Chapitre 15

Vecteurs (2) : approche analytique

Table 15.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 15...

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître**.../**savoir faire**...	🪨	💎	💍
Approche analytique			
Tracer et déterminer graphiquement les coordonnées d'un vecteur	1,		
Calculer les coordonnées d'un vecteur	2, 3, 4	5, 6, 7	
Calculer la norme d'un vecteur		8 9	
Équations vectorielles			
Résoudre des équations vectorielles simples	10, 11, 12	13, 14	
Démontrer à l'aide des vecteurs			
Nature d'un quadrilatère	15, 16	17, 18	
Trouver le 4^{e} sommet d'un parallélogramme		19, 20, 21	
Déterminant et colinéarité			
calcul de déterminants		22, 23	
utiliser la colinéarité pour démontrer le parallélisme ou l'alignement		24, 25, 26	
Bilan			
		27 à 31	

15.1 Coordonnées de vecteurs et opérations

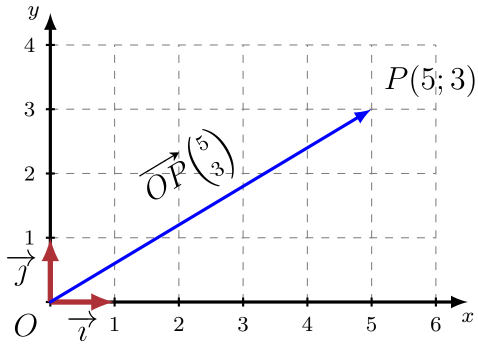
Dans le repère $(O; I, J)$, les vecteurs (non colinéaires) $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ forment une *base*.

Pour un point $P(x\ ;\ y)$ du plan, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ s'écrit comme combinaison linéaire : $\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

On dit que dans le repère $(O; I, J)$ (ou la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$) le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

■ **Exemple 15.1**

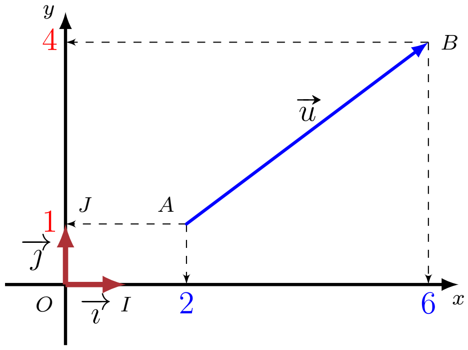
1. $\vec{0} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$ donc $\vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Pour $P(5\ ;\ 3)$, $\overrightarrow{OP} = 5\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, on écrit $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$



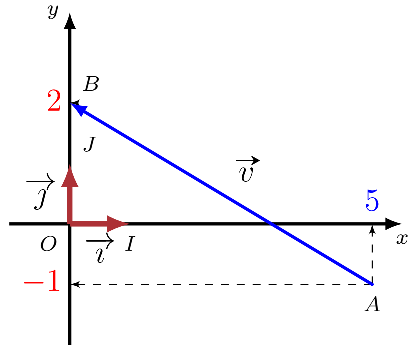
Définition 15.1 — coordonnées d'un vecteur lié. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ dans le repère $(O; I, J)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées dans le repère $(O; I, J)$ (ou la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

■ **Exemple 15.2 — lecture graphique de coordonnées.**

$\vec{u}\begin{pmatrix} 6 - 2 = 4 \\ 4 - 1 = 3 \end{pmatrix}$



$\vec{v}\begin{pmatrix} 0 - 5 = -5 \\ 2 - (-1) = 3 \end{pmatrix}$



Propriété 15.1 Dans un repère *orthonormé*, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour norme $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

■ **Exemple 15.3 — Calcul de coordonnées et de normes.**

Soient $A(2\ ;\ -4)$ et $B(-1\ ;\ 3)$ dans un repère orthonormé.

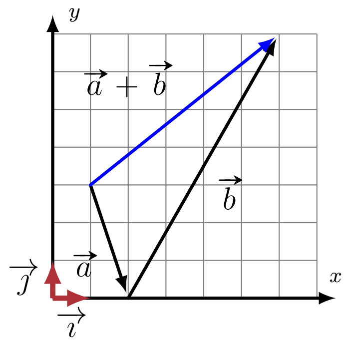
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et sa norme.

solution. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = -1 - 2 = -3 \\ y_B - y_A = 3 - (-4) = 7 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = \sqrt{(-3)^2 + (7)^2} = \sqrt{58}$. ■

Définition 15.2 — opérations. Soit les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans le repère $(O; I, J)$.

1. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur de coordonnées $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$
2. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(k\vec{u})\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$. En particulier $(-\vec{u})\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

■ **Exemple 15.4**



Si $\vec{a}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ alors $(\vec{a}+\vec{b})\begin{pmatrix} 1+4=5 \\ -3+7=4 \end{pmatrix}$

■ **Exemple 15.5**

Si $\vec{p}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{q}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ alors :

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 4-(-2) \end{pmatrix}$ donc $(\vec{q}-\vec{p})\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1-(-2) \\ -2-4-(-5) \end{pmatrix}$ donc $(\vec{p}-\vec{q}-\vec{r})\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

R La définition 15.2 est cohérente avec la formule des coordonnées de la définition 15.1 : $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A} = \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}\binom{x_B}{y_B} - \overrightarrow{OA}\binom{x_A}{y_A}$.

■ **Exemple 15.6** Si $\vec{p}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{q}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ alors :

1. $3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ donc $(3\vec{q})\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2(2) \\ 1+2(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ donc $(\vec{p}+2\vec{q})\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$
3. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(4)-3(2) \\ \frac{1}{2}(1)-3(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ donc $(\frac{1}{2}\vec{p}-3\vec{q})\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{19}{2} \end{pmatrix}$

R L'écriture $5\vec{u}\binom{2}{3}$ peut suggérer que l'on multiplie par 5 le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\binom{2}{3}$.
On rajoutera donc des parenthèses pour dire que les coordonnées de $5\vec{u}$ sont $(5\vec{u})\binom{2}{3}$

15.2 Égalité de vecteurs à l'aide des coordonnées

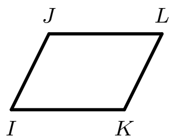
Propriété 15.2 — égalité.

Dans un repère, les vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux (même direction, sens et norme) si et seulement si leurs coordonées sont égales:

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \iff \qquad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

■ **Exemple 15.7** Soit les $I(2;-2)$, $J(-1;-1)$, $K(-3;2)$, $L(0;1)$.

1. Montrer par le calcul que $IJKL$ est un parallélogramme.
2. Trouver par le calcul le point $M(x;y)$ tel que $IJMK$ est un parallélogramme.



solution.

1. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -1-2=-3 \\ -1-(-2)=1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix} -3-0=-3 \\ 2-1=1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$, et $IJKL$ est un parallélogramme.
2. $IJMK$ parallélogramme alors $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} x-(-3) \\ y-2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x+3=-3 \\ y-2=1 \end{cases}$ $\therefore M(-6\ ;\ -3)$.

■

15.3 Déterminant et colinéarité

Définition 15.3 — déterminant.

Dans un repère, le *déterminant* des vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le nombre réel donné par :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x(y') - y(x')$$

■ **Exemple 15.8** Calculer les déteriminant des vecteurs suivants :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3(5) - 2(4) = 7$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$; $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -4 & \\ 5 & \end{vmatrix} =$

Définition 15.4 — colinéarité. $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ sont tous les multiples $k\vec{u}$ ou $k \in \mathbb{R}$.

Il s'agit du vecteur nul $\vec{0}$ et de tous les vecteurs de même direction que $\vec{u}$.

Propriété 15.3 — colinéarité à l'aide des coordonnées.

Dans un repère, les vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonées sont proportionnelles, c.à.d. que le déterminant est nul :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \propto \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(\vec{u}, \vec{v}) = (x)(y') - (y)(x') = 0$$

■ **Exemple 15.9** Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2(9) - 6(3) = 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. $\vec{u} \propto \vec{v}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(3) - 2(4) = 1$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{pmatrix}$. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} \sqrt{3}+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\vec{u} \propto \vec{v}$.

■ **Exemple 15.10 — montrer que deux droites sont parallèles.**

Soient $A(1\ ;\ 3)$, $B(5\ ;\ -2)$, $C(-1\ ;\ 6)$ et $D(7\ ;\ -4)$. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Démonstration.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-1=4 \\ -2-3=-5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 7-(-1)=8 \\ -4-6=-10 \end{pmatrix}$, $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = 4(-10) - (-5)(8) = 0$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires non nuls, ils ont la même direction : $(AB)//(CD)$ ■

■ **Exemple 15.11 — montrer que 3 points sont alignés.**

Montrer que les points $A(2\ ;\ 5)$, $B(3\ ;\ 8)$ et $C(-5\ ;\ -16)$ sont alignés.

Démonstration.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-2=1 \\ 8-5=3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5-2=-7 \\ -16-5=-21 \end{pmatrix}$, $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & -21 \end{vmatrix} = 1(-21) - 3(-7) = 0$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires non nuls, ils ont la même direction : $(AB)//(AC)$.

