## Chapitre 1
# Puissances à exposants positifs

## 1.1 Notation

La notation base et exposant est utilisée pour écrire une multiplication répétée.

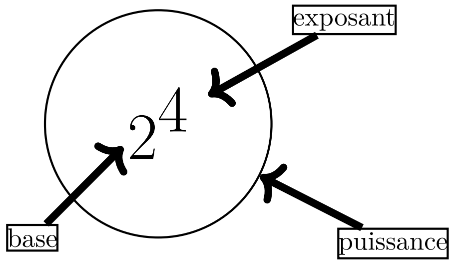


**Figure 1.1** – « 2 à la puissance 4 »
« 2 élevée à la puissance 4 »
« 2 puissance 4 »

**Notation 1.1 — Les puissances de $2$.**

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 2 \times 2$

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

**Notation 1.2 — Les puissances d'un nombre $a$.**

$a^0 = 1$

$a^1 = a$ l'exposant 1 n'est pas écrit

$a^2 = a \times a = aa$ le carré de $a$

$a^3 = a \times a \times a = aaa$ le cube de $a$

$a^4 = a \times a \times a \times a = aaaa$

$a^5 = a \times a \times a \times a \times a = aaaaa$

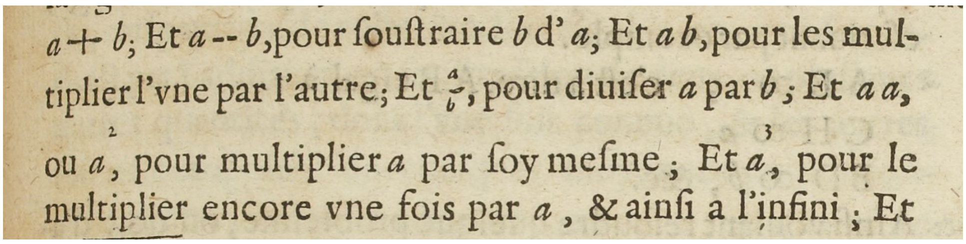

$a+b$; Et $a--b$,pour ſouſtraire $b$ d' $a$; Et $ab$,pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer $a$ par $b$; Et $aa$, ou $\overset{2}{a}$, pour multiplier $a$ par ſoy meſme; Et $\overset{3}{a}$, pour le multiplier encore vne fois par $a$, & ainſi a l'infini; Et

**Figure 1.2** – Cette notation est due à Descartes « Discours de la méthode » (1637).

### 1.1.1 Exercices : notation puissance avec exposants positifs

**Exercice 1** Complète le tableau.

| On dit | On écrit | On doit calculer |
|---|---|---|
| 2 à la puissance 4 | $2^4$ | $2 \times 2 \times 2 \times 2$ |
| 3 à la puissance 4 | | $3 \times 3 \times 3 \times 3$ |
| | $6^3$ | |
| 5 à la puissance 3 | | |
| 5 à la puissance ... | | $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ |
| 5 à la puissance 9 | | |
| | $7^5$ | |
| | | $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ |
| | | 9 |
| | $3^9$ | |
| dix à la puissance trois | | |
| deux à la puissance cinq | | |
| le carré de 17 ... | | |
| le cube de 42 ... | | |

**Exercice 2** — . Donne l'écriture décimale des puissances suivantes :

$3^2 =$

$2^3 =$

$10^2 =$

$2^4 =$

$0^4 =$

$3^3 =$

$4^2 =$

$10^3 =$

$2^1 =$

$10^4 =$

$1^8 =$

$5^3 =$

$6^3 =$

$1^{400} =$

$400^1 =$

$2^6 =$

**Exercice 3** — . Pour chaque cas, calculer les expressions demandées.

a) $5^2 =$

$5 \times 2 =$

b) $3^4 =$

$4 \times 3 =$

c) $2 \times 6 =$

$2^6 =$

d) $3 \times 5 =$

$5^3 =$

e) $10^2 =$

$10 \times 2 =$

f) $5 \times 2 =$

$2^5 =$

g) $1^3 =$

$3 \times 1 =$

h) $6 \times 3 =$

$6^3 =$

**Exercice 4** Entourez la bonne réponse

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1/** $2^5$ est égal à ... | $2 \times 5$ | $2+2+2+2+2$ | $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ |
| **2/** ... est le plus grand | $3^2$ | $2^3$ | $5^2 - 2^3$ |
| **3/** ... est le carré d'un entier | 2 | 4 | 8 |
| **4/** ... est le cube d'un entier | 1 | 6 | 9 |
| **5/** $5^x = 5$ alors $x = \dots$ | 0 | 1 | 2 |
| **6/** Si ... alors $x^2 = 2x$ | $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ |

Défi : pour quelles valeurs de $x$ entières, l'égalité $x^2 = 2x$ est-elle vraie ?

**Exercice 5 — Les carrés parfaits à connaitre.** Les carrés de nombres entiers sont dits « carrés parfaits ». Complétez et retenir la liste suivante (vous pouvez utiliser les touches $\boxed{x^2}$ $\boxed{x^3}$ et $\boxed{x^\blacksquare}$ ) :

$1^2 =$

$2^2 =$

$3^2 =$

$4^2 =$

$5^2 =$

$6^2 =$

$7^2 =$

$8^2 =$

$9^2 =$

$10^2 =$

$11^2 =$

$12^2 =$

$13^2 =$

$14^2 =$

$15^2 =$

**Exercice 6 — Quelques cubes à connaitre.** Complétez et retenir la liste des 6 premiers cubes (vous pouvez utiliser les touches $\boxed{x^2}$ $\boxed{x^3}$ et $\boxed{x^\blacksquare}$ ) :

$1^3 =$

$2^3 =$

$3^3 =$

$4^3 =$

$5^3 =$

$6^3 =$

**Exercice 7** Trouve les exposants :

Si $a = \dots$ alors $2^a = 8$

Si $b = \dots$ alors $2^b = 16$

Si $c = \dots$ alors $2^c = 32$

Si $x = \dots$ alors $3^x = 27$

Si $y = \dots$ alors $4^y = 4$

Si $z = \dots$ alors $10^z = 10\ 000$

Si $x = \dots$ alors $4^x = 64$

Si $y = \dots$ alors $3^y \times 3 = 27$

Si $z = \dots$ alors $2^z \times 2^z = 64$

**Problème 1 — Puzzle.** Complétez pas un entier positif pour rendre les égalités vraies.

$(3 + \dots)^2 = 25$

$4^3 + \dots^2 = 73$

$100 - \dots^2 = 36$

$\dots^2 + \dots^2 = 10$

$(7 - \dots)^3 = 27$

$\dots^2 - 3 \times 4 = 13$

$2^{\cdots} + 3^2 = 25$

$\dots^2 \div 5^2 = 4$

$4 \times \dots^2 = 64$

*solution de l'exercice 3.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a =$ 16; 8 | $c =$ 81; 12 | $e =$ 15; 125 | $g =$ 10; 32 | $i =$ 25; 10 |
| $b =$ 18; 81 | $d =$ 12; 64 | $f =$ 100; 20 | $h =$ 1; 3 | $j =$ 18; 216 |

■

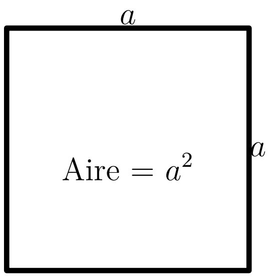



**Figure 1.3** – Pour $a$ nombre positif : $a \geqslant 0$. Le nombre $a^2$ s'interprète comme « l'aire d'un carré de côté $a$ ».

