4
Chaines de Markov

4.1 Matrices stochastiques

Définition 4.1 Une matrice carrée P d'ordre n est dite stochastique si

(i) chaque élément est positif ou nul : $\forall i, j,\ P_{i,j} \geqslant 0$.

(ii) et si la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.

$$\text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n \qquad \sum_{j=1}^{n} P_{i,j} = 1$$

■ **Exemple 4.1** $P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices stochastiques.

■ **Exemple 4.2** $U = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$ ne sont pas des matrices stochastiques.

Théorème 4.1 Le produit de deux matrices stochastiques d'ordre n est aussi une matrice stochastique.

Démonstration. Soit A et B matrices stochastiques d'ordre n. On a $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} \geqslant 0$.

Et pour tout i : $\sum_{j=1}^{n}(AB)_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\right)$ ■

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(A_{i,k}\sum_{j=1}^{n} B_{k,j}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} = 1
\end{aligned}$$

4.2 Définitions et propriété de Markov

Soit l'ensemble des états $\mathcal{S} = \{1;\ 2;\ \ldots;\ N\}$. [1] L'ensemble Ω des suites à valeurs dans $\mathcal{S}$ est muni d'une loi de probabilité qui sera noté dans ce chapitre $\mathbb{P}$. [2] Une suite $X = (X_0\ ;\ X_1\ ;\ \ldots\ ;\ X_n\ ;\ \ldots)$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{S}$ (pour *state*) est une *chaine de Markov* si l'évolution de cette suite à partir de l'instant n dépend de sa valeur X_n mais pas des précédentes $X_0, \ldots, X_{n-1}$. On résume ceci par :

> « *le futur dépend du présent, mais pas du passé, c.à.d. de la manière dont cet état a été atteint* ». (*processus sans mémoire*)

■ **Exemple 4.3** Supposons qu'une pièce tombe sur pile avec probabilité p, et notons $q = 1 - p$. Pour $i \geqslant 1$, X_i est la variable égale à 1 si la pièce tombe sur 1 au i^{e}lancer et 0 sinon, et S_i est le nombre de piles obtenus au cours de i premiers lancers :

$$S_i = X_1 + \ldots + X_i \sim \mathscr{B}(i, p)$$

La suite (S_i) est une chaine de Markov : pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}_{(S_k=r)}(S_{k+1} = j) = \begin{cases} p & \text{si } j = r+1 \\ q & \text{si } j = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, et cela quelles que soient les valeurs de S_1, $S_2, \ldots, S_{k-1}$.

Définition 4.2 Soit l'ensemble d'états $\mathcal{S}$ de N éléments, et $P = (p_{i,j})$ une matrice carrée de dimension N qui vérifie :

$$\forall i \in \mathcal{S} \quad \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{i,j} = 1$$

$X = (X_i)_{n \geqslant 0}$ est une **chaine de Markov stationnaire (ou homogène) de matrice de transition P et d'ensemble d'états $\mathcal{S}$** si elle vérifie la **propriété de Markov faible** :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $i_0, i_1, \ldots, i_n, j \in \mathcal{S}$ pour lesquelles $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots X_n = i_n) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_{X_0=i_0 \cap \ldots \cap X_{n-1}=i_{n-1} \cap X_n=i_n}(X_{n+1} = j) = \mathbb{P}_{X_n=i_n}(X_{n+1} = j) = p_{i_n,j}$$

R La matrice de transition P d'une chaine de Markov est stochastique :

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} \mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = j) = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{i,j} = 1$$

ce qui est normal car $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_{X_n=i}$ est une loi de probabilité (conditionnelle).

1. pour *state space*
2. La théorie des chaines de Markov fait intervenier une matrice de transition, dont les coefficients sont des probabilités conditionnelles, et que l'usage dans la quasi-totalité des livres est de noter P

■ **Exemple 4.4 — Chaine de Markov à deux états.** https://setosa.io/ev/markov-chains/

On souhaite construire un modèle pour simuler la météo. On pose l'espace d'état $\mathcal{S} = \{☼\ ;\ ⛆\}$.

