Chapitre 2

Probabilités conditionnelles et indépendance

Table 2.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 2...

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître.../savoir faire...**	🪨	💎	💍
propriétés d'une loi de probabilité reactivation 2nde)	1, 3, 4	2, 5, 6	
Loi de probabilités conditionnelles			
définition d'une probabilité conditionnelle	7,		
propriétés d'une loi conditionnelle,	8, 12,	13 à 17	
exploiter un tableau croisé des effectifs	9, 10, 11		
probabilités composées, probabilités totales et arbre de probabilité	19, 20, 21	22 à 28	
Événement indépendants			
définitions et propriétés	29	30, 31, 32	
Applications		33 à 37	38, 39

2.1 Lois de probabilités (vu en 2nde)

Une **expérience aléatoire** est une expérience **renouvelable à l'identique**, dont on connait les **issues**, et dont le résultat est **imprévisible**. Une **épreuve** est un renouvellement de l'expérience.

- **une issue** est notée ω, ou ω_1, $\omega_2, \ldots$. à lire « oméga »
- **l'univers** $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \ldots; \omega_n\}$ est l'ensemble des issues possibles.
- **un événement** E est une partie de Ω : $E \subset \Omega$
- ω **réalise l'événement** E signifie $\omega \in E$.

Définition 2.1 — définition constructive d'une loi de probabilité. Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

a) on attribue à chaque événement élémentaire ω une probabilité positive

$$P(\{\omega\}) = p(\omega) \geqslant 0$$

b) la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 :

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_n) = 1$$

c) Pour tout événement E, la probabilité $P(E)$ est égale à la probabilité des événements élémentaires qui le réalisent :

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)$$

Convention lycée Dans tout exercice où figurent des expressions tel que « dés équilibrés », « tirage au hasard », « urnes opaque et jetons indiscernables au toucher »... le modèle choisi sera celui de l'équiprobabilité : tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Définition 2.2 — situation d'équiprobabilité. Pour un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Le Card$(E)$ (lire **cardinal**) est le nombre d'issues qui réalisent E.

a) $p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_n) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$

b) Pour tout événement E on a $P(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Théorème 2.1 Toute loi de probabilité sur un univers Ω vérifie les propriétés suivantes :

(P1) loi unitaire $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$

(P2) loi positive Pour tout événement A : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(P3) Pour tout événement A : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

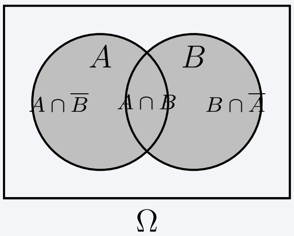
(P4) loi additive Si A et B sont des événements incompatibles alors :

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(P5) Pour tous événements A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$



Postulat 2.2 — La loi naïve des grands nombres. Lorsqu'une expérience aléatoire a un nombre fini de résultats possibles, chacun de ces résultats possède une probabilité d'**apparaître**.

Quand on répète un grand nombre de fois l'expérience, la proportion d'apparition de chaque résultat est voisine de sa probabilité.

$$\text{frequence(événement)} \approx P(\text{événement}) \times \text{nbr de répétition}$$

2.2 Probabilités conditionnelles

Étant donné un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ muni d'une loi de probabilité P, et un événement A ($P(A) \neq 0$). Pour une issue élémentaire $\omega \in \Omega$ on définit sa probablité sachant A :

$$P_A(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{P(A)} \times P(\omega) & \text{Si } \omega \text{ réalise } A \ (\omega \in A) \\ 0 & \text{Si } \omega \text{ ne réalise pas } A \ (\omega \notin A) \end{cases}$$

R Les probabilités condtionnelles sachant A font un « zoom sur A ». Les issues qui ne réalisent par A sont négligées, et celles réalisant A sont amplifiées d'un facteur $\frac{1}{P(A)} > 1$.

Démonstration. Pour un événement E :

$$\begin{aligned} P_A(E) &= \sum_{\omega \in E} P_A(\omega) = \sum_{\omega \in A \cap E} P_A(\omega) + \sum_{\omega \in \overline{A} \cap E} P_A(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in A \cap E} \frac{1}{P(A)} \times P(\omega) + 0 \\ &= \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in A \cap E} P(\omega) \\ &= \frac{1}{P(A)} \times P(A \cap E) \leqslant 1 \end{aligned}$$

En particulier : $$P_A(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P_A(\omega) = \frac{1}{P(A)} \times P(A \cap \Omega) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

■

Définition 2.3 Soit un événement A avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle sachant A d'un événement E est $P_A(E) = \dfrac{P(A \cap E)}{P(A)}$

R Il est incorrect de définir la probabilité conditionnelle en disant que l'on réduit l'univers aléatoire à un « sous univers » $A \subset \Omega$. Sinon on ne peut calculer $P_A(E)$ que pour $E \subset A$.

Définition 2.4 Si $P_A(E) = P(E)$ alors l'événement E est dit indépendant de A. L'événement A n'a pas d'influence statistique sur E.

R Si $P_A(E) > P(E)$, l'événement A est favorable à E.

Théorème 2.3 P_A est une (autre) loi de probabilité sur l'univers Ω. On parle de **loi conditionnelle sachant** A. Elle vérifie :

- $P_A(\Omega) = 1$
- pour tout événement E : $P_A(\overline{E}) = 1 - P_A(E)$.
- pour tous événements E et F disjoints : $P_A(E \cup F) = P_A(E) + P_A(F)$

2.3 La Formule des probabilités composés et arbres de probabilités

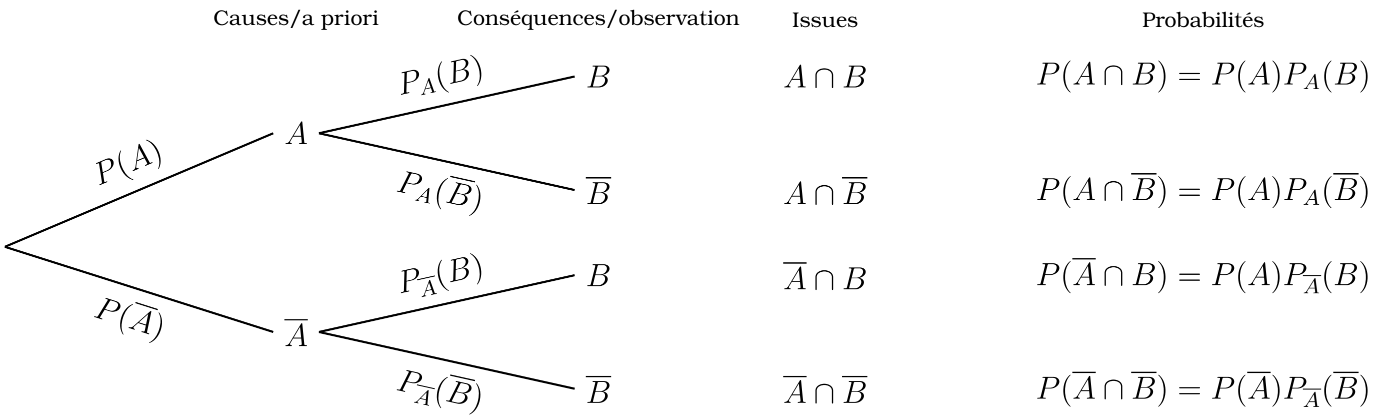
Avec les problèmes associés aux tableaux à double entrée, on connait souvent les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et celles des intersections $P(A \cap B)$... et on souhaite obtenir celles de $P_A(B)$ ou $P_B(A)$. Dans d'autres problèmes, on connait certaines probabilités conditionnelles et on souhaite calculer des probabilités $P(B)$.

Proposition 2.4 — Formule des probabilités composées. Pour $P(A) \neq 0$:

$$P(A \cap E) = P(A) P_A(E)$$

R La probabilité de réalisation de « A et E » est égale au produit de la probabilité de A par la probabilité sachant A de E.

Figure 2.1 – Un arbre de probabilité pour modéliser une situation mélant 2 événements A et B pour organiser les relations de probabilités composées entre le *a priori* A et l'*observation* B.



Proposition 2.5 — Formule des probabilités totales (cas simple). Dans le cas simple ci-dessus :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \\ &= P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) \end{aligned}$$

Théorème 2.6 — Théorème de Bayes. Pour deux événements A et B ($P(A)$ et $P(B) \neq 0$), on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$$

Définition 2.5 Les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ pour $n \geqslant 1$ forment une **partition** de Ω si :

- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$;
- Les événements sont disjoints deux à deux : pour tout $i, j \leqslant n$ avec $i \neq j$ $\quad A_i \cap A_j = \varnothing$

Proposition 2.7 — Formule des probabilités totales. Pour une partition (A_i) et un événement E :

$$P(E) = \sum_i P(A_i) P_{A_i}(E)$$

2.4 Événements indépendants, applications

Théorème 2.8 — Théorème de Bayes. Pour deux événements A et B (avec $P(A)$ et $P(B) \neq 0$) :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$$

Démonstration. Pour $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ on a :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)} = \frac{P_A(B)}{P(B)} = \frac{P_B(A)}{P(A)}$$

■

Corollaire 2.9 Pour deux événements A et B de probabilité non nulle. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) B est indépendant de A ($P_A(B) = P(B)$)

(ii) A est indépendant de B ($P_B(A) = P(A)$)

(iii) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

On peut désormais dire que les événements A et B sont indépendants.