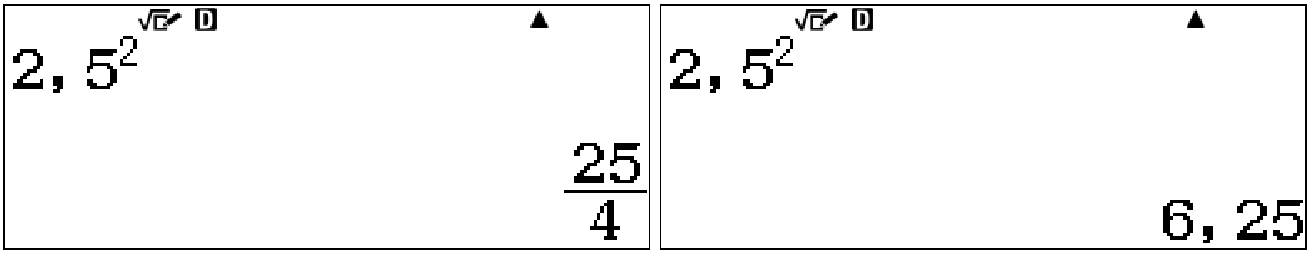



**Figure 1.4** – Pour calculer le carré d'un nombre positif, on utilise la touche $\boxed{x^2}$ de la calculatrice. La touche $\boxed{S\Leftrightarrow D}$ sert à passer d'écriture décimale à fraction d'entier (lorsque c'est possible).

## 1.2 Puissances de 10 et écriture scientifique

**Notation 1.3 — Les puissances de** $10$**.**

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\ 000$

$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\ 000\ 000$

$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n\,\text{facteurs}} = 1\ \underbrace{....0}_{n\ \text{zéros}}$

**à retenir** Si $n$ est un entier positif : $10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n\ \text{zéros}}$

■ **Exemple 1.1** Multiplier par une puissance de 10 avec exposant positif revient à multiplier plusieurs fois par 10 :

| | |
|---|---|
| $55 \times 10^2 = 5500$ | $8{,}25 \times 10^3 = 8250$ |

**Théorème 1.2 — Écriture scientifique d'un décimal.** Tout nombre décimal s'écrit sous la forme « $a \times 10^n$ ».

$a$ est un nombre décimal (positif ou négatif) ayant **exactement un chiffre non nul à gauche** de la virgule.

$n$ est un entier relatif (positif ou négatif).

L'**ordre de grandeur** de ce nombre est le produit de l'entier le plus proche du décimal de l'écriture scientifique par la puissance de 10 de cette écriture scientifique.

### 1.2.1 Exercices : puissances de 10 et écriture scientifique

**Exercice 1** Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

| | |
|---|---|
| $67 \times 10^1 =$ ................................ | $9{,}65 \times 10^5 =$ ................................ |
| $3{,}1 \times 10^0 =$ ................................ | $6{,}08 \times 10^2 =$ ................................ |
| $4{,}2 \times 10^3 =$ ................................ | $0{,}087\,5 \times 10^7 =$ ................................ |
| $87 \times 10^4 =$ ................................ | $8{,}2 \times 10^9 =$ ................................ |
| $1{,}89 \times 10^1 =$ ................................ | $4{,}5 \times 10^{12} =$ ................................ |

**Exercice 2**

Encadrer les nombres suivants entre 2 puissances de 10 consécutives.

845 : $100 < 845 < 1000$. 845 est compris entre $10^2$ et $10^3$.

285 : ........................................................................................

5 483 : ........................................................................................

62 : ........................................................................................

652 000 : ........................................................................................

13 800 000 : ........................................................................................

14 200 : ........................................................................................

L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est une écriture sous la forme $a \times 10^n$.

- $a$ est un nombre décimal, avec $1 \leqslant a < 10$
- $n$ est un entier (positif ou négatif)

■ **Exemple 1.3** $8\ 746 = 8{,}746 \times 10^3$ $\qquad$ $460 = 4{,}6 \times 10^2$

**Exercice 3** Complètez

1) $4{,}6 \times 10^5$ est l'écriture scientifique de ........................................................

2) L'écriture scientifique de 470 est ($4{,}70 \times 10^0$ / $4{,}70 \times 10^1$ / $4{,}70 \times 10^2$ / $4{,}70 \times 10^3$)

3) L'écriture scientifique de 4,08 est ($4{,}08 \times 10^0$ / $4{,}08 \times 10^1$ / $4{,}08 \times 10^2$ / $4{,}08 \times 10^3$)

4) $25{,}6 \times 10^3$ n'est pas une écriture scientifique car ................................................

5) $1{,}85 \times 7^5$ n'est pas une écriture scientifique car ................................................

6) $0{,}09 \times 10^3$ n'est pas une écriture scientifique car ................................................

7) $10 \times 10^6$ n'est pas une écriture scientifique car ................................................

■ **Exemple 1.4 — Je fais.** Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

$1\ 234{,}5 = 1{,}234\ 5 \quad \times 10^{\cdots}$ **L'ordre de grandeur est**

$24{,}5 = 2{,}45 \quad \times 10^{\cdots}$

$3{,}6 = 3{,}6 \quad \times 10^{\cdots}$

$564 = 5{,}64 \quad \times 10^{\cdots}$

$42\ 000 = 4{,}2 \quad \times 10^{\cdots}$

### Exercice 4

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants

$75 = 7{,}5 \times 10^{\cdots}$ ..............................

$428 = 4{,}28 \times 10^{\cdots}$ ..............................

$93{,}8 = 9{,}38 \times 10^{\cdots}$ ..............................

$3{,}5 = \ldots\ldots \times 10^{0}$ ..............................

$634 =$ ..............................

$48{,}9 =$ ..............................

$3\ 095 =$ ..............................

$4{,}9 =$ ..............................

$157\ 000 =$ ..............................

0,5 millions= ..............................

3 millions= ..............................

30 millions= ..............................

1 milliard= ..............................

$2\ 400 =$ ..............................

### Exercice 5

La Lune est agée de 4,53 milliards d'années. Donnez l'age en notation scientifique.

**Exercice 6** La distance Terre-Soleil est de 149 600 000km. Exprimer la distance en mètres et l'écrire en notation scientifique.

### Exercice 7

Quelle distance est la plus grande : $1{,}25 \times 10^{3}$ m ou $8 \times 10^{4}$ cm.