Les points A, B et C sont alignés. ■

15.4 Exercices

15.4.1 Exercices : coordonnées de vecteurs, normes

Exercice 1

1. Représenter dans le repère orthonormé les vecteurs suivants :

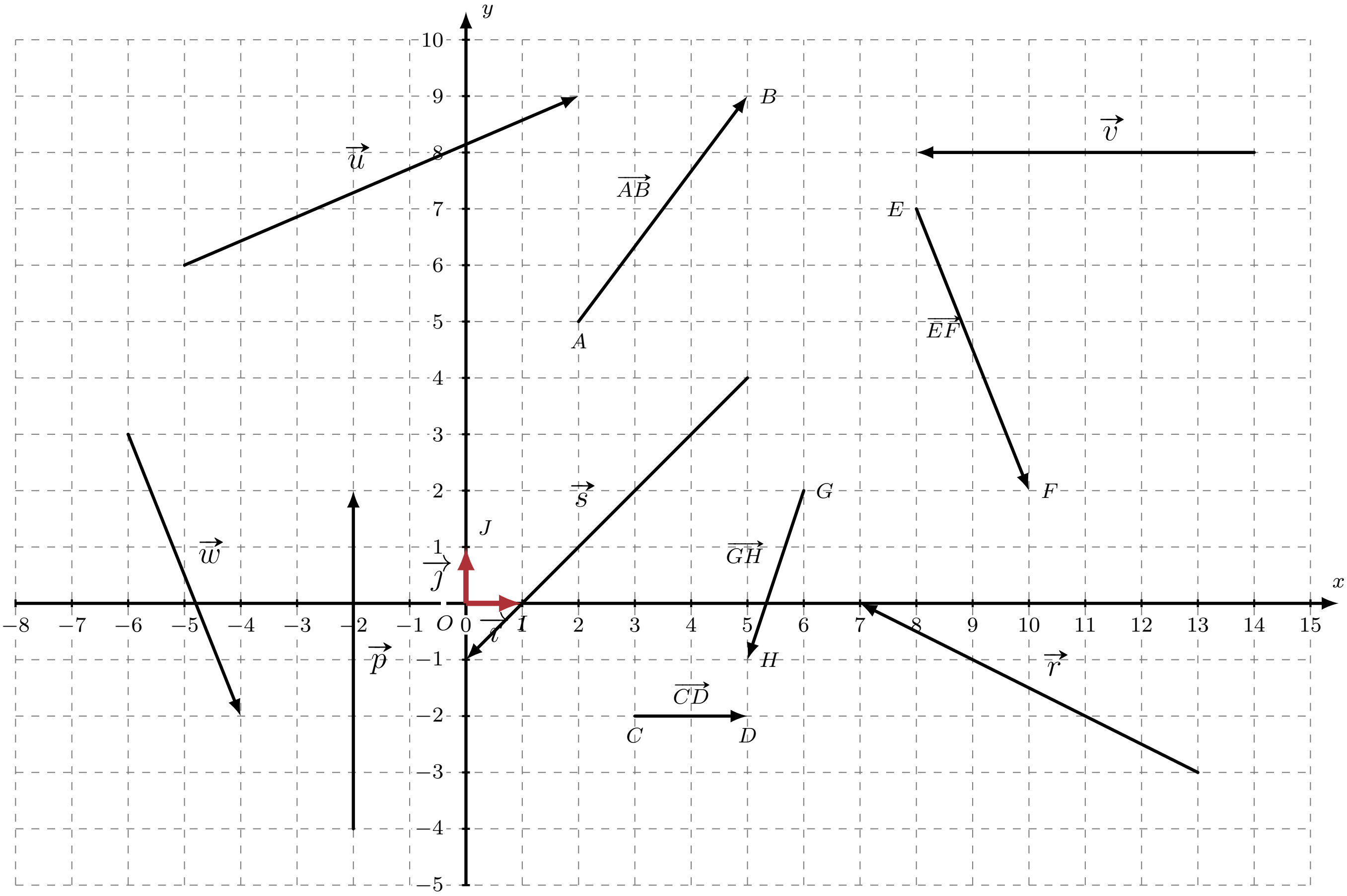
   a) le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ d'origine $A(2\ ;\ 5)$

   b) le vecteur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ d'origine $C(3\ ;\ -2)$

   c) le vecteur $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ d'origine $E(8\ ;\ 7)$

   d) le vecteur $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ d'origine $G(6\ ;\ 2)$

2. Lire les coordonnées des vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$; $\vec{p}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$; $\vec{q}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$; $\vec{r}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$.