R Pour simplifier on considère que deux événments sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ même si leur probabilités sont nulles.

Théorème 2.10 Les énoncés suivants sont équivalents :

(i) A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(ii) A et $\overline{B}$ sont indépendants : $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$

(iii) $\overline{A}$ et B sont indépendants : $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B)$

(iv) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants : $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$

Démonstration. Si A et B sont indépendants. Nous allons montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

■

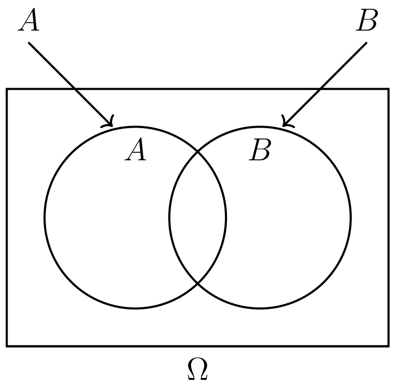
$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \quad \text{\textit{A et B indépendants}} \\ &= P(B)(1 - P(A)) \\ &= P(\overline{A})P(B) \end{aligned}$$

2.5 Exercices

2.5.1 Exercices : Réactivation de seconde

Exercice 1 On lance un dé équilibré à 10 faces. On considère les événements $A =$« obtenir des carrés parfaits » et $B =$« obtenir des nombres impairs ».

1. Quelles sont les issues possibles ? Sont-elles équiprobables ?
2. Placer les issues dans le diagramme de Venn.
3. Enumérer les événements et donner leur probabilité.
   a) $A = \{$ $\}$; $P(A) =$
   b) $\overline{B} = \{$ $\}$; $P(\overline{B}) =$
   c) $A \cap B = \{$ $\}$; $P(A \cap B) =$
   d) $A \cap \overline{B} = \{$ $\}$; $P(A \cap \overline{B}) =$
   e) $\overline{A \cup B} = \{$ $\}$; $P(\overline{A \cup B}) =$



Exercice 2 Le tableau croisé montre la répartition des effectifs selon leur déjeuner et le moyen utilisé pour venir à l'école. On considère l'expérience aléatoire : « choisir un élève au hasard ».
On considère les événements suivants :

- F: « l'élève prend un déjeuner froid »;
- C : « l'élève prend un déjeuner chaud »;
- R : « l'élève ne prend pas de déjeuner »;
- M : « l'élève vient à l'école à pied »;
- B : « l'élève vient à l'école en bus »;
- V : « l'élève est déposé en voiture ».

	Froid	Chaud	Aucun	Total
à Pied	0	6		24
en Bus		14	5	32
en Voiture	20		10	
Total	33	94		160

1. Compléter le tableau des effectifs.
2. Décrire les événements suivants par une courte phrase puis déterminer leur probabilité.
   a) $P(F) =$ .... $P(B) =$ ....
   b) $\overline{B}$= .... $P(\overline{B}) =$
   c) $\overline{R}$= .... $P(\overline{R}) =$
   d) $B \cup M =$ .... $P(B \cup M) =$
   e) $F \cap M =$ .... $P(F \cap M) =$
   f) $R \cap \overline{M} =$ .... $P(R \cap \overline{M}) =$
   g) $C \cap V =$ .... $P(C \cap V) =$

h) $\overline{C \cap V} =$ .... $P(\overline{C \cap V}) =$

i) $F \cup B =$ .... $P(F \cup B) =$

j) $\overline{F \cup B} =$ .... $P(\overline{F \cup B}) =$

Exercice 3 On lance un dé cubique pipé. Le tableau ci-contre représente la loi de probabilité de cette expérience.

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	0.1	0,15	0,2		0,3	0,05

1. Calculer $P(4)$.
2. Calculer la probabilités des événements suivants : $A =$« La face obtenue est paire » ; $B =$ « la face obtenue est supérieur ou égale à 4 » et $C =$ « La face obtenue est un carré parfait »
3. On lance ce dé 50 fois. Estimer le nombre d'observation de l'événement C.

Exercice 4 On considère la loi de probabilité suivante ($0 < a < 1$). Calculer la valeur de a.

x_i	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	$3a$	$2a$	$0,01$	a	$3a$

Exercice 5 Complétez

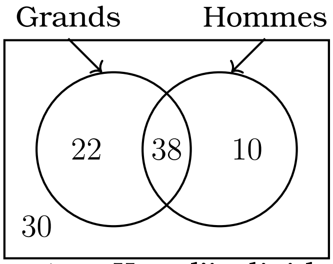
1. $P(\Omega) =$ .... L'événement impossible est noté .... Sa probabilité est ....
2. Deux événements A et B sont disjoints lorsque ....
3. Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = \dots\dots + \dots\dots$
4. $\overline{B}$ est l'événement .... $P(\overline{B}) = 1-$................................
5. Si $P(A) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.2$ et $P(B) = 0.5$ alors $P(\overline{B}) = 1 - P(\dots\dots) =$......................
   et $P(A \cup B) = P(\dots\dots) + P(\dots\dots) - P(\dots\dots) =$ ....
6. Les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont ...., et $P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) =$..............
7. Si $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,3$ alors :
   $P(\overline{A}) = 1 - P(\dots\dots) =$ ....
   $P(\overline{A} \cap B) = P(\dots\dots\dots) - P(\dots\dots\dots) =$ ....
   $P(\overline{A} \cup B) = P(\dots\dots) + P(\dots\dots) - P(\dots\dots) =$ ....

Exercice 6 — **Entrainement formules.**

1. $P(E) = 0,34$, $P(E \cup F) = 0,65$ et $P(E \cap F) = 0,23$. Calculer $P(F)$.
2. $P(E) = 0.3$, $P(F) = 0.6$ et $P(E \cup F) = 0.8$. Calculer $P(E \cap F)$
3. $P(E) = 0.3$, $P(\overline{F}) = 0.65$ et $P(E \cap F) = 0.2$. Calculer $P(E \cup F)$.
4. $P(E) = 0,5$, $P(F) = 0,24$ et $P(E \cap F) = 0,1$. Calculer $P(\overline{E \cup F})$.

2.5.2 Exercices : Probabilités conditionnelles

■ **Exemple 2.1** Une population de 100 individus est décrite par le diagramme de Venn ci-dessous.



	H	$\overline{H}$	**Total**
G	38		
$\overline{G}$			
Total			100

1. Soit les événements : $H =$« l'individu choisi est un homme » et $G =$ « l'individu choisi est grand ». Complétez le tableau croisé des effectifs.
2. On choisit au hasard un individu et on note son sexe et sa taille.
   a) L'univers des issues est $\Omega = \{GH, \quad , \quad , \quad \}$
   b) La probabilité que l'individu choisi soit grand est $P(\quad) =$
   c) La probabilité que l'individu choisi soit un homme est $P(\quad) =$
3. Complétez le tableau de la loi de probabilité P.

ω	GH	$G\overline{H}$	$\overline{G}H$	$\overline{G}\,\overline{H}$	Total
$P(\omega)$					1

4. a) Si l'on sait à l'avance que l'individu choisi est un homme alors la probabilité que l'individu soit grand se note $P_H(G) =$
   b) Si l'on sait à l'avance que l'individu choisi est un homme alors la probabilité que l'individu soit petit se note $P_H(\quad) =$
   c) $P_H(G) \ldots P(G)$, le sexe d'un individu **a une influence statistique** sur la taille.
5. Complétez le tableau de la loi de probabilité P_H **conditionnelle à l'événement** H.

ω	GH	$G\overline{H}$	$\overline{G}H$	$\overline{G}\,\overline{H}$	Total
$P_H(\omega)$					1

6. a) Si l'on sait à l'avance que l'individu choisi est grand alors la probabilité que l'individu soit un homme se note $P_G(H) =$
   b) Si l'on sait à l'avance que l'individu choisi est grand alors la probabilité que l'individu soit une femme se note $P_G(\quad) =$
   c) $P_G(H) \ldots P(H)$, la taille d'un individu ....sur le sexe
7. Complétez le tableau de la loi de probabilité P_G **conditionnelle à l'événement** G.

ω	GH	$G\overline{H}$	$\overline{G}H$	$\overline{G}\,\overline{H}$	Total
$P_G(\omega)$					1

■ **Exemple 2.2** On lance deux pièces de monnaie numérotées et équilibrées et on note les faces obtenues.

1. L'univers est $\Omega = \{pp, \dots, \dots, \dots\}$, où la 1[re] lettre désigne la première pièce.
2. Compléter le tableau de la loi de probabilité de l'expérience aléatoire.

ω	pp				Total
$P(\omega)$					1

3. $A =$« une (au moins) des pièces est pile ». $P(A) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
4. $B =$« la première pièce est pile ». $P(B) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
5. $C =$« les faces sont différentes ». $P(C) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
6. La probabilité sachant A de l'événement pp est $P_A(pp) = \dfrac{P(\dots \cap \dots)}{P(\dots)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
   Sachant que $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, il y a 1 chance sur ...que l'autre pièce est aussi pile.
7. La probabilité sachant A de l'événement C est $P_A(C) = \dfrac{P(\dots \cap \dots)}{P(\dots)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
   Sachant que $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, il y a ...chance sur ...que l'autre pièce est aussi pile.
   $P_A(C) \dots P(C)$, l'événement C (est/n'est pas) indépendant de A.
8. Compléter le tableau de P_A, la loi conditionnelle sachant A.
   Sachant que , il y a 1 chance sur ...que l'autre pièce est aussi pile.