On note que la météo d'un jour a davantage de chance d'être similaire à celle de la veille :

— s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est 0,7

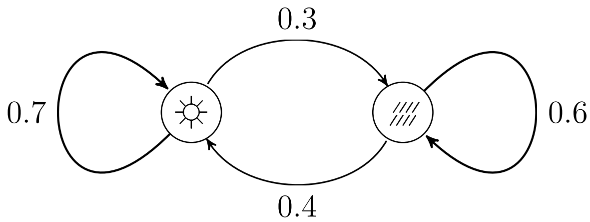
— s'il pleut un jour, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est 0,6

	☼	⛆	**Total**
☼	$\mathbb{P}_{X_n=☼}(X_{n+1} = ☼) = 0{,}7$	$\mathbb{P}_{X_n=☼}(X_{n+1} = ⛆) = 0{,}3$	1
⛆	$\mathbb{P}_{X_n=⛆}(X_{n+1} = ☼) = 0{,}4$	$\mathbb{P}_{X_n=⛆}(X_{n+1} = ⛆) = 0{,}6$	1

matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

La situation peut être présentée par un graphe :



— les sommets du graphe sont les états possibles du système ;

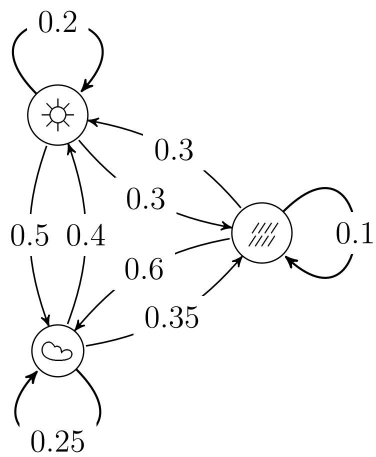
— une arête orientée issue du sommet i vers d'extrémité j a pour poids $\mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$

— La somme des poids des arêtes partant d'un sommet i quelconque vaut 1.

■ **Exemple 4.5 — chaine de Markov à 3 états.**

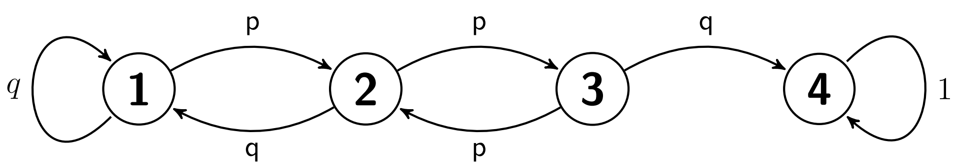
On pose l'espace d'état $\mathcal{S} = \{☼\ ;\ ☁\ ;\ ⛆\}$. On suppose que la météo d'un jour est une chaine de Markov. Les probabilités de transitions peuvent être données directement sur un graphe aléatoire.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ☼ & ☁ & ⛆ \end{array} \\ P = \begin{array}{c} ☼ \\ ☁ \\ ⛆ \end{array} & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}$$



■ **Exemple 4.6 — chaine de Markov à 4 états.**

Une chaine de Markov d'états $\mathcal{S} = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$. Les probabilités de transitions sont présentées sur le graphe aléatoire, on suppose $p + q = 1$. :



$$P = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Définition 4.3 Soit et une suite de variables aléatoires $X = (X_i)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathcal{S}$.

La distribution initiale, notée π_0, est la loi de la variable :

$$\forall i \quad \pi_0(i) = \mathbb{P}(X_0 = i), \qquad \pi_0 \sim X_0 \qquad \pi_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 1) & \mathbb{P}(X_0 = 2) & \dots & \mathbb{P}(X_0 = N) \end{pmatrix}$$

La distribution après n transitions, notée π_n, est la loi de probabilité de X_n :

$$\forall i \quad \pi_n(i) = \mathbb{P}(X_n = i), \qquad \pi_n \sim X_n \qquad \pi_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) & \mathbb{P}(X_n = 2) & \dots & \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$$

Notation 4.1 $\mathbb{P}_i$ désigne la loi conditionnelle sashant $\mathbb{P}_{(X_0=i)}$:

$$\forall A \in \Omega \qquad \mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}_{X_0=i}(A)$$

Théorème 4.2 Si la suite (X_n) est une chaine de Markov de matrice de transition P et d'état initial π_0. Alors pour tout $n \geqslant 1$ et $i_0, \dots, i_n \in \mathcal{S}$:

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \pi_0(i_0)p_{i_0,i_1} \dots p_{i_{n-1},i_n}$$

Démonstration. par récurrence sur n

Initialisation $n = 1$: Pour i et $j \in \mathcal{S}$.

Si $\pi_0(i) = 0$ alors $\mathbb{P}(X_0 = i, X_1 = i) = 0 = \pi_0(i)p_{i,j}$

Sinon $\mathbb{P}(X_0 = i, X_1 = j) = \mathbb{P}(X_0 = i)\mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = j) = \pi_0(i)p_{i,j}$ par la propriété de Markov

Hérédité On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang n, et soit i_0, i_1, i_2, $\dots i_n$, $i_{n+1} \in \mathcal{S}$.

