A.5.6 Savoir-faire 6: règle de dérivation de produit et quotient

■ Exemple A.31 — dérivation d'un produit.

Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée dans les cas suivants :

$f(x) = \sqrt{x}(2x+1)^3$

$D = [0;+\infty[$

$D' =]0;+\infty[$

produit de $u\colon x \mapsto \sqrt{x}$ *définie sur* $[0;+\infty[$ *et dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et* $v\colon x \mapsto (2x+1)^3$ *dérivable sur* $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1)^3 + \sqrt{x} \times 2 \times 3(2x+1)^2 \\ &= \frac{(2x+1)^3}{2\sqrt{x}} + 6\sqrt{x}(2x+1)^2 \end{aligned}$$

$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $v'(x) = 2 \times 3(2x+1)^2$

$f(x) = (8x-1)(2x^2-5x-3)$

$D' = \mathbb{R}$

produit de $u\colon x \mapsto 8x-1$ *et* $v\colon x \mapsto 2x^2-5x-3$ *toutes dérivables sur* $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (8x-1)'(2x^2-5x-3) + (8x-1)(2x^2-5x-3)' \\ &= 8(2x^2-5x-3) + (8x-1)\big(2(2x) - 5(1) + 0\big) \\ &= 16x^2 - 40x - 24 + (8x-1)\big(4x-5\big) \\ &= 48x^2 - 84x - 19 \end{aligned}$$

Exercice 4 Dériver en utilisant la règle de la dérivé d'un produit.

1. $f(x) = x^2(2x-1)$
2. $f(x) = 4x(2x+1)^3$
3. $f(x) = x^5(3x-1)^2$
4. $f(x) = x^2(7-3x^2)$
5. $f(x) = x^2\sqrt{3-x}$
6. $f(x) = (8-9x)\sqrt{x}$
7. $f(x) = \sqrt{x}(x^2+1)$
8. $f(x) = \sqrt{3x-12}(x^2-1)$
9. $f(x) = (4x-1)\sqrt{3x-15}$

■ Exemple A.32 — dérivation d'un quotient.

Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée dans les cas suivants :

$f(x) = \dfrac{1+3x}{x^2+1}$

$u(x) = 1+3x$ $v(x) = x^2+1$, *pas de valeur interdites*

$D = \mathbb{R} \quad D' = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(1+3x)'(x^2+1) - (1+3x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

on applique $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x^2+1) - (1+3x)2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3x^2+3-2x-6x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3-2x-3x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

on simplifie le numérateur sans développer le dénominateur

$$f(x) = \frac{1-2x}{3x+3}$$

$u(x) = 1-2x$ $v(x) = 3x+3$, valeur interdite $x=-1$

$$D = \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad D' = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

$$f'(x) = \frac{(1-2x)'(3x+3)-(1-2x)(3x+3)'}{(3x+3)^2}$$

on applique $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$= \frac{-2(3x+3)-(1-2x)\times 3}{(3x+3)^2}$$

on simplifie le numérateur sans développer le dénominateur

$$= \frac{-9}{(3x+3)^2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(1-2x)^2}$$

$u(x) = \sqrt{x}$ dérivable sur $]0;+\infty[$ et $v(x) = (1-2x)^2$, valeur interdite $x = \frac{1}{2}$

$$D = [0;\tfrac{1}{2}[\cup]\tfrac{1}{2};+\infty[\quad D' =]0;\tfrac{1}{2}[\cup]\tfrac{1}{2};+\infty[$$

on applique $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-2x)^2-\sqrt{x}(-2\times 2(1-2x))}{(1-2x)^4}$$

factoriser par $1-2x$ pour simplifier

$$f'(x) = \frac{(1-2x)\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}+4\sqrt{x}\right)}{(1-2x)^4}$$

ramener au même dénominateur

$$= \frac{1}{(1-2x)^3}\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}+4\sqrt{x}\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1-2x+8x}{2\sqrt{x}(1-2x)^3}$$

$$= \frac{6x+1}{2\sqrt{x}(1-2x)^3}$$

Exercice 5

Donner les domaines de définition et de dérivabilité, puis dériver les fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{1+3x}{2-x}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-2x}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-3}{3x-x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-3x}}$

Exercice 6

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f. Déterminer la pente de la tangente au point d'abscisse x_0 dans les cas suivants :

1. f définie par $f(x) = x\sqrt{1-2x}$, au point d'abscisse $x=-4$.
2. f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}$, au point d'abscisse $x=4$.

Exercice 7

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f donnée par $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x+2}$.

1. Déterminer le domaine et le domaine de dérivabilité de f.
2. Montrer que pour tout $x \in D'$, $f'(x) = \dfrac{x^2+4x-7}{(x+2)^2}$.
3. Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ ou la tangente est horizontale.

correction exercice 4.

$f_1'(x) = 6x^2 - 2x = 2x\,(3x-1)\,;$

$f_2'(x) = 128x^3 + 144x^2 + 48x + 4 = 4\,(2x+1)^2 \cdot (8x+1)\,;$

$f_3'(x) = 63x^6 - 36x^5 + 5x^4 = x^4 \cdot (3x-1)\,(21x-5)\,;$

$f_4'(x) = -12x^3 + 14x = -2x\left(6x^2 - 7\right)\,;$

$f_5'(x) = -\dfrac{x^2}{2\sqrt{3-x}} + 2x\sqrt{3-x} = -\dfrac{x\,(5x-12)}{2\sqrt{3-x}};$

$f_6'(x) = -\dfrac{27\sqrt{x}}{2} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = -\dfrac{27x-8}{2\sqrt{x}};$

$f_7'(x) = \dfrac{5x^{\frac{3}{2}}}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2+1}{2\sqrt{x}};$

$f_8'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{3x-12}} + 2x\sqrt{3x-12} - \dfrac{3}{2\sqrt{3x-12}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot(5x^2-16x-1)}{2\sqrt{x-4}};$

$f_9'(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{3x-15}} + 4\sqrt{3x-15} - \dfrac{3}{2\sqrt{3x-15}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot(12x-41)}{2\sqrt{x-5}};$

■

correction exercice 5. $f_1'(x) = \dfrac{7}{(x-2)^2};$

$f_2'(x) = \dfrac{2x\,(x+1)}{(2x+1)^2};$

$f_3'(x) = -\dfrac{x^2+3}{(x^2-3)^2};$

$f_4'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x}\,(2x-1)^2};$

$f_5'(x) = \dfrac{3\,(x^2-2x+3)}{x^2\,(x-3)^2};$

$f_6'(x) = -\dfrac{3x-2}{2\,(1-3x)^{\frac{3}{2}}};$

■