A.3 Fonction carré

Définition A.2 La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Un carré est toujours positif ou nul : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geqslant 0$.

Proposition A.3 — sens de variation. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; -\infty[$:

- Si $a < b \leqslant 0$ alors $a^2 > b^2 \geqslant 0$
- Si $0 \leqslant a < b$ alors $0 \leqslant a^2 < b^2$

Figure A.2 – Tableau de variation de la fonction carré

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	

Démonstration. Exigible en fin de seconde

■

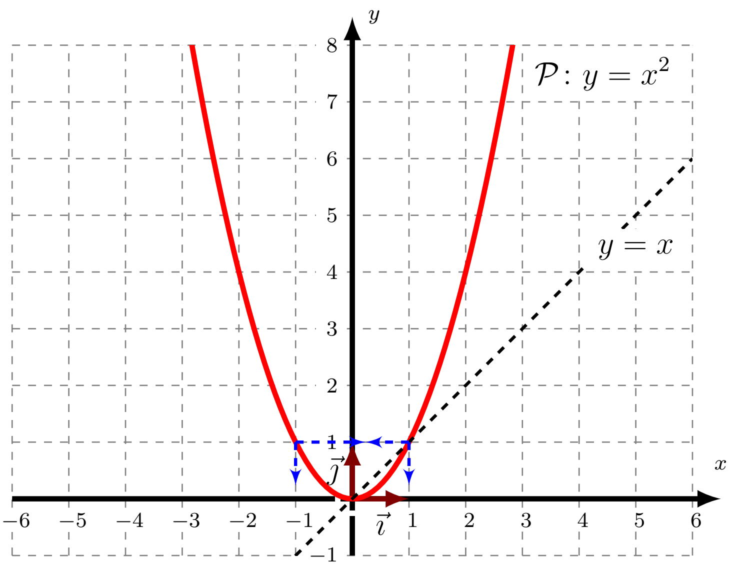
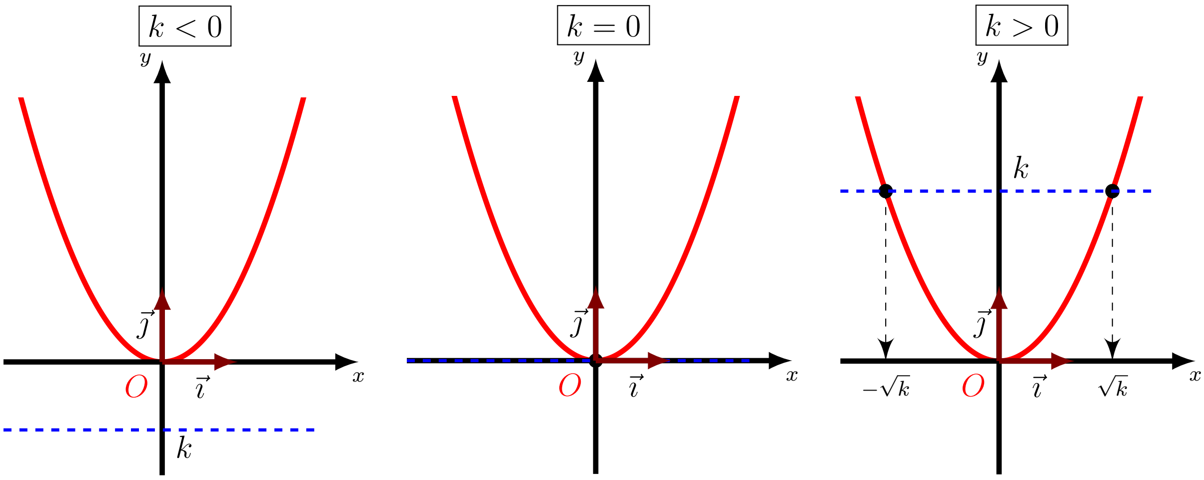
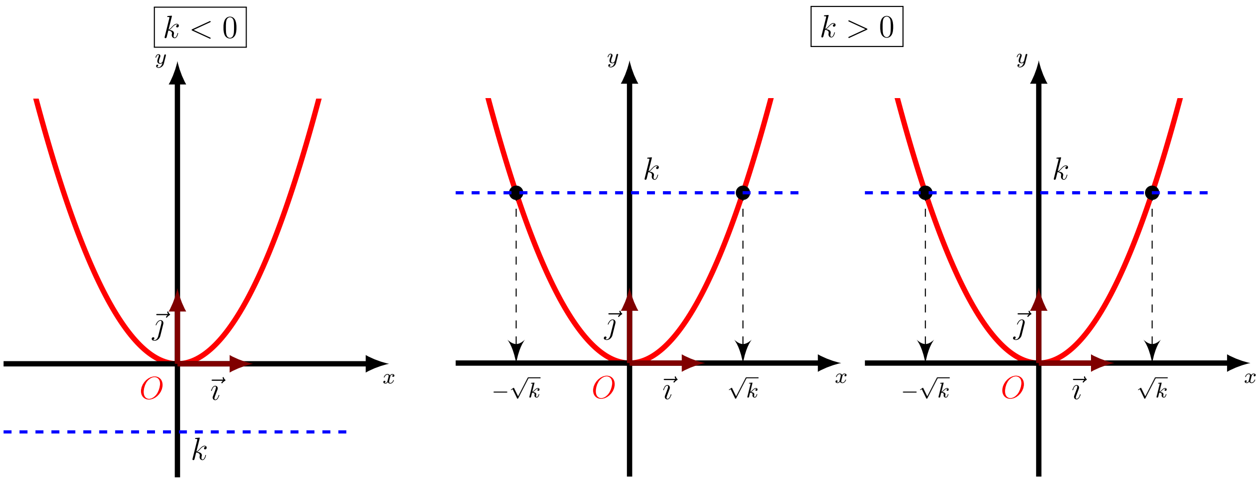


