Chapitre 10

Calculs algébriques (2) : factorisations, racines de polynômes et fractions algébriques

Table 10.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 10...

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître**.../**savoir faire**...	🪨	💎	💍
Techniques de factorisation			
Factoriser par mise en évidence d'un facteur commun	6, 7, 8	9, 10	11, 12
Factoriser une différence de carrés $A^2 - B^2$	13, 14	15, 16	
Factoriser une expression de la forme $A^2 \pm 2AB + B^2$	17, 18		
Factorisation par groupement	19		
Déterminer des racines par factorisation			
vocabulaire des polynômes	1, 2		
racines d'une forme factorisée	3, 4, 5		
résoudre des équations par factorisation		20, 21, 22	
choisir une forme adaptée (factorisée ou réduite)		23, 24, 25	
problèmes	26, 27, 28	29, 30	
Fractions algébriques			
domaine		31	
simplifications		32, 33, 34	
multiplication et division		35	41, 42
sommes (addition et soustraction)	36, 37	38, 39	40
résolution d'équations rationnelles		43 44	45

10.1 Factorisation : vocabulaire et méthodes

■ **Exemple 10.1 — rappel vocabulaire des expressions polynômiales.**

1. Le monôme $-2x^5$ est de degré 5 et de coefficient -2.
2. Le binôme $-2x+1$ est un polynôme de degré 1. C'est une expression *affine*.
3. Le trinôme $5x^2+3x-1$ est un polynôme de degré 2 de coefficient dominant 5.
4. Le trinôme $x^3-\dfrac{2}{3}x+3\sqrt{2}$ est un polynôme de degré 3 de coefficient dominant 1.

■ **Exemple 10.2** $3\sqrt{x}+4$ et $\dfrac{1}{3x+4}$ *ne sont pas* des expressions polynômiales en x.

Définition 10.1 Un *facteur* est l'un des éléments constitutifs d'un *produit*.

■ **Exemple 10.3**

1. Dans $12x^2y = 2\times 2\times 3\times xxy$, les termes x^2, $2x^2$ et $3xy$ sont des facteurs.
2. Dans $(x-2)(2x+5)$, $(x-2)$ et $(2x+5)$ sont des facteurs.
3. Dans $(2x-3)+(x-3)$, $(2x-3)$ et $(x-3)$ *ne sont pas* des facteurs.

Définition 10.2 Un polynôme est factorisé s'il est écrit comme *produit de facteurs*.

■ **Exemple 10.4**

1. $5(x-3)^2(2x-1)(3x+1)$ est factorisé.
2. $2(x-3)^2+(2x-1)(2x+1)$ *n'est pas factorisé*.

Définition 10.3 La factorisation est le procédé qui consiste à écrire une expression (très souvent polynômiale) comme produit (de facteurs).

■ **Exemple 10.5** $3x^2+5x = x(3x+5)$ $\quad x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ $\quad x^2+3x+2=(x+1)(x+3)$

R La factorisation d'expressions est un art. Pour les polynômes de degré 2 on compte :

1. la factorisation après mise en évidence de facteurs communs — *depuis la 4e*
2. la factorisation par identité remarquable de la différence de carrés — *depuis la 3e*
3. la factorisation par identité remarquable du carré d'une somme — *en 2nd*
4. la factorisation par somme-produit — *B.A.R. Maths et un peu en 1ère SPE*
5. la factorisation par complétion au carré — *un peu en 1ère SPE*
6. la factorisation par le calcul des racines à l'aide de la formule quadratique — *en 1ère SPE*

Mémoriser, comprendre et maitriser différentes stratégies de factorisation simplifie considérablement la résolution d'équations polynomiales.

10.2 Racines et irréductibilité

Définition 10.4 r est une *racine* (un zéro) du polynôme $P(x)$ si $P(r) = 0$

■ **Exemple 10.6**

1. $r = 1$ est une racine de $x^2 - 2x + 1$ car $(1)^2 - 2(1) + 1 = 0$.
2. $ax + b$ ($a \neq 0$) est un polynôme de degré 1. Il admet une unique racine $r = \dfrac{-b}{a}$.
3. Le polynôme $x^2 + 2$ n'a pas de racines, car l'équation $x^2 + 2 = 0$ est sans solutions réelles.

Théorème 10.1 — produit nul. Pour tout A et $B \in \mathbb{R}$:

(i) Si $A = 0$ ou $B = 0$ alors $AB = 0$.

(ii) Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Démonstration. (i) évident !

(ii) On suppose que $AB = 0$. On va raisonner par disjonction de cas :

— Soit $A = 0$ et il n'y a rien à démontrer.

— Soit $A \neq 0$. On va démontrer que $B = 0$.

■

Corollaire 10.2 Les racines d'un polynôme factorisé sont les racines de tous ses facteurs.

■ **Exemple 10.7**

$$-11(3x - 1) = 0 \iff 3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$$

$$5(3x-2)(2x-5) = 0 \iff 3x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = 0 \iff x = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{2}$$

$$4(3x-5)^2 = 0 \iff 3x - 5 = 0 = 0 \iff x = \frac{5}{3}$$

Corollaire 10.3 Pour un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) :

1. Si P est factorisable $P(x) = (px + q)(rx + s)$ alors P a une ou deux racines réelles.
2. Si P n'a pas de racines réelles, alors P n'est pas factorisable sous la forme $(px + q)(rx + s)$.

Définition 10.5 On appelle *polynômes irréductibles* (dans $\mathbb{R}$) :

— les polynômes du premier degré $ax + b$ ($a \neq 0$).

— les polynômes du second degré $ax^2 + bx + c$ sans racines réelles.

Une factorisation est complète si les facteurs sont irréductibles.

■ **Exemple 10.8**

1. L'équation $9x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Le polynôme $9x^2 + 4$ est irréductible.
2. $9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$. $9x^2 - 4$ admet deux racines $r_1 = \frac{2}{3}$ et $r_2 = \frac{-2}{3}$.

■ **Exemple 10.9**

1. $x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x^2 + 4)$ est une factorisation complète.
2. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x^2 - 4)$ n'est pas complète. On a $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$

R Tous les polynômes de degré 3 ou plus sont factorisables (dans $\mathbb{R}$). Par exemple, $P(x) = x^4 + 4$ n'a pas de racines réelles, et pourtant $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

10.3 Fractions rationnelles et équations rationnelles

Définition 10.6 Une *expression rationnelle* est une expression pouvant s'exprimer comme quotient de deux expressions polynomiales. Une équation rationnelle est une équation contenant au moins un terme rationnel.

■ **Exemple 10.10** $\frac{3x^2 + 2}{5x - 1}$ et $\frac{1}{3x^2 - x + 5}$ sont des expressions rationnelles.

■ **Exemple 10.11** $\frac{x + 3}{4} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x + 1}$ est une équation rationnelle.

Règles	Forme usuelle	Cas particulier
Multiplication de fractions	$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}$	$A \times \frac{C}{B} = \frac{A \times C}{B} = \frac{A}{B} \times C$
Simplification d'un facteur commun	$\frac{A \times C}{B \times C} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{C} = \frac{A}{B}$	$\frac{AB}{A} = B$
Règle des signes	$\frac{-A}{B} = -\frac{A}{B} = \frac{A}{-B}$ $\frac{-A}{-B} = \frac{A}{B}$	$-\frac{A + B}{C} = \frac{-(A + B)}{C}$
Quotient de fractions	$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$	$\frac{A}{B} \div C = \frac{A}{B} \times \frac{1}{C}$
Somme de fractions	$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$ dénominateurs différents	$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A + C}{B}$ même dénominateur

R Erreurs usuelles avec l'addition : $\frac{A + B}{A} \neq B$, $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{A + B}$ et $-\frac{A + B}{C} \neq \frac{-A + B}{C}$.

10.4 Factoriser après mise en évidence d'un facteur commun

La factorisation *par mise en évidence d'un facteur commun* est l'opération inverse de la distributivité simple. Ainsi, pour tous a, b et le facteur commun c :

$$\underset{\textit{somme de termes}}{ac+bc} \quad \underset{\text{developper}}{\overset{\text{factorisation}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{=}}}} \quad \overset{\textit{produit de facteurs}}{c(a+b)}$$

■ **Exemple 10.12** On visera à mettre en évidence le plus grand facteur commun :

$$\begin{aligned} A(x) &= 25x^2 - 20 \\ &= 5(5x^2) - 5(4) \\ &= 5(5x^2 - 4) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B(x) &= 12x^2 - 30x - 18 \\ &= 6(2x^2) - 6(5x) - 6\,3 \\ &= 6(2x^2 - 5x - 3) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} C(x) &= (x-2)(2x) + (x-2)(3) \\ &= (x-2)(2x+3) \end{aligned}$$

■ **Exemple 10.13 — subtilités.** On peut veiller à garder certains coefficients dominants positifs :

$$\begin{aligned} A(x) &= -3x + 18 \\ &= -3(x) + (-3)(-6) \\ &= (-3)(x + (-6)) \\ &= -3(x-6) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B(x) &= -2x - 3 \\ &= (-1)2x + (-1)3 \\ &= (-1)(2x+3) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} C(x) &= -4x^2 + 12x - 16 \\ &= -4(x^2) + (-4)(-3x) + (-4)4 \\ &= -4(x^2 - 3x + 4) \end{aligned}$$

■ **Exemple 10.14 — précautions.** Développer les puissances facilite la mise en évidence d'un PGFC :

$$\begin{aligned} A(x) &= 6x^3 - 4x \\ &= 3(2x)xx - 2(2x) \\ &= 2x(3xx - 2) \\ &= 2x(3x^2 - 2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B(x) &= (x-1)^3(3x) - 5(x-1)^2 \\ &= (x-1)(x-1)(x-1)(3x) - 5(x-1)(x-1) \\ &= (x-1)(x-1)[3x(x-1) - 5] \\ &= (x-1)^2(3x^2 - 3x - 5) \end{aligned}$$