ω	pp				Total
$P_A(\omega)$					1

10. La probabilité sachant B de l'événement C est $P_B(C) = \dfrac{P(\dots \cap \dots)}{P(\dots)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
    Sachant que $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, il y a ...chance sur ...que l'autre pièce est aussi pile.
    $P_B(C) \dots P(C)$, l'événement C (est/n'est pas) indépendant de A.
11. Compléter le tableau de P_B, la loi conditionnelle sachant B.

ω	pp				Total
$P_B(\omega)$					1

Exercice 7 Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des essais sur 800 patients afin d'analyser l'efficacité de leurs tests de dépistage contre le sida. Le tableau ci-dessous présente les résultats de l'étude. On choisit au hasard un résultat et on considère les évènements $M =$ « Le patient est séropositif. » et $N =$ « Le test est négatif ».

	(M) Séropositif	$(\overline{M})$ Séronégatif	Total
(N) Test négatif	3	441	444
$(\overline{N})$ Test positif	354	2	356
Total	357	443	800

1. $P(M) = \ldots\ldots$ Il y a environ ...% de chance qu'un patient choisi au hasard soit séropositif.
2. $P(\quad) = 1 - P(M) = \ldots\ldots$ Il y a environ 55% de chance q'un patient choisi au hasard .....
3. $P(\quad) = \dfrac{444}{800} \approx$ Il y a ...% de chance qu'un test choisi au hasard soit ....
4. $P(M \cap N) = \dfrac{}{800} \approx$ Il y a ....
5. $P(\ldots \cup \ldots) = P(M) + P(N) - P(\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   Il y a ....
6. $P_M(N) = \dfrac{P(\ldots \cap N)}{P(\ldots)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   Sachant que le patient est séropositif, il y a ...% de chance d'avoir un test négatif.
7. $P_{\overline{N}}(M) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   Sachant que le test est positif, il y a ...% de chance que la personne soit séropositive.

Exercice 8

Dans une rue, 10 maisons ont un chat (C), 8 ont un chien (D), 3 ont les 2, et 7 n'ont pas d'animaux.

1. Complétez le tableau à double entrée des effectis.
2. On choisit au hasard une maison.
   a) Quelle est la probabilité que la maison ait un chien ?
   b) Sachant que la maison a un chat, quelle est la probabilité que la maison ait un chien ?
   c) Calculer $P_D(C)$, $P_C(\overline{D})$ et $P_{\overline{C}}(D)$. Interpréter chaque valeur par une phrase.

	C	$\overline{C}$	**Total**
D			
$\overline{D}$			
Total			

Exercice 9

On étudie la possession de smartphones (S) et tablettes (T) auprès d'un groupe d'étudiants.

1. Complétez le tableau croisé des effectifs.
2. On choisit un élève au hasard. Calculer les probabilités de posséder ...
   a) un smartphone sachant qu'on a une tablette.
   b) un smartphone sachant qu'on n'a pas de tablette.
   c) une tablette sachant qu'on a un smartphone.
   d) une tablette sachant qu'on n'a pas de smartphone.

	S	$\overline{S}$	**Total**
T	23	8	
$\overline{T}$	64	3	
Total			

Exercice 10 Une enquête sur l'ensemble des clients d'un garage durant l'année passée, montre que 55% des acheteurs potentiels d'un modèle automobile souhaitent qu'il soit équipé d'un GPS intégré (G), 65% souhaitent la climatisation (C) et 30% souhaitent les deux.

	C	$\overline{C}$	**Total**
G			
$\overline{G}$			
Total			1

On choisit au hasard une fiche de l'un des clients de ce garage.

1. Entourez les probabilités données dans l'énoncé :

   (A) $P(C)$ (B) $P(\overline{C})$ (C) $P(G)$ (D) $P(\overline{G})$ (E) $P(C \cap G)$ (F) $P(C \cap \overline{G})$ (G) $P(\overline{C} \cap G)$

2. Compléter le tableau des fréquences.
3. Traduire à l'aide de C, $\overline{C}$, G, $\overline{G}$, $\cap$ et $\cup$ les événements suivants et détérminez leurs probabilités.
   a) « Il ne souhaite pas de GPS intégré »
   b) « Il souhaite l'un des deux équipements »
4. Même question avec les événements :
   a) « Il souhaite un GPS sachant qu'il souhaite la climatisation »
   b) « Il ne souhaite pas un GPS sachant qu'il souhaite la climatisation »

Exercice 11 Lors d'une sortie scolaire les élèves devaient choisir entre faire du kayak (K) ou de l'accrobranche. 52% des élèves sont des garçons (G). 64% des élèves ont fait de l'accrobranche. 16% des élèves sont des filles ayant fait de l'accrobranche.

On choisit au hasard un élève de ce groupe.

(A) $P(K)$ (B) $P(\overline{K})$ (C) $P(G)$ (D) $P(\overline{G})$ (E) $P(K \cap G)$
(F) $P(K \cap \overline{G})$ (G) $P(\overline{K} \cap G)$ (H) $P(\overline{K} \cap \overline{G})$

	K	$\overline{K}$	**Total**
G			
$\overline{G}$			
Total			1

2. Compléter le tableau des fréquences.
3. Traduire à l'aide de K, $\overline{K}$, G, $\overline{G}$, $\cap$ et $\cup$ les événements suivants et détérminez leurs probabilités.
   a) « l'élève choisi a fait du kayak »
   b) « l'élève choisi est un garçon qui a fait du kayak »
   c) « l'élève choisi a fait du kayak sachant que c'est un garçon »
   d) « l'élève choisi est un garçon sachant qu'il a fait du kayak »

2.5.3 Exercices : formule des probabilités composées et arbres de probabilités

Exercice 12 Complétez

1. $B \subset A$, $P_B(A) = \dfrac{P(\ldots \cap \ldots)}{P(\ldots)} = \dfrac{P(\ldots)}{P(\ldots)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $P(A) = 0{,}22$, $P(B) = 0{,}42$ et $P(A \cap B) = 0{,}092\,4$.
   $P_B(A) = \dfrac{P(\ldots \cap \ldots)}{P(\ldots)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   $P_B(A) = P(B)$, donc l'événement .... est indépendant de l'événement ....
3. $P(C) = 0{,}59$, $P(D) = 0{,}25$ et $P(C \cap D) = 0{,}106\,2$.
   $P_C(D) = \dfrac{P(\ldots \cap \ldots)}{P(\ldots)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   $P_C(D) \ldots P(D)$, donc l'événement .... est défaborable à l'événement ....
4. $P(A) = 0{,}72$, $P(B) = 0{,}3$ et $P_B(A) = 0{,}75$
   $P(A \cap B) = P(\ldots)P_{\ldots}(\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   $P_A(B) = \dfrac{P(\ldots \cap \ldots)}{P(\ldots)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $P(C) = 0{,}5$, $P(D) = 0{,}12$ et $P_C(D) = 0{,}09$
   $P(C \cap D) = P(\ldots)P_{\ldots}(\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   $P_D(C) = \dfrac{P(\ldots \cap \ldots)}{P(\ldots)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $P_A(\ldots) + P_A(\ldots) = 1$

Exercice 13 — Entrainement formules.

1. $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}54$ et $P(A \cap B) = 0{,}405$. Calculer $P_A(B)$.
2. $P(A) = 0{,}77$, $P(B) = 0{,}19$ et $P_A(B) = 0{,}13$. Calculer $P_B(A)$.
3. $P(A) = 0{,}35$ et $P_A(B) = 0{,}42$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}82$. Calculer $P(A \cap B)$ et $P_A(\overline{B})$.
4. $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}17$ et $P_B(A) = 0{,}24$. Calculer $P_A(B)$.
5. $P(A \cap B) = 0{,}18$ et $P_A(B) = 0{,}6$. Calculer $P(A)$.

Exercice 14 $P(L) = 0{,}17$, $P(M) = 0{,}12$ et $P(L \cap M) = 0{,}020\,4$. Montrer que M est indépendant de L.

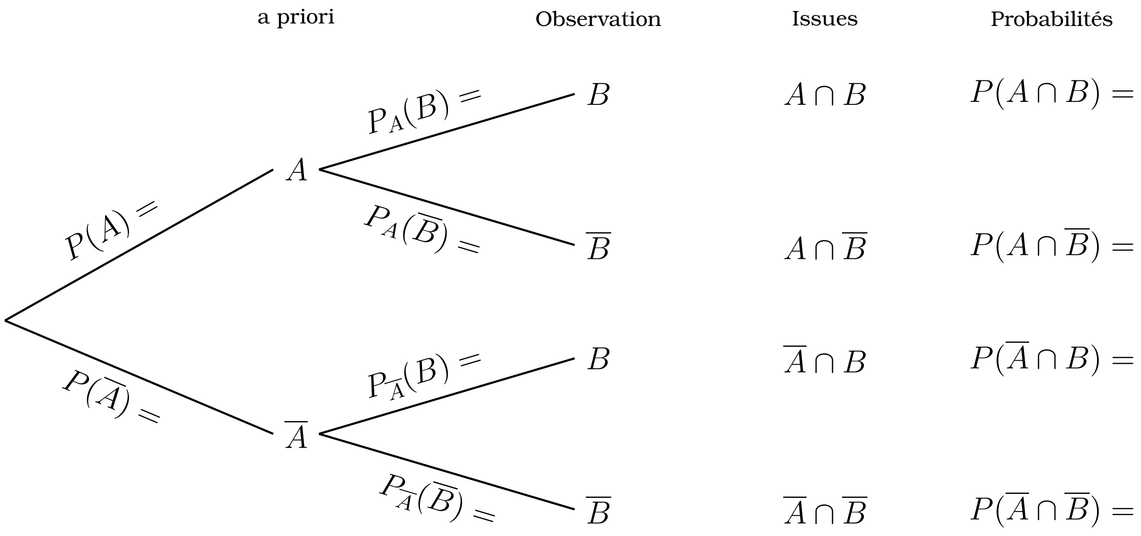
Exercice 15 $P(X) = 0{,}3$, $P(Y) = 0{,}42$ et $P(X \cup Y) = 0{,}594$. Montrer que Y est indépendant de X.

