Chapitre 5

Calcul avec les radicaux

Table 5.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 5…

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
signification de l'ecriture et résolution d'équations quadratiques simples			
signification de l'écriture $\sqrt{a}$		1, 2, 6	
résoudre des équations quadratiques simples $ax^2 = c$ et $(x+b)^2 = c$		3, 4	
résoudre des équations se ramenant à $\sqrt{x} = k$			5
opérations d'addition, multiplication et quotient de radicaux			
simplifier à l'aide de $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$		7, 8, 9	
réduire des sommes, multiplier des expressions	10	11, 12, 13	
utiliser $\sqrt{a^2} = \|a\|$	14	15	16
rendre rationnel le dénominateur d'une fraction		17, 18	
utiliser le conjugué pour simplifier des fractions		19	

5.1 La racine carrée

Définition 5.1 Pour tout réel $a > 0$. Il existe deux nombres réels dont le carré vaut a :

- le nombre **positif** noté $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, c'est « la racine carrée de a ».
- et son opposé $-\sqrt{a} = -a^{\frac{1}{2}}$

Exemple 5.1

R à retenir : pour tout $a > 0$ on a $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$

Proposition 5.1 $\sqrt{x} = b$ signifie $x \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $x = b^2$.

Proposition 5.2 Soit l'équation $x^2 = a$, inconnue x.

1. Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions réelles $x = \sqrt{a} > 0$ et $x = -\sqrt{a} < 0$.
2. Si $a = 0$, l'équation admet une solution unique $x = \sqrt{0} = 0$.
3. Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solutions réelles.

Théorème 5.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa racine carrée $\sqrt{n}$ est égale à un entier ou un irrationnel.

Exemple 5.2

1. $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{225} = 15\dots$
2. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$, $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ ...

R Objectif de ce chapitre est d'apprendre à simplifier les écritures de sommes, de produits et de quotients d'expression de la forme $a + b\sqrt{c}$, avec a, b et c des entiers.

5.2 Propriétés de la racine carrée

Proposition 5.4 Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\sqrt{a^2} = |a|$

Démonstration. les deux nombres a et $-a$ ont un carré égal à a^2 : $(a)^2 = (-a)^2$.

Si $a > 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$.

Si $a < 0$, alors $-a > 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$. ■

■ **Exemple 5.3** $\left(3^2\right)^{0,5} = \sqrt{3^2} = 3$ et $\left((-3)^2\right)^{0,5} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$

Théorème 5.5 Pour tout réels positifs non nuls a et $b > 0$:

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad\qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration. de la 1re égalité, au programme

- $\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$ car produit de $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{b} \geqslant 0$.
- $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$

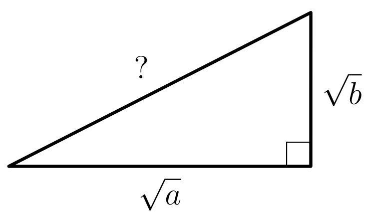
$\sqrt{a}\sqrt{b}$ est un nombre positif, dont le carré vaut ab. Or $\sqrt{ab}$ désigne l'**unique** nombre positif dont le carré vaut ab. Donc on a $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Démontrer la 2e égalité.

■

Théorème 5.6 Pour tout $a > 0$ et $b > 0$, on a l'inégalité $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Démonstration. Illustration géométrique du théorème.



■

5.3 Exercices

Exercice 1 — concepts. Complétez. Plusieurs réponses sont possibles.

1. Le nombre positif dont le carré est 12 s'écrit ....

   Le nombre négatif dont le carré est 25 s'écrit ....

   Il existe .... nombre(s) dont le carré est 7. Le plus petit s'écrit ....
2. L'expression $\sqrt{\pi - 4}$ est (A) non définie (B) bien définie

   L'expression $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ est (A) non définie (B) bien définie
3. Si $x = -\sqrt{6}$ alors (A) x n'existe pas (B) $x^2 = 6$ (C) $x^2 = -6$

   Si $x = \sqrt{-6^2}$ alors (A) x n'existe pas (B) $x = -6$ (C) $x = 6$

   Si $x = \sqrt{9^2}$ alors (A) x n'existe pas (B) $x = 3$ (C) $x = 9$

   Si $x = \sqrt{(-9)^2}$ alors (A) x n'existe pas (B) $x = -9$ (C) $x = 9$
4. Si $x^2 = 10$ et $x < 0$ alors (A) $x = \sqrt{10}$ (B) $x = \sqrt{-10}$ (C) $x = -\sqrt{10}$ (D) $(-x)^2 = 10$

   Si $x^2 = 36$ alors on a (A) $x = 6$ (B) $|x| = 6$ (C) $-x^2 = 36$ (D) $(-x)^2 = 36$
5. L'équation $x^2 + 5 = 0$, inconnue x, admet

   (A) aucune solution réelle (B) une solution unique (C) deux solutions distinctes

   L'équation $x^2 = 3$, inconnue x, admet :

   (A) aucune solution réelle (B) une solution unique (C) deux solutions distinctes
6. L'expression $\sqrt{3x}$ a un sens lorsque (A) $x \geqslant 3$ (B) $x \leqslant 3$ (C) $3x \geqslant 0$ (D) $x \geqslant 0$

   L'expression $\sqrt{-2x}$ est définie lorsque .... $\geqslant 0$, donc pour ....