Si $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = 0$

par hypothèse de récurrence

$$\pi_0(i_0)p_{i_0,i_1} \dots p_{i_{n-1},i_n} = 0$$

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n, X_{n+1}) = 0 = \pi_0(i_0)p_{i_0,i_1} \dots p_{i_{n-1},i_n}p_{i_n,i_{n+1}}$$

Sinon
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1}) &= \mathbb{P}(\overbrace{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n}^{A}, X_{n+1} = i_{n+1}) && \textit{probabilités composées} \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(X_{n+1} = i_{n+1}) && \textit{par Markov faible} \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_{X_n=i_n}(X_{n+1} = i_{n+1}) && \textit{par récurrence} \\
&= \pi_0(i_0)p_{i_0,i_1} \dots p_{i_{n-1},i_n} \times p_{i_n,i_{n+1}}
\end{aligned}$$

■

Théorème 4.3 La suite (X_n) est une chaine de Markov de matrice de transition P.

(i) Alors pour tout i tel que $\mathbb{P}(X_0 = i) \neq 0$

$$\text{pour tout } n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}_i(X_n = j) = \mathbb{P}_{X_0=i}(X_n = j) = P_{i,j}^{(n)}$$

où $P_{i,j}^{(n)}$ est l'élément (i, j) de la **puissance nᵉ** de P.

(ii) Plus généralement pour tout i et n tel que $\mathbb{P}(X_m = i) \neq 0$:

$$\text{pour tout } n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}_{X_m=i}(X_{m+n} = j) = P_{i,j}^{(n)}$$

R $P_{i,j}^{(m)}$ est la probabilité d'atteindre j em m étapes sachant que l'on part de i.

Démonstration. par récurrence

(i) **Initialisation** : d'après la définition on peut écrire : $\mathbb{P}_i(X_1 = j) = \mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = j) = p_{i,j} = P_{i,j}^1$

Hérédité : Supposons la propriété établie au rang n.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(X_{n+1} = j) = \mathbb{P}_{X_0=i}(X_{n+1} = j) &= \sum_{k\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_{X_0=i}\big((X_{n+1} = j) \cap (X_n = k)\big) && \textit{probabilités composées} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_{X_0=i}\big(X_n = k)\big)\mathbb{P}_{X_0=i,X_n=k}\big(X_{n+1} = j)\big) && \textit{par propriété de Markov faible} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_{X_0=i}\big(X_n = k)\big)\mathbb{P}_{X_n=k}\big(X_{n+1} = j)\big) \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_{X_0=i}\big(X_n = k)\big)p_{k,j} && \textit{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P_{i,k}^{(n)} p_{k,j} = (P^n P)_{i,j} = P_{i,j}^{(n+1)}
\end{aligned}$$

(ii) on fixe i et m tel que $\mathbb{P}(X_m = i) \neq 0$, et on procède par récurrence :

Initialisation : d'après la définition on peut écrire : $\mathbb{P}_{X_m=i}(X_{m+1} = j) = p_{i,j} = P_{i,j}^1$

Hérédité : Supposons la propriété établie au rang n.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(X_m=i)}(X_{m+n+1} = j) &= \sum_{k\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_{(X_m=i)}\big((X_{m+n+1} = j) \cap (X_{m+n} = k)\big) && \textit{probabilités composées} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_{X_m=i}\big(X_{m+n} = k)\big)\mathbb{P}_{X_m=i,X_{m+n}=k}\big(X_{m+n+1} = j\big) && \textit{par propriété de Markov faible} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_{X_m=i}\big(X_{m+n} = k)\big)\mathbb{P}_{X_{m+n}=k}\big(X_{m+n+1} = j)\big) \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_{X_m=i}\big(X_{m+n} = k)\big)p_{k,j} && \textit{par hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P_{i,k}^{(n)} p_{k,j} \\
&= (P^n P)_{i,j} = P_{i,j}^{(n+1)}
\end{aligned}$$

■

Théorème 4.4 La suite (X_n) est une chaine de Markov de matrice de transition P et de distribution initiale π_0. Alors

$$\pi_n = \pi_0 P^{(n)} \qquad \text{pour tout } j \in \mathcal{S} \quad \pi_n(j) = \sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_0(i) P^{(n)}_{(i,j)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\pi_n(j) &= \mathbb{P}(X_n = j) && \textit{Les } (X_0=i) \textit{ forment une partition}\\
&= \sum_{i\in\mathcal{S}} \mathbb{P}\big((X_0 = i)\cap(X_n = j)\big) && \textit{formule de probabilité totale}\\
&= \sum_{i\in\mathcal{S}} \mathbb{P}(X_0 = i)\mathbb{P}_{(X_0=i)}\big(X_n = j\big)\\
&= \sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_0(i) P^{(n)}_{i,j}
\end{aligned}$$

■

R Dans le cas d'une chaine de markov à deux états de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, les puissances P^n et les distributions à l'instant n se calculent directement.

4.3 Distribution invariante

En général, la distribution initiale π_0 d'une chaine de Markov X est en permanence modifiée par les transitions, de sorte que toutes les lois π_1, π_2, ... sont toutes distinctes.

