Chapitre

Colinéarité de vecteurs et équations de droites 13

13.1 Produit d'un vecteur par un réel

Définition 13.1 — interprétation géométrique. $\vec{u} \neq \vec{0}$. Le produit d'un réel k par un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur noté $k\vec{u}$:

P1 $0\vec{u} = \vec{0}$.

P2 Si $k \neq 0$, « $k\vec{u}$ » désigne le vecteur :

- ayant même direction que $\vec{u}$
- $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$
- Si $k > 0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont **même sens**.
  Si $k < 0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de **sens contraires**

Définition 13.2 — vecteurs opposés. $\vec{v} = -\vec{u}$ signifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction , même norme mais sont de sens contraires. En particulier : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

■ **Exemple 13.1** I est le milieu du segment $[AB]$. En utilisant uniquement des vecteurs d'extrémités A, B ou I :

a) Énumérer 2 égalités de vecteurs.

b) Énumérer 3 paires de vecteurs opposés $\vec{v} = -\vec{u}$

c) Énumérer 3 paires de vecteurs qui peuvent s'écrire $\vec{v} = 2\vec{u}$

d) Énumérer 3 paires de vecteurs qui peuvent s'écrire $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}$

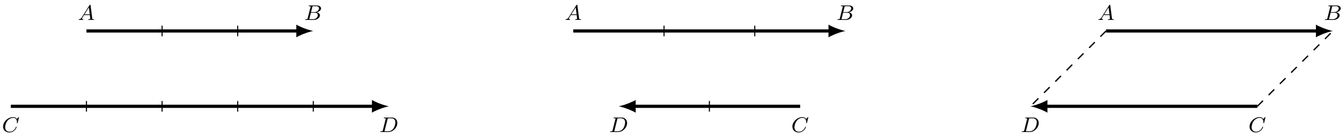
Soit un repère $(O; I, J)$, et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exercices : produit d'un vecteur par un réel

■ **Exemple 13.2**

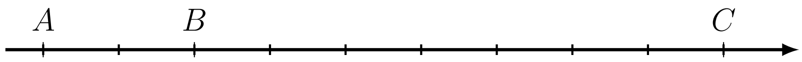
Les vecteurs ci-dessous ont tous la même direction.



$$\frac{CD}{AB} = \frac{5}{3}$$
$$CD = \tfrac{5}{3}AB$$
$$\overrightarrow{CD} = \tfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}$$

Exercice 1

a) Sur la figure ci-dessous :



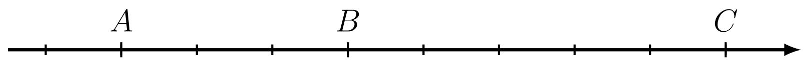
$AC = \ldots\ldots BC$ $\quad BC = \ldots\ldots AC$ $\quad BC = \ldots\ldots BA$

$\overrightarrow{AC} = \ldots\ldots \overrightarrow{BC}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \ldots\ldots \overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \ldots\ldots \overrightarrow{BA}$

$CA = \ldots\ldots BA$ $\quad AB = \ldots\ldots BC$ $\quad BA = \ldots\ldots BC$

$\overrightarrow{CA} = \ldots\ldots \overrightarrow{BA}$ $\quad \overrightarrow{AB} = \ldots\ldots \overrightarrow{BC}$ $\quad \overrightarrow{BA} = \ldots\ldots \overrightarrow{BC}$

b) À partir de la figure ci-dessous, compléter les égalités vectorielles suivantes:



$\overrightarrow{AC} = \ldots\ldots \overrightarrow{BC}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \ldots\ldots \overrightarrow{BA}$ $\quad \overrightarrow{CA} = \ldots\ldots \overrightarrow{AB}$

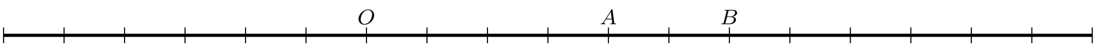
$\overrightarrow{BC} = \ldots\ldots \overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{BA} = \ldots\ldots \overrightarrow{BC}$ $\quad \overrightarrow{BA} = \ldots\ldots \overrightarrow{AB}$

c) Le point B est le milieu de $[AC]$. Compléter les égalités vectorielles suivantes :

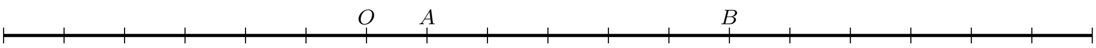
$\overrightarrow{BA} = \ldots\ldots \overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{CB} = \ldots\ldots \overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \ldots\ldots \overrightarrow{AB}$

Exercice 2 Placer les points M, N, P pour chacun des cas suivants :

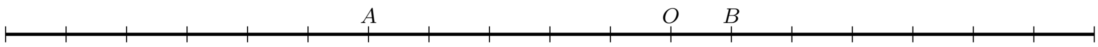
a) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OP} = 4\overrightarrow{AB}$



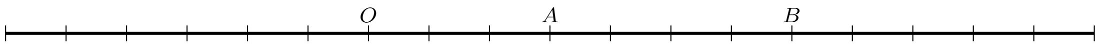
b) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$



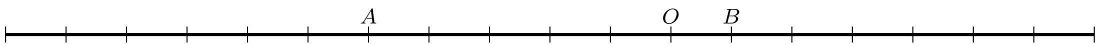
c) $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OP}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$



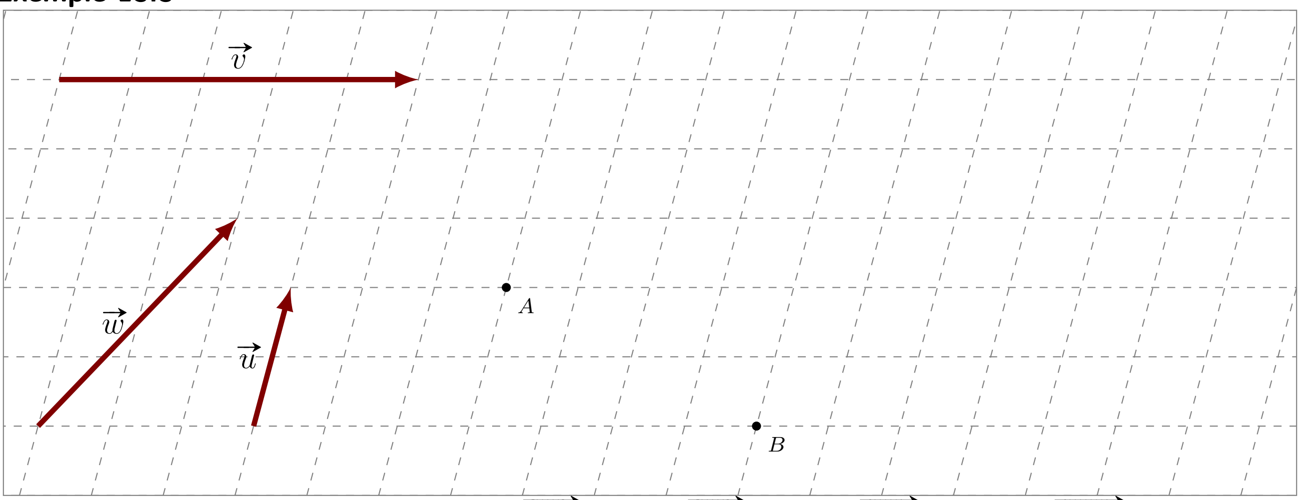
d) $2\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}$; $4\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{OP}=-3\overrightarrow{AB}$



e) $3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$; $6\overrightarrow{BN}=11\overrightarrow{BA}$ et $6\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{BA}$



■ **Exemple 13.3**



Placer les points A_0, A_1, B_0, B_1 tel que $\overrightarrow{AA_0}=\frac{3}{2}\vec{u}$; $\overrightarrow{AA_1}=-\vec{u}$; $\overrightarrow{BB_0}=\frac{3}{5}\vec{v}$ et $\overrightarrow{B_0B_1}=-\frac{7}{5}\vec{v}$.