Exercice 16 Une batterie de missiles a une probabilité de $0{,}75$ d'atteindre une cible. La batterie a une probabilité de $0{,}65$ d'atteindre deux cibles successives. Quelle est la probabilité d'atteindre la deuxième cible sachant que la première cible est atteinte ?

Exercice 17 Quark a 80% de chance de réussir son premier examen de Maths, et 45% de chance de réussir les deux premiers examens de maths. Quelle est la probabilité de réussir le second examen sachant qu'il a réussi le premier examen ?

■ **Exemple 2.3** On dispose d'un lot d'urnes chacune contenant 3 boules indiscernables au toucher. Certaines urnes contiennent 2 boules Blanches et 1 Noire, d'autres contiennent 1 Blanche et 2 Noires. On choisit au hasard une urne, et on tire une boule de cette urne.

Soit les événements $A =$« l'urne contient 2 Blanches et 1 Noire », et $B =$« la boule tirée est Blanche ». On suppose $P(A) = \frac{1}{2}$.



Formule des probabilités totales

$P(B) = P(\ldots \cap \ldots) + P(\ldots \cap \ldots)$

$=$

$=$

$=$

$P(\overline{B}) =$

$=$

$=$

$=$

Calcul des probabilités a posteriori

$$P_B(A) = \frac{P(\ldots \cap \ldots)}{P(\ldots\ldots)}$$

$$= \frac{P(\ldots)P_A(\ldots\ldots)}{P(\ldots\ldots)}$$

$=$

$=$

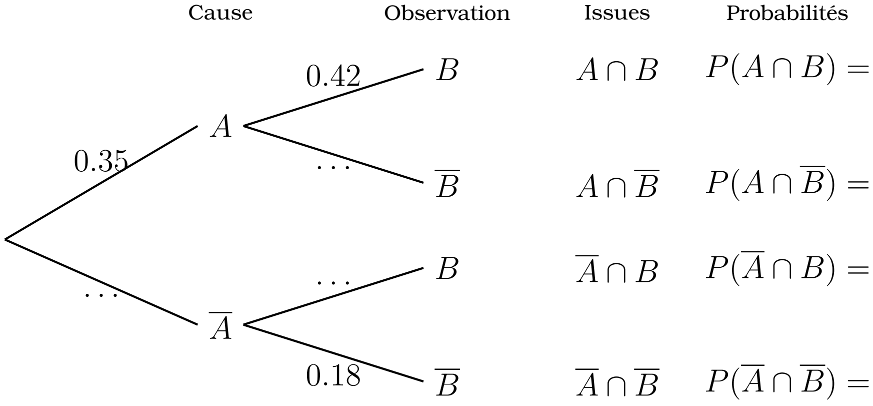
probabilité a posteriori = vraisemblance $\times$ probabilité a priori

$P_B(\overline{A}) =$

$=$

$=$

Exercice 18 — interpéter et exploiter un arbre de probabilité. Soit un univers Ω et un loi de probabilité P, et les événements A et B modélisé par l'arbre ci-dessous :



1. **Interpétation des données :** $P(\ldots) = 0.35$; $P_{\ldots}(\ldots) = 0.42$ et $P_{\ldots}(\ldots) = 0.18$.

2. **Compléter l'arbre de probablité** :

   $P(\overline{A}) = 1 - P(\ldots)$ $\quad$ $P_A(\overline{B}) = 1 - P_{\ldots}(\ldots)$ $\quad$ $P_{\overline{A}}(B) = 1 - P_{\ldots}(\ldots)$

   $=$ $\quad$ $=$ $\quad$ $=$

   $=$ $\quad$ $=$ $\quad$ $=$

3. **Calculer les probablités des issues** à l'aide de la formule des probabilités composés

   $P(A \cap B) = P(\ldots)P_{\ldots}(\ldots) =$ $\quad$ $P(A \cap \overline{B}) = P(\ldots)P_{\ldots}(\ldots) =$

   $=$ $\quad$ $=$

   $P(\overline{A} \cap B) =$ $\quad$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\ldots)P_{\ldots}(\ldots) =$

   $=$ $\quad$ $=$

4. **Calculer les probablités totales :** arrondir à 10^{-2}

   $P(B) = P(\ldots \cap \ldots) + P(\ldots \cap \ldots)$ $\quad$ $P(\overline{B}) =$

   $=$ $\quad$ $=$

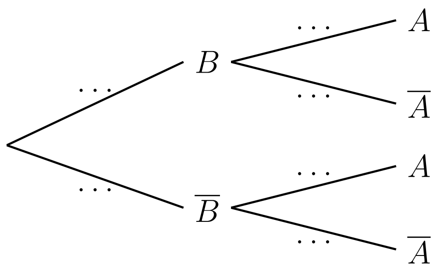
   $=$ $\quad$ $=$

5. **Inverser l'arbre :** calculer la probabilité sachant l'observation, de la cause

   $P_B(A) =$ $\quad$ $P_{\overline{B}}(\overline{A}) =$

   $=$ $\quad$ $=$

6. **Représenter l'arbre inverse**

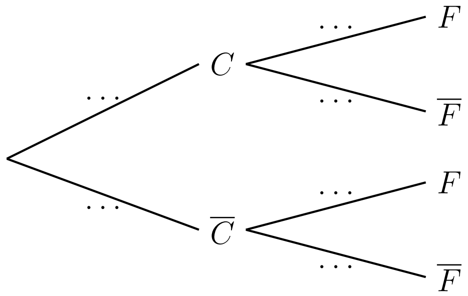


♥ Les chemins correspondent à des événements incompatibles.
•La probabilité d'un événement auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.
•La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud vaut 1.

Exercice 19 0.1% de la population est atteinte du cancer des poumons (C). 90% des personnes atteintes de cancer sont des fumeurs (F). 21% de ceux qui n'ont pas de cancer sont des fumeurs.

1. Identifier les probabilités données dans l'énoncé et ajouter les dans l'arbre de probabilité

   $P(\dots) =$ $\qquad$ $P_{\dots}(\dots) =$ $\qquad$ $P_{\dots}(\dots) =$

2. Complétez l'arbre de probabilité en justifiant vos calculs :

   $P(\dots) = 1 - P(\dots)$ $\qquad$ $P_{\dots}(\dots) = 1 - P_{\dots}(\dots)$ $\qquad$ $P_{\dots}(\dots) = 1 - P_{\dots}(\dots)$

   $=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$

   $=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$

3. Calculer les probabilités des événements :

   $P(C \cap F) =$

   $P(C \cap \overline{F}) =$

   $P(\overline{C} \cap F) =$

   $P(\overline{C} \cap \overline{F}) =$

4. Calculer la probabilité d'être un fumeur.

   $P(F) = P(\dots \cap \dots) + P(\dots \cap \dots) =$

5. Calculer la probabilité d'avoir le cancer sachant qu'on est un fumeur.

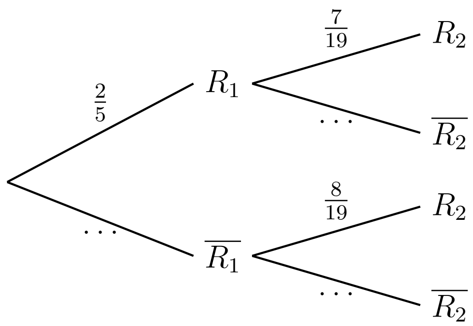
   $P_{\dots}(\dots) =$

6. Calculer la probabilité d'avoir le cancer sachant qu'on n'est pas un fumeur.

   $P_{\dots}(\dots) =$

7. Par combien est multiplié le risque de développer un cancer des poumons si on est un fumeur ?

Exercice 20 Une urne opaque contient des boules rouges et des boules vertes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur sans la remettre. On tire de nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur.



Soit les événement R_1 « la boule tirée au premier est rouge » et R_2 « la boule tirée au second tour est rouge ». On modélise l'expérience aléatoire par l'arbre de probabilité incomplet ci-dessous.