Exercice 2 Calculer les coordonnées du vecteur demandé :

1. $\overrightarrow{AB}$ avec $A(2;3)$, $B(4;7)$
2. $\overrightarrow{AB}$ avec $A(3;-1)$, $B(1;4)$
3. $\overrightarrow{AB}$ avec $A(-2;7)$, $B(1;4)$
4. $\overrightarrow{BA}$ avec $A(2;5)$, $B(3;0)$
5. $\overrightarrow{BA}$ avec $A(0;4)$, $B(6;-1)$
6. $\overrightarrow{AB}$ avec $B(0;0)$, $A(-1;-3)$.
7. $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ avec $A(3;-8)$, $B(-8;-9)$ et $C(0;8)$.
8. $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ avec $A(-1;1)$, $B(4;-4)$ et $C(5;-2)$.

Exercice 3

Soit $\vec{a}\binom{-3}{2}$, $\vec{b}\binom{1}{4}$ et $\vec{c}\binom{-2}{-5}$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Calculer les coordonnées des vecteurs :

1. $\vec{a}+\vec{b}$
2. $\vec{a}+\vec{c}$
3. $\vec{b}+\vec{a}$
4. $\vec{c}+\vec{a}$
5. $\vec{b}+\vec{c}$
6. $\vec{a}+\vec{a}$
7. $\vec{c}+\vec{b}$
8. $\vec{b}+\vec{a}+\vec{c}$

Exercice 4

Soit $\vec{p}\binom{-4}{2}$, $\vec{q}\binom{-1}{-5}$ et $\vec{r}\binom{3}{-2}$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Calculer les coordonnées des vecteurs :

1. $\vec{p}-\vec{q}$
2. $\vec{q}-\vec{r}$
3. $\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}$
4. $\vec{p}-\vec{q}-\vec{r}$
5. $\vec{p}-\vec{r}-\vec{q}$
6. $\vec{r}+\vec{q}-\vec{p}$

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. Déterminer $\overrightarrow{AC}$ sachant que $\overrightarrow{BA}\binom{2}{-3}$ et $\overrightarrow{BC}\binom{-3}{1}$.
2. Déterminer $\overrightarrow{CB}$ sachant que $\overrightarrow{AB}\binom{-1}{3}$ et $\overrightarrow{CA}\binom{2}{-1}$.
3. Déterminer $\overrightarrow{SP}$ sachant que $\overrightarrow{PQ}\binom{-1}{4}$, $\overrightarrow{RQ}\binom{2}{1}$ et $\overrightarrow{RS}\binom{-3}{2}$.

Exercice 6

Soit $\vec{p}\binom{1}{5}$, $\vec{q}\binom{-2}{4}$ et $\vec{r}\binom{-3}{-1}$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Calculer les coordonnées des vecteurs :

1. $-3\vec{p}$
2. $\frac{1}{2}\vec{q}$
3. $2\vec{p}+\vec{q}$
4. $\vec{p}-2\vec{q}$
5. $\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{r}$
6. $2\vec{p}+3\vec{r}$
7. $2\vec{q}-3\vec{r}$
8. $2\vec{p}-\vec{q}+\frac{1}{3}\vec{r}$

Exercice 7

Le plan est muni du repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et des points $A(-3\ ;\ 2)$, $B(1\ ;\ -2)$, $C(-5\ ;\ 3)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs :

1. $\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{BC}$
4. $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$
5. $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$
6. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

■ **Exemple 15.12 — calculer des normes de vecteurs.**

Soit $\vec{p}\binom{3}{-5}$, $\vec{q}\binom{-1}{-2}$ dans le repère *orthonormé* $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, déterminer :

1. $\|\vec{p}\|$
2. $\|\vec{p}\|$
3. $\|\vec{p}-2\vec{q}\|$

solution.

$$\begin{aligned}\|\vec{p}\| &= \sqrt{(3)^2+(-5)^2}\\ &= \sqrt{9+25}\\ &= \sqrt{34}\text{ U.L.}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\|\vec{q}\| &= \sqrt{(-1)^2+(-2)^2}\\ &= \sqrt{1+4}\\ &= \sqrt{5}\text{ U.L.}\end{aligned}$$

$\binom{3}{-5}-2\binom{-1}{-2}=\binom{5}{-1}$ d'où $(\vec{p}-2\vec{q})\binom{5}{-1}$

$$\begin{aligned}\|\vec{p}-2\vec{q}\| &= \sqrt{(5)^2+(-1)^2}\\ &= \sqrt{26}\text{ U.L.}\end{aligned}$$