**Exercice 8 — conversion d'unités.** Convertir les distances et donner l'écriture scientifique.

53 km = .............................................................. m

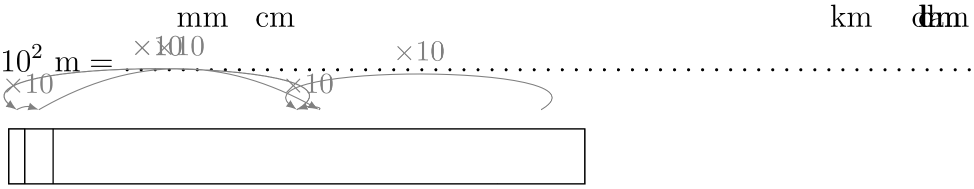
4 600 km = .............................................................. m

$8{,}2 \times 10^{2}$ km = .............................................................. m

5 km = .............................................................. cm

7 350 000 m = .............................................................. mm

$5 \times 10^{2}$ m = .............................................................. mm



## 1.3 Puissances et priorité des opérations

■ **Exemple 1.5** $3 \times 5^2$ se lit « trois fois cinq au carré ».

« trois fois le carré de cinq »

$3 \times 5^2 = 3 \times 25 = 75$.

« le carré de trois fois cinq »

$(3 \times 5)^2 = 15^2 = 225$.

> Les exposants sont prioritaires sur les autres opérations.

### 1.3.1 Exercices : puissances et priorité des opérations

Les exposants sont prioritaires sur les autres opérations.

■ **Exemple 1.6 — Nous faisons.** Simplifier l'expression en un entier.

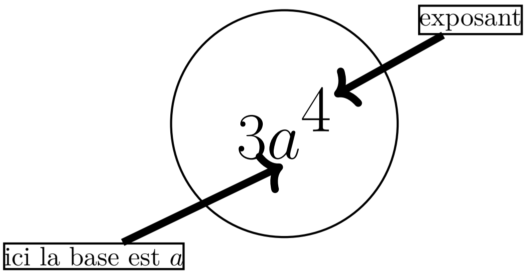
| $A = 3+5^2$ | $B = (3+5)^2$ | $C = 3^2+5^2$ | $D = 3\times 5^2$ | $E = (3\times 5)^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $= 3+5\times 5$ | $= (3+5)\times(3+5)$ | $=$ | $=$ | $=$ |
| $= 3+25$ | $= 8\times 8$ | $=$ | $=$ | $=$ |
| $= 28$ | $= 64$ | $=$ | $=$ | $=$ |

**Exercice 1 — ▦, à vous.** Mêmes consignes. Présenter les calculs à la verticale.

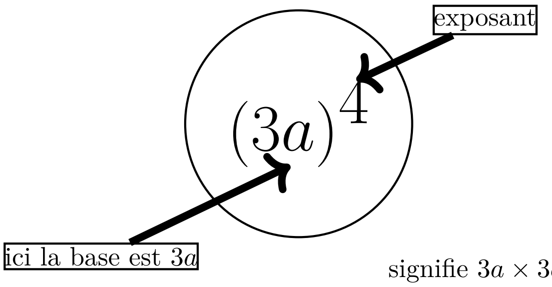
| | | | |
|---|---|---|---|
| $A = 3+5\times 3+5$ | $B = 7+3\times 2^2$ | $C = 9+1\times 2^4$ | $D = 3^2\times 11-1$ |
| $A = 48\div 2^4$ | $B = (48\div 2)^4$ | $C = (2+1)^2-2^3$ | $D = 10+10^2+10^3$ |
| $A = 3\times 5^2-5\times 2$ | $B = 3\times(5^2-5)\times 2$ | $C = (3\times 5)^2-5\times 2$ | $D = \dfrac{(5-2)^3}{2\times 7-5}$ |

Défi : quel est le nombre manquant ? $\dfrac{4(\ldots+3)^2}{5(14-3^2)} = 16$.

Il faut mettre entre parenthèses pour clarifier les termes à multiplier.




signifie $3 \times a \times a \times a \times a$




signifie $3a \times 3a \times 3a \times 3a$

■ **Exemple 1.7 — Je fais.** Évaluer les expressions suivantes lorsque $x = 2$, $y = 3$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A = 2^x$ | $B = 5x^3$ | $C = (2xy)^2$ | $D = (5x)^3$ |
| $=$ | $=$ | $=$ | $=$ |
| $=$ | $=$ | $=$ | $=$ |
| $=$ | $=$ | $=$ | $=$ |

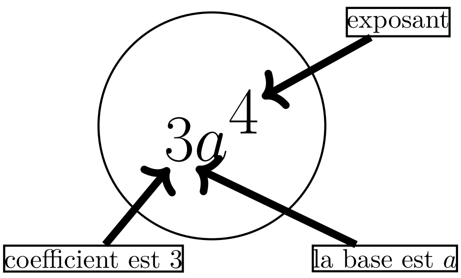
**Exercice 2 — , à vous.** Évaluer les expressions suivantes lorsque $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ et $d = 6$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A = 2a^3 - b$ | $B = (a+c)^2$ | $C = (2a)^2 - 2bc + d$ | $D = 2^b - 3c - d$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A = 2(b+c)^2$ | $B = \dfrac{cd^2}{a}$ | $C = \left(\dfrac{cd}{a}\right)^2$ | $D = 2a^2 + cd$ |

## 1.4 Exercices : produit de puissances

Le coefficient est le nombre qui multiplie la variable.




signifie $3 \times a \times a \times a \times a$

Dans $3a^5$, le coefficient est 3. La base est $\boxed{\phantom{a}}$, l'exposant est $\boxed{\phantom{a}}$.

Dans $(4b)^2$, le coefficient est $\boxed{\phantom{a}}$, la base est $\boxed{\phantom{a}}$ et l'exposant $\boxed{\phantom{a}}$.

Dans $c^4$, le coefficient est $\boxed{\phantom{a}}$, la base est $\boxed{\phantom{a}}$ et l'exposant est $\boxed{\phantom{a}}$

**Exercice 1** Complétez

| **expression** | $3a^2$ | $x^2$ | $(5x)^3$ | $5(2a)^3$ | $-2(-x)^2$ | $2x$ | $(x+y)^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **coefficient** | 3 | | | | | | |
| **base(s)** | $a$ | | | | | | |
| **exposant(s)** | 2 | | | | | | |

■ **Exemple 1.8**

$a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5$ ......................................

$7b^3 \times b^2 = 7bbb \times bb = 7 \times bbbbb =$ ......................................

$2x^3 \times 3x^4 = 2xxx \times 3xxxx =$ ......................................

$6x^2 \times 3x^2 =$ ......................................

$(2x)^3 \times 3x^4 = 2x \times 2x \times 2x \times 3xxxx =$ ......................................

$3x^5 \times 6x =$ ......................................

$3xy^5 \times 5xy^2 =$ ......................................

$(b^7)^3 = b^7 \times b^7 \times b^7 = b^{7+7+7}$ ......................................

**Règle** Si les bases sont les mêmes, je multiplie deux puissances en ajoutant les exposants.
Si les bases ne sont pas les mêmes, je ne multiplie pas les deux puissances en ajoutant les exposants !