Définition 4.4 Soit une chaine de Markov X de matrice de transition P, et π une distribution de probabilité sur $\mathcal{S}$. π est une **distribution stationnaire** (ou **probabilité invariante**) si :

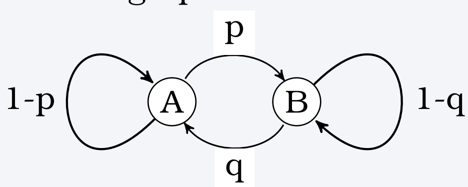
$$\pi = \pi P \qquad \text{pour tout } j \in \mathcal{S} \quad \pi(j) = \sum_{i\in\mathcal{S}} \pi(i) p_{(i,j)}$$

Si l'on choisit π comme distribution initiale de la chaine de Markov, alors

$$\text{pour tout } j \qquad \mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_0 = j) = \pi(j)$$

Théorème 4.5 — cas chaine de Markov à deux états. Soit $\mathcal{S} = \{A\ ;\ B\}$ l'espace d'états. On considère une chaine de markov (X_n) de matrice de transition P et de graphe :

$$0 < p, q < 1 \qquad\qquad P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$



(i) (X_n) admet une unique probabilité invariante $\pi = \begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix}$

(ii) Quelle que soit la distribution initiale π_0, la suite π_n converge vers π.

4.4 Exercices

4.4.1 Exercices : Matrices stochastiques

Exercice 1 Soit la matrice stochastique $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ avec a et $b \in]0;1[$.

On pose $\lambda = 1-a-b$, $N = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \\ \dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b} \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a+b} & \dfrac{-a}{a+b} \\ \dfrac{-b}{a+b} & \dfrac{b}{a+b} \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $N^2 = N$ et $R^2 = R$ et que $NR = RN = \mathbf{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $P = M + \lambda R$.
3. Montrer par récurrence que $P^n = M + \lambda^n R$.
4. Vérifier que $P^n = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda^n a+b}{a+b} & \dfrac{a(1-\lambda^n)}{a+b} \\ \dfrac{b(1-\lambda^n)}{a+b} & \dfrac{a+\lambda^n b}{a+b} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} \lambda^n a+b & a(1-\lambda^n) \\ b(1-\lambda^n) & a+\lambda^n b \end{pmatrix}$
5. En déduire $Q = \lim\limits_{n\to+\infty} P^n$.
6. On pose $\pi = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$, avec $p+q=1$. Donner les dimensions de la matrice πQ et montrer qu'elle ne dépend pas de p ni de q.

Exercice 2

Soit la matrice stochastique $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ avec a et $b \in]0;1[$. On pose $\lambda = 1-a-b$, et $P^n = \begin{pmatrix} p_{1,1}^{(n)} & p_{1,2}^{(n)} \\ p_{2,1}^{(n)} & p_{2,2}^{(n)} \end{pmatrix}$ où $p_{i,j}^{(n)}$ est l'élément i,j de la matrice P^n (attention $p^{(n)} \neq p^n$).

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$: P^n est une matrice stochastique.
2. À partir de l'égalité $P^{n+1} = P^n P$, montrer que pour tout $n \geqslant 0$: $p_{1,1}^{(n+1)} = p_{1,2}^{(n)} b + p_{1,1}^{(n)}(1-a)$.
3. En déduire que $p_{1,1}^{(n)} = 1$ et que pour tout $n \geqslant 0$: $p_{1,1}^{(n+1)} = \lambda p_{1,1}^{(n)} + b$.
4. On définit la suite (u_n) par $u_n = p_{1,1}^{(n)} - \dfrac{b}{a+b}$.
   a) Calculer u_0.
   b) Montrer que (u_n) est une suite géométrique.
   c) Exprimer u_n en fonction de n.
   d) En déduire que $p_{1,1}^{(n)} = \dfrac{b}{a+b} + \dfrac{a}{a+b}\lambda^n$.
5. Expliquer comment retrouver l'expression de $p_{2,2}^{(n)}$ par la symétrie des donnée.
6. Utiliser la question 1. pour déduire les expressions de $p_{1,2}^{(n)}$ et $p_{2,1}^{(n)}$.

Exercice 3 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On souhaite déterminer A^n pour tout $n \geqslant 2$.

1. Montrer que $X^2 - 5X + 4$ est un polynôme annulateur de A.
2. Pour $n \geqslant 2$, on effectue la division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 4$. On sait qu'il existe Q et R avec $\deg(R) \leqslant 1$ tel que : $X^n = Q(X) \times (X^2 - 5X + 4) + R(X)$ $\deg R \leqslant 1$
$$X^n = Q(X)(X^2 - 5X + 4) + aX + b$$
   a) Déterminer les racines de $X^2 - 5x + 4$
   b) Montrer que a et b vérifient $\begin{cases} 1 = a + b \\ 4^n = 4a + b \end{cases}$ et donner a et b.
3. Montrer que $A^n = \dfrac{4^n - 1}{3} A + \dfrac{4 - 4^n}{3} \mathbf{I}_2$

Exercice 4 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer s et p tels que $A^2 - sA + p\mathbf{I}_2 = \mathbf{O}_2$.
2. Donner les racines du polynôme $X^2 - sX + p$.
3. Déterminer le reste de la division de X^n par $X^2 - sX + p$.
4. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $A^n = 3^n \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 5 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $X^2 + 4X + 16$ est un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer les formes exponentielles des racines complexes du polynôme $X^2 + 4X + 16$.
3. On effectue la division euclidienne de X^n par $X^2 + 4X + 16$. Montrer que le reste de la division est $R(X) = 4^{n-1} \dfrac{\sin(\frac{2\pi n}{3})}{\sin(\frac{2\pi}{3})} X - 4^{n-1} \dfrac{\sin(\frac{2\pi(n-1)}{3})}{\sin(\frac{2\pi}{3})}$.
4. En déduire que A^n

> Les polynômes annulateurs peuvent permettre de déterminer les puissances de certaines matrices. Si le polynôme annulateur admet des racines **distinctes** $r_1, r_2, \ldots$ (réelles ou complexes), les éléments de la matrice puissances n^e^seront de la forme $ar_1^n + br_2^n + \ldots$.

Exercice 6

Soit la matrice stochastique $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ avec a et $b \in]0;1[$. On pose $\lambda = 1 - a - b$.

1. Montrer que $P^2 - (1 + \lambda)P + \lambda \mathbf{I}_2 = 0$
2. Montrer que λ et 1 sont des racines de $X^2 - (1 + \lambda)X + \lambda$.

4.4.2 Exercices : chaines de Markov, prise en main

Exercice 7

Un employé arrive en retard à sont travail suivant les probabilités suivantes :

— s'il est en retard un jour alors il a 15 % de chance d'être en retard le lendemain,

— s'il est à l'heure un jour alors il a 20 % de chance d'être en retard le lendemain.

On note $\mathcal{S} = \{H\ ;\ R\}$ l'espace des états où $H =$« à l'heure », et $R =$« en retard ». On modélise la situation par une chaine de Markov (X_i). On note X_i l'état de l'employé au jour i. Le premier jour, l'employé est à l'heure.

1. Compléter :

   $\mathbb{P}(X_0 = H) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad\mathbb{P}(X_0 = R) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   La loi de la variable X_0 est $\pi_0 = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_0 = H) & \mathbb{P}(X_0 = R)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ldots & \ldots\end{pmatrix}$

   $\mathbb{P}_{X_0=H}(X_1 = H) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad\mathbb{P}_{X_0=H,X_1=R}(X_2 = H) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

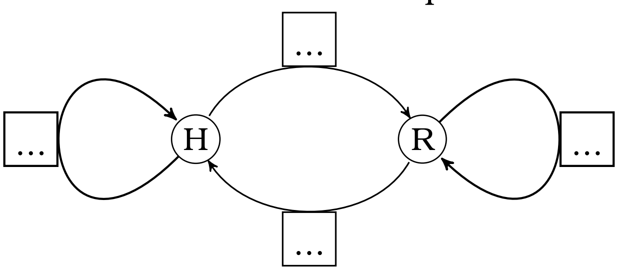
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = H) &= \mathbb{P}\big((X_0 = H) \cap (X_1 = H)\big) + \mathbb{P}\big((X_0 = R) \cap (X_1 = H)\big)\\ &= \mathbb{P}(X_0 = H)\mathbb{P}_{(X_0=H)}(X_1 = H) + \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = R) &= \mathbb{P}\big((X_0 = H) \cap (X_1 = R)\big) + \mathbb{P}\big((X_0 = R) \cap (X_1 = R)\big)\\ &= \mathbb{P}(X_0 = H)\mathbb{P}_{(X_0=H)}(X_1 = R) + \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

   La loi de la variable X_1 est $\pi_1 = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_1 = H) & \mathbb{P}(X_1 = R)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ldots & \ldots\end{pmatrix}$

2. Similairement, déterminer la loi de X_2 et préciser $\pi_2 = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_1 = H) & \mathbb{P}(X_1 = R)\end{pmatrix}$

3. Entrer les poids des arêtes du graphe graphe probabiliste associé à ce modèle, et préciser la matrice de transition du problème.



