Chapitre

Géométrie repérée 10

10.1 Équations de droites

Par la suite on se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition 10.1 Un **vecteur normal** à une droite D est un vecteur **non nul** qui est orthogonal à un vecteur directeur de D.

R Il existe une infinité de vecteurs directeurs d'une droite, et une infinité de vecteurs normaux à une droite.

Proposition 10.1 Soit D et D' deux droites du plan. Les énoncés suivants sont équivalents :

(i) D et D' sont perpendiculaires.

(ii) Il existe un vecteur directeur de D et un vecteur directeur de D' qui sont orthogonaux.

(iii) Il existe un vecteur normal à D et un vecteur normal à D' qui sont orthogonaux.

Proposition 10.2 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$.

- La droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\binom{a}{b}$.
- Réciproquement, toute droite ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\binom{a}{b}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Démonstration. Il suffit de se rappeler qu'un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est le vecteur $\vec{u} = \binom{-b}{a}$.

$\vec{u} \cdot \vec{n} = -ba + ab = 0$. ■

10.1.1 Exercices : application du produit scalaire à l'étude des droites

Exercice 1 Dans chaque cas, déterminer un vecteur directeur de la droite (AB) ainsi qu'un vecteur normal.

1) $A(2\,;1)$ et $B(1\;;\;0)$. Vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\ \\ \ldots\ldots\end{pmatrix}$. Vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\ \\ \ldots\ldots\end{pmatrix}$ ....

2) $A(-2\,;3)$ et $B(4\;;\;1)$. Vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\ldots\\ \\ \ldots\end{pmatrix}$. Vecteur normal ....

3) $A(2\,;-1)$ et $B(2\;;\;0)$ ....

4) $A(\sqrt{2}\,;-1)$ et $B(\sqrt{3}\;;\;\sqrt{2})$ ....

Exercice 2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de chaque droite donnée par son équation :

$d_1\colon\;\; 3x+5y-1=0$ ....

$d_2\colon\;\; 3x+8y=4$ ....

$d_3\colon\;\; y=3x+2$ ....

$d_4\colon\;\; 2x=5$ ....

$d_5\colon\;\; y=-7$ ....

$d_6\colon\;\; -y+5x+8=0$ ....

■ **Exemple 10.1** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $P(5\;;\;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right)$.

$$M(x\;;\;y)\in d \iff \overrightarrow{PM}\perp\vec{n} \iff \overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}=0 \iff (x-5)\times 1+(y-3)\times(-2)=0$$
$$x-2y+1=0$$

Exercice 3 Déterminer une équation cartésienne des droites de vecteur normal $\vec{n}$ passant par P dans les cas suivant :

1) $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$; $P(-5;3)$
2) $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix}-3\\5\end{smallmatrix}\right)$; $P(7;-2)$
3) $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix}4\\1\end{smallmatrix}\right)$; $P(5;-2)$
4) $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}\right)$; $P(6;-7)$
5) $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix}-5\\0\end{smallmatrix}\right)$; $P(3;2)$
6) $\vec{n}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$; $P(2;1)$

Exercice 4 Dans chaque cas identifier si les droites sont perpendiculaires, ou non :

1) $d_1\colon 3x-5y=1$ et $d_2\colon 2x+3y=5$
2) $d_1\colon 3x-5y=1$ et $d_2\colon 2x+y=2$
3) $d_1\colon 2x+7y=1$ et $d_2\colon x-y=5$
4) $d_1\colon y=2$ et $d_2\colon x=0$
5) $d_1\colon y=-x+4$ et $d_2\colon y=3x+1$
6) d_1 passant par $I(1\;;\;4)$ et $J(2\;;\;1)$ et d_2 passant par $K(\sqrt{2}-2\;;\;-1)$ et $L(\sqrt{2}+1\;;\;-2)$.
7) $d_1\colon\;-6y=3x$ et d_2 est de vecteur normal $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix}-8\\4\end{smallmatrix}\right)$

10.2 Étude des cercles

Par la suite on se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition 10.2 Le cercle $\mathscr{C}(\Omega\ ,\ r)$ de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tel que $\Omega M = r$.

Proposition 10.3 Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Une équation du cercle de centre $\Omega(a\ ,\ b)$ et de rayon r est :

$$M(x\ ;\ y) \in \mathscr{C}(\Omega\ ,\ r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

10.2.1 Exercices : Étude des cercles

Exercice 5 — concepts. Complétez

La figure d'équation $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ est un .... de centre .... et rayon ....

La figure d'équation $x^2 + y^2 = 9$ est un .... de centre .... et rayon ....

La figure d'équation $x^2 + y^2 = 5$ est un .... de centre .... et rayon ....

La figure d'équation $x^2 + (y-5)^2 = 1$ est un .... de centre .... et rayon ....

La figure d'équation $(x+1)^2 + y^2 = 9$ est un .... de centre .... et rayon ....

La figure d'équation $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$ est un .... de centre .... et rayon ....

La figure d'équation $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 36$ est un .... de centre .... et rayon ....

Exercice 6 Dans chaque cas, donner une équation du cercle défini ci-dessous :

1) de centre $A(2\ ;\ -1)$ et rayon $r = 3$
2) de centre $A(-1\ ;\ -4)$ et rayon $r = 8$
3) centré à l'origine et passant par $A(4\ ;\ 7)$.
4) de centre $A(-1\ ;\ 5)$ et passant par $B(-4\ ;\ -6)$.