   L'expression $\sqrt{x - 2}$ est définie lorsque .... $\geqslant 0$, donc pour ....
7. Si $\sqrt{-a} = b$ est vraie, alors (A) $a = -b^2$ (B) $a = b^2$

   Si $a^2 = 2b$ est vraie, alors (A) $a \geqslant 0$ (B) $b \geqslant 0$ (C) $|a| = \sqrt{2b}$ (D) $|a| = 2\sqrt{b}$

   Si $5\sqrt{a} = b$ est vraie, alors (A) $a \geqslant 0$ (B) $b \geqslant 0$ (C) $5a^2 = b^2$ (D) $25a^2 = b^2$
8. Si $\sqrt{x^2} = x$ alors x peut vérifier (A) $x > 0$ (B) $x = 0$ (C) $x < 0$

   Si $\sqrt{x^2} = -x$ alors x peut vérifier (A) $x > 0$ (B) $x = 0$ (C) $x < 0$

Exercice 2 — . Compléter lorsque c'est possible les équations suivantes.

$\sqrt{36} =$	$(\ldots\ldots)^2 = (\ldots\ldots)^2 = 5$	$\left(-\sqrt{12}\right)^2 =$ ....
$-\sqrt{64} =$	$\sqrt{3}^2 =$	$\left(10\sqrt{2}\right)^2 =$ ....
$\sqrt{-9} =$	$\sqrt{5} \times \sqrt{5} =$	$\left(2\sqrt{10}\right)^2 =$ ....
$\sqrt{100} =$	$-\sqrt{10}^2 =$	$\left(\ldots\ldots\sqrt{2}\right)^2 = \ldots\ldots\ \sqrt{2}^2 = 98$

■ **Exemple 5.4 — résoudre des équations quadratiques simples de la forme $ax^2+b=c$.** Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
& 3x^2-1=8 \\
\iff\ & 3x^2=9 && +1 \\
\iff\ & x^2=3 && \times\frac{1}{3} \\
\iff\ & x=\sqrt{3} \text{ ou } x=-\sqrt{3} \\
& \mathscr{S}=\left\{\sqrt{3}\ ;\ -\sqrt{3}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 5-2x^2=11 \\
\iff\ & -2x^2=6 && -5 \\
\iff\ & x^2=-3 && \times\frac{-1}{2} \\
& \text{impossible} \\
& \mathscr{S}=\varnothing
\end{aligned}
$$

■ **Exemple 5.5 — résoudre des équations quadratiques simples de la forme $(x\pm a)^2=k$.** Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
& (x+3)^2=36 \\
\iff\ & x+3=\pm\sqrt{36}=\pm 6 \\
\iff\ & x+3=6 \quad \text{ou} \quad x+3=-6 \\
\iff\ & x=3 \quad \text{ou} \quad x=-9 \\
& \mathscr{S}=\{3\ ;\ -9\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (x-4)^2=7 \\
\iff\ & x-4=\pm\sqrt{7} \\
\iff\ & x-4=\sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x-4=-\sqrt{7} \\
\iff\ & x=4+\sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x=4-\sqrt{7} \\
& \mathscr{S}=\{4+\sqrt{7}\ ;\ 4-\sqrt{7}\}
\end{aligned}
$$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant le terme carré :

(E_1) $x^2=4$	(E_3) $3x^2-48=0$	(E_5) $4x^2=4$	(E_7) $5x^2+7=42$
(E_2) $2x^2=-10$	(E_4) $6x^2=0$	(E_6) $4x^2-5=15$	(E_8) $7-3x^2=19$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant le terme carré :

(E_1) $(x-3)^2=16$	(E_3) $(x+1)^2=9$	(E_5) $(x+4)^2+25=0$	(E_7) $(2x-3)^2=25$
(E_2) $(x+4)^2=13$	(E_4) $(x-7)^2=0$	(E_6) $(x-2)^2=10$	(E_8) $\frac{1}{2}(3x+1)^2=7$

■ **Exemple 5.6 — Résoudre équations et inéquations en isolant la racine.**

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{x}=3 \\
\iff\ & x=3^2 \\
& \mathscr{S}=\{9\}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
& \sqrt{x}=-2 \\
& \text{impossible} \\
& \mathscr{S}=\varnothing
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -9\sqrt{x}-15=-69 \\
\iff\ & -9\sqrt{x}=-54 \\
\iff\ & \sqrt{x}=6 \\
\iff\ & x=6^2=36 \quad \mathscr{S}=\{36\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 4\sqrt{x+2}=12 \\
\iff\ & \sqrt{x+2}=3 \\
\iff\ & x+2=3^2 \\
\iff\ & x=7 \quad \mathscr{S}=\{7\}
\end{aligned}
$$

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant la racine.