**Exercice 2** Écrire comme puissance d'un entier.

$3^2 \times 3^4 =$ ......................................

$3 \times 3^2 =$ ......................................

$3^7 \times 3^0 =$ ......................................

$5 \times 5 \times 5 =$ ......................................

$7^4 \times 7^2 \times 7 =$ ......................................

$10^7 \times 10 \times 10^1 =$ ......................................

$3^8 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 =$ ......................................

$3^7 \times 3 \times 3^1 =$ ......................................

**Exercice 3** Précisez les expressions qui ne sont pas simplifiables à l'aide de la règle de multiplication.

| | | |
|---|---|---|
| $3^2 \times 3^5 = \dots\dots\dots\dots$ (oui / non) | $3^4 \times 3^2 = \dots\dots\dots\dots$ (oui / non) | $7^3 \times 6^2 \dots\dots\dots\dots$ (oui / non) |
| $4^2 \times 4^3 = \dots\dots\dots\dots$ (oui / non) | $3^8 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = .$ (oui / non) | $6^3 \times 6^2 \dots\dots\dots\dots$ (oui / non) |
| $4^5 - 4^2 = \dots\dots\dots\dots$ (oui / non) | $7^3 + 6^2 \dots\dots\dots\dots$ (oui / non) | $a^0 \times a^2 \dots\dots\dots\dots$ (oui / non) |
| $3^0 \times 3^0 = \dots\dots\dots\dots$ (oui / non) | $7^3 + 7^2 \dots\dots\dots\dots$ (oui / non) | $a \times a \times a^2 \dots\dots\dots\dots$ (oui / non) |

**Exercice 4 — Vrai ou faux ?.**

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** $6^7 + 6^7 = 6^{14}$ | ☐ | ☐ |
| **2/** $3 \times 3 = 9$ | ☐ | ☐ |
| **3/** $5^2 = 7$ | ☐ | ☐ |
| **4/** $1^5 = 5$ | ☐ | ☐ |
| **5/** $3^2 \times 3^3 = 9^5$ | ☐ | ☐ |

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** $2^2 \times 2^2 = 8$ | ☐ | ☐ |
| **2/** $6^7 \times 6^7 = 6^{49}$ | ☐ | ☐ |
| **3/** $6^7 \times 6^3 = 6^{10}$ | ☐ | ☐ |
| **4/** $1^{400} \times 1^{200} = 600$ | ☐ | ☐ |
| **5/** $5^2 + 5^2 = 2 \times 5^2$ | ☐ | ☐ |

**Exercice 5** Complète le tableau

| Expression | Écriture développée | Écriture simplifiée |
|---|---|---|
| $(3^2 \times 5^3) \times (3^4 \times 5)$ | $3^2 \times 5^3 \times 3^4 \times 5 = 3^2 \times 3^4 \times 5^3 \times 5 =$ | $3^{\cdots} \times 5^{\cdots}$ |
| $(2^4 \times 7)^2$ | $(2^4 \times 7) \times (2^4 \times 7) = 2^4 \times 2^4 \times 7 \times 7 =$ | $2^{\cdots} \times 7^{\cdots}$ |
| $(5^4)^3$ | | |
| $(3 \times 5)^2$ | | |
| $(3y^5)^2$ | $3y^5 \times 3y^5 = 3 \times 3 \times y^5 y^5 =$ | |
| $(3x)^2$ | | |
| $(4y)^2$ | | |
| $(2a)^3$ | | |
| | $7x \times 7x =$ | |
| | $7 \times 7x =$ | |
| | $ab \times ab \times ab =$ | |

**Exercice 6 — Vrai ou Faux ?.**

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** $8 \times y \times y = (8y)^2$ | ☐ | ☐ |
| **2/** $2a \times 2a \times 2a = (2a)^3$ | ☐ | ☐ |
| **3/** $7b \times 7b \times 7b = 7b^3$ | ☐ | ☐ |
| **4/** $(x+y)^2 = x + y^2$ | ☐ | ☐ |

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** $(xy)^2 = x^2y^2$ | ☐ | ☐ |
| **2/** $(9a^3)^2 = 9a^5$ | ☐ | ☐ |
| **3/** $(9a^3)^2 = 18a^6$ | ☐ | ☐ |
| **4/** $(1+x)^2 = (1+x)(1+x)$ | ☐ | ☐ |

*solution de l'exercice 1.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = 13$ | $b = 112$ | $c = 43$ | $d = 19$ | $e = 46$ | $f = 26$ | $g = 3$ | $h = 3$ |

■

## 1.5 Facteurs et multiples

**Définition 1.1 — Multiples.** Les multiples de l'entier $n$ sont tous les nombres entiers s'écrivent comme produit $kn = k \times n$, avec $k$ un entier :

$$0 \times n = 0; \quad 1 \times n = n; \quad 2 \times n; \quad 3 \times n; \quad \ldots$$

■ **Exemple 1.9**

a) 45 est un multiple de 9 et de 5 car $45 = 5 \times 9$.

b) Enumérer tous les diviseurs de 45.

**R** Pour tout entier $m$, $0 = 0 \times m$. Donc 0 **est un multiple de tout entier, et tout entier divise** 0. Néanmoins, l'usage est souvent d'ignorer 0 comme multiple.

### 1.5.1 Exercices : facteurs et multiples

**Exercice 1** — .

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** 3 est un diviseur de 6 | ☐ | ☐ |
| **2/** 6 est un diviseur de 3 | ☐ | ☐ |
| **3/** 3 est un diviseur de 9 | ☐ | ☐ |
| **4/** 1 est un diviseur de 18 | ☐ | ☐ |
| **5/** 18 est un diviseur de 9 | ☐ | ☐ |
| **6/** 7 est un diviseur de 7 | ☐ | ☐ |

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** 6 est un multiple de 3 | ☐ | ☐ |
| **2/** 18 est un multiple de 3 | ☐ | ☐ |
| **3/** 7 est un multiple de 1 | ☐ | ☐ |
| **4/** 7 est un multiple de 7 | ☐ | ☐ |
| **5/** 24 est un multiple de 6 | ☐ | ☐ |
| **6/** 8 est un diviseur de 4 | ☐ | ☐ |

■ **Exemple 1.10 — établir la liste des diviseurs d'un entier.** L'ensemble des diviseurs de 36.

1
___
36

Diviseurs(36) = {1; }.

■ **Exemple 1.11 — à vous.** L'ensemble des diviseurs de 60.

1
___
60

Diviseurs(60) = {1; }.

> On trace une ligne horizontale. On teste la divisibilité pour $d = 1$, puis 2, puis 3, etc. Chaque fois que $d$ divise le nombre $n$, on note cet entier $d$ au-dessus de la ligne, et le quotient de $n$ par $d$ au dessous de la ligne. **On aura trouvé tous les diviseurs lorsque $d^2$ dépasse $n$.**

**Exercice 2** Détermine l'ensemble des diviseurs de 12, 33, 49, 85 et 97 .

1
___
12

Diviseurs(12) = {1; }.

1
___
33

Diviseurs(33) = {1; }.

1
___
49

Diviseurs(49) = {1; }.

1
___
85

Diviseurs(85) = {1; }.

1
___
97

Diviseurs(97) = {1; }.

**Extra :** 144 et 214 :

1
___
144

Diviseurs(144) = {1; }.

1
___
214

Diviseurs(214) = {1; }.

**Exercice 3** Complétez

1) Entoure les facteurs de 100 parmi : 0 0,5 1 100 200

2) Un contre-exemple de l'affirmation « Les facteurs d'un nombre sont toujours inférieurs au nombre lui-même » est ..........................................................................................

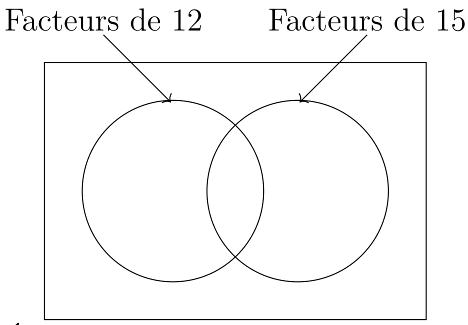
3) Un contre-exemple de l'affirmation « Plus un nombre est grand, plus nombreux sont ses facteurs. » est

4) Trouve le plus petit entier qui admet exactement 3 facteurs ..........................................

5) Trouve 3 entiers inférieurs à 100 qui ont exactement 3 facteurs..........................................

6) Comme $4 \div 0{,}5 = 8$. Mais on ne peut pas dire que 0,5 est un facteur de 8 car ........................

7) Place les nombres 10, 3, 5, 6, 1, 8, 4, 2 et 12 dans le diagramme de Venn ci-dessous.




1

18

1

24

8) Écrire les facteurs de 18 et 24. Le plus grand facteur commun à 18 et 24 est ........................

9) À partir du tableau des diviseurs, déterminez le plus grand diviseur commun à :

   a) 70 et 72 : PGCD= ................
   b) 72 et 75 : PGCD= ................
   c) 72 et 84 : PGCD= ................
   d) 72 et 88 : PGCD= ................
   e) 75 et 88 : PGCD= ................

| **Nombres** | **Facteurs** |
|---|---|
| 70 | $1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70$ |
| 72 | $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72$ |
| 75 | $1, 3, 5, 15, 25, 75$ |
| 84 | $1, 2, 4, 21, 42, 84$ |
| 88 | $1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88$ |

10)

| | |
|---|---|
| | • 14 |
| 4 est le plus grand diviseur commun à 12 et • | • 16 |
| 6 est le plus grand diviseur commun à 12 et • | • 21 |
| 2 est le plus grand diviseur commun à 12 et • | • 25 |
| 1 est le plus grand diviseur commun à 12 et • | • 27 |
| | • 30 |

## 1.6 Nombres premiers

**Définition 1.2** Un nombre entier est **premiers** s'il admet **exactement** 2 diviseurs **différents** : 1 et lui même.

On classe les nombres entiers en 3 catégories :
l'unité 1
les nombres premiers 2, 3, 5...
les nombres composés tout le reste.

■ **Exemple 1.12** Vérifier que les nombres 149 et 173 sont premiers.

**Théorème 1.13 — Nombres premiers $< 100$.** sont :
- 2, 3, 5 et 7.
- tous les nombres non divisibles par 2, 3, 5 et 7.

■ **Exemple 1.14** 11 , 31 et 97 sont des nombres premiers.

**Théorème 1.15 — théorème fondamental de l'arithmétique.** Tout nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ se décompose de manière unique (à l'ordre près) en produit de facteurs premiers.

■ **Exemple 1.16** 31 est un nombre premier, sa décomposition en facteurs premiers est lui-même.
$1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7^1$. Le facteur 2 a pour multiplicité 4.
$25777 = 149 \times 173$.

**R** La combinaison SECONDE F de la CASIO permet d'écrire la décomposition en facteurs premier. Si le nombre est premier, l'affichage reste inchangé.

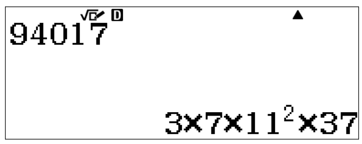



**Figure 1.5** – Ne pas oublier d'appuyer sur EXE après le nombre.

### 1.6.1 Exercices : nombres premiers et décompositions

**Exercice 1 — Le Crible d'Ératosthène.** est un algorithme permettant de trouver tous les nombres premiers inférieurs à 100 : Voici le début :

- On barre 1 qui d'après la définition n'est pas premier
- On entoure 2 car premier. On barre les multiples de 2 autre que 2 qui ne sont pas premiers.
- On entoure 3, car premier.
- 4 est un multiple de 2, il a été éliminé...

Poursuivre en entourant les nombres premiers du tableau ci-dessous :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cancel{1}$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**Les nombres premiers entre 1 et 10**

**Les nombres premiers entre 11 et 100**

**Exercice 2** Pour chaque cas, trouve 4 entiers **consécutifs** qui vérifient les indications données. Tous les nombres sont inférieurs à 100.

A)

| | | | |
|---|---|---|---|
| nombre premier | nombre premier | carré d'un entier | nombre premier |

B)

| | | | |
|---|---|---|---|
| nombre premier | nombre pair | multiple de 3 et 5 | carré d'un entier |

C)

| | | | |
|---|---|---|---|
| multiple de 1 | multiple de 4 et 6 | carré d'un entier | diviseur de 100 |

D)

| | | | |
|---|---|---|---|
| nombre premier | cube d'un entier | carré d'un entier | diviseur de 60 |

E)

| | | | |
|---|---|---|---|
| multiple de 6 | multiple de 5 | multiple de 4 | multiple de 3 |

F)

| | | | |
|---|---|---|---|
| diviseur de 36 | nombre premier | multiple de 10 | multiple de 3 |

G)

| | | | |
|---|---|---|---|
| nombre premier | facteur commun à 48 et 60 | nombre premier | nombre pair |

H)

| | | | |
|---|---|---|---|
| carré d'entier | nombre composé | cube d'un entier | nombre composé |

I)

| | | | |
|---|---|---|---|
| multiple de 2 et 11 | nombre premier | multiple de 5 | nombre composé |

## Les critères de divisibilité

| | |
|---|---|
| nombres pairs | le dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8. |
| multiples de 3 | la somme des chiffres est un multiple de 3 |
| multiples de 4 | les deux derniers chiffres forment un multiple de 4. |

| | |
|---|---|
| multiples de 5 | le chiffre des unités est est 0 ou 5. |
| multiples de 6 | multiples de 2 et de 3 |
| multiples de 9 | la somme des chiffres est un multiple de 9 |
| multiples de 10 | le chiffre des unités est 0 |

**Exercice 3** Complétez

1) Entourez les multiples de 3 : 219 165 253 2104 3091

2) Entourez les multiples de 4 : 102 334 512 1016 4011

3) Entourez les multiples de 6 : 106 223 812 2010 5022

4) Entourez les multiples de 9 : 109 208 310 999 4023

5) Utilise les critères de divisibilité pour justifier que les nombres suivants ne sont pas premiers :

   9021 n'est pas premier. C'est un multiple de ..............................................

   8700681 n'est pas premier. C'est un multiple de ..............................................

   893908 n'est pas premier. C'est un multiple de ..............................................

6) Expliquer pourquoi il n'est pas possible de réarranger 0, 2 et 5 pour former un nombre premier.

   ..............................................................................................

   ..............................................................................................

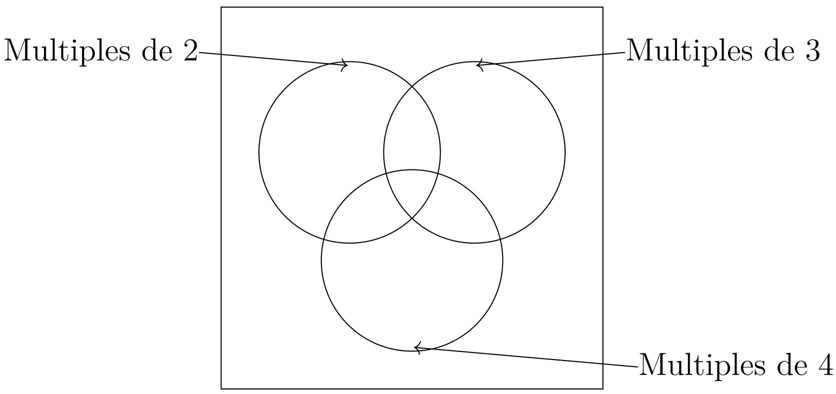
7) Arranger les chiffres 0, 1, 2 et 3 pour avoir un multiple commun de 3, 4 et 5 : ........................

8) Un des nombres suivants est premier. Entourez le : 4444 4445 4446 4447 4448

9) Placer les nombres suivants dans le diagramme de Venn :

   122; 8; 44; 125;

   50; 75; 228; 342 et 333

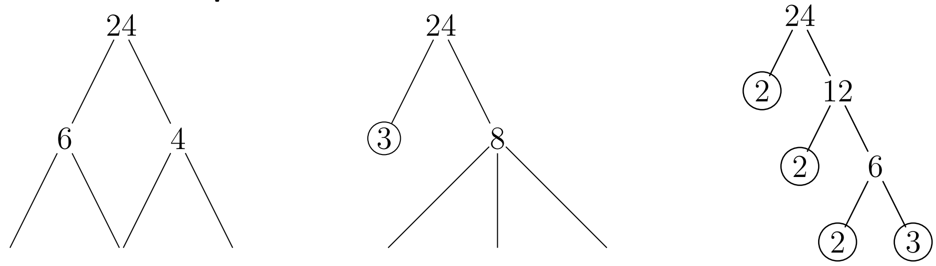


■ **Exemple 1.17 — Décomposer en facteurs premiers.**

$24 = 6 \times 4$

$24 = 2 \times 3 \times 2 \times 2$

$24 = 2^3 \times 3$




**Exercice 4** Décomposer en facteur premiers les nombres suivants. Utiliser l'écriture à exposants.

| | | |
|---|---|---|
| $6 =$ .......................... | $23 =$ .......................... | $120 =$ .......................... |
| $60 =$ .......................... | $36 =$ .......................... | $1\,200 =$ .......................... |
| $21 =$ .......................... | $80 =$ .......................... | $240 =$ .......................... |
| $22 =$ .......................... | $12 =$ .......................... | $500 =$ .......................... |

**Exercice 5** Complétez

1) Entourez les décompositions en facteur premier de 20 :

$2 \times 10$ $\qquad 1 \times 2 \times 5 \times 5$ $\qquad 1 \times 22 \times 5$ $\qquad 2^2 \times 5$

2) Entourez les décompositions en facteur premier de 50 :

$2 \times 25$ $\qquad 2 \times 5^2$ $\qquad 2^2 \times 5$ $\qquad 1 \times 50$

3) Expliquer pourquoi les écritures suivantes ne sont pas des décompositions en facteurs premiers :

$24 = 4 \times 6$ ..........................................................................................

$24 = 2^3 + 3$..........................................................................................

$24 = 1 \times 2^3 \times 3$..........................................................................................

$24 = 2 \times 3 \times 4$..........................................................................................

4) Décomposer en facteurs premier les nombres donnés à l'aide de celles de 42 et 91 :

$42 = 2 \times 3 \times 7$ $\qquad 91 = 7 \times 13$

$42 \times 91 = 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 13 = 2^{\cdots} \times 3^{\cdots} \times 7^{\cdots}$ .............................................

$42^2 = 42 \times 42 =$ ..........................................................................................

$15 \times 91 =$ ..........................................................................................

$91^3 =$ ..........................................................................................

### Exercice 6 —.

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** 3 est un facteur premier de 12 | ☐ | ☐ |
| **2/** 4 est un facteur premier de 12 | ☐ | ☐ |
| **3/** 6 est un facteur premier de 12 | ☐ | ☐ |
| **4/** 7 est un facteur premier de 12 | ☐ | ☐ |
| **5/** 3 est un facteur premier de 36 | ☐ | ☐ |
| **6/** 9 est un facteur premier de 36 | ☐ | ☐ |

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** 1 est un facteur premier de 36 | ☐ | ☐ |
| **2/** 2 est un facteur premier de 36 | ☐ | ☐ |
| **3/** 7 est un facteur premier de 36 | ☐ | ☐ |
| **4/** 3 est un facteur premier de 27 | ☐ | ☐ |
| **5/** 7 est un facteur premier de 28 | ☐ | ☐ |
| **6/** 9 est un facteur premier de 27 | ☐ | ☐ |

■ **Exemple 1.18 — , facteurs et décomposition en facteurs premiers.**

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** 4 est un facteur de $2 \times 3 \times 7 \times 13$ | ☐ | ☐ |
| **2/** 5 est un facteur de $2 \times 3 \times 7 \times 13$ | ☐ | ☐ |
| **3/** 6 est un facteur de $2 \times 3 \times 7 \times 13$ | ☐ | ☐ |
| **4/** 21 est un facteur de $2 \times 3 \times 7 \times 13$ | ☐ | ☐ |
| **5/** 70 est un facteur de $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ | ☐ | ☐ |
| **6/** $3^2$ est un facteur de $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ | ☐ | ☐ |
| **7/** $2 \times 3^2$ est un facteur de $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 23$ | ☐ | ☐ |

### Exercice 7 —.

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** 9 est un facteur de $2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ | ☐ | ☐ |
| **2/** $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 23$ est un multiple de 4 | ☐ | ☐ |
| **3/** 8 est un facteur de $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 23$ | ☐ | ☐ |
| **4/** $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 23$ est un multiple de 16 | ☐ | ☐ |
| **5/** 28 est un facteur de $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 23$ | ☐ | ☐ |
| **6/** $3^3$ est un facteur de $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 23$ | ☐ | ☐ |
| **7/** 10 est un facteur de $2 \times 5^3 \times 7 \times 13$ | ☐ | ☐ |
| **8/** $2 \times 5^3 \times 7 \times 13$ est un multiple de 15 | ☐ | ☐ |
| **9/** $2 \times 5^3 \times 7 \times 13$ est un multiple de $5^2$ | ☐ | ☐ |
| **10/** $10 \times 7$ est un facteur de $2 \times 5^3 \times 7 \times 13$ | ☐ | ☐ |
| **11/** $2 \times 5^3 \times 7 \times 11 \times 13$ est un multiple de 22 | ☐ | ☐ |

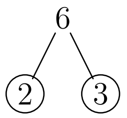
### Exercice 8

1) À l'aide de la calculatrice donner la décomposition en facteurs premiers de 1080 = ...................
2) Entourer, sans calcul supplémentaire, les diviseurs de 1080 parmi :
   13; $2^2; \times 3^2$; $2 \times 3^3 \times 5^2$; $2^4 \times 3$

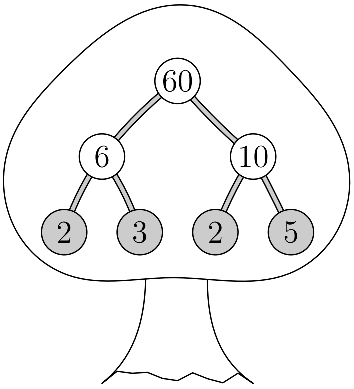
### Exercice 9

1) À l'aide de la calculatrice donner la décomposition en facteurs premiers de 72 = ......................
2) Entourer, sans calcul supplémentaire, les multiples de 72 parmi :
   $3^2 \times 5$ $2^3 \times 3^2 \times 5^2$ $2^4 \times 5$ $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$

*solution de l'exercice 4.*



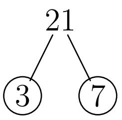

$6 = 2 \times 3$



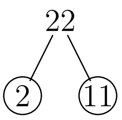

$60 = 10 \times 6$

$60 = 2 \times 5 \times 2 \times 3$

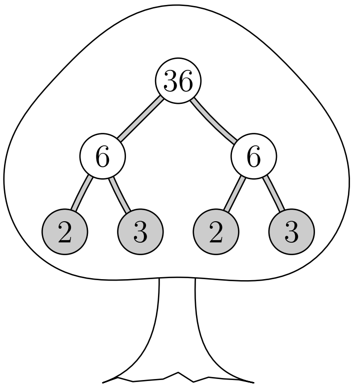
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$




$21 = 3 \times 7$



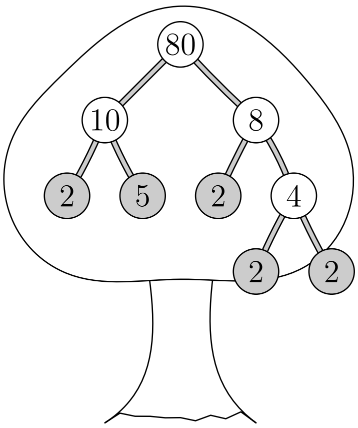

$22 = 2 \times 11$




$36 = 6 \times 6$

$36 = 2 \times 3 \times 2 \times 3$

$36 = 2^2 \times 3^2$

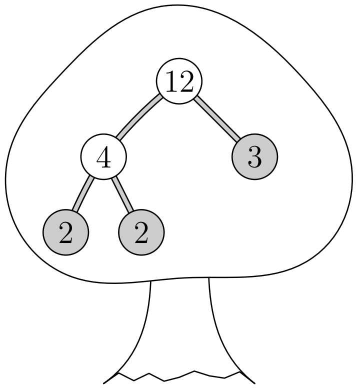



$80 = 10 \times 8$

$80 = 2 \times 5 \times 2 \times 4$

$80 = 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$

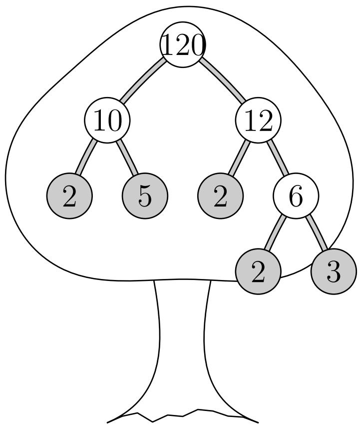
$80 = 2^4 \times 5$




$12 = 4 \times 3$

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$12 = 2^2 \times 3$

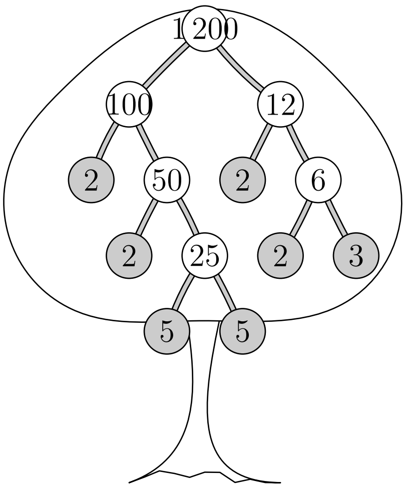



$120 = 10 \times 12$

$120 = 2 \times 5 \times 2 \times 6$

$120 = 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3$

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$



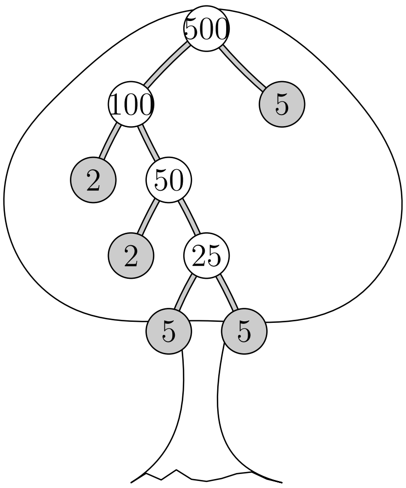

$1\,200 = 100 \times 12$

$1\,200 = 2 \times 50 \times 2 \times 6$

$1\,200 = 2 \times 2 \times 25 \times 2 \times 2 \times 3$

$1\,200 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3$

$1\,200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$



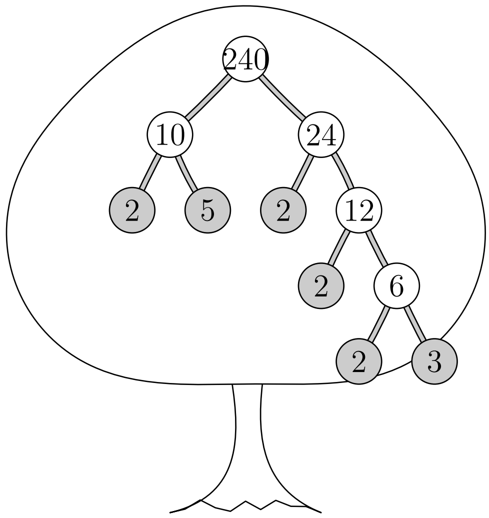

$500 = 100 \times 5$

$500 = 2 \times 50 \times 5$

$500 = 2 \times 2 \times 25 \times 5$

$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$500 = 2^2 \times 5^3$




$240 = 10 \times 24$

$240 = 2 \times 5 \times 2 \times 12$

$240 = 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 6$

$240 = 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$

■

*solution de l'exercice 6.*

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** 3 est un facteur premier de 12 | ☒ | ☐ |
| **2/** 4 est un facteur premier de 12 | ☐ | ☒ |
| **3/** 6 est un facteur premier de 12 | ☐ | ☒ |
| **4/** 7 est un facteur premier de 12 | ☐ | ☒ |
| **5/** 9 est un facteur premier de 36 | ☐ | ☒ |

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** 1 est un facteur premier de 36 | ☐ | ☒ |
| **2/** 2 est un facteur premier de 36 | ☒ | ☐ |
| **3/** 7 est un facteur premier de 36 | ☐ | ☒ |
| **4/** 3 est un facteur premier de 27 | ☒ | ☐ |
| **5/** 7 est un facteur premier de 28 | ☒ | ☐ |

■

**■ Exemple 1.19 — ☑, facteurs et décomposition en facteurs premiers.**

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** 4 est un facteur de $2 \times 3 \times 7 \times 13$ | ☐ | ☒ |
| **2/** 5 est un facteur de $2 \times 3 \times 7 \times 13$ | ☐ | ☒ |
| **3/** 6 est un facteur de $2 \times 3 \times 7 \times 13$ | ☒ | ☐ |
| **4/** 21 est un facteur de $2 \times 3 \times 7 \times 13$ | ☒ | ☐ |
| **5/** 70 est un facteur de $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ | ☒ | ☐ |
| **6/** $3^2$ est un facteur de $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ | ☐ | ☒ |
| **7/** $2 \times 3^2$ est un facteur de $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 23$ | ☐ | ☒ |

*solution de l'exercice 7.*

| | Vrai | Faux |
|---|---|---|
| **1/** 9 est un facteur de $2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ | ☒ | ☐ |
| **2/** $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 23$ est un multiple de 4 | ☒ | ☐ |
| **3/** 8 est un facteur de $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 23$ | ☒ | ☐ |
| **4/** $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 23$ est un multiple de 16 | ☐ | ☒ |
| **5/** 28 est un facteur de $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 23$ | ☒ | ☐ |
| **6/** $3^3$ est un facteur de $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 23$ | ☐ | ☒ |
| **7/** 10 est un facteur de $2 \times 5^3 \times 7 \times 13$ | ☒ | ☐ |
| **8/** $2 \times 5^3 \times 7 \times 13$ est un multiple de 15 | ☐ | ☒ |
| **9/** $2 \times 5^3 \times 7 \times 13$ est un multiple de $5^2$ | ☒ | ☐ |
| **10/** $10 \times 7$ est un facteur de $2 \times 5^3 \times 7 \times 13$ | ☒ | ☐ |
| **11/** $2 \times 5^3 \times 7 \times 11 \times 13$ est un multiple de 22 | ☒ | ☐ |

■

## 1.7 Division entière

**Définition 1.3 — Division entière.** Soit un entier $n$ et un entier non nul $d$.

On appelle quotient de $n$ par $d$ l'entier $q$ tel que :

$$qd \leqslant n < qd + d$$

Le reste de la division de $n$ par $d$ est l'entier définit par :

$$n = qd + r \qquad 0 \leqslant r < d$$

$n$ est un multiple de $d$ lorsque le reste de la division de $n$ par $d$ est nul.

$$\begin{array}{r|l} 1\,7 & 5 \\ \cline{2-2} -\,1\,5 & 3 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,0 & 5 \\ \cline{2-2} -\,2\,0 & 4 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

**Figure 1.6** – $17 = 3 \times 5 + 2$ et $20 = 4 \times 5$

■ **Exemple 1.20**

a) $3 \times 5 \leqslant 17 < 4 \times 5$ et $17 = 3 \times 5 + 2$.

b) $4 \times 5 \leqslant 20 < 5 \times 5$ et $20 = 4 \times 5 + 0$.

**R** Dans `Scratch`, l'instruction ( $n$ modulo $d$ ) permet de calculer le reste de la division de $n$ par $d$.
Par exemple ( 12 modulo 5 )=2.


**Figure 1.7** – Un script pour tester si nbr est divisible par 7

### 1.7.1 Exercices : division euclidienne et bilan

**Exercice 1** Complétez

1) $17 = \ldots \times 4 + 1$. Le reste de la division de 17 par 4 est ..........................................

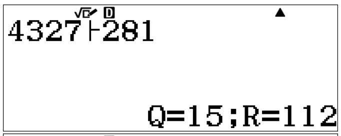
2) $51 = \ldots \times 6 + 3$. Le reste de la division de 41 par 6 est ..........................................

3) $27 = \ldots \times 3 + 0$. 27 est un ............................................................ de 3.

4) $a$ est un multiple de $b$ si le reste de la division de $a$ par $b$ vaut ..............................

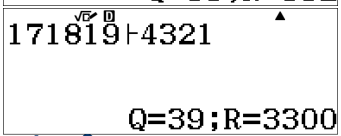
5) $32 = 7 \times 4 + 4$. Le reste de la division de 32 par .................................... est égal à 4.

6) $55 = 6 \times 8 + 7$. Le reste de la division de 55 par .................................... est égal à 7.

7) 

L'écran affiche la division euclidienne de .............. par ..............

On a 4327 = ..........................................................



L'écran affiche la division euclidienne de .............. par ..............

On a 171819 = ......................................................

**Exercice 2**

Si on continue cette suite de symboles, quels seront les symboles en positions 100 et 101 de la suite ?

♡♢♡♠♡♣♡♢♡♠♡♣♡♢♡♠...

**Exercice 3**

Le 1er janvier 2022 était un samedi. Quel jour de la semaine correspond au 100e jour de l'année 2022 ?

**Exercice 4**

1) a) Donnez le chiffre des unités de $5^n$ pour $n$ allant de 1 à 5. Qu'observez vous ?
   b) Trouvez le chiffre des unités de $5^{2022}$.
2) a) Donnez le chiffre des unités de $3^n$ pour $n$ allant de 0 à 10. Qu'observez vous ?
   b) Trouvez le chiffre des unités de $3^{2022}$.
3) Trouvez le chiffre des unités de $8^{2022}$.

**Exercice 5**

La chorale du lycée compte entre 40 et 50 membres. Jane affirme que l'on peut ranger les membres en colonnes de 12, ou en colonnes de 8. Quel est le nombre de membres de cette chorale ?

**Exercice 6**

On souhaite partager un rectangle de 48 cm de long et 30 cm de large en carrés de même taille. Quelle est la plus grande longueur de côté possible ?

**Exercice 7**

Sur la figure, le point $B$ est le coin de la rue $ABC$. On souhaite installer un réverbère en $A$, $B$ et $C$, ainsi que le long de la rue $ABC$. Les réverbères sont à des distances régulières. Quel est le nombre minimal de réverbère que l'on peut installer ?