■ **Exemple 10.2** Déterminer le centre et le rayon d'un cercle défini par l'équation $x^2 + y^2 - 2x = -3y - 2$.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 + 3y &= -2. \\ x(x-2) + y(y+3) &= -2 \\ (x-1+1)(x-1-1) + (y + \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2})(y + \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2}) &= -2 \\ (x-1)^2 - 1^2 + (y + \tfrac{3}{2})^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 &= -2 \\ (x-1)^2 + (y + \tfrac{3}{2})^2 &= \tfrac{5}{4} \end{aligned}$$

Il s'agit d'un cercle de centre $\Omega(1\ ;\ -\frac{3}{2})$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 7 Dans chaque cas, déterminer le centre et le rayon du cercle défini par l'équation donnée.

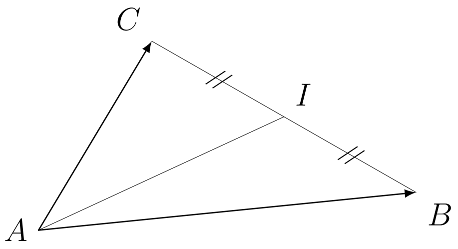
1) $(x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = 9$
2) $x^2 + y^2 = 7$
3) $x^2 + y^2 + 2x = 0$
4) $x^2 + y - 1 = x - y^2 + 1$
5) $x^2 + y^2 - 4x + 5y = 33$
6) $3x^2 + 3y^2 + x - 2y - 17 = 0$

10.3 Les théorèmes de la médiane et ses implications

La 3e identité de polarisation et l'identité du parallélogramme peuvent être réadaptées dans le triangle. Notre objectif est de les retrouver directement dans ces cas. Pour chacun des théorème suivant, utiliser la relation de Chasles, décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$, puis remplacer le membre de gauche.

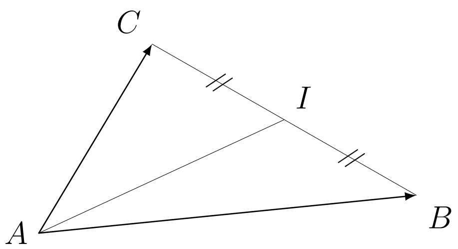
Le théorème de la médiane Soit un triangle ABC, et soit I le milieu du segment $[BC]$.

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$



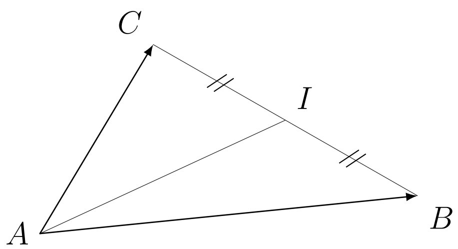
Le 2nd théorème de la médiane Soit un triangle ABC, et soit I le milieu du segment $[BC]$.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

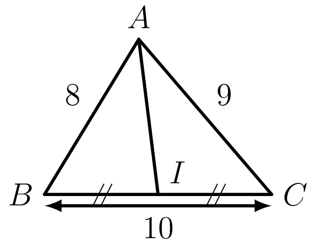


Le 3e théorème de la médiane Soit un triangle ABC, et soit I le milieu du segment $[BC]$.

$$\boxed{AB^2 - AC^2 = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$



10.3.1 Exercices



Exercice 8 Dans la figure ci-contre, calculer la longueur de la médiane AI.

Exercice 9 Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = \frac{7}{3}$ et $BC = \frac{3}{2}$. On note I le milieu de $[BC]$. Calculer la longueur AI.

Exercice 10 Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 4$ et $BC = 5$. On note I le milieu de $[AC]$. Calculer la longueur BI.

Exercice 11 A et B sont deux points du plan. On note I le milieu de $[AB]$. Démontrer, en utilisant uniquement le produit scalaire ce résultat connu du collège :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad M \in \mathscr{C}\text{cercle de diamètre } [AB]$$

Exercice 12 Soit A et B deux points du plan tel que $AB = 4$. Déterminer l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 10$.

Exercice 13 Soit A et B deux points du plan tel que $AB = 1$. On note I le milieu du segment $[AB]$. Déterminer l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3}{2}$.

Exercice 14 — distance d'un point à une droite. Soit $A(x_A\ ;\ y_A)$ un plan du plan, et la droite $D\colon ax+by+c = 0$. Soit $H(x_H\ ;\ y_H)$ le projeté orthogonal de A sur la droite D.

1) Donner un vecteur $\vec{n}$ normal à D.
2) Que vaut $ax_H + bx_H$?
3) Montrer que $|a(x_A - x_H) + b(y_A - y_H)| = \sqrt{a^2+b^2}HA$
4) Exprimer AH en fonction de a, b, c, x_A et y_A.
5) Application : déterminer la distance qui sépare le point $A(5\ ;\ 3)$ de la droite $D\colon 3x - 2y + 5 = 0$.

Exercice 15 Soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(1\ ;\ 2)$ et de rayon $r = 5$. Soit la droite (AB) avec $A(2\ ;\ 10)$ et $B(1\ ;\ -2)$.

1) Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ et une équation cartésienne de la droite (AB).
2) Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de (AB).