La matrice de transition : $P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc}\mathbf{H} & \mathbf{R}\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathbf{H}\\ \mathbf{R}\end{array} & \begin{pmatrix}\ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots\end{pmatrix}\end{array}$

4. Calculer les produits de matrices suivants :

   $$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.75 & 0.15\\ 0.80 & 0.20\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.75 & 0.15\\ 0.80 & 0.20\end{pmatrix}^2 \qquad \begin{pmatrix}0.75 & 0.15\end{pmatrix}Q \qquad P^2 \qquad \pi_0 P^2$$

5. Interpréter dans le contexte de l'exercice $\pi_0 P^3$

Exercice 8 — Étude du marché du travail de la population (15-65 ans) d'un pays fictif..

En 2023, 69% de la population occupe un emploi, 6% de la population est au chômage.

Les transitions entre l'emploi, le chômage et l'inactivité sur le marché du travail de ce pays d'une année à la suivante observées précédemment sont données dans le tableau suivant :

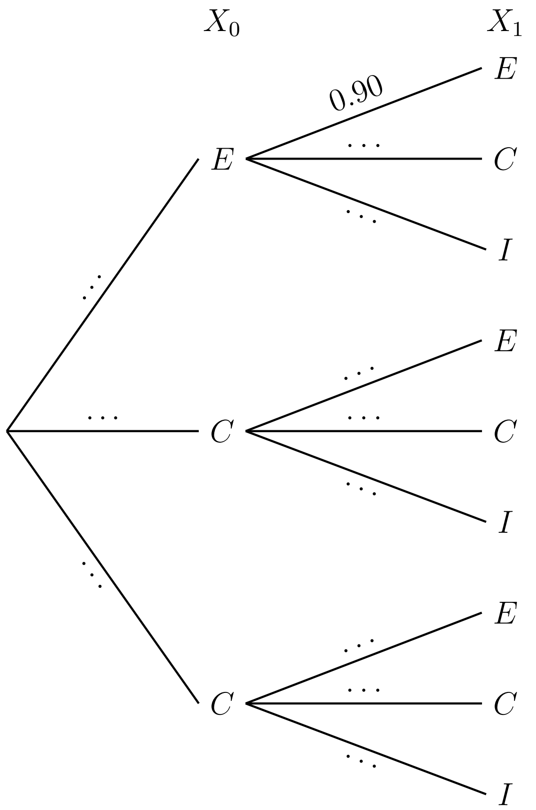
Année $n+1$

Année n	Emploi	Chômage	Inactif
Emploi	90%	3%	7%
Chômage	30%	43%	27%
Inactif	14%	7%	79%

Interprétation : 90% des personnes qui ont un emploi une année n occupent un emploi l'année suivante.

On choisit au hasard une personne de la population (15-65 ans). L'espace des états est $\mathcal{S} = \{E \ ; \ C \ ; \ I\}$, et on note X_n la situation de cette personne l'année $2023 + n$.

1. Donner $\mathbb{P}(X_0 = E)$, $\mathbb{P}(X_0 = C)$ et $\mathbb{P}(X_0 = I)$, et déterminer $\pi_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0{=}E) & \mathbb{P}(X_0{=}C) & \mathbb{P}(X_0{=}I) \end{pmatrix}$.
2. Compléter l'arbre pondéré qui traduit l'évolution de la situation entre l'année 0 et 1.

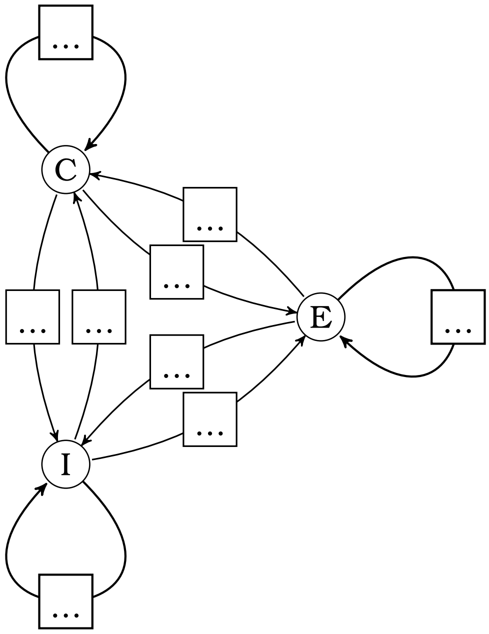


Probabilités

$\mathbb{P}\big((X_0 = E) \cap (X_1 = E)\big) = \mathbb{P}\big((X_0 = E)\big)\mathbb{P}_{X_0=E}\big((X_1 = E)\big)$

3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X_1 = E)$ et $\mathbb{P}(X_1 = C)$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}(X_1 = I)$.
4. Utiliser la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité $\mathbb{P}(X_2 = C)$.
5. Exprimer les probabilités $\mathbb{P}(X_{n+1} = E)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = C)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = E)$ en fonction des probabilités $\mathbb{P}(X_n = E)$, $\mathbb{P}(X_n = C)$ et $\mathbb{P}(X_n = I)$.
6. Compléter les poids des arêtes du graphe probabiliste associé à ce modèle, et préciser la

matrice P de transition du problème.



$$P = \begin{array}{c} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{I} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{E} & \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

7. Pour tout n, la loi de X_n est représentée par la matrice ligne

$$\pi_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = E) & \mathbb{P}(X_n = C) & \mathbb{P}(X_n = I) \end{pmatrix}$$

   a) Vérifier que $\pi_{n+1} = \pi_n P$.

   b) En déduire la forme explicite de l'état probabiliste à l'année n.

   c) Quel est l'état probabiliste de la population à l'année 4 ?

8. Si les transitions sur le marché du travail restent inchangées dans les années à venir, quel pourcentage de la population serait au chômage ?

   En déduire le taux de chômage sur le long terme. *(Le taux de chômage est la proportion de la population au chomâge parmi la population active, i.e. emploi + chomâge)*

9. On appelle un probabilité invariante, la loi de probabilité $\pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, solution de $\pi = \pi P$.

   a) Écrire le système de 4 équations vérifié par x, y et z.

   b) Résoudre par Pivot de Gauss et montrer que $\pi = \begin{pmatrix} 0.63 & 0.07 & 0.30 \end{pmatrix}$

> Le théorème de Perron-Frobenius (1910) appliqué aux chaînes de Markov, permet d'affirmer, sous certaines conditions, il existe une unique loi de probabilité invariante π, et que la loi de X_n se rapproche de π.
>
> L'état initial $\pi_0 \sim X_0$ n'a pas d'influence sur le comportement assymptotique de la loi de X_n.

Exercice 9

Une chaîne de magasins de prêt à porter a adopté en fonction du succès ou de l'échec d'un type de vêtement mis en vente, la stratégie commerciale suivante :

— En cas de succès du modèle vendu on conserve le même modèle le mois suivant. Il a alors une probabilité 0,5 de se retrouver en situation d'échec.

— En cas d'échec on change de modèle le mois suivant en adoptant une politique commerciale plus agressive (prix plus ajusté, publicité etc). Il a alors une probabilité 0,6 d'avoir du succès.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste à deux états.
2. On suppose qu'en cas de succès d'un modèle, l'entreprise gagne 12€ par article et qu'en cas d'échec, elle perd 1,20€ par article.
   a) En cas de succès d'un modèle, quel est le gain moyen sur ce modèle un mois plus tard ?
   b) Quel est le montant du gain moyen que cette entreprise peut espérer réaliser sur le long terme ?

Exercice 10

1. Représenter le graphe probabiliste à trois états $\{A, B, C\}$ dont la matrice de transition associée est $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.
2. On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape n.
   On suppose que $P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Calculer P_1 et P_3
3. Déterminer l'état probabiliste stable du système.

Exercice 11

Un opérateur de téléphonie mobile propose à ses abonnés deux forfaits :

— une formule A qui donne droit à deux heures de communication mensuelle ;

— une formule B qui donne droit à un nombre illimité de communications mensuelles.

On admet que d'une année sur l'autre, le nombre de clients de cet opérateur est stable et que :

— 20% des clients ayant choisi la formule B changent de formule ;

— 30% des clients ayant choisi la formule A changent de formule.

En 2016, 80% des clients de cet opérateur étaient abonnés à la formule A.

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste de sommets A et B et donner sa matrice de transition.

2. Pour un entier naturel n donné, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ avec $a_n + b_n = 1$, la matrice ligne décrivant l'état probabiliste lors de l'année $2016 + n$. L'état probabiliste initial est donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A en 2017.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2$.
3. On pose pour tout entier n, $u_n = a_n - 0,4$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
   b) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que, pour tout entier naturel n : $a_n = 0,4 \times (1 + 0,5^n)$
   c) Déduire de ce qui précède, la limite de la suite (a_n). Donner une interprétation concrète de ce résultat.
   d) À partir de quelle année, la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A sera-t-elle inférieure à 0,401 ?

Exercice 12

Un industriel produit une boisson conditionnée sous deux emballages distincts A et B.

Une étude effectuée auprès des consommateurs a permis d'établir que d'un mois sur l'autre, 84% des consommateurs restent fidèles au conditionnement A contre 76% pour le conditionnement B.

Au moment de l'étude, les consommations des deux conditionnements sont égales.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A le n-ième mois après l'étude et $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le n-ième mois après l'étude. Ainsi, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
   b) Montrer que la matrice ligne P_2 est égale à $\begin{pmatrix} 0,564 & 0,436 \end{pmatrix}$.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P = P \times M$. Déterminer les réels a et b. Interpréter ce résultat.
4. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.

5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - 0,6$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,6$.
   b) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que $a_n = -0,1 \times 0,6^n + 0,6$.
   c) À partir de combien de mois après l'étude, la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A est-elle supérieure à $0,595$?

Exercice 13

Un industriel décide de mettre sur le marché un nouveau produit. Afin de promouvoir celui-ci, il souhaite lancer une campagne hebdomadaire de publicité.

Avant le lancement de cette campagne, on contrôle l'impact de cette campagne auprès d'un panel de consommateurs. On trouve ceux qui ont une opinion favorable (F), ceux qui sont neutres (N) et ceux qui ont une opinion négative (R). On a constaté que d'une semaine sur l'autre :

— 28% des consommateurs ayant un avis favorable adoptent une position neutre et 10% une opinion négative ;

— Parmi les consommateurs ayant une opinion neutre, 32% émettent un avis favorable et 10% un avis négatif ;

— 70% des consommateurs ayant un avis négatif ne changent pas d'opinion et 16% adoptent un avis favorable.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets F, N et R.
2. On note M la matrice de transition associée à ce graphe. Compléter $M = \begin{pmatrix} \dots & 0,28 & 0,1 \\ 0,32 & \dots & 0,1 \\ \dots & \dots & 0,7 \end{pmatrix}$.
3. L'industriel décide de lancer la campagne publicitaire.
   L'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'un consommateur touché par la campagne soit favorable au produit la semaine n, b_n la probabilité que ce consommateur soit neutre la semaine n et c_n la probabilité que ce consommateur ait une opinion négative de ce produit la semaine n.
   La semaine du début de la campagne est notée semaine 0. On a $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que l'état probabiliste une semaine après le début de la campagne est $P_1 = \begin{pmatrix} 0,32 & 0,58 & 0,1 \end{pmatrix}$.
   b) Déterminer l'état probabiliste P_3. Interpréter ce résultat.

c) Déterminer l'état probabiliste stable du système.

d) En ne prenant en compte que les opinions favorables, combien de semaines devrait durer la campagne publicitaire ?

Exercice 14

Un industriel décide de modifier l'emballage d'un de ses produits.

On note A le conditionnement actuel du produit et B le nouveau conditionnement.

À partir des études réalisées au préalable, la direction commerciale estime que 28 % des consommateurs choisissant le conditionnement A et 12 % des consommateurs choisissant le conditionnement B changent d'avis d'un mois sur l'autre.

Pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les probabilités qu'un consommateur choisisse respectivement le conditionnement A et le conditionnement B le n-ième mois après la mise sur le marché du conditionnement B et $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le n-ième mois après la mise sur le marché du nouveau conditionnement. Ainsi, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

partie a

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. a) Donner la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

   b) Calculer la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement B deux mois après sa mise sur le marché.
3. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.

   Déterminer les réels a et b. Interpréter ce résultat.

partie b L'industriel décide de ne plus proposer le conditionnement A à partir du mois où il prévoit que moins de 32 % des consommateurs choisiront ce conditionnement.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,12$.
2. Compléter l'algorithme suivant pour calculer le nombre de mois au bout duquel le conditionnement A sera retiré du marché.

```
A = 1
N = 0
while ...
  A = ...
  N = ...
```

3. Pour tout nombre entier naturel n, on définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0,3$.
    a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
    b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $a_n = 0,7 \times 0,6^n + 0,3$.
4. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0,7 \times 0,6^n + 0,3 \leqslant 0,32$.

    En déduire au bout de combien de mois, le conditionnement A sera retiré du marché.

Exercice 15

Après avoir effectué quelques parties au jeu « 2048 » Léa a constaté que :

— quand elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est égale à $0,64$.

— quand elle a perdue, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est égale à $0,14$.

On note G l'état : « Léa a gagné la partie » et P l'état : « Léa a perdu la partie ».

Pour un jour donné, on note également pour tout entier naturel n :

— g_n la probabilité que Léa gagne la n-ième partie ;

— p_n la probabilité que Léa perde la n-ième partie ;

— $E_n = \begin{pmatrix} g_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième partie.

On suppose que la veille du jour considéré, Léa avait gagné sa dernière partie, on a donc $g_0 = 1$ et $E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Traduire les données par un graphe probabiliste.
    b) Préciser la matrice de transition M associée à ce graphe.
    c) Calculer la probabilité que Léa gagne sa troisième partie.
    d) Déterminer l'état stable du graphe probabiliste.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $g_{n+1} = 0,5g_n + 0,14$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par $u_n = g_n - 0,28$.
    a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
    b) En déduire que pour tout entier naturel n, $g_n = 0,72 \times 0,5^n + 0,28$.
4. À partir de combien de parties dans la journée la probabilité que Léa gagne sa partie sera-t-elle strictement inférieure à 0,3 ?