Chapitre

10 Notions de fonctions et résolutions graphiques d'(in)équations

10.1 Définitions

Exemple 10.1 — le domaine de définition d'une fonction.

a) f est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

On écrit : $f\colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - 3x + 1 \end{array}$.

à lire « f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x^3 - 3x + 1$ ».

L'image de x par f est $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

L'image de 0 par f est $f(0) = 0^3 - 3 \times 0 + 1 = 1$

L'image de -5 par f est $f(-5) = (-5)^3 - 3(-5) + 1 = -109$.

b) Soit $g\colon t \mapsto \dfrac{1}{2t-1}$. L'expression $g(t)$ admet des valeurs interdites, on peut choisir $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ comme domaine de définition de g. On écrit $g\colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - 3x + 1 \end{array}$.

c) Soit fonction $h\colon \begin{array}{l} [0;4] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x + 3 \end{array}$.

L'image de 0 par h est 3.

Le nombre -1 n'admet pas d'image par h. Il n'est pas dans le domaine.

Le domaine de définition peut exclure des nombres qui ne sont pas des valeurs interdites.

d) La fonction $i\colon \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x + 3 \end{array}$ est définie uniquement sur des valeurs entières.

Deux fonctions peuvent avoir la même expression mais pas le même domaine de définition.

[1] (généralement un intervalle ou une réunion d'intervalles)

lire « fonction f de D dans $\mathbb{R}$ qui à $x \in D$ associe f de x »

Définition 10.1 — vieillotte. Soit un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ [1].

Une fonction f définie sur D est une **relation** qui à tout nombre $x \in D$ **associe un unique** $y \in \mathbb{R}$. On écrit :

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Dans les cas courants au lycée la relation est décrite par une **expression** (une règle de calcul) pour calculer l'image $f(x)$ connaissant la valeur de x. Mais beaucoup de fonction n'ont pas d'expression algébrique[2].

[2] $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto$ **nbr de diviseurs de** x

Définition 10.2 Une fonction f est un **ensemble de couples** (x, y) (x est l'abscisse, y est l'ordonnée), tel qu'il n'y ait pas 2 couples ayant la même abscisse mais des ordonnées différentes.

$$\text{si } (x, y) \in f \quad \text{et } (x; y') \in f \quad \text{alors} \quad y = y'$$

Le domaine de f est l'ensemble noté D_f des abscisses de la fonction.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a 2 possibilités :

- L'abscisse $x \notin D_f$: Il n'existe pas de y tel que $(x, y) \in f$. x n'a pas d'image.
- l'abscisse $x \in D_f$: Il existe **exactement** une ordonnée y tel que le couple $(x, y) \in f$. On écrit $y = f(x)$ et on dira que « y est **l'image** de x » ou encore « x est **un** antécédent de y ». Noter cette asymétrie.

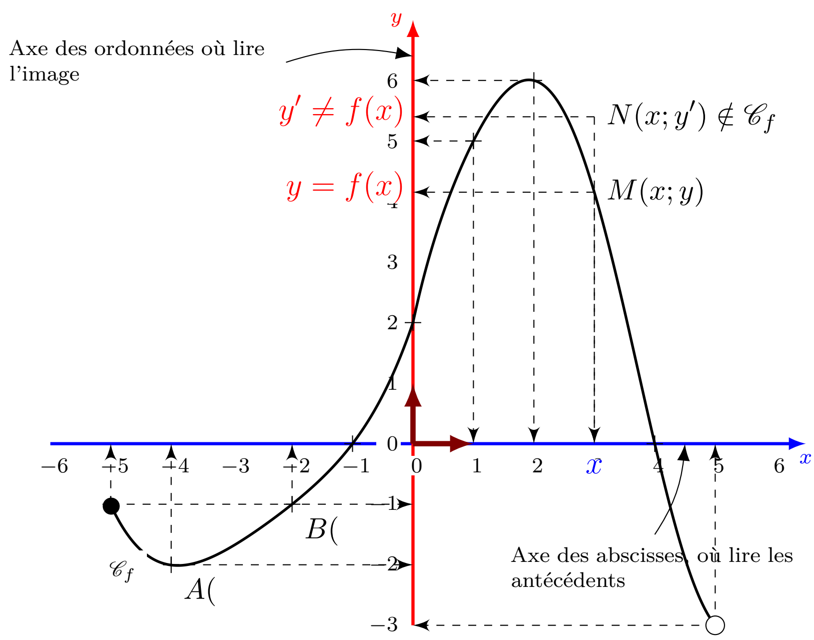

Figure 10.1 – La représentation graphique d'une fonction f dans un repère $(O; I, j)$ est l'ensemble de points notés $\mathscr{C}_f$:

$$M(u; v) \in \mathscr{C}_f \iff v = f(u)$$

On écrit $\mathscr{C}_f : y = f(x)$.
La représentation graphique d'une fonction ne peut pas avoir deux points ayant même abscisse et des ordonnées différentes.