■ **Exemple 10.15 — règle du 1.** lorsqu'un des termes est aussi le facteur commun :

$$\begin{aligned} A(x) &= 3x^2 + x \\ &= 3xx + x \\ &= 3xx + x(1) \\ &= x(3x + \mathbf{1}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B(x) &= 18x - 6 \\ &= 6(3x) - 6 \\ &= 6(3x) - 6(1) \\ &= 6(3x - \mathbf{1}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B(x) &= 10x^2 - 2x \\ &= 2x(5x) - 2x \\ &= 2x(5x) - 2x(1) \\ &= 2x(5x - \mathbf{1}) \end{aligned}$$

10.5 Factoriser par identités remarquables

La factorisation d'une différence de carrés $A^2 - B^2$:

$$\underset{\textit{différences de carrés}}{A^2 - B^2} \quad \overset{\xrightarrow{\text{factorisation}}}{\underset{\xleftarrow[\text{developper}]{}}{=}} \quad \overset{\textit{produit de termes conjugués}}{(A-B)(A+B)}$$

■ **Exemple 10.16 — factoriser la différence de carrés $A^2 - B^2$.**

$$\begin{aligned} A(x) &= 4x^2 - 9 \\ &= 2^2x^2 - 3^2 \\ &= (2x)^2 - 3^2 \\ &= (2x-3)(2x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= x^2 - 2 \\ &= x^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= 9(x+3)^2 - 7 \\ &= 3^2(x+3)^2 - (\sqrt{7})^2 \\ &= \underbrace{\left(3(x+3) - \sqrt{7}\right)}_{\text{différence}}\underbrace{\left(3(x+3) + \sqrt{7}\right)}_{\text{somme}} \\ &= \left(3x + 9 - \sqrt{7}\right)\left(3x + 9 + \sqrt{7}\right) \end{aligned}$$

La factorisation le carré d'une somme $A^2 \pm 2AB + B^2$:

$$A^2 + 2AB + B^2 \quad \overset{\xrightarrow{\text{factorisation}}}{\underset{\xleftarrow[\text{developper}]{}}{=}} \quad \overset{\textit{carré d'une somme}}{(A+B)^2}$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad \overset{\xrightarrow{\text{factorisation}}}{\underset{\xleftarrow[\text{developper}]{}}{=}} \quad \overset{\textit{carré d'une différence}}{(A-B)^2}$$

■ **Exemple 10.17 — factoriser des expressions sous la forme $A^2 \pm 2AB + B^2$.**

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + 6x + 9 \\ &= \underbrace{\boxed{x^2}}_{A^2} + 2\underbrace{\boxed{(x)}}_{A}\underbrace{\boxed{(3)}}_{B} + \underbrace{\boxed{3^2}}_{B^2} \\ &= \overbrace{(x+3)^2}^{(A+B)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= 4x^2 - 4x + 1 \\ &= \underbrace{\boxed{(2x)^2}}_{A^2} - 2\underbrace{\boxed{(2x)}}_{A}\underbrace{\boxed{(1)}}_{B} + \underbrace{\boxed{(1)^2}}_{B^2} \\ &= \overbrace{(2x-1)^2}^{(A-B)^2} \end{aligned}$$

■ **Exemple 10.18 — erreurs à éviter.**

$$\begin{aligned} A(x) &= 9x^2 + 25 \\ &= (3x)^2 + 5^2 \\ &= \xcancel{(3x-5)(3x+5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= 4x^2 + 12x - 9 \\ &= (2x)^2 + 2(2x)(3) - (3)^2 \\ &= \xcancel{(2x-3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= (3x+1)^2 - 25 \\ &= (3x+1)^2 - (5)^2 \\ &= \xcancel{(3x-1-5)^2} \end{aligned}$$

10.6 Exercices

10.6.1 Exercices : vocabulaire des polynômes

Exercice 1

Associer chaque expression avec l'énoncé correspondant :

un polynôme de degré 0	•	• $3x^2$
un trinôme de degré 5	•	• $\dfrac{2}{3} - 2x^3$
un binome de coefficient dominant -2	•	• $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
un monôme de degré non nul	•	• 12
un trinôme de coefficient dominant $\dfrac{2}{3}$	•	• $-3x^5 + 2x^3 + x$
un polynôme de degré 3 de coefficient dominant 1....	•	• $\frac{2}{3}x^4 + x^2 + 10$

Exercice 2

1. Écrire un polynôme de degré 3 de coefficient dominant -2 : ....
2. Écrire un polynôme de degré 5 de coefficient dominant 6 : ....
3. Écrire un binôme de degré 4 de coefficient dominant négatif : ....
4. Écrire un binôme de degré 3 de coefficient dominant entier positif : ....

Exercice 3

Déterminer les racines des polynômes factorisés ci-dessous :

1. $P(x) = 13(x-2)$
2. $P(x) = -5(x-5)$
3. $P(x) = (x-1)(x-4)$
4. $P(x) = -11(5+x)^3$
5. $P(x) = (x-3)(x-5)$
6. $P(x) = 5x^2(x+1)^3$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, inconnue x.

(E_1) $10(2x-3) = 0$

(E_2) $-2(5x-10)(8x+5) = 0$

(E_3) $\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{2}{3} - x\right) = 0$

(E_4) $7(8x-1)(7x-4) = 0$

(E_5) $-5(8x-1) + (7x-4) = 0$

(E_6) $3(-2x-7)^3 = 0$

(E_7) $2(x-3)^2(2x-1) = 0$

(E_8) $37\left(16 - \dfrac{2}{x}\right) = 0$

(E_9) $1 + (x+2)^2 = 0$

Exercice 5

1. Écrire deux polynômes de degré 1 dont l'unique racine est 3.
2. Écrire deux polynômes sous forme factorisée dont les racines sont -1 et 0.
3. Écrire deux polynômes de degré 3 sous forme factorisée dont les racines sont 1 et -2.
4. Écrire deux polynômes de degré 5 sous forme factorisée dont l'unique racine est -10.
5. Écrire deux polynômes de degré 2 sans racines.

10.6.2 Exercices : techniques de factorisations

Factorisation par mise en évidence d'un plus grand facteur commun

■ **Exemple 10.19 — Déterminer le plus grand facteur commun de deux termes.**

1. $42ab$ et $14a^2$
2. $50x(x-2)$ et $10(x-2)^2$

$42ab = 2 \times 3 \times 7 \times ab$ $14a^2 = 2 \times 7 \times aa$	décomposer les coefficients en facteurs premiers. développer les puissances PGFC = $2 \times 7 \times a = 14a$
$50x(x-2) = 2 \times 5 \times 5(x)(x-2)$ $10(x-2)^2 = 2 \times 5(x-2)(x-2)$	PGFC= $2 \times 5(x-2) = 10(x-2)$

Exercice 6

Déterminer le plus grand facteur commun des termes donnés.

1. $12x$ et 18
2. $12x$ et $18(x+5)$
3. $12(x+3)$ et $16x$
4. $12x^2$ et $30x$
5. $12x^3$ et $15x^2$
6. $24(x+1)^2$ et $30(x+1)^3$
7. $12(x-1)^2$ et $30(x-1)$
8. $12x^2(x-5)$ et $30x(x-5)$
9. $12x^2(x+4)$ et $3(x+4)$.

■ **Exemple 10.20 — factoriser par mise en évidence d'un plus grand facteur commun.**

$$A(x) = 3x^2 - 6x = 3xx - (2)3x = 3x(x-2)$$

$$B(x) = (x-2)(2x) + (x-2)^2(3) = (x-2)(2x) + (x-2)(x-2)(3) = (x-2)\big[(2x) + (3)(x-2)\big] = (x-2)(5x-6)$$

$$C(x) = 5(x-3) - 2(x+2)(x-3) = (x-3)\big[5 - 2(x+2)\big] = (x-3)(5-2x-4) = (x-3)(1-2x)$$

Exercice 7

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

1. $A(x) = 3x+6$
   $B(x) = 2x^3 - 6x$
   $C(x) = 20x^2 - 15x^3$
   $D(x) = 4x^3 - 6x^2 + 12x$
   $E(x) = 2x^2y - 6xy^2 + 3xy$
   $F(x) = 3x^4 - 6x^3 - x^2$
2. $A(x) = x(x-6) + 9(x-6)$
   $B(x) = 3x(x+2) - 4(x+2)$
   $C(x) = 7(2x-1) - 3x(2x-1)$
   $D(x) = 2(3x-4) + (3x-4)5x$
   $E(x) = 5(x-1) - (x+6)(x-1)$
   $F(x) = 3(2x-1) - 5(x+1)(2x-1)$
3. $A(x) = (x+3)^2 - 4(x+3)$
   $B(x) = 2(4-x)(3x-1) - 5(3x-1)$
   $C(x) = (5x-2)^2 - (3x-2)(5x-2)$
   $D(x) = (4-x)(3x-1) - (4-x)(16-2x)$

■ **Exemple 10.21 — subtilités : règle du 1 lorsqu'un des termes est aussi le facteur commun .**

$$\begin{aligned} A(x) &= 3x^2 + x \\ &= 3xx + x \\ &= 3xx + x(1) \\ &= x(3x + \mathbf{1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= 10x^2 - 2x \\ &= 2x(5x) - 2x \\ &= 2x(5x) - 2x(1) \\ &= 2x(5x - \mathbf{1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= 18x(x+1) - 6x \\ &= 6x(3)(x+1) - 6x \\ &= 6x(3)(x+1) - 6x(1) \\ &= 6x\big[3(x+1) - \mathbf{1}\big] \\ &= 6x(3x + 3 - 1) = 6x(3x+2) \end{aligned}$$