■

Exercice 8

Soit $\vec{r}\binom{2}{3}$, $\vec{s}\binom{-1}{4}$ dans le repère *orthonormé* $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, déterminer :

1. $\|\vec{r}\|$ | 2. $\|\vec{s}\|$ | 3. $\|\vec{r}+\vec{s}\|$ | 4. $\|\vec{r}-\vec{s}\|$ | 5. $\|\vec{s}-2\vec{r}\|$

Exercice 9

Soit $\vec{p}\binom{1}{3}$, $\vec{q}\binom{-2}{4}$ dans le repère *orthonormé* $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer $\|\vec{p}\|$ et $\|\vec{q}\|$
2. En déduire directement les normes de $\|2\vec{p}\|$; $\|-4\vec{q}\|$; $\|3\vec{p}\|$; $\|-3\vec{q}\|$ et $\left\|-\frac{1}{2}\vec{q}\right\|$

15.4.2 Exercices : égalités de vecteurs et équations vectorielles

Exercice 10

Déterminer dans chaque cas les réels a et b qui vérifient les égalités vectorielles :

1. $\binom{a-4}{b-3}=\binom{1}{3}$ | 2. $\binom{a-5}{b-2}=\binom{3-a}{2-b}$ | 3. $2\binom{1}{3a}=\binom{b}{2}$ | 4. $a\binom{1}{1}+b\binom{2}{0}=\binom{-1}{3}$

Exercice 11

Soit les points $A(-1\ ;\ 3)$, $B(2\ ;\ 5)$, $C(-1\ ;\ 2)$ et $D(a\ ;\ b)$ dans le repère $(O;I,J)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DC}$
2. Sachant que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$, déterminer a et b.
3. Sachant que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, déterminer a et b.

■ **Exemple 15.13 — Équation vectorielle dans le plan.**

Soit les points $A(1;2)$, $B(3;1)$ et $C(4;5)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Déterminer les coordonnées des points M et N vérifiant $3\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{BC}$.

solution.

Méthode 1 : écrire les équations vérifiées les coordonnées de M	**Méthode 2 :** utiliser la relation de Chasles pour déterminer $\overrightarrow{ON}$
$3\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}$ $3\binom{x-3}{y-1}+2\binom{1-x}{2-y}=\binom{4-3}{5-1}$ $\begin{cases}3(x-3)+2(1-x)=1\\3(y-1)+2(2-y)=4\end{cases}$ $\begin{cases}x-7=1\\y+1=4\end{cases}$ $\therefore M(8\ ;\ 3)$	$\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OB}+3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ $-2\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ $-2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{ON}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ $\binom{x}{y}=\frac{-1}{2}\binom{4}{5}+\frac{3}{2}\binom{-1}{3}$ $\therefore N(\ -\frac{7}{2};\ 2)$

■

Exercice 12

Soit $A(-15\ ;\ 12)$ et $B(8\ ;\ -4)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer C vérifiant $\overrightarrow{CO} = 10\overrightarrow{AB}$

Exercice 13

Soit $A(1\ ;\ -16)$ et $B(-9\ ;\ 9)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer C vérifiant $\overrightarrow{CB} = -14\overrightarrow{AB}$.

Exercice 14

On donne les points $A(-5;2)$. $B(3;0)$ et $C(-1;4)$.

1. Écrire les équations vérifiées par les coordonnées de M et les résoudre :
   a) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
   b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC}$
   c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$
   d) $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC}$
2. En décomposant les vecteurs à l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$, puis en déduire les coordonnées de M.
   a) $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CM}$
   b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

15.4.3 Exercices : applications des égalités de vecteurs

Exercice 15

Soit les points $A(1\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ -3)$, $C(7\ ;\ -4)$ et $D(5\ ;\ 1)$ dans le repère $(O;I,J)$.

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. Que peut-on déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

Exercice 16

Soit les points $A(-3\ ;\ -1)$, $B(5\ ;\ -2)$, $C(7\ ;\ 3)$ et $D(-1\ ;\ 4)$ dans le repère $(O;I,J)$. Utiliser une égalité vectorielle pour montrer que $ABCD$ est un parallélogramme (faire une figure).

Exercice 17

Soit les points $B(-10;-5)$, $E(-16;3)$, $A(-48;-21)$ et $U(-42;-29)$ dans un repère orthonormé.

a) Montrer à l'aide d'une égalité vectorielle que $BEAU$ est un parallélgoramme.

b) Calculer les longueurs des côtés adjacents BE et EA et des diagonales BA et EU.

c) Que pouvez vous dire du quadrilatère $BEAU$?