Exercice 3 Pour chacun des cas suivants, dites s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{AB}$ puis préciser si les droites (PQ) et (AB) sont parallèles.

a) $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-16\\-24\end{pmatrix}$

b) $P(1\ ;\ -1)$, $Q(4\ ;\ 3)$, $A(-1\ ;\ 5)$ et $B(7\ ;\ 1)$

c) $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\14\end{pmatrix}$

d) $P(1\ ;\ 4)$, $Q(-3\ ;\ 5)$, $A(5\ ;\ 7)$ et $B(9\ ;\ 6)$

■ **Exemple 13.4 — Je fais.** Dans un repère $(O;\ I,J)$ on définit $A(-15\ ;\ 12)$ et $B(8\ ;\ -4)$. Sachant que $\overrightarrow{CO}=10\overrightarrow{AB}$, déterminer les coordonnées de C.

Exercice 4 Mêmes consignes

a) $A(15\ ;\ -10)$ et $B(-1\ ;\ -4)$ et $\overrightarrow{OC}=-11\overrightarrow{AB}$.

b) $A(1\ ;\ -16)$ et $B(-9\ ;\ 9)$ et $\overrightarrow{CB}=-14\overrightarrow{AB}$.

c) $A(5\ ;\ 9)$ et $B(-13\ ;\ -14)$ et $\overrightarrow{CB}=-5\overrightarrow{AB}$.

13.2 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 13.3 $\vec{u} \neq \vec{0}$. Les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ sont tous les multiples $k\vec{u}$ ou $k \in \mathbb{R}$.

Il s'agit du vecteur nul $\vec{0}$ et de tous les vecteurs de même direction que $\vec{u}$.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** » (en abrégé $\vec{u} \propto \vec{v}$) si l'un est un multiple de l'autre.

Postulat 13.5 trois points A, B et C sont alignés si et seulement si deux parmi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Postulat 13.6 les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CDC}$ sont colinéaires.

Définition 13.4 — Colinéarité à l'aide des coordonnées. Dans un repère quelconque $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

On appelle « déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ » le nombre noté :

$$\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Théorème 13.7 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

Démonstration. ∎

Exercices : Colinéarité de vecteurs

■ **Exemple 13.8** Calculer les déteriminant des vecteurs suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$. $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{vmatrix} =$

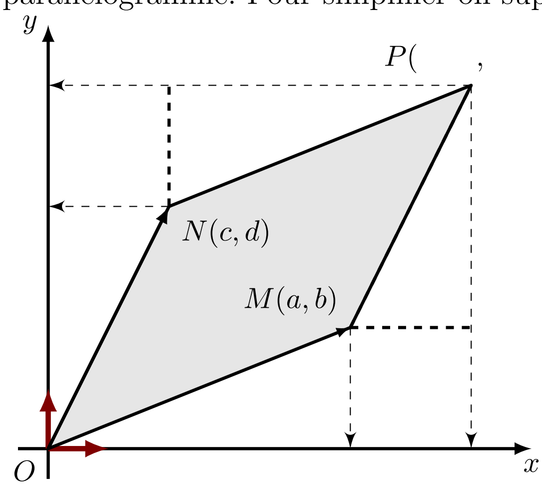
$\det(\vec{v};\vec{u}) =$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$. $\det(\vec{u};\vec{v}) =$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\-10\end{pmatrix}$.

■ **Exemple 13.9 — Interprétation géométrique du déterminant dans un repère orthonormé.**

Soit un repère **orthonormé** $(O; I, J)$, et les points $M(a,b)$ et $N(c,d)$ et P tel que $OPMN$ est un parallélogramme. Pour simplifier on suppose que a, b, c et d sont des réels strictement positifs.



■ **Exemple 13.10** Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}-\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

■ **Exemple 13.11** Soient un repère orthonormé et les points $A(0\ ;\ -2)$, $B(1\ ;\ 1)$ et $C(2\ ;\ -1)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

■ **Exemple 13.12** Montrer que les points $A(2\ ;\ 5)$, $B(3\ ;\ 8)$ et $C(-5\ ;\ -16)$ sont alignés.

■ **Exemple 13.13** Soient $A(1\ ;\ 3)$, $B(5\ ;\ -2)$, $C(-1\ ;\ 6)$ et $D(7\ ;\ -4)$. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 1 Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-\sqrt{6}\end{pmatrix}$

Exercice 2 Dans chaque cas les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Écrire une équation vérifiée par m et la résoudre.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-m\\4m-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}27\\2m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2m\\3\end{pmatrix}$

Exercice 3 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Montrer que $A(-2;1)$, $B(3;3)$, $C\left(1;\frac{11}{5}\right)$ sont alignés.
b) Trouver a pour que $A(1;2)$, $B(-3;0)$ et $C(-14;a)$ soient alignés.

Exercice 4 Dans un repère, soit les points: $A(-2\ ;\ 1)$, $B(3\ ;\ 3)$, $C\left(1\ ;\ \frac{11}{5}\right)$ et $D\left(\frac{45}{2}\ ;\ \frac{54}{5}\right)$

a) Démontrer que les points A, B et C sont alignés.
b) Les points A, B et D sont-ils alignés ?

Exercice 5 Pour chaque cas, justifier si les points donnés sont alignés.

a) $A(5;10)$, $B(-5;5)$ et $C(-1;7)$
b) $D(-3;-4)$, $E(-6;-6)$ et $F(1;-1)$
c) $K(-9;4)$, $L(0;3)$ et $M(9,2)$
d) $P(-3;2)$, $Q(-6;-2)$ et $R(-10,-6)$

Exercice 6 Dans un repère, on donne les points : $M(0\ ;\ -3)$, $N(2\ ;\ 3)$, $P(-9\ ;\ 0)$ et $Q(-1\ ;\ -1)$

1) Calculer les coordonnées des points A et B tels que:
   a) $\overrightarrow{NA} = \dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{MN}$
   b) $\overrightarrow{MB} = 3\ \overrightarrow{MQ}$
2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$.
3) Démontrer que les points P, A et B sont alignés.

Exercice 7 Soit les points $A(1;2)$, $B(-3;0)$ et $C(-7;a)$ dans un repère orthonormé. Trouver 2 valeurs de a pour lesquelles le triangle ABC est d'aire 12.

13.3 Équation cartésienne d'une droite

Définition 13.5 $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d) lorsque la direction du vecteur $\vec{u}$ est parallèle à la droite (d).

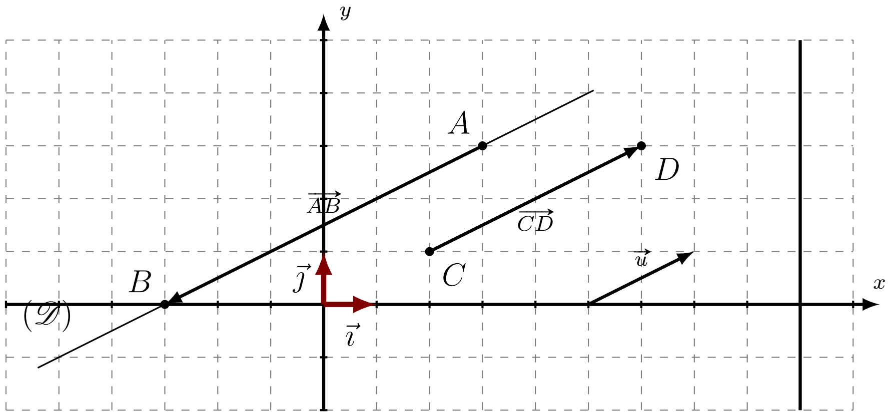


Figure 13.1 – Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).
$\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de toute droite verticale.

Pour décrire une droite il suffit de préciser un vecteur directeur, et un point de cette droite. Par exemple, la droite (AB) est définie par le point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. Plus précisément :

La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \propto \overrightarrow{AB}$.

Théorème 13.14 — forme cartésienne. Dans un repère $(O; I, J)$. Pour toute droite (d), il existe trois nombres a, b et c, tel que :

$$M(x; y) \in (d) \iff ax + by + c = 0$$

On dit que $ax + by + c = 0$ est **une** équation cartésienne de (d).