Exercice 8

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A(x) = 4x^2 + x$

$B(x) = x - 2x^3$

$C(x) = 12x^2 + 6x$

$D(x) = 49x^2 - 7x$

$E(x) = (3x-1)^2 + (3x-1)$

$F(x) = 15(x+1)^2 - 5(x+1)$

■ **Exemple 10.22 — subtilités : factoriser par -1 pour les facteurs non constants aient un coefficient dominant positif.**

$$\begin{aligned} A(x) &= -x + 8 \\ &= (-1)(x-8) \\ &= -(x-8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= 5(x-1) - 2x(x-1) \\ &= (5-2x)(x-1) \\ &= (-1)(2x-5)(x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= 5x(x-2) + 2(2-x) \\ &= 5x(x-2) + 2(-1)(x-2) \\ &= (5x-2)(x-2) \end{aligned}$$

Exercice 9

Factoriser en laissant les facteurs non constants avec un coefficient dominant positif

$A(x) = 12x - 4x^2$

$B(x) = 25 - 15x^3$

$C(x) = 3x(12x-1) + (1-12x)$

$D(x) = 3(x-5) - (x-5)(x+2)$

$E(x) = 2x(5x-2) - (2-5x)$

$F(x) = (10-5x) - 3x(10-5x)$

■ **Exemple 10.23 — subtilités : Factoriser de sorte que le facteur restant soit à coefficients entiers.**

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{7}x + 5 \\ &= \frac{1}{7}x + \frac{1}{7} \times 7 \times 5 \\ &= \frac{1}{7}(x+35) \\ &= \frac{x+35}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{2}{3}(x+1)^2 - 5(x+1) \\ &= \frac{1}{3} \times 2(x+1)(x+1) - \frac{1}{3} \times 3 \times 5(x+1) \\ &= \frac{1}{3}(x+1)\big[2(x+1) - 5\big] \\ &= \tfrac{1}{3}(x+1)(2x-3) \end{aligned}$$

Exercice 10

Factoriser de sorte que le facteur restant soit à coefficients entiers :

$A(x) = \frac{1}{2}x + 4$

$B(x) = \frac{1}{3}x + 5$

$C(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 5x$

$D(x) = \frac{1}{3}x^4 - 5x^2 + 2x$

$E(x) = \frac{2}{3}x(x-3) - 4(x-3)$

$F(x) = \frac{4}{5}x(x+1) - 2(x+1)$

Exercice 11

Les factorisations suivantes sont fausses. Retrouver l'erreur et refaire les factorisations :

$$\begin{aligned} A(x) &= 2(x+5)(x-1)+(2x-3)(x+5) \\ &= (x+5)\big[2+(x-1)+(2x-3)\big] \\ &= (x+5)(3x-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= (2-8x)(7-x)-3(7-x)(3-x) \\ &= (7-x)\big[(2-8x)-3+(3-x)\big] \\ &= (7-x)(2-9x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= 2(3x-2)(5x-1)-(3x-1)(3x-2) \\ &= (3x-2)\big[2(5x-1)-3x-1\big] \\ &= (3x-2)\big[10x-2-3x-1\big] \\ &= (3x-2)(7x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= (2x-3)(5x-1)-(2x-3)^2 \\ &= (2x-3)\big[(5x-1)-1\big] \\ &= (2x-3)(5x-2) \end{aligned}$$

Exercice 12 — entrainement.

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(7x-4)-(5x-3)(3x+5)$

$B(x) = (2x+5)(2x+7)-(6x+15)(x+2)$

$C(x) = (2x+5)(2x+7)+4(2x+5)(x+2)$

$D(x) = (2x-3)^2+(3x-1)(2x-3)$

$E(x) = 2(2x+5)(7x+5)-3(2x+5)(x+2)$

$F(x) = 3(2+3x)-2(5+2x)(2+3x)$

$G(x) = (2x+3)(5x+7)+3(2x+3)(-2x+9)$

$H(x) = 5(2x-1)^2+(3x-4)(2x-1)$

$I(x) = (2x-3)(5x-1)+2(3x-1)(2x-3)$

$J(x) = 5(2x-1)^2-(3x-4)(2x-1)$

Factoriser par identités remarquables

■ **Exemple 10.24** Écrire comme un carré les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A(x) &= 64x^2 \\ &= 8^2x^2 \\ &= (8x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= 5x^2 \\ &= (\sqrt{5})^2x^2 \\ &= (\sqrt{5}x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{16}{9}x^2 \\ &= \frac{4^2}{3^2}x^2 \\ &= \left(\frac{4}{3}x\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= 9(2x-1)^2 \\ &= 3^2(2x-1)^2 \\ &= \big(3(2x-1)\big)^2 \\ &= \big(6x-3\big)^2 \end{aligned}$$

Exercice 13 Écrire comme un carré les expressions suivantes :

1. a) $9x^2$
   b) $3x^2$
   c) $81x^2$
   d) $100x^2$
   e) $36x^2$
   f) $\frac{25}{49}x^2$
2. a) $25(x-1)^2$
   b) $4(x+3)^2$
   c) $25(3x+1)^2$
   d) $100(2-7x)^2$
   e) $5(x+1)^2$
   f) $2(x+1)^2$

■ **Exemple 10.25 — reconnaitre une différence de carrés $A^2 - B^2$ et la factoriser.**

$$\begin{aligned} A(x) &= 4x^2 - 9 \\ &= 2^2x^2 - 3^2 \\ &= (2x)^2 - 3^2 \\ &= (2x-3)(2x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= x^2 - 2 \\ &= x^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{16}{9} - x^2 \\ &= \frac{4^2}{3^2} - x^2 \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 - x^2 \\ &= \left(\frac{4}{3} - x\right)\left(\frac{4}{3} + x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= 9x^2 + 25 \\ &= (3x)^2 + 5^2 \\ &= \cancel{(3x-5)(3x+5)} \end{aligned}$$

Exercice 14

Factoriser les expressions suivantes :

1. $x^2 - 36$
2. $x^2 - 5$
3. $9x^2 - 16$
4. $4 - 36x^2$
5. $36x^2 - 3$
6. $16x^2 - \frac{1}{9}$

■ **Exemple 10.26 — factoriser une différence de carrée d'expressions.**

$$\begin{aligned} A(x) &= 9(x+3)^2 - 7 \\ &= 3^2(x+3)^2 - (\sqrt{7})^2 \\ &= \Big(3(x+3)\Big)^2 - \Big(\sqrt{7}\Big)^2 \\ &= \underbrace{\Big(3(x+3) - \sqrt{7}\Big)}_{\text{différence}}\underbrace{\Big(3(x+3) + \sqrt{7}\Big)}_{\text{somme}} \\ &= \Big(3x + 9 - \sqrt{7}\Big)\Big(3x + 9 + \sqrt{7}\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= 4(3x-1)^2 - 25x^2 \\ &= 2^2(3x-1)^2 - 5^2x^2 \\ &= \Big(2(3x-1)\Big)^2 - \Big(5x\Big)^2 \\ &= \underbrace{\Big(2(3x-1) - 5x\Big)}_{\text{différence}}\underbrace{\Big(2(3x-1) + 5x\Big)}_{\text{somme}} \\ &= \Big(6x - 2 - 5x\Big)\Big(6x - 2 + 5x\Big) \\ &= \Big(x-2\Big)\Big(11x-2\Big) \end{aligned}$$

Exercice 15

Compléter pour factoriser par identité remarquable :

$$\begin{aligned} A &= 4(3x-1)^2 - 25x^2 \\ &= \Big(\qquad\qquad \Big)^2 - \Big(\qquad\qquad \Big)^2 \\ &= \Big(\qquad\qquad \Big)\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) \\ &= \Big(\qquad\qquad \Big)\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 36(x-1)^2 - 10 \\ &= \Big(\qquad\qquad \Big)^2 - \Big(\qquad \Big)^2 \\ &= \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) \\ &= \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) \end{aligned}$$

Exercice 16

Factoriser les expressions suivantes par une identité remarquable.

1. $(x+3)^2 - 1$
2. $25 - (2x-1)^2$
3. $(3x+7)^2 - 5$
4. $(2x+3)^2 - 3$
5. $4(2x-1)^2 - 25x^2$
6. $4(x+1)^2 - 9x^2$
7. $9(2x-1)^2 - 4x^2$
8. $9(2x-1)^2 - 5$
9. $4(2x-1)^2 - 25(x+3)^2$

■ **Exemple 10.27 — reconnaitre des expressions de la forme $A^2 \pm 2AB + B^2$.**

$$A(x) = x^2 + 6x + 9 = \underbrace{\boxed{x^2}}_{A^2} + 2\underbrace{\boxed{(x)}}_{A}\underbrace{\boxed{(3)}}_{B} + \underbrace{\boxed{3^2}}_{B^2} = \overbrace{(x+3)^2}^{(A+B)^2}$$

$$B(x) = 4x^2 - 4x + 1 = \underbrace{\boxed{(2x)^2}}_{A^2} - 2\underbrace{\boxed{(2x)}}_{A}\underbrace{\boxed{(1)}}_{B} + \underbrace{\boxed{(1)^2}}_{B^2} = \overbrace{(2x-1)^2}^{(A-B)^2}$$

$$C(x) = 4x^2 - 12x - 9 = (2x)^2 - 2(2x)(3) - (3)^2 = \cancel{(2x-3)^2}$$

Exercice 17

Compléter pour factoriser :

$A = x^2 + 8x + 16$

$= (\quad)^2 \dots 2 \times (\quad) \times (\quad) \dots (\quad)^2$

$= \left(\qquad\right)^2$

$B = x^2 - 6x + 9$

$= (\quad)^2 \dots 2 \times (\quad) \times (\quad) \dots (\quad)^2$

$= \left(\qquad\right)^2$

$C = 25x^2 - 80x + 64$

$= (\quad)^2 \dots 2 \times (\quad) \times (\quad) \dots (\quad)^2$

$= \left(\qquad\right)^2$

$D = \dfrac{1}{4}x^2 + x + 1$

$= (\quad)^2 \dots 2 \times (\quad) \times (\quad) \dots (\quad)^2$

$= \left(\qquad\right)^2$

Exercice 18

Factoriser (si possible) les expressions suivantes par une identité remarquable.