Exercice 18

Soit les points $C(-7;9)$, $A(6{,}5;2)$, $F(-4;13)$ et $E(-17{,}5;20)$ dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $CAFE$ est un parallélgoramme.
2. Calculer les longueurs des côtés adjacents CA et AF et des diagonales CF et AE.
3. Que pouvez vous dire du quadrilatère $CAFE$?

Exercice 19

Soit les points $A(11,-14)$, $B(-13,12)$ et $C(-4,7)$ dans le repère $(O;I,J)$. Sachant que $ABDC$ est un parallélogramme (faire une figure à main levée), utiliser une égalité vectorielle pour déterminer les coordonnées de $D(x;y)$.

Exercice 20

Soit les points $A(12\ ;\ 15)$, $B(-11\ ;\ 17)$ et $C(-11\ ;\ -13)$ dans le repère $(O;I,J)$. Sachant que $ABCD$ soit un parallélogramme (faire une figure à main levée), utiliser une égalité vectorielle pour déterminer les coordonnées du point $D(x;y)$.

Exercice 21

Soit les points $D(-14;15)$, $A(16;11)$ et $T(15;-7)$ dans le repère $(O;I,J)$. $DARK$ est le parallélogramme de centre T (intersection des diagonales). Faire une figure à main levée et utiliser des égalités vectorielles pour déterminer les coordonnées de R et K.

15.4.4 Exercices : colinéarité et applications

Exercice 22 Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont colinéaires.

1. $\vec{u}\binom{2}{-3}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\binom{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et $\vec{v}\binom{2}{-\sqrt{6}}$

Exercice 23

Dans chaque cas les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Écrire une équation vérifiée par m et la résoudre.

1. $\vec{u}\binom{2}{6}$ et $\vec{v}\binom{m}{3}$
2. $\vec{u}\binom{-m}{4m-3}$ et $\vec{v}\binom{1}{-3}$
3. $\vec{u}\binom{27}{2m}$ et $\vec{v}\binom{2m}{3}$

Exercice 24

Pour chacun des cas suivants, utiliser le déterminant pour déterminer si les droites (PQ) et (AB) sont parallèles.

1. $P(1\ ;\ -1)$, $Q(-2\ ;\ 3)$, $A(3\ ;\ 1)$ et $B(-3\ ;\ 9)$
2. $P(-1\ ;\ 5)$, $Q(3\ ;\ -4)$, $A(1\ ;\ 1)$ et $B(9\ ;\ -17)$
3. $P(-2\ ;\ 1)$, $Q(1\ ;\ 3)$, $A(4\ ;\ 5)$ et $B(13\ ;\ 11)$
4. $P(1\ ;\ -1)$, $Q(4\ ;\ 3)$, $A(-1\ ;\ 5)$ et $B(7\ ;\ 1)$

Exercice 25

Dans un repère, soit les points: $A(-2\ ;\ 1)$, $B(3\ ;\ 3)$, $C\left(1\ ;\ \frac{11}{5}\right)$ et $D\left(\frac{45}{2}\ ;\ \frac{54}{5}\right)$

1. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.
2. Les points A, B et D sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 26

Trouver a pour que $A(1;2)$, $B(-3;0)$ et $C(-14;a)$ soient alignés dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

15.4.5 Exercices : bilan

Exercice 27

Soit les points $A(1\ ;\ -1)$, $B(-1\ ;\ -2)$ et $C(-2\ ;\ 2)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les coordonnées du point G vérifiant $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D vérifiant $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.
3. Montrer que les points B, G et D sont alignés.

Exercice 28

Soit les points $M(0\ ;\ -3)$, $N(2\ ;\ 3)$, $P(-9\ ;\ 0)$ et $Q(-1\ ;\ -1)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Calculer les coordonnées des points A et B tels que: $\overrightarrow{NA}=\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MB}=3\ \overrightarrow{MQ}$.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$.
3. Démontrer que les points P, A et B sont alignés.

Exercice 29

Soit les points $A(2\ ;\ -3)$, $B(1\ ;\ -1)$, $C(4\ ;\ 5)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Le point $M(x;y)$ est tel que $\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{BC}$. Retrouver les coordonnées de M.
2. Déterminer les coordonnées du point $N(x;y)$ tel que $\overrightarrow{BN}=2\ \overrightarrow{AB}-3\ \overrightarrow{AC}$
3. Démontrer que les points A, M et N sont alignés.

Exercice 30

Soit les points: $A(-2\ ;\ 2)$, $B(0\ ;\ -3)$ et $C(4\ ;\ 5)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$.
2. I est le milieu de $[AB]$. Calculer les coordonnées de I
3. Les points C, I et M sont-ils alignés ? Justifier.