Théorème 13.15 Pour a, b et c (a et b non simultanément nuls). L'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Exercices : Équation cartésienne d'une droite

Pour trouver une équation cartésienne d'une droite :

- écrire les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$
- écrire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$
- déterminer une équation cartésienne $M(x;y) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} \propto \overrightarrow{AB}$:

$$M(x;y) \in (AB) \iff \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0 \iff ax + by + \underbrace{-ax_A - by_A}_{c} = 0$$

■ **Exemple 13.16** Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A(2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ puis déterminer les points d'intersection avec les axes du repère.

■ **Exemple 13.17** Soit $A(-3;-2)$ et $B(4;2)$. Donner une équation cartésienne de la droite (AB) et les coordonnées des points d'intersection avec les axes du repère.

■ **Exemple 13.18** Soit $E(2;4)$ et $F(-3;4)$. Donner une équation cartésienne de la droite parallèle à (EF) passant par $C(-3;-2)$.

Exercice 1

Retrouver une équation cartésienne des droites de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par P dans les cas suivant et déterminer les points d'intersection avec les axes du repère.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; $P(-5;3)$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$; $P(7;-2)$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$; $P(5;-2)$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$; $P(6;-7)$

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$; $P(3;2)$

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$; $P(4;-1)$

Exercice 2

Donner une équation cartésienne des droites (AB) dans les cas suivants. Déterminer les intersections avec les axes du repère.

a) $A(-4;3)$ et $B(-2;6)$

b) $A(-2;1)$ et $B(5;2)$

c) $A(3;1)$ et $B(3;-10)$

Exercice 3

Dans chaque cas, réécrire si nécessaire l'équation sous forme cartésienne et préciser les valeurs de a, b et c. Donner un vecteur directeur et les coordonnées des intersections avec les axes du repère.

a) $3x-5y+2=0$

b) $-2x+1=0$

c) $y=6x-2$

d) $-x+4y+3=0$

e) $\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y-2=0$

f) $y=\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}$

Exercice 4

Donner une équation cartésienne des droites de vecteur directeur passant par P et parallèle à la droite $\mathscr{D}$ dans les cas suivants :

a) $P(-3;-1)$ et $\mathscr{D}\colon x-2y+5=0$

b) $P(2;1)$ et $\mathscr{D}\colon 2x+3y-5=0$

13.4 Équations réduites d'une droite

Définition 13.6 Dans un repère $(O; I, J)$. La pente du segment **non-vertical** $[AB]$ est le rapport :

$$m = \frac{\Uparrow y}{\Rightarrow x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.
Tous les segments parallèles à $[AB]$ ont la même pente m.

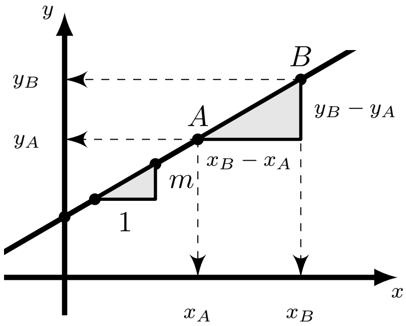


Figure 13.2 – Interprétation géométrique de la pente m d'une droite non-verticale.

La droite (d) non-verticale de pente m et qui coupe l'axe des ordonnées au point $A(0; p)$ a pour équation :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (d) &\iff \overrightarrow{AM} \propto \vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{vmatrix} x-0 & 1 \\ y-p & m \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff y = mx + p \end{aligned}$$

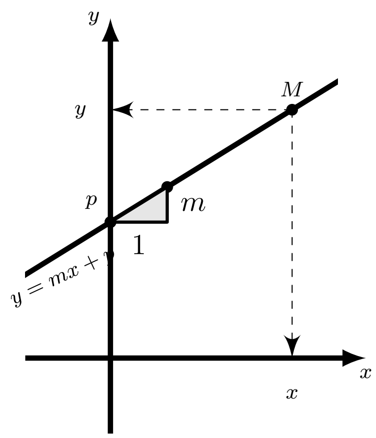


Figure 13.3 – $\mathscr{D}: y = mx + p$

Théorème 13.19 — **équation réduite d'une droite non verticale.** Dans un repère $(O; I, J)$. Pour toute droite non-verticale (d) il existe deux nombres uniques m et p tel que :

$$M(x; y) \in (d) \iff y = mx + p$$

L'équation $y = mx + p$ est l'équation réduite de la droite (d).

- m est la pente de la droite (d).
  $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est vecteur directeur de (d).
- p est l'ordonnée à l'origine : $A(0; p) \in (d)$

Si la droite est verticale, elle n'a pas de pente. Elle admet $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Une équation cartésienne est de la forme $1x - 0y + c = 0$.

Théorème 13.20 — **équation réduite d'une droite verticale.** Dans un repère $(O; I, J)$. L'équation réduite de la droite verticale qui passe par A est $x = x_A$.

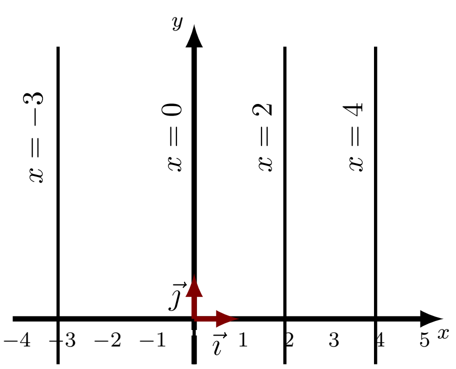
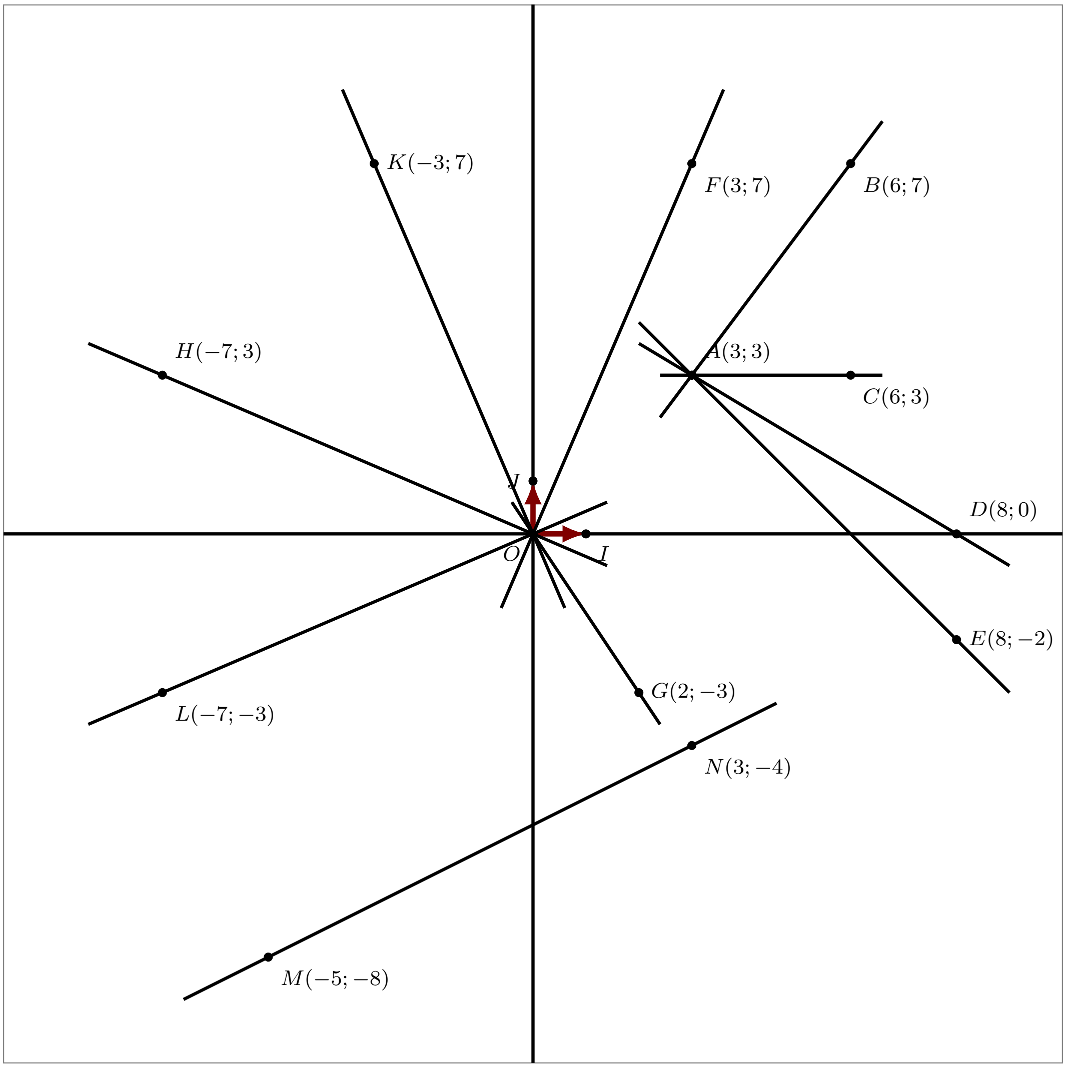


Figure 13.4 – $\mathscr{D}: x = x_A$

Exercices : Équation réduites d'une droite

■ **Exemple 13.21** Trouver l'équation réduite de la droite passant par $A(-3;5)$ et $B(7;2)$.

Exercice 1 Dans le repère $(O; I, J)$ suivant, déterminer la pente de chacune des droites.



Déterminer l'équation réduite d'une droite $y = mx + p$ (graphiquement/par le calcul) :

- déterminer la pente m par lecture graphique ou calcul.
- déterminer p par une lecture graphique directe ou bien en écrivant une équation vérifiée par p.

Il est possible de retrouver l'équation réduite à partir d'une équation cartésienne.

■ **Exemple 13.22** Déterminer les équations réduites des droites (OK) et (MN).

Exercice 2 Retrouver les équations réduites des droites restantes de l'exercice 1.

Exercice 3

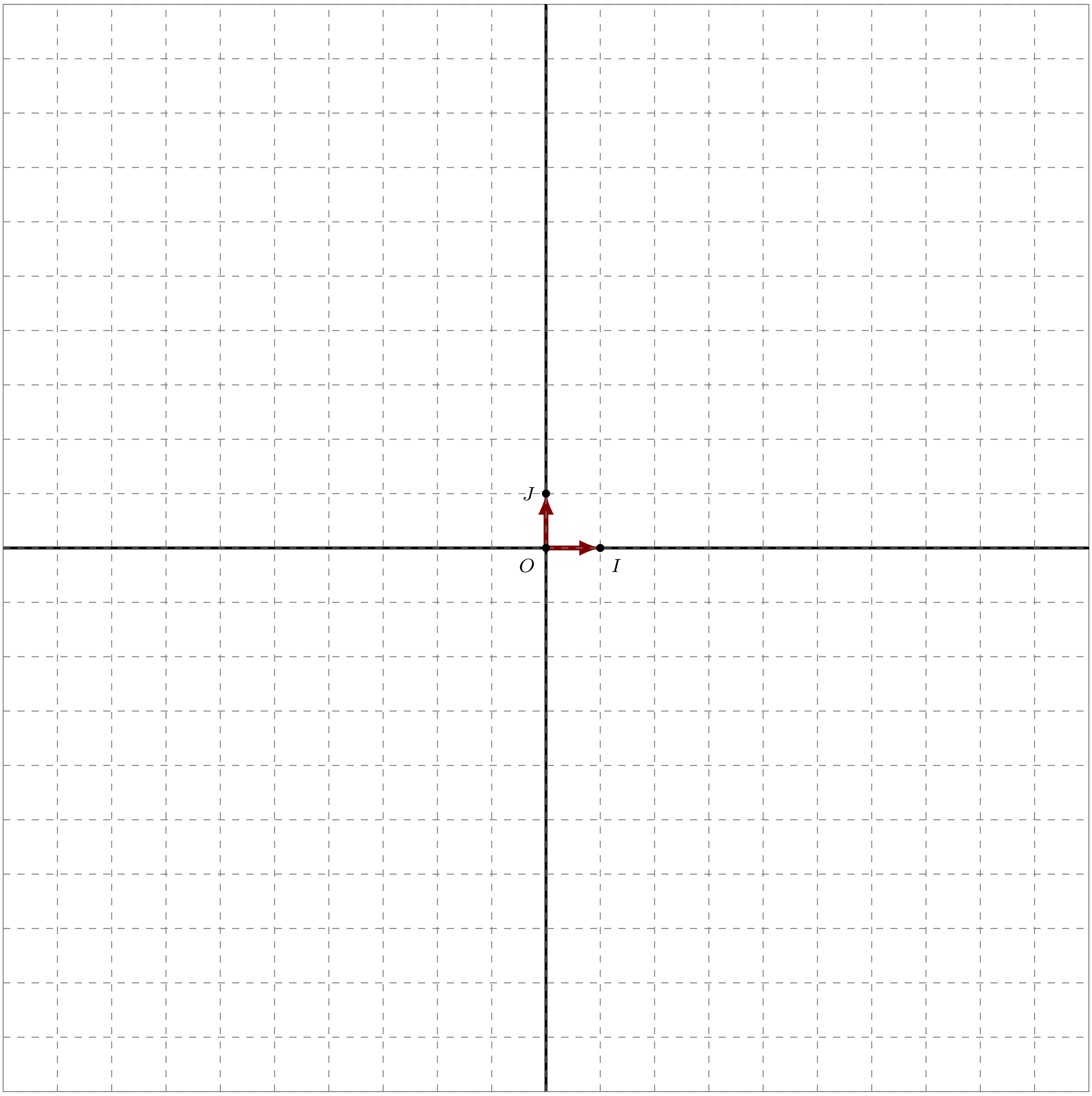
Soit la droite d'équation réduite $d\colon y = \dfrac{5}{2}x - 1$

1) Déterminer si $A(150{,}5\ ;\ 375{,}25)$ ou $B(-73,25\ ;\ 182)$ appartiennent à d.
2) C est le point de d d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
3) D est le point de d d'ordonnée -1. Quelle est son abscisse ?

Exercice 4

1) Tracer dans le repère orthonormé $(O; I, J)$ chacune des droites décrites par un point et une pente.
2) Déterminer par le calcul l'ordonnée à l'origine
3) Donner l'équation réduite de la droite.

a) $A(1;-3)$ et $m = -5$
b) $A(1;-3)$ et $m = 2$
c) $B(1;3)$ et $m = \frac{2}{5}$
d) $C(-5;2)$ et $m = -\frac{2}{7}$
e) $D(-6;-5)$ et $m = 0$
f) $E(4;1)$ et $m = -\frac{5}{3}$



Exercice 5 Pour chacune des droites décrites par par un point et une pente :
1) Déterminer par le calcul la pente et l'ordonnée à l'origine.
2) Donner l'équation réduite de la droite et identifiez les droites prallèles.

a) $K(-1;6)$ et $L(-7;3)$
b) $M(8;-2)$ et $N(4;-4)$
c) $P(1;2)$ et $Q(7;0)$
d) $R(1;-1)$ et $S(7;2)$
e) $T(0;1)$ et $U(8;-1)$
f) $V(5;-2)$ et $W(-1;-1)$.

Exercice 6 Pour chaque cas, déterminer l'équation réduite de la droite passant par A et parallèle à $\mathscr{D}$:

1) $A(-2;4)$ et $\mathscr{D}\colon y = 3x + 2$.
2) $A(5;3)$ et $\mathscr{D}\colon y = -2x + 3$.
3) $A(3;5)$ et $\mathscr{D}\colon y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.
4) $A(4;2)$ et $\mathscr{D}\colon y = 3x + 4$.

Exercice 7 Ecrire les équations cartésiennes et les équations réduites les droites d_1 à d_6 définies par une équation à deux inconnues.

$d_1\colon\ 3x + 2y = 5$
$d_2\colon\ -\dfrac{1}{2}x + y - 8 = 0$
$d_3\colon\ 2x + 8 = 0$
$d_4\colon\ 7x - 3y = 0$
$d_5\colon\ -5y = 7$
$d_6\colon\ \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}y = 6$

Exercice 8 — équations réduites puis cartésiennes. Pour chacune des droites déterminer son équation réduite, puis donner une équation cartésienne ou les coefficients a, b et c sont des entiers relatifs.

$d_1\colon y =$

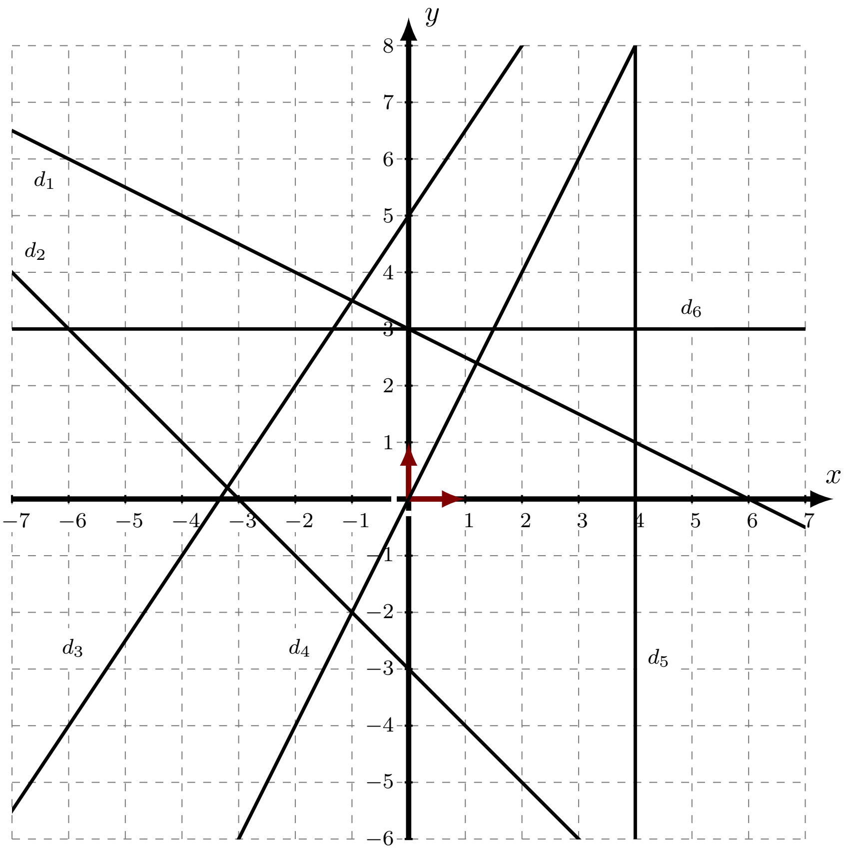
$d_2\colon y =$

$d_3\colon y =$

$d_4\colon y =$

$d_5\colon y =$

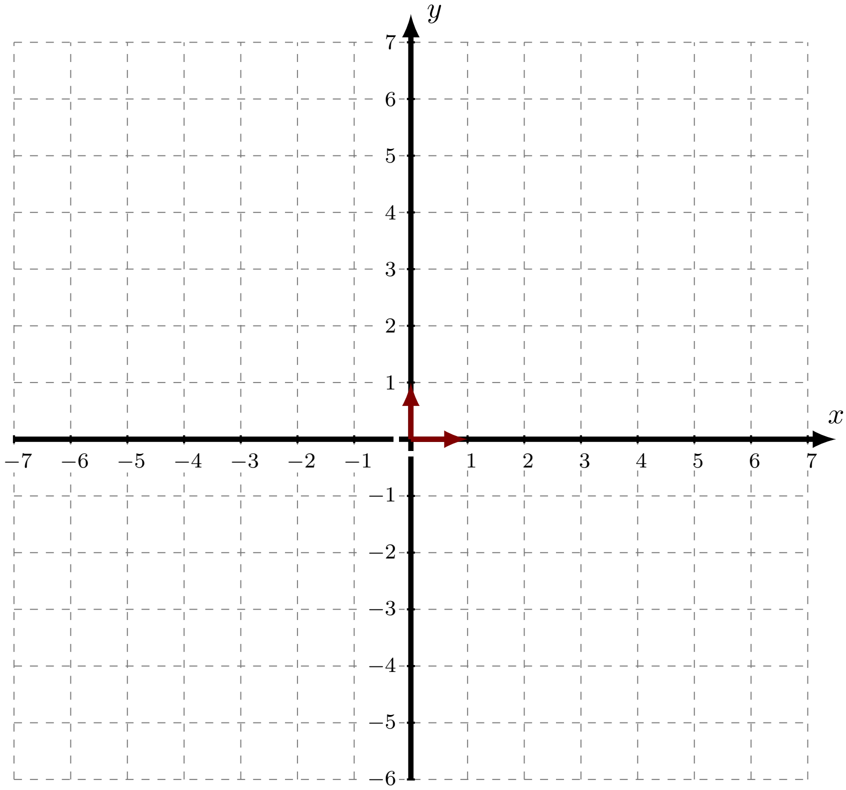
$d_6\colon y =$



On peut intérpréter les solutions d'un système linéaire $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ comme étant les coordonnées de l'intersection des droites d'équations $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$.
Le système admet une unique solution lorsque les droites ne sont pas parallèles.

Exercice 9

1) Représenter dans le repère orthonormé ci-contre les droites d'équations suivantes :
(d_1): $y=5$
(d_2): $-x+y=2$
(d_3): $3x+6y=36$
(d_4): $x=-4$
(d_5): $5x-5y=15$
(d_6): $x+2y=4$



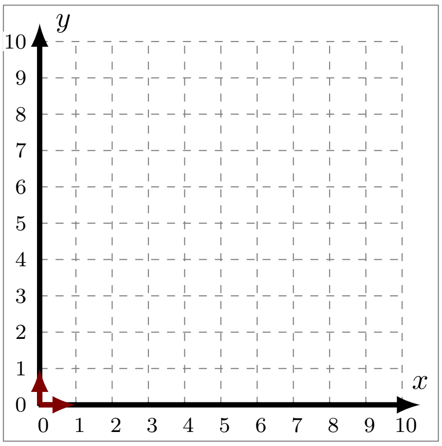
2) Pour chacun des systèmes suivants déterminer graphiquement le nombre de couples solutions. S'il est unique, donner ce couple.

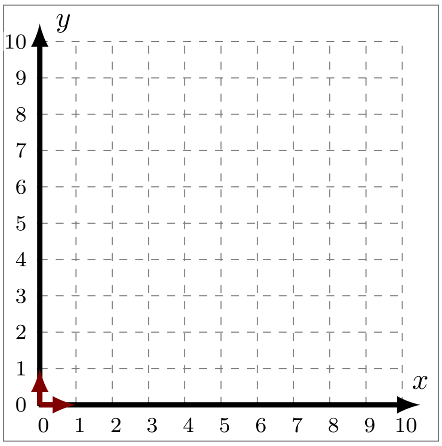
(S_1): $\begin{cases} y=5 \\ x=-4 \end{cases}$ (S_3): $\begin{cases} 5x-5y=15 \\ x+2y=4 \end{cases}$ (S_5): $\begin{cases} 3x+6y=36 \\ 5x-5y=15 \end{cases}$

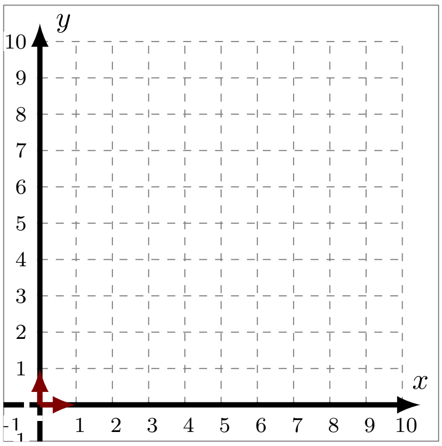
(S_2): $\begin{cases} y=5 \\ -2y=-10 \end{cases}$ (S_4): $\begin{cases} -x+y=2 \\ x=-4 \end{cases}$ (S_6): $\begin{cases} -2x+2y=4 \\ -x+y=2 \end{cases}$

Exercice 10 Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants.
1) Vous pouvez réécrire les équations sous forme réduite.
2) Déterminer le couple solution, coordonnées du points d'intersection des droites.
3) Vérifier que le couple est solution.

$\begin{cases} y=x+1 \\ y+x=9 \end{cases}$ $\begin{cases} y=x+3 \\ y+x=7 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x \\ y+2x=8 \end{cases}$



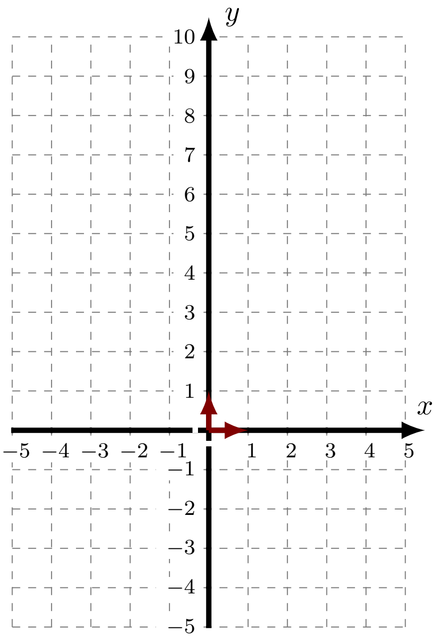


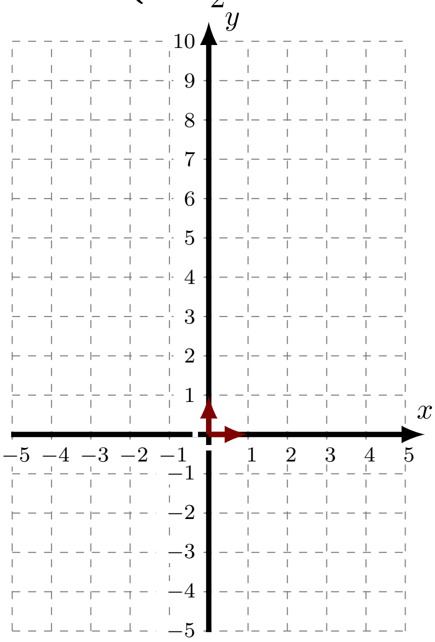


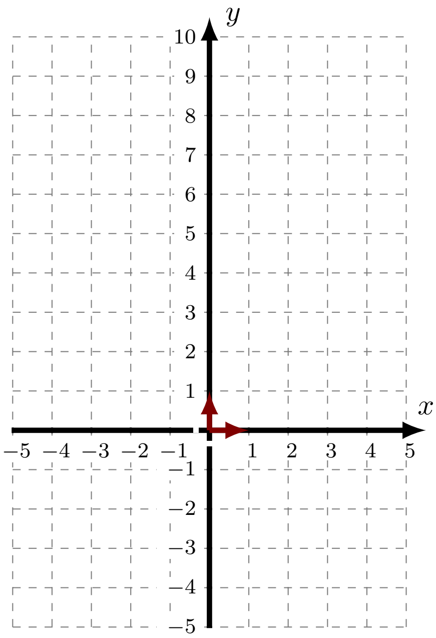
$$\begin{cases} y = 3x - 3 \\ 2y + 3x = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ y = \dfrac{1}{2}x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = -3 \\ 2y - 3x = -9 \end{cases}$$

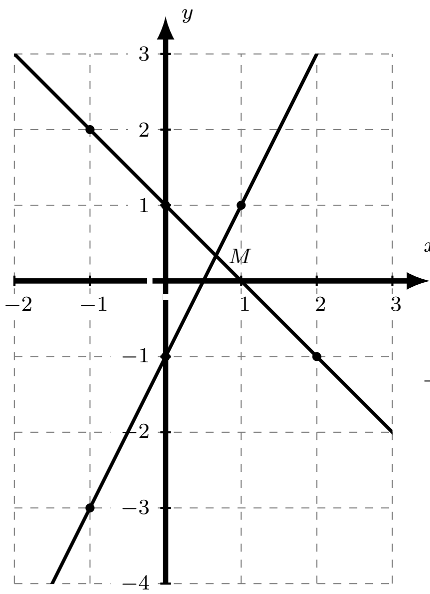


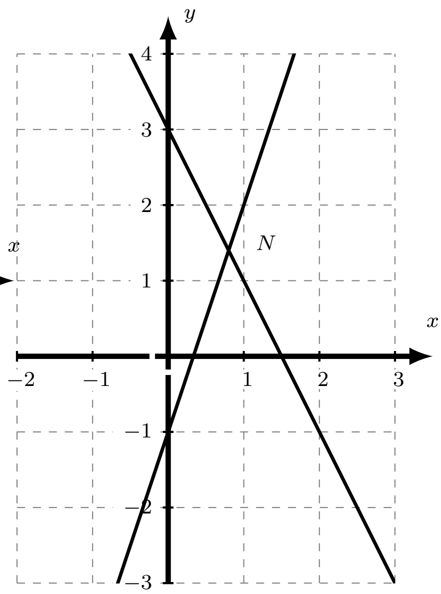




Exercice 11

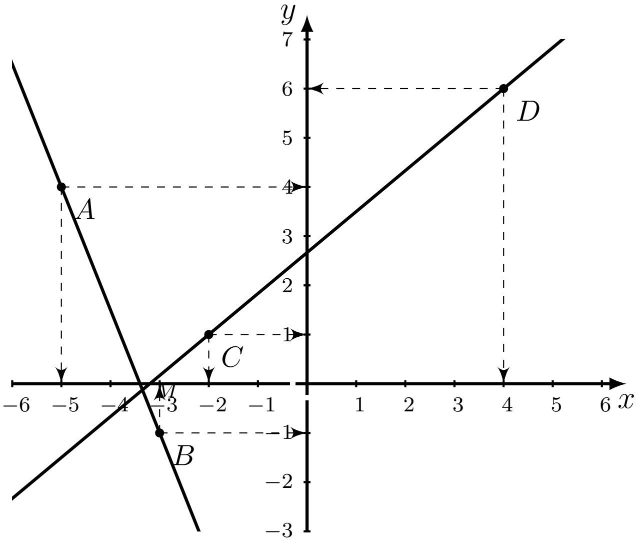
1) Donner par lecture graphique la pente et l'ordonnée à l'origine des droites
2) En déduire les équations réduites des droites.
3) Préciser le système d'équations que doivent vérifier les points d'intersection M et N
4) Résoudre le système et déterminer les valeurs exactes des coordonnées de M et N.

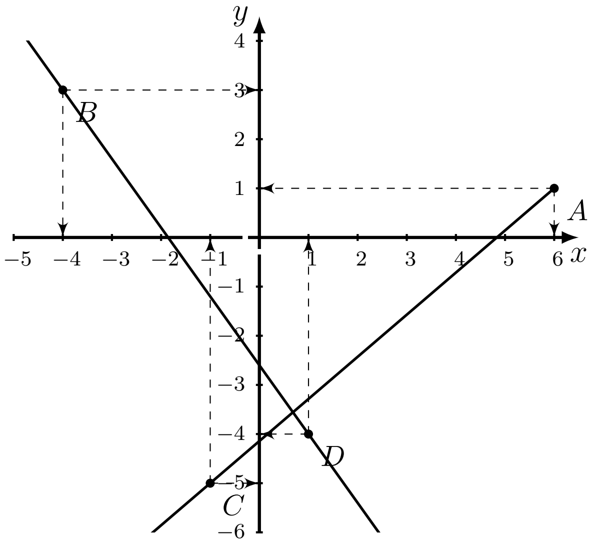




Exercice 12

1) Former les équations (réduites ou cartésiennes) des droites (AB) et (CD).
2) Écrire le système vérifié par les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).
3) Retrouver par le calcul les coordonnées des intersections.





Problème 1 — Mélange équations cartésiennes et réduites.

Soit un repère orthonormé et les points $A(1;2)$ et $B(13;-6)$.

1) Donner une équation cartésienne de (AB).
2) Donner les coordonnées des points d'intersection de (AB) avec les axes du repère.
3) Donner l'équation réduite de (AB).
4) Quelles sont les coordonnées du point de (AB) d'abscisse $x = 8$?
5) Le point $(5{,}6\ ;\ -1{,}06)$ est il au dessus, sur ou en dessous de la droite (AB) ?
6) Lesquelles parmi ces droites sont parallèles à (AB) ?

$D_1\colon\ y = \dfrac{2}{3}x + 5$	$D_2\colon\ 2x - 3y = 5$	$D_3\colon\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 5$

7) Quel est le point d'intersection de la droite (AB) avec la droite $D\colon x + y = 5$?

13.5 Approfondissement : représentations d'inéquations dans le plan

Une droite non verticale d'équation $\mathscr{D}\colon y = mx + p$ partage le plan en 3 parties :

- Les points $M(x;y) \in \mathscr{D}$ dont les coordonnées vérifient l'équation $y = mx + p$.
- Les points $P(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'inéquation $y < mx + p$ qui en dessous de la droite $\mathscr{D}$
- Les points $Q(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'inéquation $y > mx + p$ qui au dessus de la droite $\mathscr{D}$

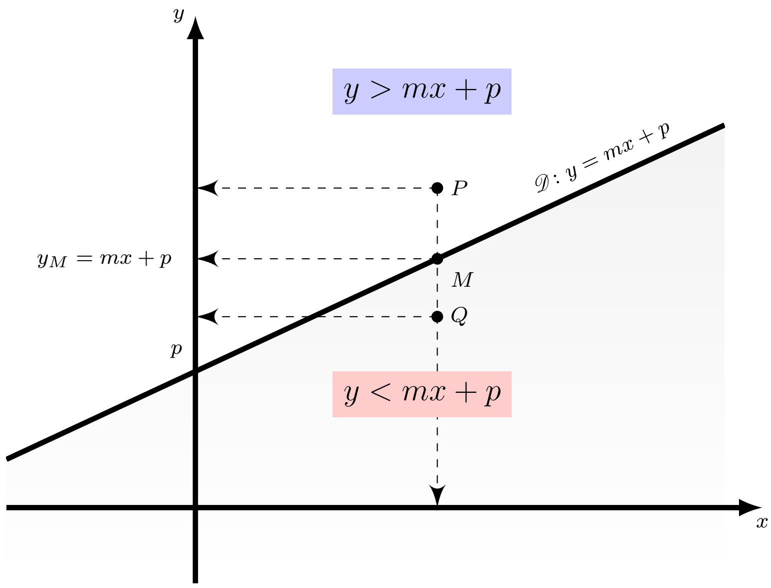
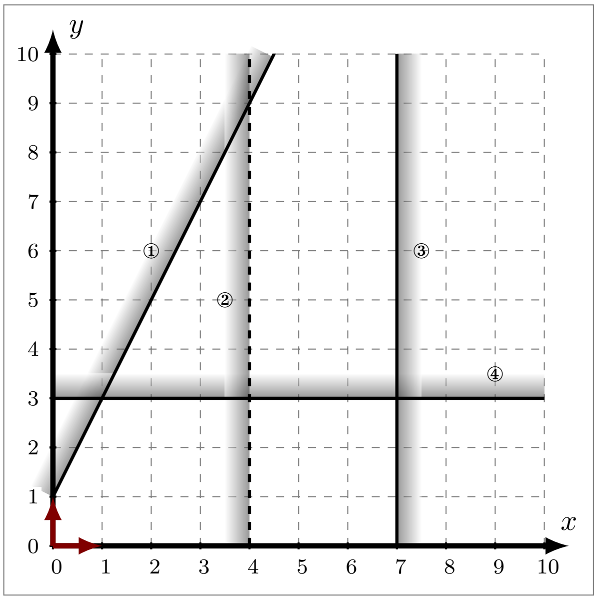


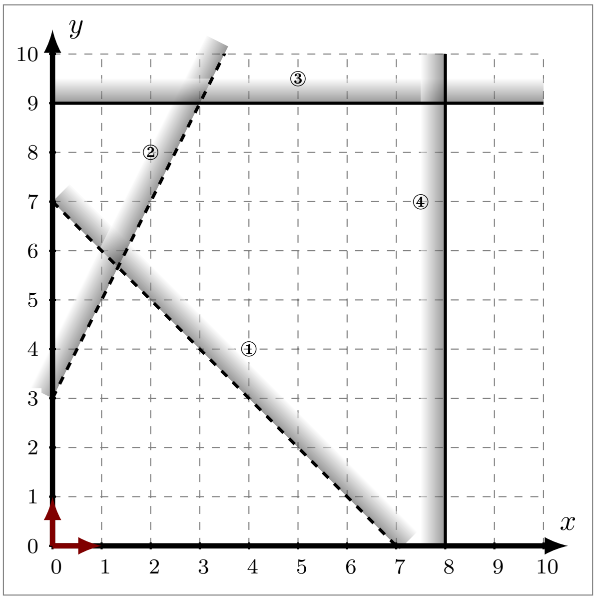
Figure 13.5

Club maths : représentations d'inéquations dans le plan

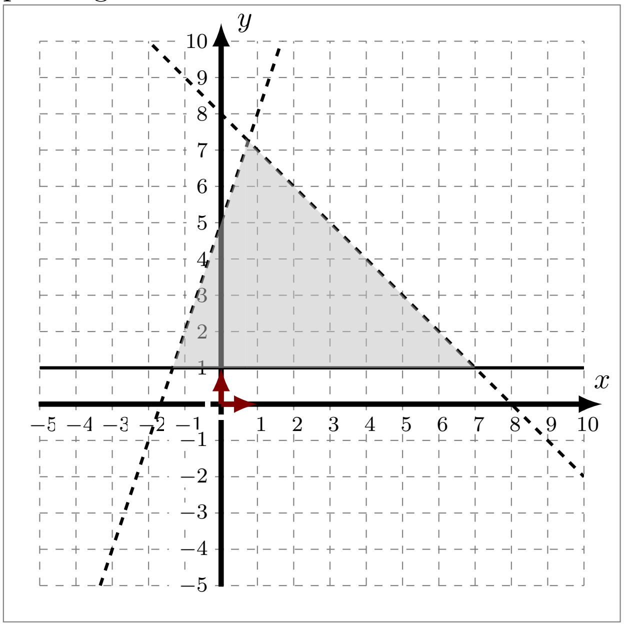
■ **Exemple 13.23** Faire correspondre chaque équation à un demi-plan délimité par une droite.

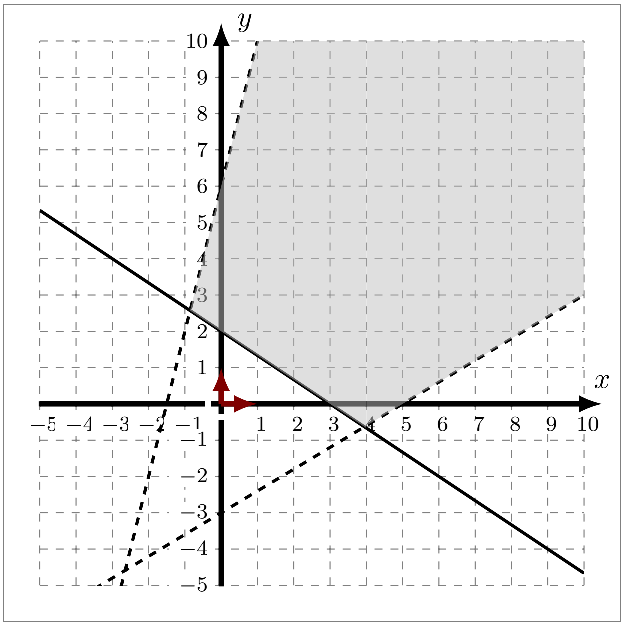
$7 \leqslant x \qquad y \geqslant 3 \qquad x < 4 \qquad y \geqslant 2x+1 \qquad 9 \leqslant y \qquad x \leqslant 8 \qquad y+x > 7 \qquad y > 2x+3$





Exercice 1 Préciser pour chaque graphe, les inéquations vérifiées par les coordonnées des points de la partie grise.





Exercice 2

Pour chacune des questions suivantes, colorier en gris la partie du plan définie par les 3 inéquations.

a) $x < 9$; $y \geqslant 5$ et $y \geqslant x$.

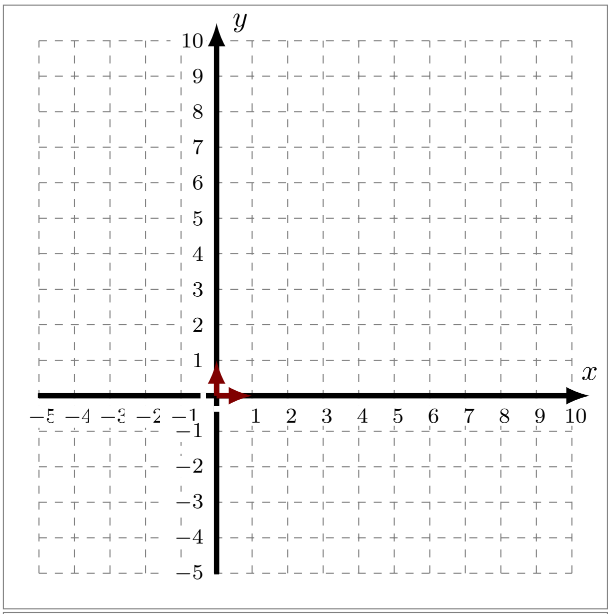
b) $x \geqslant -1$, $y < 2$ et $y \geqslant x - 3$.

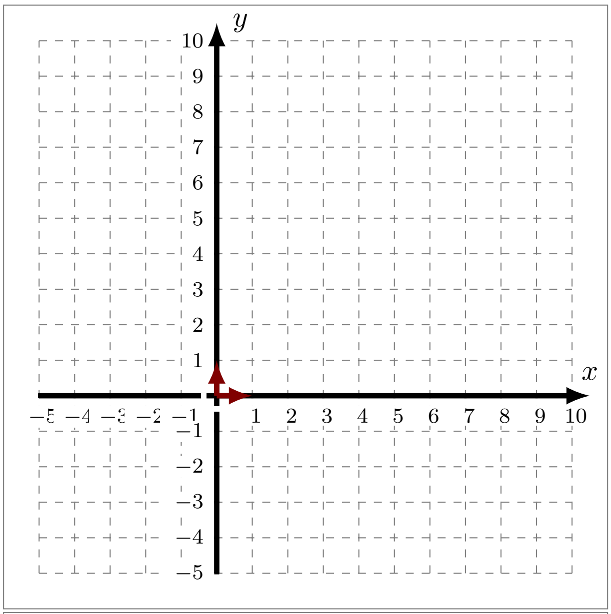
c) $y \geqslant -x$, $-3 < x \leqslant 1$.

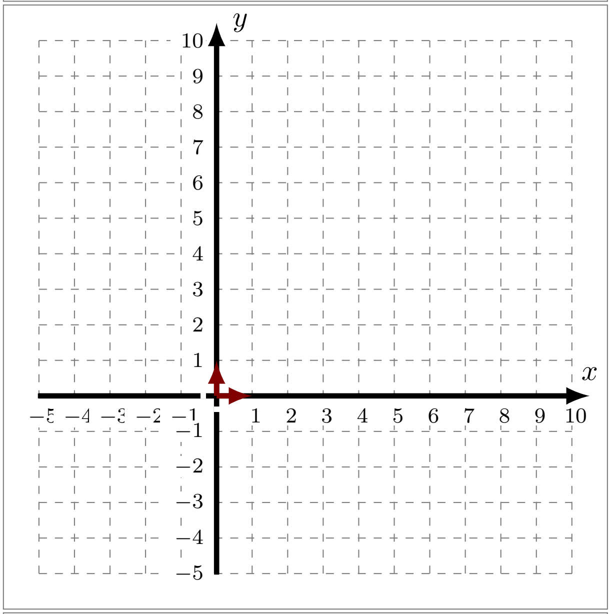
d) $5 > x$, $y \leqslant 2x$ et $y + x \geqslant 7$.

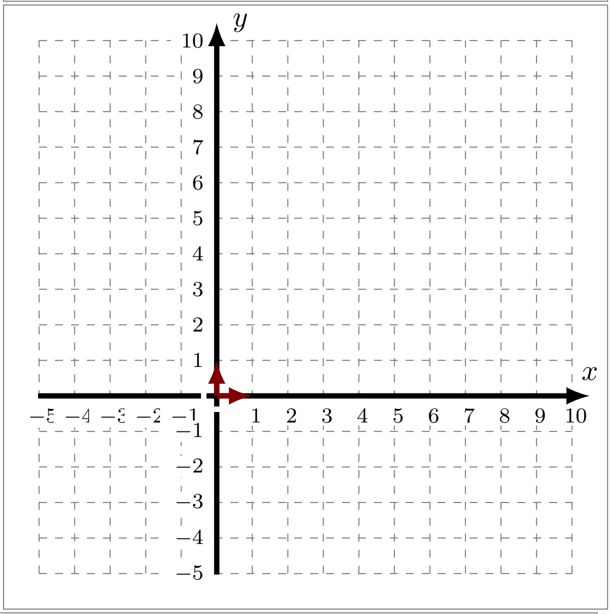
e) $3 < x$, $1 < x$ et $2x + y \leqslant 8$.

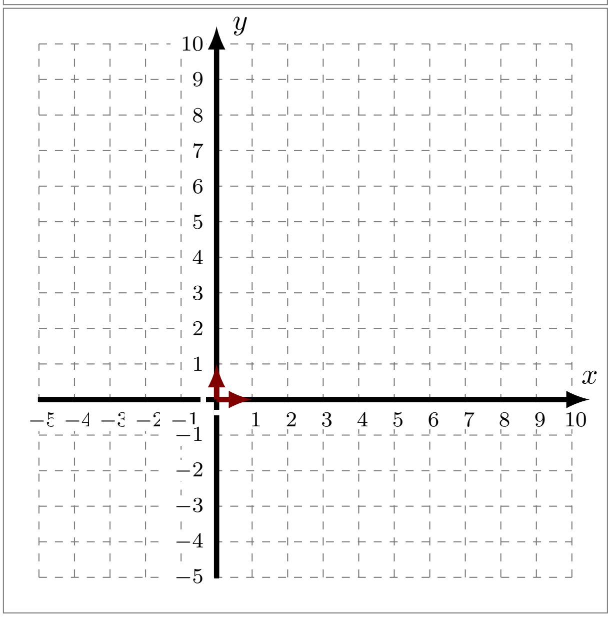
f) $4x + 3y < 12$, $y \leqslant 2x + 6$ et $x \leqslant -2$.

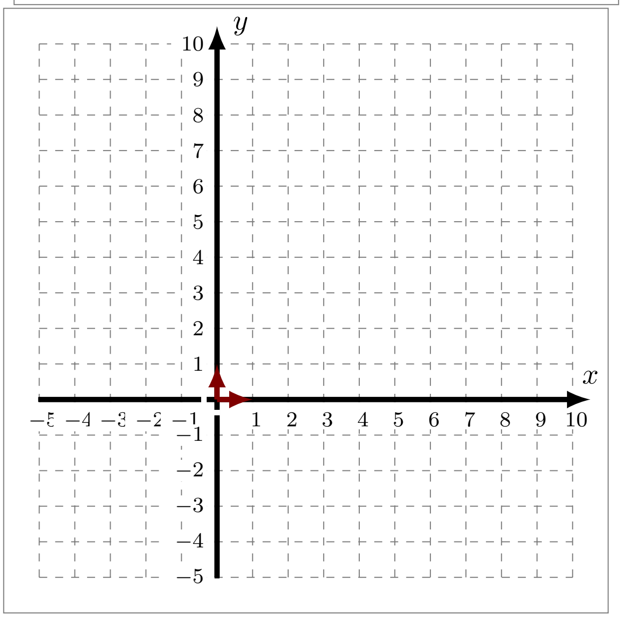

y
x
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5


y
x
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5


y
x
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5


y
x
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5


y
x
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5


y
x
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5