1. $x^2 + 2x + 1$
2. $x^2 - 6x + 9$
3. $x^2 + 10x + 25$
4. $x^2 + x + \frac{1}{4}$
5. $9x^2 - 24x + 16$
6. $36x^2 - 108x + 81$
7. $4x^2 - 12x + 9$
8. $4x^2 + 4xy + y^2$
9. $x^2 - 14xy + 49y^2$
10. $9x^2 - 6\sqrt{5}x + 5$
11. $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$
12. $9x^2 - 36x + 36$

■ **Exemple 10.28 — Factoriser par mise en évidence après un groupement de termes.**

$$\begin{aligned} A(x) &= x^3 + x^2 + 4x + 4 \\ &= (x^3 + x^2) + (4x + 4) \\ &= x^2(x+1) + 4(x+1) \\ &= (x^2+4)(x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= x^3 - 2x^2 - 9x + 18 \\ &= (x^3 - 2x^2) - (9x - 18) \\ &= x^2(x-2) - 9(x-2) \\ &= (x^2-9)(x-2) \\ &= (x-3)(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \\ &= x^3 + 3x - 2x^2 - 6 \\ &= (x^3 + 3x) - (2x^2 + 6) \\ &= x(x^2+3) - 2(x^2+3) \\ &= (x-2)(x^2+3) \end{aligned}$$

Exercice 19 Factoriser par regroupement les expressions suivantes :

1. $x^3 + 4x^2 + x + 4$
2. $5x^3 + x^2 + 5x + 1$
3. $3x^3 - x^2 + 6x - 2$
4. $18x^3 - 9x^2 + 2x - 1$
5. $x^3 + x^2 + x + 1$
6. $x^5 + x^4 + x + 1$
7. $8x^5 - 6x^2 + 12x^3 - 9$
8. $(9x+10)(8x+7) + 8x + 7$
9. $2(x+3)^2 - x - 3$

10.6.3 Exercices : forme factorisée pour déterminer les racines

■ **Exemple 10.29** Factoriser (si possible) et résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations inconnue x:

$4x^2-9x=0$ $x(4x-9)=0$ $x=0$ ou $4x-9=0$ $\mathscr{S}=\left\{0\ ;\ \frac{9}{4}\right\}$	$4x^2-9=0$ $(2x-3)(2x+3)=0$ $x=\frac{3}{2}$ ou $x=-\frac{3}{2}$ $\mathscr{S}=\left\{-\frac{3}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right\}$	$4x^2+9=0$ $\mathscr{S}=\varnothing$ pas de racines, $4x^2+9$ n'est pas factorisable.
$9x^2+12x+4=0$ $(3x)^2+2(3x)(2)+2^2=0$ $(3x+2)^2=0$ $3x+2=0$ $x=-\frac{2}{3}$ $\mathscr{S}=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$	$x^2=12x-36$ $x^2-12x+36=0$ $(x-6)^2=0$ $x-6=0$ $x=6$ $\mathscr{S}=\{6\}$	$(x+1)(2x+3)+5(x+1)=0$ $(x+1)(2x+3+5)=0$ $(x+1)(2x+8)=0$ $x+1=0$ ou $2x+8=0$ $x=-1$ ou $x=-4$ $\mathscr{S}=\{-1\ ;\ -4\}$

Exercice 20

Factoriser (si possible) et résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations inconnue x:

(E_1) $5x^2+2x=0$

(E_2) $9x^2-4=0$

(E_3) $36x^2+100=0$

(E_4) $x^2+10x+25=0$

(E_5) $x^2-6x=-9$

(E_6) $-3x^2=5x$

(E_7) $x^2=2x-1$

(E_8) $x^2+4x=-4$

Exercice 21

1. Factoriser complètement $(x^2+1)^2-4x^2$
2. En déduire les solutions de $(x^2+1)^2-4x^2=0$

Exercice 22 — entrainement.

Résoudre les équations suivantes après factorisation.

(E_1) $(3x+2)(8x+5)+(3x+2)(2x+3)=0$

(E_2) $(3x-1)^2+(3x-1)(5x-4)=0$

(E_3) $(3x-1)^2-(5x-4)^2=0$

(E_4) $2(x+1)(x-3)^2-3(x+1)^2(x-3)=0$

(E_5) $x^2(x^2-1)-9(x^2-1)=0$

(E_6) $(2x-5)(5x-4)=(2x-5)(8x-1)$

(E_7) $(6x-4)(-3x+2)=(10x-2)(6x-4)$

(E_8) $(2x+3)^2=(5x+4)^2$

Exercice 23 — Un grand classique : choisir la forme algébrique la plus adaptée.

On considère l'expression définie pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ par $A(x) = (x+3)^2+2(x+1)(x+3)$.

1. Développer, réduire et ordonner $A(x)$ (forme développée).
2. Factoriser $A(x)$ et montrer que $A(x) = (x+3)(3x+5)$ (forme factorisée).
3. a) En utilisant la forme développée donner la valeur exacte de $A(0)$ et $A(\sqrt{2})$.
   b) En utilisant la forme factorisée, résoudre l'équation $A(x) = 0$.
   c) Utiliser la forme la plus adaptée pour déterminer les deux solutions de $A(x) = 15$.

Exercice 24 — rebelotte.

Soit la fonction B définie sur $\mathbb{R}$ par $B(x) = (2x-4)^2 - 3(x-2)(x+5)$.

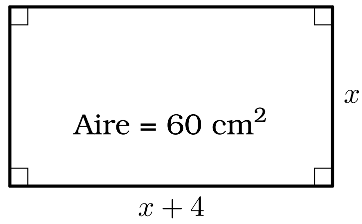
1. Développer, réduire et ordonner $B(x)$ (forme développée).
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = (x-23)(x-2)$ (forme factorisée).
3. En utilisant la forme la plus adaptée déterminer :
   a) Les images de 0 et $-\sqrt{2}$ par B.
   b) Les racines de B.
   c) Résoudre $B(x) = 46$ d'inconnue x.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = (x-12{,}5)^2 - 110{,}25$ (dite forme canonique).
5. En utilisant la forme canonique :
   a) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $B(x) = -110{,}25$ d'inconnue x.
   b) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $B(x) = 10{,}75$ d'inconnue x.

Exercice 25 — un dernier.

Soit la fonction C définie sur $\mathbb{R}$ par $C(x) = (3x+5)^2 - (2x+3)^2$.

1. Développer, réduire et ordonner $C(x)$.
2. Factoriser $C(x)$ à l'aide d'une identité remarquable et montrer que $C(x) = (5x+8)(x+2)$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée déterminer :
   a) Les images de 0 et $\sqrt{3}$ par C.
   b) Les solutions de l'équation $C(x) = 0$.
   c) Les solutions de l'équation $C(x) = 16$ d'inconnue x.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $C(x) = 5\left(x+\frac{9}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}$ (dite forme canonique).
5. En utilisant la forme canonique :
   a) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $C(x) = 3$ d'inconnue x.
   b) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $C(x) = -1$ d'inconnue x.

Exercice 26



La figure ci-contre est un rectangle.

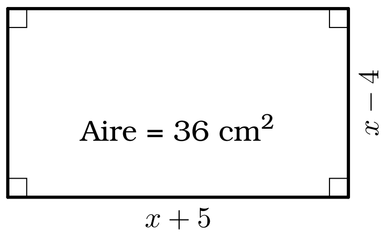
1. Montrer que x est solution de $x^2 + 4x - 60 = 0$.
2. Développer $(x-6)(x+10)$.
3. En déduire le(s) valeur(s) possible(s) de x.

Exercice 27

On suppose que la longueur d'un rectangle est 5 cm de plus que sa largeur, et que l'aire du rectangle est 66 cm^2. On pose x la longueur du rectangle.

1. Montrer que x vérifie $x^2 + 5x - 66 = 0$.
2. Développer $(x+11)(x-6)$.
3. En déduire les dimensions du rectangle.

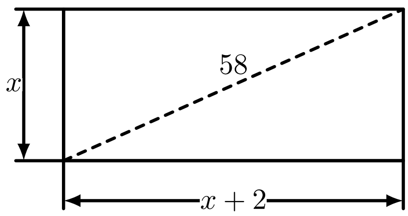
Exercice 28



La figure ci-contre est un rectangle.

1. Montrer que x vérifie $x^2 + x - 56 = 0$.
2. Développer $(x-7)(x+8)$.
3. En déduire le(s) valeur(s) possible(s) de x.

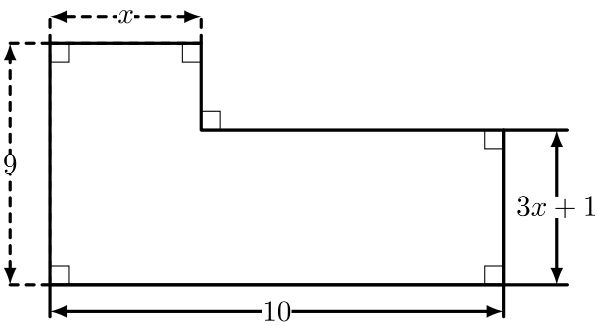
Exercice 29



La figure ci-contre est un rectangle.

1. Utiliser l'égalité de Pythagore pour montrer que x vérifie l'équation $x^2 + 2x - 1680 = 0$.
2. Développer $(x-40)(x+42)$.
3. En déduire le(s) valeur(s) possibles de x.

Exercice 30



L'aire de la figure en L ci-contre est 65 cm^2.

Les longueurs sont en cm.

1. Montrer que x vérifie $3x^2 - 38x + 55 = 0$.
2. Développer $(3x-5)(x-11)$.
3. Résoudre en x et préciser quelles solutions sont admissibles.

10.6.4 Exercices : fractions algébriques

■ Exemple 10.30 — domaine de définition d'une expression.