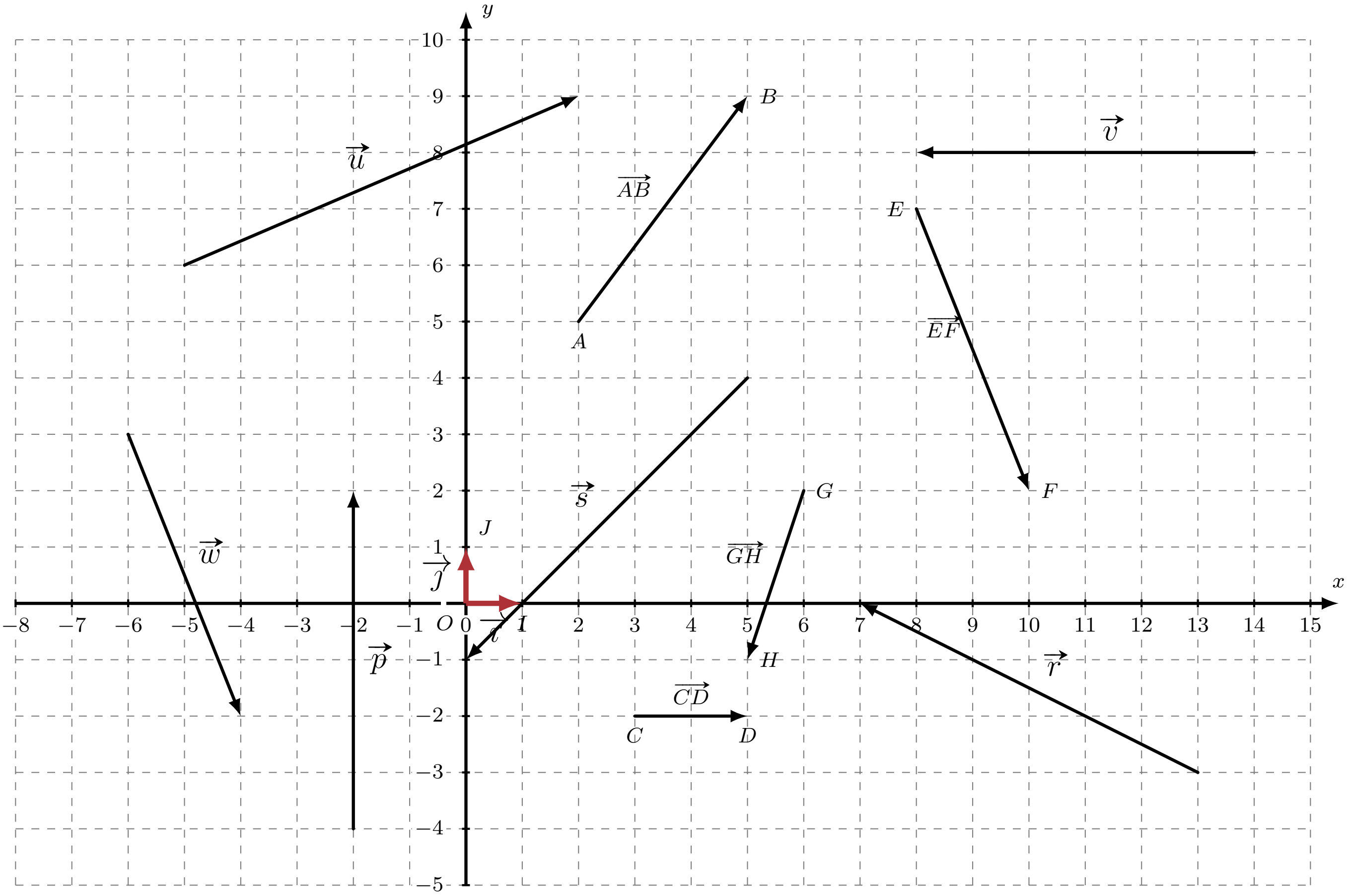
Exercice 31

Soit les points: $A(2\ ;\ 4)$, $B(-2\ ;\ 2)$ et $C(6\ ;\ -1)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les coordonnées du point I, le milieu de $[AC]$.
2. Déterminer les coordonnées de G et H vérifiant $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BH}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
3. Prouver que B est le milieu de $[GI]$
4. Montrer que les points A, G et H sont alignés.

15.5 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 1.



$\vec{u}\begin{pmatrix}+7\\+3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}+2\\-5\end{pmatrix}$; $\vec{p}\begin{pmatrix}0\\+6\end{pmatrix}$; $\vec{q}\begin{pmatrix}-6\\+3\end{pmatrix}$; $\vec{r}\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$. ■

solution de l'exercice 2.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$
5. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$
6. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$
7. $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-8\\-17\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}3\\-16\end{pmatrix}$;
8. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$;

■

solution de l'exercice 3. ■

solution de l'exercice 4. ■

solution de l'exercice **??**. ■

solution de l'exercice **??**. ∎

solution de l'exercice **??**. ∎

solution de l'exercice 8. ∎

solution de l'exercice 9. ∎

solution de l'exercice 10. ∎

solution de l'exercice 11. ∎

solution de l'exercice 12. ∎

solution de l'exercice 13. ∎

solution de l'exercice 14. ∎

solution de l'exercice 16. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme. ∎

solution de l'exercice 17.

1. $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix} = \overrightarrow{UA}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$
2. $BE = 10$ et $EA = 40$, $BA = 10\sqrt{17}$ et $EU = 10\sqrt{17}$.
3. $BEAU$ est un rectangle qui n'est pas carré.

∎

solution de l'exercice 18.

1. $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}13{,}5\\-7\end{pmatrix} = \overrightarrow{UA}\begin{pmatrix}13{,}5\\-7\end{pmatrix}$
2. $CA = AF = \frac{5\sqrt{37}}{2}$, $CF = 5$ et $AE = \sqrt{445}$.
3. $CAFE$ est un losange qui n'est pas carré.

∎

solution de l'exercice 19. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-24\\26\end{pmatrix} = \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x+4\\y-7\end{pmatrix}$. $D(-28;33)$. ∎

solution de l'exercice 20. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-23\\2\end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-11-x\\-13-y\end{pmatrix}$. $D(12;-15)$. ∎

solution de l'exercice 21.
$\overrightarrow{DT}\begin{pmatrix}29\\-22\end{pmatrix}=\overrightarrow{TR}\begin{pmatrix}x-15\\y+7\end{pmatrix}$. $R(44;-29)$ et $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}-1\\-18\end{pmatrix}=\overrightarrow{TK}\begin{pmatrix}x-15\\y+7\end{pmatrix}$. $K(14;-25)$. ∎

solution de l'exercice 22. ∎

solution de l'exercice 23. ∎

solution de l'exercice 24. ∎

solution de l'exercice 25. ∎

solution de l'exercice 26. ∎

solution de l'exercice 27. ∎

solution de l'exercice 28. ∎

solution de l'exercice 29. ∎

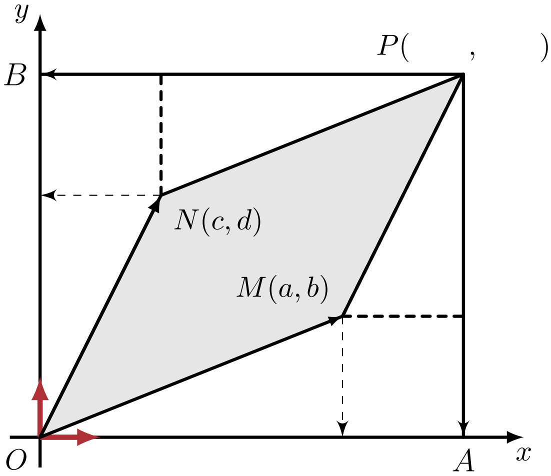
solution de l'exercice 30. ∎

solution de l'exercice 31. ∎

15.6 B.A.R. Maths : retour sur le déterminant

Problème 1 — Interprétation géométrique du déterminant dans un repère orthonormé.

Soit un repère **orthonormé** $(O; I, J)$, et les points $M(a, b)$ et $N(c, d)$ et P tel que $OPMN$ est un parallélogramme. Pour simplifier on suppose que a, b, c et d sont des réels strictement positifs, avec $a > c$ et $d > b$.



1. Préciser les coordonnées de P
2. En déduire l'aire du rectangle $OAPB$.
3. Calculer les aires des triangles et rectangles blancs.
4. En déduire l'aire du parallélogramme $OMPN$.
5. Vérifier qu'elle est égale au déterminant $\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$.

Propriété 15.4

Soit trois points A, B, C et D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ ($ABDC$ est un parallélogramme).

Alors $\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right| =$ aire du parallélogramme $ABDC$

Problème 2

Soit points $A(0\ ;\ -2)$, $B(1\ ;\ 1)$ et $C(2\ ;\ -1)$ dans un repère othonormé. Calculer l'aire du triangle ABC.

Problème 3

Soit les points $A(1; 2)$, $B(-3; 0)$ et $C(-7; a)$ dans un repère orthonormé. Trouver 2 valeurs de a pour lesquelles le triangle ABC est d'aire 12.