Figure A.3 – La courbe représentative de la fonction carré est la **parabole** d'équation $\mathscr{P}: y = x^2$.



pas de solution $S = \emptyset$ | solution unique $S = \{0\}$ | 2 solutions $S = \{-\sqrt{k}; \sqrt{k}\}$

Figure A.4 – Les solutions de l'équation $x^2 = k$ inconnue x, selon les valeurs de k.



L'inéquation $x^2 \leqslant k$ n'a pas de solution : $S = \emptyset$
L'inéquation $x^2 \geqslant k$ est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$

L'inéquation $x^2 \leqslant k$ a pour ensemble solution $S = [-\sqrt{k}; \sqrt{k}]$
L'inéquation $x^2 \geqslant k$ a pour ensemble solution $S =]-\infty; -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}; +\infty[$

Figure A.5 – Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant k$ inconnue x.

■ **Exemple A.3** En isolant x^2, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x :

a) $5x^2 = 15$	b) $x^2 - 5 < 11$	c) $12 > 2x^2 - 2 > 7$	d) $1 - 5x^2 \geqslant 2$

Exercices : Fonction carré

Exercice 1 — calculer les images et antécédents par une fonction carré.
f est la fonction carré définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

a) Sans calculatrice. Calculer (et simplifier) les images de $-\sqrt{6}$, 10^{-2}, $\dfrac{7}{13}$ et $1-\sqrt{2}$.

b) Quels sont les antécédents éventuels de 10 ? de 0 ? de -4 ?

Exercice 2 — Révisions. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en isolant x^2.

a) $x^2 = 9$ | b) $3x^2 = 5$ | c) $2x^2 - 5 = 3$ | d) $1 - 4x^2 = 5$ | e) $3x^2 - 5 = 13$

Exercice 3 — Résoudre des inéquations de la forme $f(x) < k$. En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carré, donner les solutions des inéquations suivantes d'inconnues x :

a) $x^2 \geqslant 9$
b) $x^2 > 3$
c) $-2 < x^2$
d) $x^2 < -5$
e) $x^2 > -5$
f) $5 \leqslant x^2 \leqslant 7$
g) $12 < x^2 < 18$
h) $0 \leqslant x^2 < 27$
i) $-5 < x^2 \leqslant 2$

Exercice 4 — Utiliser le sens de variation de la fonction carré. Comparer et encadrer si possible a^2 et b^2 dans les cas suivants :

a) Si $0 \geqslant a > b$ alors ....a^2...b^2.........
b) Si $a < b < -2$ alors ....a^2...b^2......
c) Si $a < b < 10$ alors ....a^2...b^2.........
d) Si $a < 0 < b < \sqrt{7}$ alors ....a^2...b^2......

■ **Exemple A.4 — Utiliser le sens de variation de la fonction carré.**
Soit a un nombre réel. En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carré ou de son tableau de variation, encadrer au mieux a^2 dans chaque cas suivant :

$2\sqrt{3} < a \leqslant 4$ $\qquad$ $0 < a < 3$ $\qquad$ $-5 < a < 3$

Exercice 5 Mêmes consignes

a) $a > 3\sqrt{2}$
b) $-2 < a \leqslant 0$
c) $-5 \leqslant a < -2$
d) $0 < a < 2\sqrt{7}$
e) $3\sqrt{2} < a < 2\sqrt{7}$
f) $a < -5$
g) $-5 < a < 0$
h) $-5 < a$

solution de l'exercice 3. $\mathscr{S}_1 =]-\infty, -3] \cup [3, \infty[$; $\mathscr{S}_2 = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, \infty\right[$; $\mathscr{S}_3 = \mathbb{R}$; $\mathscr{S}_4 = \emptyset$; $\mathscr{S}_5 = \mathbb{R}$; $\mathscr{S} = \left[-\sqrt{7}, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, \sqrt{7}\right]$ $\mathscr{S} = \left]-3\sqrt{2}, -2\sqrt{3}\right[\cup \left]2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\right[$ $\mathscr{S} = \left]-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right[$ $\mathscr{S} = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ ■