A.5.5 Savoir-faire 5 : signe de la fonction dérivée et sens de variation

Exemple A.28 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5$.

1. Préciser le domaine de dérivabilité de f ainsi que l'expression de $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f.

solution.

1. $D' = \mathbb{R}$. pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
2. Les valeurs critiques

$$f'(x) = 0$$

$$6(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f		$\nearrow$	15	$\searrow$	-12	$\nearrow$	

$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) - 5 = 15$.

$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) - 5 = -12$

f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-2; 1]$

f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; -2]$ et sur l'intervalle $[1; +\infty[$

■

Exercice 1

Pour chacune des fonctions f suivantes :

— préciser le domaine de définition et de dérivabilité

— déterminer sa dérivée f' et résoudre $f'(x) = 0$.

— déterminer le sens de variation de f et préciser les extremum locaux.

1. $f(x) = 2x + 1$
2. $f(x) = -3x + 2$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = -x^3$
5. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$
6. $f(x) = x^3 - 6x^2$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
9. $f(x) = -2x^3 + 4x$
10. $f(x) = -4x^3 + 15x^2 + 18x + 3$
11. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 6x - 6$
12. $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x}$

■ **Exemple A.29 — nature d'une valeur crique.**

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Déterminer les points critiques de $\mathscr{C}_f$.

solution.

$D = D' = \mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ &= 3(x-3)(x+1) \end{aligned}$$ *factoriser*

La fonction admet un maximum local en -1, et un minimum local en $x = 3$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f		$\nearrow$	10	$\searrow$	-22	$\nearrow$	

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = 10$ et $f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 5 = -22$

Les points critiques de la courbe $\mathscr{C}_f$ sont $A(-1\ ;\ 10)$ et $B(3\ ;\ -22)$. ■

Exercice 2 — entrainement.

Pour chacune des fonctions f suivantes :

— préciser le domaine de définition et de dérivabilité

— déterminer $f'(x)$.

— Déterminer les valeurs critiques solutions de $f'(x) = 0$

— Déterminer le sens de variation de f et préciser la nature des valeurs critiques.

1. $f(x) = x^2 - 2$
2. $f(x) = x^3 + 1$
3. $f(x) = x^4 - 2x^2$
4. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
5. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$
6. $f(x) = 4x - x^3$
7. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$
8. $f(x) = -x - \dfrac{9}{x}$
9. $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$

■ **Exemple A.30 — encadrement d'expressions.** Donner un encadrement de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ lorsque $-2 \leqslant x \leqslant 5$.

solution.

x	-2		0		4		5
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f	-27	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	-20

$D = D' = [-2; 5]$, f est dérivable sur $]-2; 5[$ et $f'(x) = 3x^2 - 12x$

$= 3x(x-4)$ *factoriser*

Deux valeur criques en $x = 0$ et $x = 4$.

La fonction admet un maximum local en 0, et un minimum local en $x = 4$.

On complète le tableau de variatio avec : $f(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 5 = -27$, $f(0) = (0)^3 - 6(0)^2 + 5 = 5$, $f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 5 = -27$ et $f(5) = (5)^3 - 6(5)^2 + 5 = -20$

$\therefore$ si $-2 \leqslant x \leqslant 5$ alors $-27 \leqslant x^3 - 6x^2 + 5 \leqslant 5$. ■

Exercice 3

Déterminer le maximum et le minimum des expressions suivantes.

1. $f(x) = x^3 - 12x^2 - 2$ pour $-3 \leqslant x \leqslant 5$
2. $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$ pour $-2 \leqslant x \leqslant 3$
3. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x$ pour $-3 \leqslant x \leqslant 2$
4. $f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 8x + 3$ pour $-2 \leqslant x \leqslant 2$

éléments de réponse pour exercice 1.

$f_1'(x) = 2;$

$f_2'(x) = -3;$

$f_3'(x) = 2x;$

$f_4'(x) = -3x^2;$

$f_5'(x) = 4\left(x + \frac{3}{4}\right);$

$f_6'(x) = 3x\,(x+4)\,;$

$f_7'(x) = -\frac{4}{x^5};$

$f_8'(x) = -\frac{1}{x^2};$

$f_9'(x) = -6\left(x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(x + \frac{\sqrt{6}}{3}\right);$

$f_{10}'(x) = -12\,(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right);$

$f_{11}'(x) = 6\left(x^2 + 3x + 1\right);$

$f_{12}'(x) = \frac{2\,(x-2)\,(x+2)}{x^2};$

■

éléments de réponse pour exercice 2.

$f_1'(x) = 2x;$

$f_2'(x) = 3x^2;$

$f_3'(x) = 4x\,(x-1)\,(x+1)\,;$

$f_4'(x) = 3\,(x-1)\,(x+1)\,;$

$f_5'(x) = 3\,(x-2)^2\,;$

$f_6'(x) = 4 - 3x^2;$

$f_7'(x) = \frac{2\,(x-1)\,(x^2+x+1)}{x^3};$

$f_8'(x) = -\frac{(x-3)\,(x+3)}{x^2};$

$f_9'(x) = \frac{2\,(x-2)\,(x^2+2x+4)}{x^2};$

■

éléments de réponse pour exercice 3.

$f_1'(x) = 3x\,(x-8)\,;$

$f_2'(x) = 3x\,(x-2)\,;$

$f_3'(x) = 3\left(x + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{13}}{3} + \frac{1}{3}\right);$

$f_4'(x) = -6\left(x + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{13}}{3} + \frac{1}{3}\right);$

■