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-6}$	Factoriser le dénominateur : $f(x)=\dfrac{x}{(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})}$. Valeurs interdites : $(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})=0$, d'où : $x=\pm\sqrt{6}$. Le domaine $D=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{6}\}$.
$g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-10x+25}$	Factoriser le dénominateur : $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}}{(x-5)^2}$. Valeurs interdites : $(x-5)^2=0$, d'où : $x=5$. Le numérateur est défini que pour $x+6\geqslant 0$, donc $x\geqslant -6$. Le domaine $D=[-6;5[\cup]5;+\infty[$.

Exercice 31 Déterminer le domaine des fractions rationnelles :

1. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-3}$
2. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-2x}$
3. $f(x)=\dfrac{2x^2-5}{5x^2+3}$
4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{6x-18}$
5. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}}{x^2-4}$
6. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+4}$

■ Exemple 10.31 — simplifier une expression rationnelle en éliminant un facteur commun.

$$A(x)=\frac{(x+6)(x-2)}{(2x-1)(x-2)}=\frac{(x+6)\cancel{(x-2)}}{(2x-1)\cancel{(x-2)}}=\frac{(x+6)}{(2x-1)}$$

$D=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\ ;\ 2\}$

$$B(x)=\frac{4-x}{x-4}=\frac{-(x-4)}{(x-4)}=-1$$

$D=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

$$C(x)=\frac{5x^2+2x}{3x}=\frac{x(5x+2)}{3x}=\frac{\cancel{x}(5x+2)}{3\cancel{x}}=\frac{5x+2}{3}$$

$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$D(x)=\frac{x^2-16}{2x-8}=\frac{(x-4)(x+4)}{2(x-4)}=\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{2\cancel{(x-4)}}=\frac{(x+4)}{2}$$

$D=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

⚠ Le domaine de définition reste celui de la fraction *avant toute simplification* ⚠

Exercice 32 Simplifier les expressions rationnelles suivantes et préciser le domaine de définition.

1. $\dfrac{x+5}{x+5}$
2. $\dfrac{2x+4}{x+2}$
3. $\dfrac{5x-15}{6x-18}$
4. $\dfrac{5(x-3)(2x+1)}{10(x-3)^2}$
5. $\dfrac{4(x^2-1)}{12(x+2)(x-1)}$
6. $\dfrac{3x-6}{x^2-4}$
7. $\dfrac{2x^2-2}{x+1}$
8. $\dfrac{5x(x+1)^2}{20x(x+1)}$
9. $\dfrac{3x^2}{x^2+x}$

Exercice 33 Décrire l'erreur commise dans les simplifications suivantes

$$A(x)=\frac{5x^3}{2x^3+4}=\frac{5\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}+4}=\frac{5}{2+4}=\frac{5}{6}$$

$$B(x)=\frac{x^3+25x}{(x-5)(x+3)}=\frac{x(x^2+25)}{(x-5)(x+3)}=\frac{x(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+3)}=\frac{x(x+5)}{(x+3)}$$

■ **Exemple 10.32 — subtilités : factoriser par -1 pour simplifier.**

$$A(x) = \frac{(6-x)}{(x-6)(x+6)} = \frac{-1(x-6)}{(x-6)(x+6)} = \frac{-1\cancel{(x-6)}}{\cancel{(x-6)}(x+6)} = \frac{-1}{x+6} \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-6\}$$

$$B(x) = \frac{1-x^2}{x-1} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)} = \frac{-1\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \frac{-1(x+1)}{1} = -x-1 \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

Exercice 34

Simplifier les expressions rationnelles suivantes et préciser le domaine de définition.

1. $\dfrac{2x^2-8x}{12x-4}$
2. $\dfrac{x-2}{x^2-2x}$
3. $\dfrac{x^2+x}{1-x^2}$
4. $\dfrac{4x-8x^2}{10x-5}$
5. $\dfrac{2x+2}{9x+9x^2}$
6. $\dfrac{x+5}{25-x^2}$

■ **Exemple 10.33 — multiplier des expressions rationnelles.**

$$A(x) = \frac{x^2+10x+25}{x^2-4} \times \frac{x+2}{x^2+5x} = \frac{(x+5)^2(x+2)}{(x-2)(x+2)(x)(x+5)} = \frac{(x+5)\cancel{(x+5)}\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}(x)\cancel{(x+5)}} = \frac{(x+5)}{(x-2)x}$$

$$B(x) = \frac{x^3+10x^2+25x}{x+3} \times \frac{x^2-9}{x^2-25} = \frac{x(x^2+10x+25)(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-5)(x+5)} = \frac{x(x+5)(x+5)(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-5)(x+5)} = \frac{x(x+5)(x-3)}{(x-5)}$$

Exercice 35 Simplifier les produits suivants :

1. $\dfrac{4x}{x^2-4} \times \dfrac{x+2}{16x}$
2. $\dfrac{x^2-25}{x^2-16} \times \dfrac{x+4}{x+5}$
3. $\dfrac{5}{(x-2)} \times \dfrac{(x-1)}{25(x-2)}$
4. $\dfrac{(x+5)}{x^3(3-x)} \times \dfrac{x(x-3)}{5}$
5. $\dfrac{3x+4}{2x-9} \times \dfrac{4x^2-36x+81}{9x^2-16}$
6. $\dfrac{x^2-2x+1}{(23x-5)^2} \times \dfrac{46x-10}{1-x}$

■ **Exemple 10.34 — somme de fractions rationnelles, même dénominateur.**

$$A = \frac{3x}{9x^2} + \frac{9}{9x^2} = \frac{3x+9}{9x^2} = \frac{3(x+3)}{3(3x^2)} = \frac{x+3}{3x^2}$$

$$B = \frac{4x}{3} - \frac{7x}{3} = \frac{\qquad}{3} = $$

$$C = \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x+3} = \frac{\qquad}{x+3} = $$

$$D = \frac{7x}{x^2-y^2} - \frac{5x+4y}{x^2-y^2} + \frac{2y}{x^2-y^2} = \frac{\qquad}{x^2-y^2} = \quad = \quad = $$

Exercice 36 Simplifier les sommes suivantes :

1. $\dfrac{x^2}{x+3} - \dfrac{9}{x+3}$
2. $\dfrac{3x}{6x+8} + \dfrac{4}{6x+8}$
3. $\dfrac{5}{x-1} + \dfrac{x}{x-1}$
4. $\dfrac{2x-1}{x+3} - \dfrac{1-x}{x+3}$

■ **Exemple 10.35 — somme de fractions rationnelles de dénominateurs différents.**

$$A = \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x} = \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x}\frac{x}{x} = \frac{4+3x}{x^2}$$

$$B = 1 + \frac{1}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} + \frac{1}{x+2} = \frac{x+3}{x+2}$$

$$C = \frac{4x}{x+2} - \frac{1}{2} = \frac{4x}{(x+2)} \times \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{(x+2)}{(x+2)} = \frac{8x-x-2}{2(x+2)} = \frac{9x+2}{2(x+2)}$$

$$D = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{x}\frac{(x-1)}{(x-1)} - \frac{2}{(x-1)}\frac{x}{x} = \frac{x-1-2x}{x(x-1)} = \frac{-x-1}{x(x-1)}$$

Exercice 37 Déterminer le plus petit dénominateur commun aux fractions données :

1. $\dfrac{3x}{2x+6}$ et $\dfrac{x-1}{x+3}$
2. $\dfrac{4x}{x+4}$ et $\dfrac{2x}{x+3}$
3. $\dfrac{x}{(x-5)(x+5)}$ et $\dfrac{1}{2(x+5)}$
4. $\dfrac{1}{2(x-3)}$ et $\dfrac{1}{x^2-6x+9}$
5. $\dfrac{5}{(x+1)}$ et $\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$
6. $\dfrac{2}{x+1}$, $\dfrac{2}{x-1}$ et $\dfrac{1}{x^2-1}$

Exercice 38 Déterminer l'erreur dans les sommes suivantes :

$$A = \frac{x+4}{x+2} - \frac{3x-8}{x+2} = \frac{x+4-3x-8}{x+2} = \frac{-2x-4}{x+2} = \frac{-2(x+2)}{x+2} = -2$$

$$B = \frac{6-x}{x(x+2)} + \frac{x+2}{x^2} + \frac{8}{x^2(x+2)} = \frac{x(6-x)+(x+2)^2+8}{x^2(x+2)} = \frac{6x-x^2+x^2+4+8}{x^2(x+2)} = \frac{6(x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{6}{x^2}$$

Exercice 39 Simplifier les sommes suivantes :

1. $1 + \dfrac{1}{x+3}$
2. $\dfrac{2}{x+1} - 1$
3. $\dfrac{3x-2}{x+1} - 2$
4. $\dfrac{1}{x+5} + \dfrac{2}{x-3}$
5. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$
6. $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$
7. $\dfrac{x}{x-4} - \dfrac{3}{x+6}$
8. $\dfrac{5}{2x-3} - \dfrac{3}{(2x-3)^2}$
9. $\dfrac{x}{(x+1)^2} + \dfrac{2}{x+1}$
10. $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x^2-9}$
11. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{(x-1)^2} - \dfrac{4}{x^2-x}$
12. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2} + \dfrac{3}{x^2-1}$

Exercice 40 — factoriser par -1.

Simplifier la somme $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x}{1-x}$.

Exercice 41 Simplifier les quotients suivants :

1. $\dfrac{x^2-36}{x} \div \dfrac{x^3-6x^2}{x^2+x}$
2. $\dfrac{(4x-16)}{(5x+15)} \div \dfrac{(4-x)}{(2x+6)}$
3. $\dfrac{(x^2-4x+4)}{(x^2+6x+9)} \div \dfrac{(4-x^2)}{(x+3)}$

Exercice 42 — fractions composées. Simplifier les calculs suivants :

$$A = \frac{\dfrac{x^3}{x+1}}{\dfrac{x}{x^2+2x+1}} \qquad B = \frac{1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-2} \qquad C = \frac{1+\dfrac{1}{x+2}}{1-\dfrac{1}{x+2}}$$

10.6.5 Exercices : équations rationnelles

■ **Exemple 10.36** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations rationnelles suivantes

$$\frac{9x-5}{8x-3}=0 \qquad \frac{-9x-5}{3x-4}=5 \qquad \frac{2}{6x-1}=\frac{3}{5x-7}$$

V.I. $8x-3=0$

$$x=\frac{3}{8}$$

$$D=\mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{8}\}$$

domaine de résolution

$$\frac{9x-5}{8x-3}=0$$

$$9x-5=0$$

$$x=\frac{5}{9}\in D$$

$$\mathscr{S}=\{\frac{5}{9}\}$$

V.I. $3x-4=0$

$$x=\frac{4}{3}$$

$$D=\mathbb{R}\setminus\{\frac{4}{3}\}$$

$$\frac{-9x-5}{3x-4}=\frac{5}{1}$$

$$-9x-5=3x-4$$

$$x=\frac{-1}{12}\in D$$

$$\mathscr{S}=\{\frac{-1}{12}\}$$

V.I. $6x-1=0 \quad 5x-7=0$

$$x=\frac{1}{6} \quad \frac{7}{5}$$

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{6}\ ;\ \frac{7}{5}\right\}$$

$$2(5x-7)=3(6x-1)$$

$$10x-14=18x-3$$

$$x=\frac{-11}{8}\in D$$

$$\mathscr{S}=\{\frac{-11}{8}\}$$

Exercice 43 Préciser le domaine de résolution puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $\dfrac{7x-6}{3x-5}=0$ | (E_2) $\dfrac{4x+6}{2x-5}=0$ | (E_3) $\dfrac{20x^2-8x}{2x-2}=0$ | (E_4) $\dfrac{6x^2-15x}{2x-5}=0$

Exercice 44 Préciser le domaine de résolution puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $\dfrac{x+4}{-3x-3}=\dfrac{7}{2}$ | (E_2) $\dfrac{-x-6}{3-2x}=5$ | (E_3) $\dfrac{-6x-1}{-3x-3}=11$ | (E_4) $\dfrac{2x-6}{2x+1}=-11$

■ **Exemple 10.37** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations rationnelles suivantes inconnue x.

$$1-\frac{3}{x-1}=\frac{x-4}{x-5}$$

$$D=\mathbb{R}\setminus\{4\ ;\ 5\}$$

multiplier par le plus petit dénominateur commun

$$1\times(x-1)(x-5)-\frac{3}{x-1}(x-1)(x-5)=\frac{x-4}{x-5}(x-1)(x-5)$$

simplifier les facteurs commun

$$(x-1)(x-5)-3(x-5)=(x-4)(x-1)$$

on développe

$$x^2-6x+5-3x+15=x^2-5x+4$$

$$16=4x$$

$$x=4$$

Exercice 45 Préciser le domaine de résolution puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $1-\dfrac{2x}{2x+1}=\dfrac{3}{2x}$

(E_2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x^2}$

(E_3) $x-\dfrac{1}{x}=0$

(E_4) $x-1=\dfrac{4}{x-1}$

(E_5) $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{15}{3x-5}=\dfrac{3}{2(x+3)}$

(E_6) $\dfrac{7}{2x-1}=\dfrac{3}{7x}$

10.7 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 1.

Associer chaque expression avec l'énoncé correspondant.

un polynôme de degré 0	$3x^2$
un trinôme de degré 5	$\dfrac{2}{3} - 2x^3$
un binome de coefficient dominant -2	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
un monôme de degré non nul	12
un trinôme de coefficient dominant $\dfrac{2}{3}$	$-3x^5 + 2x^3 + x$
un polynôme de degré 3 de coefficient dominant 1 .	$\frac{2}{3}x^4 + x^2 + 10$

■

solution de l'exercice 2.

1. Écrire un polynôme de degré 3 de coefficient dominant -2 : $-2x^3 + 3x - 5$
2. Écrire un polynôme de degré 5 de coefficient dominant 6 : $6x^5 + 3x - 5$
3. Écrire un binôme de degré 4 de coefficient dominant négatif : $-2x^4 + 3x$
4. Écrire un binôme de degré 3 de coefficient dominant entier positif : $2x^3 - 5$

■

solution de l'exercice 3.

1. $10x - 20 = 0$ a pour racine(s) $\{2\}$;
2. $25 - 5x = 0$ a pour racine(s) $\{5\}$;
3. $(x - 4)(x - 1) = 0$ a pour racine(s) $\{1, 4\}$;
4. $-11(x + 5)^3 = 0$ a pour racine(s) $\{-5\}$;
5. $(x - 5)(x - 3) = 0$ a pour racine(s) $\{3, 5\}$;
6. $5x^2(x + 1) = 0$ a pour racine(s) $\{-1, 0\}$;

■

solution de l'exercice 4.

1. $20x - 30 = 0$ a pour solution(s) $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$;
2. $(20 - 10x)(8x + 5) = 0$ a pour solution(s) $\left\{-\dfrac{5}{8}, 2\right\}$;
3. $\dfrac{2}{7} - \dfrac{3x}{7} = 0$ a pour solution(s) $\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$;
4. $(7x - 4)(56x - 7) = 0$ a pour solution(s) $\left\{\dfrac{1}{8}, \dfrac{4}{7}\right\}$;
5. $1 - 33x = 0$ a pour solution(s) $\left\{\dfrac{1}{33}\right\}$;
6. $3(-2x - 7)^3 = 0$ a pour solution(s) $\left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$;

7. $2(x-3)^2 \cdot (2x-1) = 0$ a pour solution(s) $\left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$;
8. $592 - \frac{74}{x} = 0$ a pour solution(s) $\left\{\frac{1}{8}\right\}$;
9. $(x+2)^2 + 1 = 0$ a pour solution(s) $\{\}$;

■

solution de l'exercice 5.

1. Écrire deux polynômes de degré 1 dont l'unique racine est 3 :

   $(x-3)$, $5(x-3)$. Mais pas $\cancel{x(x-3)}$
2. Écrire deux polynômes sous forme factorisée dont les racines sont -1 et 0.

   $P(x) = x(x+1)^3$ ou $Q(x) = x^5(x+1)^{10}$
3. Écrire deux polynômes de degré 3 sous forme factorisée dont les racines sont 1 et -2.

   $\cancel{(x-1)(x+2)}$, pour avoir degré 3 : $5(x-1)(x+2)^2$ ou $2(x-1)^2(x+2)$
4. Écrire deux polynômes de degré 5 sous forme factorisée dont l'unique racine est -10.

   $(x+10)^5$ et $3(x+10)^5$
5. Écrire deux polynômes de degré 2 sans racines.

   x^2+1, x^2+9

■

solution de l'exercice 6.

1. PGFC de $12x$ et 18 est 6;
2. PGFC de $12x$ et $18x+90$ est 6;
3. PGFC de $12x+36$ et $16x$ est 4;
4. PGFC de $12x^2$ et $30x$ est $6x$;
5. PGFC de $12x^3$ et $15x^2$ est $3x^2$;
6. PGFC de $24(x+1)^2$ et $30(x+1)^3$ est $6(x+1)^2$;
7. PGFC de $12(x-1)^2$ et $30x-30$ est $6(x-1)$;
8. PGFC de $12x^2(x-5)$ et $30x(x-5)$ est $6x(x-5)$;
9. PGFC de $12x^2(x+4)$ et $30x+120$ est $6(x+4)$;

■

solution de l'exercice 7.

1.

$A = 3x + 6 = 3(x + 2)$;

$B = 2x^3 - 6x = 2x\left(x^2 - 3\right)$;

$C = -15x^3 + 20x^2 = -5x^2 \cdot (3x - 4)$;

$D = 4x^3 - 6x^2 + 12x = 2x\left(2x^2 - 3x + 6\right)$;

$E = 2x^2y - 6xy^2 + 3xy = xy(2x - 6y + 3)$;

$F = 3x^4 - 6x^3 - x^2 = x^2 \cdot \left(3x^2 - 6x - 1\right)$;

2. $A = (x - 6)(x + 9)$;

$B = (x + 2)(3x - 4)$;

$C = -(2x - 1)(3x - 7)$;

$D = (3x - 4)(5x + 2)$;

$E = -(x - 1)(x + 1)$;

$F = -(2x - 1)(5x + 2)$;

3. $A = (x - 1)(x + 3)$;

$B = -(2x - 3)(3x - 1)$;

$C = 2x(5x - 2)$;

$D = -(x - 4)(5x - 17)$;

■

solution de l'exercice 8.

$A = x(4x + 1)$;

$B = -x\left(2x^2 - 1\right)$;

$C = 6x(2x + 1)$;

$D = 7x(7x - 1)$;

$E = 3x(3x - 1)$;

$F = 5(x + 1)(3x + 2)$;

■

solution de l'exercice 9.

$A = -4x(x - 3)$;

$B = -5 \cdot \left(3x^3 - 5\right)$;

$C = (3x - 1)(12x - 1)$;

$D = -(x - 5)(x - 1)$;

$E = (2x + 1)(5x - 2)$;

$F = 5(x - 2)(3x - 1)$;

■

solution de l'exercice 10.

$A = \dfrac{x + 8}{2}$;

$B = \dfrac{x + 15}{3}$;

$C = \dfrac{x\left(x^2 + 4x - 10\right)}{2}$;

$D = \dfrac{x\left(x^3 - 15x + 6\right)}{3}$;

$E = \dfrac{2(x - 6)(x - 3)}{3}$;

$F = \dfrac{2(x + 1)(2x - 5)}{5}$;

■

solution de l'exercice 11.

$$\begin{aligned} A(x) &= 2(x + 5)(x - 1) + (2x - 3)(x + 5) \\ &= (x + 5)\left[2+(x + 5) + (2x - 3)\right] \\ &= (x + 5)(3x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= (2 - 8x)(7 - x) - 3(7 - x)(3 - x) \\ &= (7 - x)\left[(2 - 8x) - 3+(3 - x)\right] \\ &= (7 - x)(2 - 9x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= 2(3x - 2)(5x - 1) - (3x - 1)(3x - 2) \\ &= (3x - 2)\left[2(3x - 2) - 3x-1\right] \\ &= (3x - 2)\left[6x - 4 - 3x - 1\right] \\ &= (3x - 2)(3x - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= (2x - 3)(5x - 1) - (2x - 3)^2 \\ &= (2x - 3)\left[(5x - 1) - 1\right] \\ &= (2x - 3)(5x - 2) \end{aligned}$$

■

solution de l'exercice 12.

$A = (2x-1)(3x+5)$;

$B = -(x-1)(2x+5)$;

$C = 3(2x+5)^2$;

$D = (2x-3)(5x-4)$;

$E = (2x+5)(11x+4)$;

$F = -(3x+2)(4x+7)$;

$G = -(x-34)(2x+3)$;

$H = (2x-1)(13x-9)$;

$I = (2x-3)(11x-3)$;

$J = (2x-1)(7x-1)$;

■

solution de l'exercice 13 .

1. a) $A = (3x)^2$;
   b) $B = \left(\sqrt{3}x\right)^2$;
   c) $C = (9x)^2$;
   d) $D = (10x)^2$;
   e) $E = (6x)^2$;
   f) $F = \left(\frac{5x}{7}\right)^2$;
2. a) $A = (5|x-1|)^2$;
   b) $B = (2(x+3))^2$;
   c) $C = (5\cdot(3x+1))^2$;
   d) $D = (10|7x-2|)^2$;
   e) $E = \left(\sqrt{5}(x+1)\right)^2$;
   f) $F = \left(\sqrt{2}(x+1)\right)^2$;

■

solution de l'exercice 14 .

1. $A = (x-6)(x+6)$;
2. $B = x^2 - 5$;
3. $C = (3x-4)(3x+4)$;
4. $D = -4\cdot(3x-1)(3x+1)$;
5. $E = 3\cdot\left(12x^2-1\right)$;
6. $F = \dfrac{(12x-1)(12x+1)}{9}$;

■

solution de l'exercice 15 .

1. $A = (x-2)(11x-2)$;
2. $B = 36\left(x-1-\dfrac{\sqrt{10}}{6}\right)\left(x-1+\dfrac{\sqrt{10}}{6}\right)$;

■

solution de l'exercice 16 .

1. $A = (x+2)(x+4)$;
2. $B = -4(x-3)(x+2)$;
3. $C = 9\left(x-\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{7}{3}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{7}{3}\right)$;
4. $D = 4\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}\right)$;
5. $E = -(x+2)(9x-2)$;
6. $F = -(x-2)(5x+2)$;
7. $G = (4x-3)(8x-3)$;

8. $H = 36\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$;
9. $I = (x - 18)(11x + 12)$;

■

solution de l'exercice 17 .

1. $A = (x + 4)^2$;
2. $B = (x - 3)^2$;
3. $C = (5x - 8)^2$;
4. $D = \frac{(x + 2)^2}{4}$;

■

solution de l'exercice 18 .

1. $A = (x + 1)^2$;
2. $B = (x - 3)^2$;
3. $C = (x + 5)^2$;
4. $D = \frac{(2x + 1)^2}{4}$;
5. $E = (3x - 4)^2$;
6. $F = 9(2x - 3)^2$;
7. $G = (2x - 3)^2$;
8. $H = (2x + y)^2$;
9. $I = (x - 7y)^2$;
10. $J = 9\left(x - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$;
11. $K = 3\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$;
12. $L = 9(x - 2)^2$;

■

solution de l'exercice 19 .

1. $A = (x + 4)\left(x^2 + 1\right)$;
2. $B = (5x + 1)\left(x^2 + 1\right)$;
3. $C = (3x - 1)\left(x^2 + 2\right)$;
4. $D = (2x - 1)\left(9x^2 + 1\right)$;
5. $E = (x + 1)\left(x^2 + 1\right)$;
6. $F = (x + 1)\left(x^4 + 1\right)$;
7. $G = \left(2x^2 + 3\right)\left(4x^3 - 3\right)$;
8. $H = (8x + 7)(9x + 10)$;
9. $I = (x + 3)(2x + 5)$;

■

solution de l'exercice 20 .

1. $5x^2 + 2x = 0$ avec $\mathscr{S} = \left\{-\frac{2}{5}, 0\right\}$;
2. $9x^2 - 4 = 0$ avec $\mathscr{S} = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$;
3. $36x^2 + 100 = 0$ avec $\mathscr{S} = \{\}$;
4. $x^2 + 10x + 25 = 0$ avec $\mathscr{S} = \{-5\}$;
5. $x^2 - 6x + 9 = 0$ avec $\mathscr{S} = \{3\}$;
6. $-3x^2 - 5x = 0$ avec $\mathscr{S} = \left\{-\frac{5}{3}, 0\right\}$;
7. $x^2 - 2x + 1 = 0$ avec $\mathscr{S} = \{1\}$;
8. $x^2 + 4x + 4 = 0$ avec $\mathscr{S} = \{-2\}$;

■

solution de l'exercice 21 .

1. $(2x+3)(3x+2)+(3x+2)(8x+5)=0$ avec $\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{4}{5},-\dfrac{2}{3}\right\}$;
2. $(3x-1)^2+(3x-1)(5x-4)=0$ avec $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{8}\right\}$;
3. $(3x-1)^2-(5x-4)^2=0$ avec $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{5}{8},\dfrac{3}{2}\right\}$;
4. $(x-3)^2\cdot(2x+2)-3(x-3)(x+1)^2=0$ avec $\mathscr{S}=\{-9,-1,3\}$;
5. $x^2\left(x^2-1\right)-9x^2+9=0$ avec $\mathscr{S}=\{-3,-1,1,3\}$;
6. $(2x-5)(5x-4)-(2x-5)(8x-1)=0$ avec $\mathscr{S}=\left\{-1,\dfrac{5}{2}\right\}$;
7. $(2-3x)(6x-4)-(6x-4)(10x-2)=0$ avec $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{4}{13},\dfrac{2}{3}\right\}$;
8. $(2x+3)^2-(5x+4)^2=0$ avec $\mathscr{S}=\left\{-1,-\dfrac{1}{3}\right\}$;

■

solution de l'exercice 22 .

■

solution de l'exercice 23 .

■

solution de l'exercice 24 .

■

solution de l'exercice 25 .

■

solution de l'exercice 26 .

■

solution de l'exercice 27 .

■

solution de l'exercice 28 .

■

solution de l'exercice 29 .

■

solution de l'exercice 30 .

■

solution de l'exercice 31 .

1. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-3}$ avec $D =]-\infty, 3[\cup]3, \infty[$;
2. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-2x}$ avec $D =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, \infty[$;
3. $f(x) = \dfrac{2x^2-5}{5x^2+3}$ avec $D = \mathbb{R}$;
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{6x-18}$ avec $D = [0, 3[\cup]3, \infty[$;
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+6}}{x^2-4}$ avec $D = [-6, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, \infty[$;
6. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-2x+4}$ avec $D = \mathbb{R}$;

■

solution de l'exercice 32 .

$A = 1$; définie sur $D =]-\infty, -5[\cup]-5, \infty[$;

$B = 2$; définie sur $D =]-\infty, -2[\cup]-2, \infty[$;

$C = \dfrac{5}{6}$; définie sur $D =]-\infty, 3[\cup]3, \infty[$;

$D = \dfrac{2x+1}{2x-6}$; définie sur $D =]-\infty, 3[\cup]3, \infty[$;

$E = \dfrac{x+1}{3x+6}$; définie sur $D =]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, \infty[$;

$F = \dfrac{3}{x+2}$; définie sur $D =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, \infty[$;

$G = 2x-2$; définie sur $D =]-\infty, -1[\cup]-1, \infty[$;

$H = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}$; définie sur $D =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, \infty[$;

$I = \dfrac{3x}{x+1}$; définie sur $D =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, \infty[$;

■

solution de l'exercice 33 .

■

solution de l'exercice 34 .

1. $A = \dfrac{x^2-4x}{6x-2}$; définie sur $D = \left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right[\cup \left]\dfrac{1}{3}, \infty\right[$;
2. $B = \dfrac{1}{x}$; définie sur $D =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, \infty[$;
3. $C = -\dfrac{x}{x-1}$; définie sur $D =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \infty[$;

4. $D = -\frac{4x}{5}$; définie sur $D = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$;
5. $E = \frac{2}{9x}$; définie sur $D =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, \infty[$;
6. $F = -\frac{1}{x-5}$; définie sur $D =]-\infty, -5[\cup]-5, 5[\cup]5, \infty[$;

■

solution de l'exercice 35 .

1. $A = \frac{1}{4(x-2)}$;
2. $B = \frac{x-5}{x-4}$;
3. $C = \frac{x-1}{5(x-2)^2}$;
4. $D = -\frac{x+5}{5x^2}$;
5. $E = \frac{2x-9}{3x-4}$;
6. $F = -\frac{2(x-1)}{23x-5}$;

■

solution de l'exercice 36 .

1. $A = x - 3$;
2. $B = \frac{1}{2}$;
3. $C = \frac{x+5}{x-1}$;
4. $D = \frac{3x-2}{x+3}$;

■

solution de l'exercice 37 .

1. plus petit facteur commun $2(x+3)$;
2. plus petit facteur commun $(x+3)(x+4)$;
3. plus petit facteur commun $2(x-5)(x+5)$;
4. plus petit facteur commun $2(x-3)^2$;
5. plus petit facteur commun $(x+1)^2$;
6. plus petit facteur commun $(x-1)(x+1)$;

■

solution de l'exercice 38 .

■

solution de l'exercice 39 .

1. $A = \frac{x+4}{x+3}$;
2. $B = -\frac{x-1}{x+1}$;
3. $C = \frac{x-4}{x+1}$;
4. $D = \frac{3x+7}{(x-3)(x+5)}$;
5. $E = \frac{2}{x+1}$;
6. $F = \frac{2x+5}{(x+1)(x+2)}$;
7. $G = \frac{x^2+3x+12}{(x-4)(x+6)}$;
8. $H = \frac{2\cdot(5x-9)}{(2x-3)^2}$;
9. $I = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$;
10. $J = \frac{x-2}{(x-3)(x+3)}$;
11. $K = \frac{2x^2-5x+6}{x(x-1)^2}$;
12. $L = \frac{x^2+x+4}{(x-1)(x+1)^2}$;

■

solution de l'exercice 40 . $A = \frac{x+1}{x-1}$; ■

solution de l'exercice 41 .

1. $A = \dfrac{(x+1)(x+6)}{x^2}$; | **2.** $B = -\dfrac{2}{5(x+3)^2}$; | **3.** $C = -\dfrac{x-2}{(x+2)(x+3)^3}$;

■

solution de l'exercice 42 .

1. $A = \dfrac{x^2}{x-6}$; | **2.** $B = -\dfrac{x+1}{2x-1}$; | **3.** $C = \dfrac{x+3}{x+1}$;

■

solution de l'exercice 43 .

(E_1) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$; $S_1 = \left\{\dfrac{6}{7}\right\}$;

(E_2) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$; $S_2 = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$;

(E_3) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $S_3 = \left\{0, \dfrac{2}{5}\right\}$;

(E_4) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$; $S_4 = \{0\}$;

■

solution de l'exercice 44 .

(E_1) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $S_1 = \left\{-\dfrac{29}{23}\right\}$;

(E_2) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$; $S_2 = \left\{\dfrac{7}{3}\right\}$;

(E_3) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $S_3 = \left\{-\dfrac{32}{27}\right\}$;

(E_4) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$; $S_4 = \left\{-\dfrac{5}{24}\right\}$;

■

solution de l'exercice 45 .

(E_1) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}, 0\right\}$; $S_1 = \left\{-\dfrac{3}{4}\right\}$;

(E_2) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$; $S_2 = \{\}$;

(E_3) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $S_3 = \{-1, 1\}$;

(E_4) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $S_4 = \{-1, 3\}$;

(E_5) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$; $S_5 = \{4\}$;

(E_6) **D.R.** $= \mathbb{R} \setminus \left\{-3, \dfrac{5}{3}\right\}$; $S_6 = \{-5\}$;

■

10.8 B.A.R Maths : Factorisations par somme-produit de $1x^2 + bx + c$

Pour x, b et $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A &= (x+p)(x+q) && \Big\} \textit{ développer} \\ &= && \Big\} \textit{ réduire} \\ &= x^2 + \dots\dots\dots x + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Pour factoriser : $B = 1x^2 + bx + c$ on peut cher-cher s'il existe (des entiers) p et q tel que $p+q = b$ et $pq = c$.

> Les expressions suivantes se factorisent en $(x+p)(x+q)$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$. Retrouver p et q !

■ **Exemple 10.38 — Cas c>0 avec entiers p et q de même signe.** Factoriser :

$$A = x^2 + 7x + 10 \qquad\qquad B = x^2 - 9x + 20$$

solution.

On cherche deux entiers p et q entiers tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + 7x + 10 \overset{?}{=} (x+p)(x+q)$.

1. Lister des paires de facteurs de $c = 10$
2. Chercher parmi celles-ci la paire dont la somme est $b = 7$
3. Vérification par double distributivité

   $(x+2)(x+5) = x^2 + 2x + 5x + 10 = x^2 + 7x + 10$

p	q	pq	$p+q$	
1	10	10	11	✗
2	5	10	7	✓
-2	-5	10		

On cherche deux entiers p et q entiers tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 - 9x + 20 \overset{?}{=} (x+p)(x+q)$.

1. Lister des paires de facteurs de $c = 20$
2. Chercher parmi celles-ci la paire dont la somme est $b = -9$
3. Vérification par double distributivité

   $(x-4)(x-5) = x^2 - 4x - 5x + 10 = x^2 - 9x + 20$

p	q	pq	$p+q$	
1	20	20	21	✗
2	10	20	11	✗
4	5	20	9	✗
-4	-5	20	-9	✓

■

Exercice 46 — À vous. Factoriser par somme-produit :

$A(x) = x^2 + 6x + 5$	$C(x) = x^2 - 17x + 16$	$E(x) = x^2 + 7x + 10$	$G(x) = x^2 + 8x + 12$
$B(x) = x^2 + 10x + 16$	$D(x) = x^2 + 6x + 8$	$F(x) = x^2 - 7x + 12$	$H(x) = x^2 - 13x + 40$

Exercice 47

En remarquant que $x^2 + 25 = x^2 + 0x + 25$, expliquer pourquoi il n'est pas possible de trouver $p, q \in \mathbb{R}$ tel que « pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + 25 = (x+p)(x+q)$ ».

■ **Exemple 10.39 — Cas c<0, On cherche des entiers p et q de signes contraires.** Factoriser :

$$A = x^2 + 2x - 3 \qquad B = x^2 - 14x - 15$$

solution.

On cherche deux entiers p et q entiers tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + 2x - 3 \stackrel{?}{=} (x+p)(x+q)$.

1. Lister des paires de facteurs de $c = -3$
2. Chercher parmi celles-ci la paire dont la somme est $b = +2$
3. Vérification par double distributivité

   $(x-1)(x+3) = x^2 - x + 3x + 10 = x^2 + 2x - 3$

p	q	pq	$p+q$	
1	-3	-3	-2	✗
-1	3	-3	2	✓

On cherche deux entiers p et q entiers tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 - 14x - 15 \stackrel{?}{=} (x+p)(x+q)$.

1. Lister des paires de facteurs de $c = -153$
2. Chercher parmi celles-ci la paire dont la somme est $b = -14$
3. Vérification par double distributivité

   $(x+1)(x-15) = x^2 + x - 15x - 15 = x^2 - 14x - 15$

p	q	pq	$p+q$	
3	-5	-15	-2	✗
-3	5	-15	2	✗
1	-15	-15	-14	✓

■

Exercice 48 — À vous. Factoriser

$A(x) = x^2 + x - 6$	$C(x) = x^2 - 6x - 40$	$E(x) = x^2 + 2x - 8$	$G(x) = x^2 + x - 30$
$B(x) = x^2 - 5x - 14$	$D(x) = x^2 - x - 12$	$F(x) = x^2 + 5x - 24$	$H(x) = x^2 - 19x - 20$

10.8.1 Applications

Exercice 49

1. Factoriser $X^2 - 2X - 3$
2. En déduire la factorisation de $(5x+1)^2 - 2(5x+1) - 3$.

Exercice 50

1. Factoriser $X^2 + 3X - 4$
2. En déduire la factorisation complète de $(x^4 + 3x^2 - 4)$.

Exercice 51 — entrainement. Factoriser complètement les expressions :

$$A = (3x+2)^2 + 8(3x+2) + 12 \qquad B = x^4 + 4x^2 + 16$$

Exercice 52

Simplifier les expressions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+8x+15}$ | 2. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+5x+5}$ | 3. $\dfrac{2x^3-x^2-6x}{2x^2-7x+6}$ | 4. $\dfrac{x^2-3x-18}{2x^2+7x+3}$

Exercice 53

Simplifier le produit $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x} \times \dfrac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}$

Exercice 54 — expressions de 1ère SPE. Simplifier les quotients $(h \neq 0)$:

$$A = \frac{\dfrac{1}{1+x+h} - \dfrac{1}{1+x}}{h} \qquad B = \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$$

10.8.2 Généralisation

■ **Exemple 10.40 — factorisation par somme-produit de $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 1$.**

On cherche à factoriser $5x^2 - 18x - 8 \stackrel{?}{=} (rx+p)(sx+p)$ avec r, s, p et q entiers !

p	q	pq	$p+q$	
1	-40	-40	-39	✗
2	-20	-40	-18	✓

1. Lister des paires de facteurs entiers de $ac = -40$
2. Chercher une paire dont la somme est $b = -18$
3. Écrire bx comme la somme trouvée $-18x = 2x - 20x$
4. Factoriser par regroupement : $5x^2 - 18x - 8 = \underbrace{5x^2 + 2x}\underbrace{-20x - 8}$

$$= x(5x+2) - 4(5x+2)$$

$$= (x-4)(5x+2)$$

Exercice 55 — Cas $a \neq 1$. Factoriser les expressions suivantes : :

(E_1) $2x^2 + 7x + 6 = 0$

(E_2) $3x^2 + 14x - 5 = 0$

(E_3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$

(E_4) $8x^2 + 2x - 3 = 0$

(E_5) $6x^2 + 7x - 3 = 0$

(E_6) $6x^2 - x - 1 = 0$

solution de l'exercice 46 .

$A(x) = (x+1)(x+5)$; $B(x) = (x+2)(x+8)$; $C(x) = (x-16)(x-1)$; $D(x) = (x+2)(x+4)$; $E(x) = (x+2)(x+5)$; $F(x) = (x-4)(x-3)$; $G(x) = (x+2)(x+6)$; $H(x) = (x-8)(x-5)$; ■

solution de l'exercice 47 .

■

solution de l'exercice 48 .

$A(x) = (x-2)(x+3)$; $B(x) = (x-7)(x+2)$; $C(x) = (x-10)(x+4)$; $D(x) = (x-4)(x+3)$; $E(x) = (x-2)(x+4)$; $F(x) = (x-3)(x+8)$; $G(x) = (x-5)(x+6)$; $H(x) = (x-20)(x+1)$; ■

solution de l'exercice 49 .

■

solution de l'exercice 50 .

■

solution de l'exercice 51 .

■

solution de l'exercice 52 .

■

solution de l'exercice 53 .

■

solution de l'exercice 54 .

■

solution de l'exercice 55 .

$A(x) = (x+2)(2x+3)$; $B(x) = (x+5)(3x-1)$; $C(x) = (x+2)(3x+1)$; $D(x) = (2x-1)(4x+3)$; $E(x) = (2x+3)(3x-1)$; $F(x) = (2x-1)(3x+1)$; ■