1. Identifier les probabilités données dans l'arbre :

   $P(\ldots) =$ $\qquad$ $P_{\ldots}(\ldots) =$ $\qquad$ $P_{\ldots}(\ldots) =$

2. Complétez l'arbre de probabilité en justifiant vos calculs :

   $P(\ldots) = 1 - P(\ldots)$ $\qquad$ $P_{\ldots}(\overline{B}) = 1 - P_{\ldots}(\ldots)$ $\qquad$ $P_{\ldots}(\overline{B}) = 1 - P_{\ldots}(\ldots)$

   $=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$

   $=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$

3. Calculer la probabilité de tirer deux boules vertes.

   $P(\ldots \cap \ldots) =$

4. Calculer la probabilité que la boule tirée au second tour soit rouge.

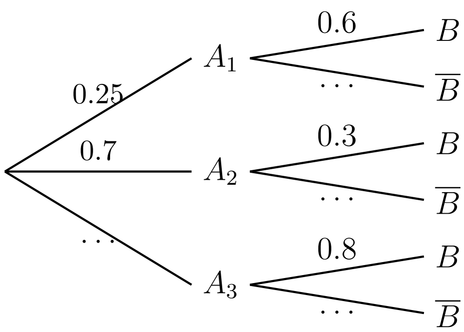
   $P(\ldots) = P(\ldots \cap \ldots) + P(\ldots \cap \ldots) =$

   $=$

5. Calculer la probabilité de l'événement $A =$« tirer deux boules de couleurs différentes ».

   $P(A) = P(\ldots \cap \ldots) + P(\ldots \cap \ldots) =$

Exercice 21 Une expérience aléatoire est modélisée par l'arbre ci-dessous. Calculer $P(B)$.



$P(A_3) =$

$P(B) = P(\ldots \cap \ldots) + P(\ldots \cap \ldots) + P(\ldots \cap \ldots)$

$= P(\ldots)P_{\ldots}(\ldots) +$

$=$

$=$

Exercice 22 On dispose des informations suivantes sur une société :

- Elle comporte 40% de cadres.
- 20% des cadres sont des femmes.
- Parmi les employés qui ne sont pas cadres, 60% sont des femmes.

On prend au hasard la fiche d'un des employés et on considère les événements suivants :

C: « L'employé est un cadre »; F: « L'employé est une femme ».

1) Traduire les données en termes de probabilités, en utilisant les événements C et F.
2) Représenter la situation par un arbre de probabilité.
3) Calculer la probabilité pour qu'un employé interrogé soit une femme cadre.

Exercice 23 — le taxi et le témoin.

Un taxi est accusé de délit de fuite. Au tribunal le témoin confirme que le taxi était de couleur bleue. En ville, 85% des taxis sont verts, et 15% sont bleus. Le procureur teste la fiabilité du témoin dans des conditions de luminosité similaires à la nuit de l'incident. Il constate que le témoin identifie la bonne couleur dans 80% des cas.

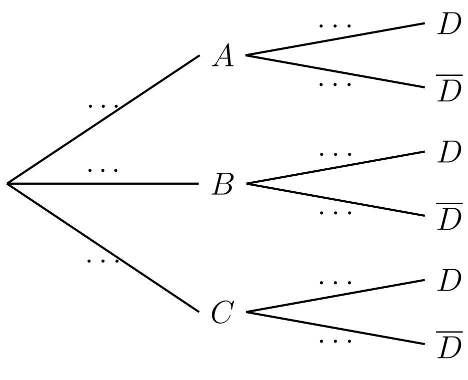
On considère les événements suivants :

A: « le taxi est de couleur bleu »; B: « le témoin affirme que la couleur du taxi est bleue ».

1. D'après l'énoncé, que vaut $P_A(B)$? $P_{\overline{A}}(B)$?
2. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
3. Calculer la probabilité que le témoin affirme avoir vu un taxi bleu.
4. Quelle est la probabilité que le taxi soit vert sachant que le témoin affirme il est bleu ?

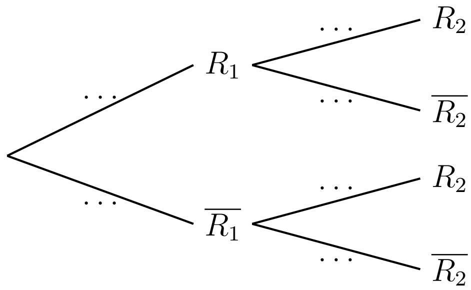
Exercice 24 Un revendeur achète des pièces à trois fournisseurs A, B et C. 60% de son stock provient de A, 15% de B et le reste de C. 2% des pièces venant de A sont défectueuses, ainsi que 1% de celles venant de B et $0,5\%$ de celles qui viennent de C.

Chaque pièce est référencée. On tire au hasard l'une de ces références.



1. Complétez l'arbre de probabilité.
2. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse ?
3. Sachant que la pièce choisie est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne du fournisseur A.

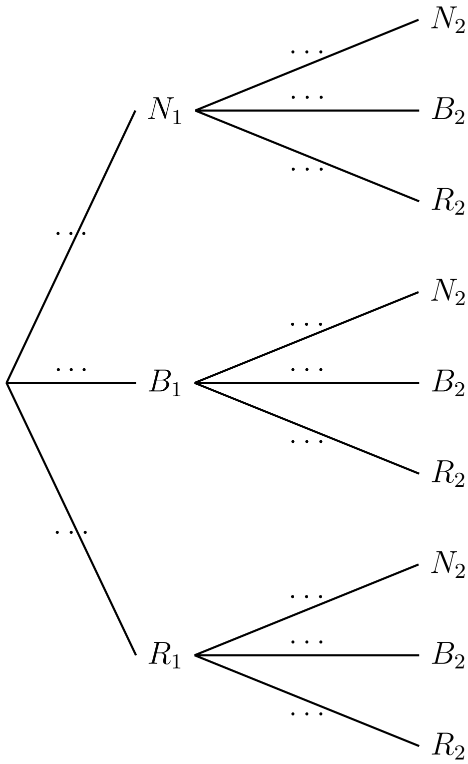
Exercice 25 — tirage sans remise. Une urne opaque contient 11 boules rouges et 12 boules vertes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur sans la remettre, puis on tire de nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur.



Soit les événements R_1 « la boule tirée au premier est rouge » et R_2 « la boule tirée au second tour est rouge ».

1. Complétez l'arbre de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge soit tirée au deuxième tirage ?

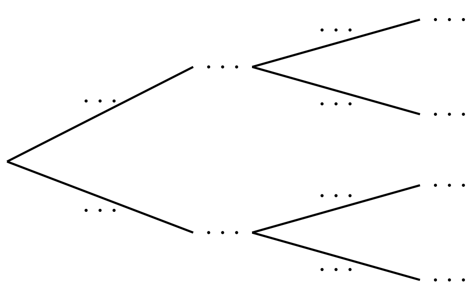
Exercice 26 — tirage sans remise. Une urne opaque contient 20 boules indiscernables au toucher : 8 Noires, 7 Blanches et 5 Rouges. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur sans la remettre, puis on tire de nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur.



Soit les événements N_1, B_1 et R_1 les événements correspondant à tirer une noir , une blanche et une boule rouge au premier tirage. De même les événements N_2, B_2 et R_2 correspondent aux résultats du second tirage.

1. Complétez l'arbre de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?
3. En déduire la probabilité de tirer une boule Blanche puis une boule Rouge ?
4. Quelle est la probabilité de tirer une boule Blanche et une boule Rouge ?
5. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge soit tirée au deuxième tirage ?

Exercice 27 On dispose de deux urnes, A et B. L'urne A contient une boule rouge et trois vertes, et l'urne B contient 3 boules rouges et une verte. On lance un dé cubique équilibré pour choisir une urne : s'il tombe sur le 6, on tire une boule de l'urne A, sinon de l'urne B.

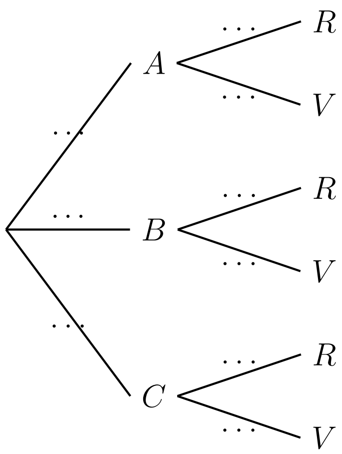


Soit les événements D « le dé tombe sur 6 », R « la boule tirée au premier est rouge » et V « la boule tirée au second tour est verte ».

1. Complétez l'arbre de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité qu'une boule verte soit tirée.

Exercice 28 On dispose de 3 urnes, A, B et C.

- L'urne A contient 11 boules rouges et 6 vertes
- L'urne B contient 10 boules rouges et 3 vertes
- L'urne C contient 3 boules rouges et 6 vertes



On lance un dé cubique équilibré pour choisir une urne : s'il tombe sur un nombre inférieur ou égal à 4, on tire une boule de l'urne A, s'il tombe sur 6 de l'urne B, et sur les autres cas il tire de l'urne C.

1. Complétez l'arbre de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité qu'une boule tirée soit rouge ?
3. On sait qu'on a tiré une boulle rouge, quelle est la probabilité que la boule provient de l'urne C ?

2.5.4 Exercices : Indépendance de deux événements. Application

Exercice 29 Cochez si les événements A et B sont indépendants ou non.

	Indépendants	Non indépendants
1/ $P(A) = \frac{7}{8}$, $P(B) = \frac{2}{7}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.	☐	☐
2/ $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,9$.	☐	☐
3/ $P(A) = 0,48$, $P(B) = 0,25$. A et B sont incompatibles.	☐	☐
4/ $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,32$.	☐	☐

Exercice 30 Calculez les probabilités demandées sachant que les événements A et B sont indépendants.

1. $P(A) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,45$. Calculer $P(B)$.
2. $P(A) = P(B)$ et $P(A \cap B) = 0,25$. Calculer $P(A)$
3. $P(\overline{A}) = 0,6$ et $P(A \cap B) = 0,3$. Calculer $P(A)$ puis $P(B)$.
4. $P(A) = 0.5$ et $P(B) = 0.7$, calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$

Exercice 31 $P(X) = 0.5$, $P(Y) = 0.3$ et $P(X \cup Y) = 0.65$. Montrer que X et Y sont indépendants.

Exercice 32 $P(X) = 0.3$, $P(Y) = 0.42$ et $P(X \cup Y) = 0.594$. Montrer que X et Y sont indépendants.

Exercice 33 On lance un dé cubique équilibré. Soit les événements $A =$ « le résultat est $\geqslant 4$ » et $B =$ « le résultat est un nombre pair ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 34 On rappelle que, dans un jeu de 32 cartes, on trouve quatre couleurs (Carreau ♢ et Coeur ♡ sont de couleur rouge. Trèfle ♣ et Pique ♠) et, dans chaque couleur, on a une série de 8 cartes (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As).

♡	♢	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Soit les événements $A =$ « la carte tirée est un roi », $B =$ « la carte tirée est un as » et $C =$ « la carte tirée est rouge »

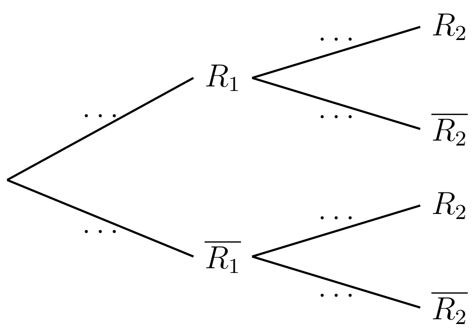
1. Justifiez que les événements A et C sont indépendants.
2. Justifiez que les événements A et $\overline{B}$ ne sont pas indépendants.
3. Les événements $A \cup C$ et B sont-ils indépendants ?

Exercice 35 Les élèves d'un collège doivent choisir une option parmi « latin » et « théâtre » et une langue vivantes parmi « allemand » et « italien ». Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves.

	Italien	Allemand	Total
Latin	30	120	150
Théâtre	90	80	170
Total	120	200	320

1. Les événements « faire du théâtre et de l'italien » et « faire du théâtre » sont-ils indépendants ?
2. Les événements « faire du latin » et « faire de l'allemand » sont-ils indépendants ?
3. Les événements « faire du latin » et « faire du théâtre » sont-ils indépendants ?

Exercice 36 — tirage avec remise. Une urne opaque contient 11 boules rouges et 12 boules vertes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur avant de la remettre, puis on tire de nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur.



Soit les événements R_1 « la boule tirée au premier est rouge » et R_2 « la boule tirée au second tour est rouge ».

1. Complétez l'arbre de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge soit tirée au deuxième tirage ?
3. Justifiez que les événements R_1 et R_2 sont indépendants.

Exercice 37 On lance un dé cubique équilibré 2 fois consécutives. Soit l'événement D_1 =« obtenir un 6 au premier lancer » et D_2 = « obtenir un 6 au second lancer ».

1. Complétez l'arbre de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux 6 ?
3. Montrer que les événements $\overline{D_1}$ et D_2 sont indépendants.

Exercice 38 — Problème du Grand-Duc de Toscane.

On lance 3 dés cubiques équilibrés (D_1, D_2 et D_3), et on note la face obtenue pour chaque dans l'ordre. On suppose que les résultats des lancers de chaque dé sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité $P(D_2 = 5)$ que le second dé tombe sur 5 ?
2. Quelle est la probabilité $P(D_2 = 5 \text{ et } D_3 = 2)$ que le second dé tombe sur 5 et le troisième sur 2 ?
3. Quelle est la probabilité $P(D_1 = 2; D_2 = 1; D_3 = 3)$ que le premier dé tombe sur 2, le second sur 1 et le dernier sur 3 ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir simultanément un 1, un 2 et un 3 ?
5. Identifier toutes les différentes façons d'obtenir une somme des 3 dés égale à 9.
6. Démontrer que la probablité d'obtenir une somme égale à 9 est $\dfrac{25}{216}$.
7. Démontrer que la probabilité d'obtenir une somme égale à 10 est de $\dfrac{27}{216}$.

Exercice 39 — paradoxe de Simpson. Un orchestre pratique une audition. Parmi les candidants jouant un instrument à vent, 26 des 40 hommes et 4 des 6 femmes ont été retenus. Parmi les candidats jouant un instrument à corde : 30 des 80 hommes et 19 des 49 femmes sont retenus.

On tire un candidat au hasard. Soit les événements F = « être une femme », et C = « jouer un instrument à corde », et S = « succés à l'audition ».

1. Calculer les probabilités $P_F(S)$ et $P_{\overline{F}}(S)$.
2. Quel sexe semble être légérement discriminé dans ces auditions ?
3. Calculer les probabilités $P_{F\cap C}(S)$ et $P_{F\cap\overline{C}}(S)$.
4. Calculer les probabilités $P_{\overline{F}\cap C}(S)$ et $P_{\overline{F}\cap\overline{C}}(S)$.
5. Pour les musiciens jouant un instrument à corde, quel sexe semble être légérement discriminé dans ces auditions ? Même question pour les musiciens jouant un instrument à vent.

2.6 Club maths : conditionnements paradoxaux

Problème 1 — Paradoxe de Simpson. Un test clinique vise à étudier l'efficacité d'un nouveau traitement thérapeutique à des malades atteints de cancer. On choisit un participant au hasard parmi les 21100. Soit les événements $A =$ « le patient est vivant », $T =$ « le patient a suivi le traitement » et $V =$ « le patient réside en ville ». Les effectifs sont rassemblés dans le tableau ci-dessous.

1. Déterminez $P_T(A)$ et $P_{\overline{T}}(A)$. Quel semble l'effet du traitement sur les chances de survie ?
2. Déterminez $P_{T\cap V}(A)$, $P_{T\cap \overline{V}}(A)$.
3. Déterminez $P_{\overline{T}\cap V}(A)$, $P_{\overline{T}\cap \overline{V}}(A)$.
4. Quel est l'effet du traitement lorsqu'on prend en compte le lieu de résidence ?
5. Les événements T et V sont-ils indépendants ? Justifier.

	V, en ville		$\overline{V}$	
	T	$\overline{T}$	T	$\overline{T}$
A	1000	50	95	5000
$\overline{A}$	9000	950	5	5000

Problème 2 — le rouge et le noir.

Trois boites contiennent chacune une carte. Une des cartes a deux faces rouges, une a deux faces noires, et la troisième une rouge et une noire. On choisit au hasard une boite, et l'on voit que la face visible de la carte qu'elle contient est rouge. Quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Problème 3 — Paradoxe des prisonniers.

> Trois prisonniers sont dans une cellule. Ils savent que deux vont être condamnés à mort et un gracié, mais ils ne savent pas qui. L'un d'entre eux va voir le gardien et lui demande : « Je sais bien que tu ne peux rien me dire, mais tu peux au moins me montrer un de mes compagnons qui sera exécuté ». Le gardien réfléchit, se dit que de toute manière au moins l'un des deux autres prisonniers sera condamné, et s'exécute. Le prisonnier lui répond alors : « Merci, avant, j'avais une chance sur trois d'être gracié, et maintenant, j'ai une chance sur deux.

A-t-il raison de croire que sa probabilité d'être exécuté a varié ?

Désignons par r le prisonnier qui demande (le raisonneur), d le prisonnier désigné et t le troisième. Notons G le prisonnier qui est gracié et I la réponse du guardien à la demande du raisonneur.

1. Décrire les événements suivants par une courte phrase :

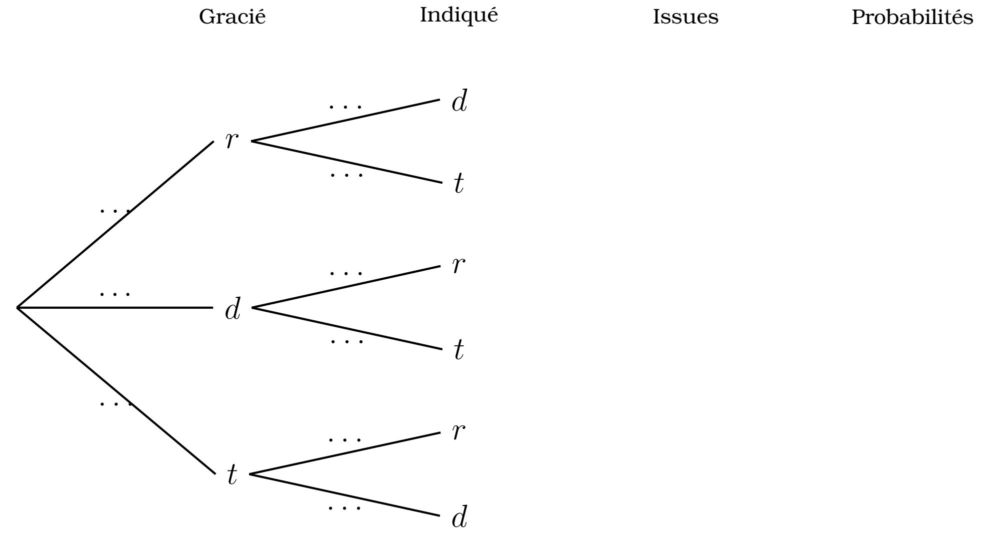
   $G = r$ est l'événement ....

   $I = t$ est l'événement ....

   $\{G = d\} \cap \{I = t\}$ est l'événement ....

   $\{G = r\} \cap \{I = d\}$ est l'événement ....

2. On modélise la situation par une expérience aléatoire. On suppose que le gracié est choisit au hasard, et que le guardien choisit au hasard un prisonnier qui sera exécuté à l'exception du raisonneur lui même. Complétez l'arbre de probabilité



3. Détérminez les probabilités suivantes.

   a) $P(G = r) =$ .... $P(G = d) =$ .... $P(G = r) =$ ....

   b) $P_{G \neq d}(G = r) =$ ....

   c) $P_{G=r}(I = d) =$ .... $P_{G=r}(I = d) =$ ....

   d) $P_{G=d}(I = r) =$ .... $P_{G=d}(I = r) =$ ....

   e) $P(\{G = d\} \cap \{I = t\}) =$ ....

   f) $P(\{G = t\} \cap \{I = d\}) =$ ....

4. Déterminez $P(I = d)$. En déduire $P_{I=d}(G = r)$ et $P_{I=d}(G = t)$.

5. Quelle confusion dans le calcul de probabilité commet le prisonnier ?

Problème 4 — Problème du Monty Hall.

Deux joueurs participent à un jeu :

- Le joueur A (maitre du jeu) cache un jeton sous une de 3 tasses à l'abri du regard du joueur B.

- Le joueur B pointe une des 3 tasses.
- Le joueur A révèle une tasse parmi les 2 restantes qui est vide. Si les deux tasses sont vides, il en choisit une au hasard.
- Le joueur A propose au joueur B de se tenir à son premier choix, ou bien de le changer.
- Le joueur B valide son choix définitif et note s'il a gagné ou perdu.

Le joueur B a-t-il intérêt à garder ou à modifier son choix de départ ?

Avant de vous précipiter dans une modélisation par expérience aléatoire, jouez une dizaine de parties avec votre binôme. Quelle tendance décelez vous ?

Joueur A	**Joueur B**	**Nbrs de parties**	**nbr de victoires si B change d'avis**	**nbr de victoires si B se tient à son choix**

2.7 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 1.

■

solution de l'exercice 2.

■

solution de l'exercice 3.

■

solution de l'exercice 4.

■

solution de l'exercice 5.

■

solution de l'exercice 6.

■

solution de l'exercice 7.

1. $P(M) = \dfrac{357}{800} = 0.44625$. Il y a $44,625\%$ de chance qu'un patient choisi au hasard soit séropositif.
2. $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.44625 = 0.55375$. Il y a 55.375% de chance qu'un patient choisi au hasard ne soit pas séropositif.
3. $P(N) = \dfrac{444}{800} = 0.555$. Il y a $55,5\%$ de chance qu'un test choisi au hasard soit négatif.
4. $P(M \cap N) = \dfrac{3}{800} = 0.00375$. Il y a $0,375\%$ de chance que le test d'une personne soit séronégatif.
5. $P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N) = 0.44625 + 0.555 - 0.00375 = 0.9975$. Il y a $99,75\%$ de chance que le test soit négatif ou que la personne soit séropositive.
6. On ne considère ici que les 357 patients séropositif. Sur ces personnes, 3 ont un test négatif.
   $P_M(N) = \dfrac{3}{357} \simeq 0,008403$. Sachant que le patient est séropositif, il y a $0,84\%$ de chance d'avoir un test négatif.
7. On ne considère ici que les 444 tests négatif. Sur ces tests, 3 sont ceux de personnes séropositives.
   $P_N(M) = \dfrac{3}{444} \simeq 0,00675$. Sachant que le test est négatif, il y a $0,675\%$ de chance que la personne soit séropositive.

■

solution de l'exercice 8.

1.

	C	$\overline{C}$	**Total**
D	3	5	8
$\overline{D}$	7	7	14
Total	10	12	22

2. $P(C) = 3/22$, $P_C(D) = P(D \cap C)/P(C) = 3/10$, $P_D(C) = 3/8$, $P_C(\overline{D}) = 1 - P_C(D) = 7/10$, et $P_{\overline{C}}(D) = 5/12$.

■

solution de l'exercice 9.

1)

	S	$\overline{S}$	**Total**
T	23	8	31
$\overline{T}$	64	3	67
Total	87	11	98

2) $P_T(S) = 23/87$, $P_{\overline{T}}(S) = 64/67$, $P_S(T) = 23/31$ et $P_{\overline{S}}(T) = 8/11$.

■

solution de l'exercice 10.

1)

2)

	C	$\overline{C}$	**Total**
G	0.30	0.25	0.55
$\overline{G}$	0.35	0.10	0.45
Total	0.65	0.35	1

3) $P(\overline{G}) = 1 - 0.65 = 0.35$, $P(G \cap C) = 0.30$

4) $P_C(G) = P(G \cap C)/P(C) = 0.30/0.65$ et $P_C(\overline{G}) = 1 - P_C(G) = 0.35/0.65$

■

solution de l'exercice 11.

1)

2)

	K	$\overline{K}$	**Total**
G			0.52
$\overline{G}$		0.16	
Total		0.64	1

3) $P(K) = 1 - P(\overline{K}) = 1 - 0.64 = 0.36$; $P(G \cap K) = P(K) + P(G) - P(K \cup G) = 0.04$; $P_G(K) = 0.04/0.52 = 1/13$ et $P_K(G) = 0.04/0.36 = 1/9$;

■

solution de l'exercice 12.

1)

■

solution de l'exercice 13.

1) $P_A(B) = P(A \cap B)/P(A) = 0.405/0.75 = 0.54$

2) $P_B(A) = P(A \cap B)/P(B) = P(A) \times P_A(B)/P(B) = 0.77 \times 0.13/0.19 \approx 0.52$

3) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0.35 \times 0.42 = 0.147$; $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0.42 = 0.58$

4) $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = 0.17 \times 0.24 = 0.0408$; $P_A(B) = P(A \cap B)/P(A) = 0.0408/0.4 = 0.102$.

5) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ donc $P(A) = 0.18/0.6 = 0.3$.

■

solution de l'exercice 14.

$P_L(M) = P(L \cap M)/P(L) = 0.0204/0.17 = 0.12 = P(M)$ donc ...

■

solution de l'exercice 15.

$P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cup Y) = 0.3 + 0.42 - 0.594 = 0.126$. $P_X(Y) = P(X \cap Y)/P(X) = 0.126/0.3 = 0.42 = P(Y)$ donc ... ■

solution de l'exercice 16.

$C1 =$ « la première cible est atteinte ». $C2 =$« la seconde cible est atteinte ».

L'énoncé donne : $P(C1) = P(C2) = 0.75$. $P(C1 \cap C2) = 0.65$.

$P_{C1}(C2) = 0.65/0.75 \approx 0.86$ ■

solution de l'exercice 17.

$E1$ = « réussir le premier examen ». $E2$ =« réussir le second examen ».

$P(E1) = 0.80$, $P(E1 \cap E2) = 0.45$. $P_{E1}(E2) = 0.45/0.8 = 0.5625$. ∎

solution de l'exercice 19.

1)

∎

solution de l'exercice 20.

1) $P(R_1) = 2/5$; $P_{R_1}(R_2) = 7/16$ et $P_{\overline{R_1}}(R_2) = 8/19$

2) $P(\overline{R_1}) = 3/5$; $P_{R_1}(\overline{R_2}) = 9/16$; $P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = 11/19$

3) $P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = 3/5 \times 11/19 = 33/95$.

4) $P(R_2) = P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap \overline{R_1}) = 2/5 \times 7/19 + 3/5 \times 8/19 = 2/5 = 0.4$

5) $P(A) = P(R_1 \cap \overline{R_2}) + P(R_2 \cap \overline{R_1}) = 2/5 \times 12/19 + 3/5 \times 8/19 = 48/95$.

∎

solution de l'exercice 21.

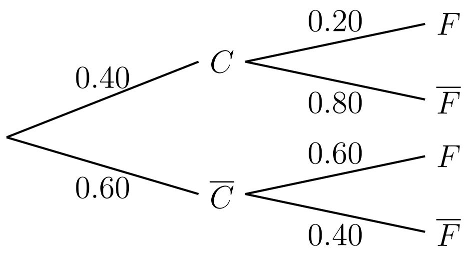
$P(A_3) = 1 - 0.25 - 0.7 = 0.05$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B) \\ &= 0.25 \times 0.6 + 0.7 \times 0.3 + 0.05 \times 0.8 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

∎

solution de l'exercice 22.

1) $P(C) = 0.40$; $P_C(F) = 0.20$; $P_{\overline{C}}(F) = 0.60$.

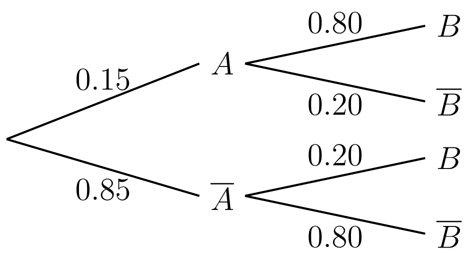
2) 

3) formule des probabilités totales : $P(F) = P(C)P_C(F) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(F) = 0.40 \times 0.20 + 0.60 \times 0.60 = 0.44$

∎

solution de l'exercice 23.

1) $P(A) = 0.15$; $P_A(B) = 0.80$; $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0.80$ donc $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0.80$.

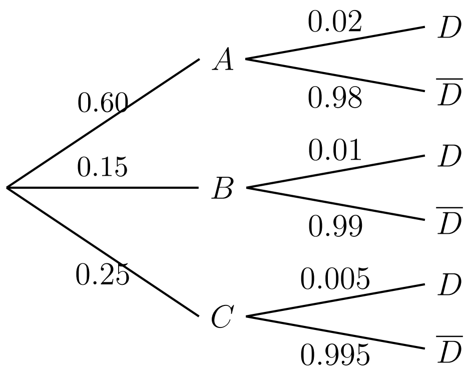
2) 

3) $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) = 0.15 \times 0.80 + 0.85 \times 0.20 = 0.29$

4) $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B)/P(B) = 0.85 \times 0.20/0.29 \approx 0.58$.

∎

solution de l'exercice 24.

1) 

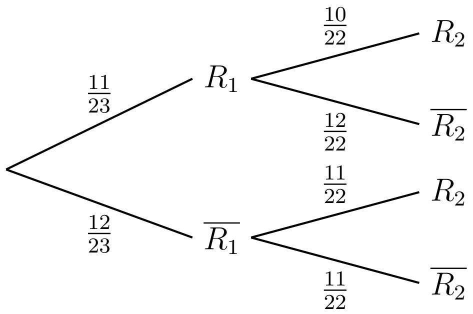
2) formule des probabilités totales : $P(D) =$

$P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D) + P(C)P_C(D) = 0.60 \times 0.02 + 0.15 \times 0.01 + 0.25 \times 0.005 = 0.0145$

3) $P_D(A) = P(A \cap D)/P(D) = P(A) \times P_A(D)/P(D) = 0.60 \times 0.02/0.0145 \approx 0.83$

■

solution de l'exercice 25.

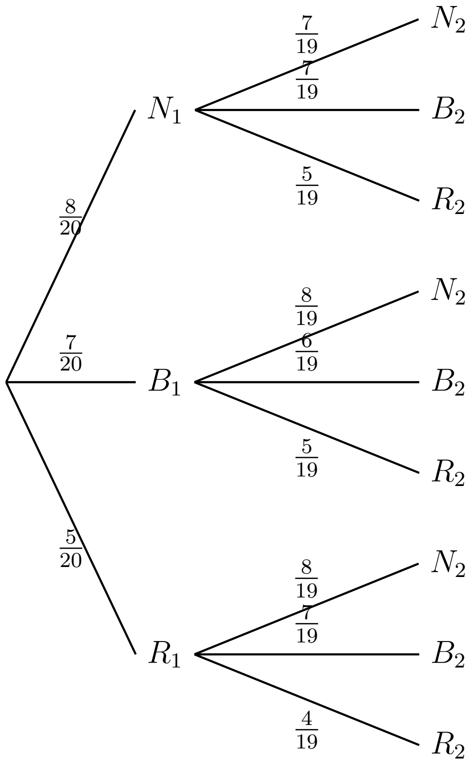


1)

2) formule des probabilités totales $P(R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(\overline{R_1})P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{11}{23} \times \frac{10}{22} + \frac{12}{23} \times \frac{11}{22} = \frac{11}{23}$

■

solution de l'exercice 26.



1)

2) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{7}{20}\frac{6}{19} = \frac{43}{380} = \frac{21}{196}$

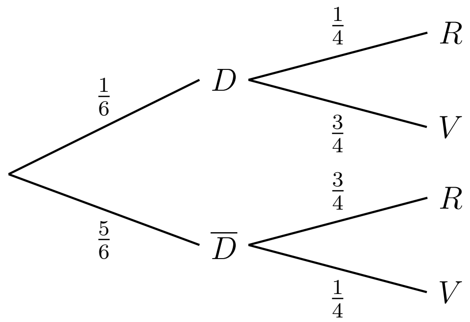
3) $P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)P_{B_1}(R_2) = \frac{7}{20}\frac{5}{19} = \frac{35}{380} = \frac{7}{76}$

4) $P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = \frac{35}{380} + \frac{5}{20}\frac{4}{19} = \frac{55}{380}$

5) formule des probabilités totales $P(R_2) = P(N_1)P_{N_1}(R_2) + P(B_1)P_{B_1}(R_2) + P(R_1)P_{R_1}(R_2) = \frac{95}{380}$

■

solution de l'exercice 27.

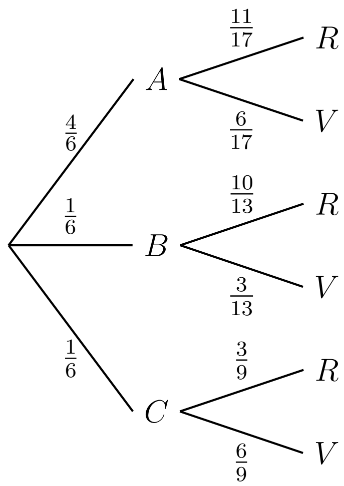


1)

2) probabilités totales $P(V) = P(D)P_V(V) + P(\overline{D})P_{\overline{D}}(V) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{24}$

■

solution de l'exercice 28.



1)

2) probabilités totales $P(R) = P(A)P_A(R) + P(B)P_B(R) + P(C)P_C(R) = \frac{4}{6} \times \frac{11}{17} + \frac{1}{6} \times \frac{10}{13} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{9} \approx 0.61$

3) $P_R(C) = P(R \cap C)/P(C) \approx 0.09$

■

solution de l'exercice 29.

	Indépendants	Non indépendants
1/ .	☒	☐
2/ .	☐	☒
3/ .	☐	☒
4/ .	☒	☐

■

solution de l'exercice 30.

1) $P(B) = 0.45/0.8 = 0.5625$
2) $P(A)P(B) = P(A \cap B)$, donc $P(A)^2 = 0.25$; $P(A) = 0.5$.
3) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$, $P(B) = P(A \cap B)/P(A) = 0.3/0.4 = 0.75$
4) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.5 \times 0.7 = 0.35$. $\overline{A}$ et B sont indépendants : $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B) = (1 - 0.5)0.7 = 0.35$.

■

solution de l'exercice 31.

$P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cup Y) = 0.5 + 0.3 - 0.65 = 0.15$, $P(X)P(Y) = 0.5 \times 0.3 = 0.15$. ■

solution de l'exercice 32.

$P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cup Y) = 0.3 + 0.42 - 0.594 = 0.126$, $P(X)P(Y) = 0.3 \times 0.42 = 0.126$. Donc $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$ et les événements X et Y sont indépendants. ■

solution de l'exercice 33.

$P(A) = 0.5$; $P(B) = 0.5$ et $P(A \cap B) = 2/6 = \frac{1}{3}$. A et B ne sont pas indépendants. ■

solution de l'exercice 34.

1) $P(A) = 1/8$; $P(C) = 1/2$; $P(A \cap C) = 2/32 = 1/16 = P(A)P(C)$.
2) $P(A) = 1/8$; $P(B) = 1/8$. $P(A \cap B) = 0$, A et B ne sont pas indépendants. A et $\overline{B}$ ne sont pas indépendants.
3) $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 18/32 = 9/16$. $P(B) = 1/8$ et $P((A \cup C) \cap B) = 2/32 = 1/16$. Les événements ne sont pas indépendants.

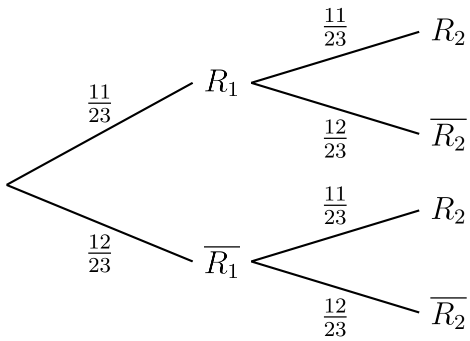
■

solution de l'exercice 35.

1) $P(I \cap T) = 90/320$ et $P(T) = 170/320$. NON
2) $P(L) = 150/320$ et $P_A(L) = 120/200$. NON
3) $P(L) = 150/320$ et $P_T(L) = 90/170$. NON

■

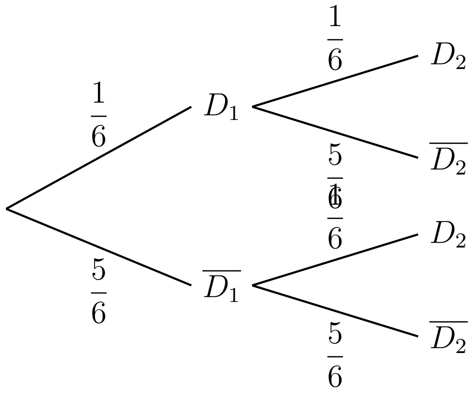
solution de l'exercice 36.



1)
2) probabilité totale $P(R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) + P(\overline{R_1})P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{11}{23} \times \frac{11}{23} + \frac{12}{23} \times \frac{11}{23} = \frac{11}{23}$
3) $P(R_2) = \frac{11}{23} = P_{R_1}(R_2)$

■

solution de l'exercice . 37



1)

2) $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P_{D_1}(D_2) = 1/36$

3) $P_{\overline{D_1}}(D_2) = 1/6 = P(D_2)$. Les événements sont indépendants.

■

solution de l'exercice 38. réponses données dans l'énoncé. ■