-x) - 3(7-x)(3-x)$

$=$

$=$

$=$

$=$

Exercice 4 Pour $x \in \mathbb{R}$. Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A(x) &= 25x(2x+1)+15(2x+1) \\ B(x) &= (2x-3)(5x-1)+2(3x-1)(2x-3) \\ C(x) &= (2x-3)^2+(3x-1)(2x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= 25(2x+1)^2-5x(2x+1) \\ E(x) &= (3x+5)(7x-4)-(5x-3)(3x+5) \\ F(x) &= 5(2x-1)^2+(3x-4)(2x-1) \end{aligned}$$

Exercice 5 Même consignes :

$$\begin{aligned} A(x) &= (2x+5)(2x+7)+4(2x+5)(x+2) \\ B(x) &= (2x+5)(2x+7)-(6x+15)(x+2) \\ C(x) &= 2(2x+5)(7x+5)-3(2x+5)(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= 3(2+3x)-2(5+2x)(2+3x) \\ E(x) &= (9x+10)(8x+7)+8x+7 \\ F(x) &= 2(x+3)^2-x-3 \end{aligned}$$

> Typiquement on cherche à factoriser des expressions du second degré sous la forme $a(x+p)(x+q)$

■ Exemple 14.5

$A = x\,(12x+1)$
$= 12x\left(x+\frac{1}{12}\right)$

$B = (2x-3)(3x-8)$
$= 2(x-\frac{3}{2})3(x-\frac{8}{3}) = 6(x-\frac{3}{2})(x-\frac{8}{3})$

$C = (-x+2)$
$= -1(x-2)$

Exercice 6 Mettre sous la forme $a(x+p)(x+q)$ les expressions factorisées suivantes :

$$\begin{aligned} A(x) &= (2x+5)(3x-4) \\ B(x) &= 3(-2x+1)(3x+5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= 5(2-x)(9x+5) \\ D(x) &= 5(3x-2)^2 \end{aligned}$$

Exercice 7 Complétez les factorisations suivantes :

$$\begin{aligned} 2x^2-x-3 &= 2x^2+2x-\dots x-3 \\ &= 2x(\dots x+\dots)-3(\dots x+\dots) \\ &= (2x-3)(\dots x+\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12x^2-20x+3 &= 12x^2-18x-\dots x+\dots \\ &= 6x(\dots x+\dots)-(\dots x+\dots) \\ &= (6x-\dots)(\dots x+\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+2x-8 &= x^2+4x-\dots x-\dots \\ &= x(\dots x+\dots)-\dots(\dots x+\dots) \\ &= (x-\dots)(\dots x+\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2+x-3 &= 2x^2-2x+\dots x-3 \\ &= x(\dots x-\dots)+\dots(\dots x-\dots) \\ &= (\dots x+\dots)(\dots x-\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2+3x-1 &= 4x^2+4x-\dots x-\dots \\ &= 4x(\dots x+\dots)-\dots(\dots x+\dots) \\ &= (\dots x-\dots)(\dots x+\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2+7x+3 &= 2x^2+\dots x+\dots x+3 \\ &= x(2x+\dots)+\dots(2x+\dots) \\ &= (2x+\dots)(\dots x+\dots) \end{aligned}$$

solution de l'exercice 4 . $A(x) = 5\,(2x+1)\,(5x+3)$; $B(x) = (2x-3)\,(11x-3)$; $C(x) = (2x-3)\,(5x-4)$; $D(x) = 5\,(2x+1)\,(9x+5)$; $E(x) = (2x-1)\,(3x+5)$; $F(x) = (2x-1)\,(13x-9)$; ■

solution de l'exercice 5 . $A(x) = 3\,(2x+5)^2$; $B(x) = -(x-1)\,(2x+5)$; $C(x) = (2x+5)\,(11x+4)$; $D(x) = -(3x+2)\,(4x+7)$; $E(x) = (8x+7)\,(9x+11)$; $F(x) = (x+3)\,(2x+5)$; ■

14.2 Exercices : Factorisations par essai-erreur de $1x^2 + sx + p$

Pour x, a et $b \in \mathbb{R}$:

$A = (x+a)(x+b)$

développer

$=$

réduire

$= x^2 + \ldots\ldots\ldots x + \ldots\ldots\ldots$

Pour factoriser : $B = 1x^2 + sx + p$

Les expressions suivantes se factorisent sous la forme $(x+a)(x+b)$ avec a et $b \in \mathbb{Z}$. Retrouver les!

■ **Exemple 14.6 — Cas p>0.** On cherche des entiers a et b de même signe.

$A = x^2 + 7x + 10$

$B = x^2 - 9x + 20$

Exercice 8 — À vous. Mêmes consignes

$A(x) = x^2 + 6x + 5$	$C(x) = x^2 - 17x + 16$	$E(x) = x^2 + 7x + 10$	$G(x) = x^2 + 8x + 12$
$B(x) = x^2 + 10x + 16$	$D(x) = x^2 + 6x + 8$	$F(x) = x^2 - 7x + 12$	$H(x) = x^2 - 13x + 40$

■ **Exemple 14.7 — Cas p<0.** On cherche des entiers a et b de signes contraires.

$A = x^2 + 2x - 3$

$B = x^2 - 14x - 15$

Exercice 9 — À vous. Mêmes consignes

$A(x) = x^2 + x - 6$	$C(x) = x^2 - 6x - 40$	$E(x) = x^2 + 2x - 8$	$G(x) = x^2 + x - 30$
$B(x) = x^2 - 5x - 14$	$D(x) = x^2 - x - 12$	$F(x) = x^2 + 5x - 24$	$H(x) = x^2 - 19x - 20$

solution de l'exercice 8 .

$A(x) = (x+1)(x+5)$; $B(x) = (x+2)(x+8)$; $C(x) = (x-16)(x-1)$; $D(x) = (x+2)(x+4)$; $E(x) = (x+2)(x+5)$; $F(x) = (x-4)(x-3)$; $G(x) = (x+2)(x+6)$; $H(x) = (x-8)(x-5)$; ■

solution de l'exercice 9 .

$A(x) = (x-2)(x+3)$; $B(x) = (x-7)(x+2)$; $C(x) = (x-10)(x+4)$; $D(x) = (x-4)(x+3)$; $E(x) = (x-2)(x+4)$; $F(x) = (x-3)(x+8)$; $G(x) = (x-5)(x+6)$; $H(x) = (x-20)(x+1)$; ■

14.3 Exercices : factorisation à l'aide d'identités remarquables

■ **Exemple 14.8 — factoriser des expressions sous la forme $a^2 \pm 2ab + b^2$ ou $a^2 - b^2$.**

$A = x^2 + 8x + 16$

$= (\quad)^2 \ldots 2 \times (\quad) \times (\quad) \ldots (\quad)^2$

$= (\qquad\qquad)^2$

$B = x^2 - 6x + 9$

$= (\quad)^2 \ldots 2 \times (\quad) \times (\quad) \ldots (\quad)^2$

$= (\qquad\qquad)^2$

$C = 25x^2 + 80x + 64$

$= (\quad)^2 \ldots 2 \times (\quad) \times (\quad) \ldots (\quad)^2$

$= (\qquad\qquad)^2$

$D = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

$= (\quad)^2 \ldots 2 \times (\quad) \times (\quad) \ldots (\quad)^2$

$= (\qquad\qquad)^2$

$E = 4x^2 - 5$

$= (\quad)^2 - (\quad)^2$

$= (\quad x - \quad)(\quad x + \quad)$

$F = 36(x-1)^2 - 10$

$= (\quad (x-1))^2 - (\quad)^2$

$= (\quad x - \qquad\qquad)(\quad x + \qquad\qquad)$

Exercice 10 Pour $x \in \mathbb{R}$. Factoriser au maximum les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

$A(x) = x^2 + 2x + 1$	$D(x) = 4x^2 + 4x + 1$	$G(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$
$B(x) = x^2 + 6x + 9$	$E(x) = 4x^2 - 12x + 9$	$H(x) = 9x^2 - 6\sqrt{5}x + 5$
$C(x) = 4x^2 - 36$	$F(x) = 36x^2 - 4$	$I(x) = 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$

Exercice 11 Pour $x \in \mathbb{R}$. Factoriser au maximum :

$A(x) = (2x-1)^2 - 25$	$C(x) = 4(2x-1)^2 - 100$	$E(x) = 4(2x-1)^2 - 25x^2$
$B(x) = (3x+7)^2 - 16$	$D(x) = 9(2x-1)^2 - 4x^2$	$F(x) = 4(2x-1)^2 - 25(x+3)^2$

Exercice 12 Compléter pour factoriser les deux expressions données :

$$\begin{aligned}
x^2 - 7x + 5 &= x(x - \ldots) + 5 \\
&= (x - \tfrac{7}{2} + \ldots)(x - \tfrac{7}{2} - \ldots) + 5 \\
&= \left(x - \tfrac{7}{2}\right)^2 - \left(\ldots\right)^2 + 5 \\
&= \left(x - \tfrac{7}{2}\right)^2 - 2{,}25 \\
&= \left(x - \tfrac{7}{2}\right)^2 - \left(\ldots\right)^2 \\
&= \left(x - \tfrac{7}{2} + \qquad\right)\left(x - \tfrac{7}{2} + \qquad\right) \\
&= \left(x \qquad\qquad\right)\left(x \qquad\qquad\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 - 12x + 2 &= x(x - \ldots) + 2 \\
&= (x - 6 + \ldots)(x - 6 - 6 \ldots) + 2 \\
&= \left(x - 6\right)^2 - \left(\ldots\right)^2 + 2 \\
&= \left(x - 6\right)^2 - 34 \\
&= \left(x - 6\right)^2 - \left(\ldots\right)^2 \\
&= \left(x - 6 + \qquad\right)\left(x - 6 + \qquad\right) \\
&=
\end{aligned}$$

solution de l'exercice 10 . $A = (x+1)^2$; $B = (x+3)^2$; $C = 4\,(x-3)\,(x+3)$; $D = (2x+1)^2$; $E = (2x-3)^2$; $F = 4\,(3x-1)\,(3x+1)$; $G = (x+\frac{1}{2})^2$; $H = (3x-\sqrt{5})^2$; $I = (\sqrt{3}x-1)^2$. ■

solution de l'exercice 11 . $A = 4\,(x-3)\,(x+2)$; $B = 3\,(x+1)\,(3x+11)$; $C = 16\,(x-3)\,(x+2)$; $D = (4x-3)\,(8x-3)$; $E = -\,(x+2)\,(9x-2)$; $F = -\,(x+17)\,(9x+13)$; ■