(E_1) $\sqrt{x}=9$	(E_3) $5\sqrt{x}=0$	(E_5) $-2\sqrt{x+3}-15=-21$
(E_2) $5\sqrt{x}=-6$	(E_4) $7-4\sqrt{x-1}=-9$	(E_6) $5\sqrt{x+2}+6=16$

solution de l'exercice 3. $S_1=\{-2,2\}$; $S_2=\varnothing$; $S_3=\{-4,4\}$; $S_4=\{0\}$; $S_5=\{0\}$; $S_6=\left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$; $S_7=\left\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\right\}$; $S_8=\varnothing$; ■

solution de l'exercice 4. $S_1=\{-1,7\}$; $S_2=\left\{-4-\sqrt{13},-4+\sqrt{13}\right\}$; $S_3=\{-4,2\}$; $S_4=\{7\}$; $S_5=\varnothing$; $S_6=\left\{2-\sqrt{10},2+\sqrt{10}\right\}$; $S_7=\{-1,4\}$; $S_8=\left\{-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{14}}{3},-\frac{\sqrt{14}}{3}-\frac{1}{3}\right\}$; ■

solution de l'exercice 5. $S_1=\{81\}$; $S_2=\varnothing$; $S_3=\{0\}$; $S_4=\{17\}$; $S_5=\{6\}$; $S_6=\{2\}$; ■

■ **Exemple 5.7 — Carrés parfaits à connaitre.** de collège.

$1^2 =$; $\sqrt{} = 1$	$6^2 =$; $\sqrt{} = 6$	$11^2 =$; $\sqrt{} = 11$
$2^2 =$; $\sqrt{} = 2$	$7^2 =$; $\sqrt{} = 7$	$12^2 =$; $\sqrt{} = 12$
$3^2 =$; $\sqrt{} = 3$	$8^2 =$; $\sqrt{} = 8$	$13^2 =$; $\sqrt{} = 13$
$4^2 =$; $\sqrt{} = 4$	$9^2 =$; $\sqrt{} = 9$	$14^2 =$; $\sqrt{} = 14$
$5^2 =$; $\sqrt{} = 5$	$10^2 =$; $\sqrt{} = 10$	$15^2 =$; $\sqrt{} = 15$

Exercice 6 — 🖩. Corriger, si nécessaire, les égalités suivantes :

1. $\sqrt{36} = \sqrt{6}$ ....
2. $\sqrt{49}^2 = \sqrt{7}$ ....
3. $\sqrt{5}^2 = 25$ ....
4. $\sqrt{10} = 5$ ....
5. $\sqrt{-9^2} = 9$ ....
6. $\sqrt{(-1)^2} = -1$ ....
7. $\sqrt{8^2} + \sqrt{6^2} = \sqrt{100}$ ....
8. $\sqrt{81} + \sqrt{9} = \sqrt{90}$ ....

Pour $a, b > 0$, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

■ **Exemple 5.8 — Simplifier : Écrire une expression avec le terme sous la racine le plus petit possible.**

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{12} && \text{identifier le plus grand carré facteur de } 12 \\ &= \sqrt{4(3)} && \text{utiliser } \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= \sqrt{4}\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{75} \\ &= \sqrt{25()} \\ &= \sqrt{25}\sqrt{} \\ &= 5\sqrt{} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 2\sqrt{18} \\ &= 2\sqrt{9()} \\ &= 2\sqrt{9}\sqrt{} \\ &= \end{aligned}$$

Exercice 7 — 🖩. Complétez par des entiers, afin de rendre les égalités vraies.

$\sqrt{8} = \sqrt{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}} = \boxed{}\sqrt{\boxed{}}$

$\sqrt{32} = \sqrt{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}} = \boxed{}\sqrt{\boxed{}}$

$\sqrt{27} = \sqrt{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}} = \boxed{}\sqrt{\boxed{}}$

$\sqrt{50} = \sqrt{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}} = \boxed{}\sqrt{\boxed{}}$

$\sqrt{48} = \sqrt{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}} = \boxed{}\sqrt{\boxed{}}$

$\sqrt{200} = \sqrt{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}} = \boxed{}\sqrt{\boxed{}}$

$\sqrt{288} = \sqrt{144}\sqrt{\boxed{}} = \boxed{}\sqrt{\boxed{}}$

$\sqrt{98} = \sqrt{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}} = \boxed{}\sqrt{\boxed{}}$

$\sqrt{\boxed{}} = \sqrt{36}\sqrt{2} = \boxed{}\sqrt{\boxed{}}$

$\sqrt{\boxed{}} = \sqrt{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}} = 2\sqrt{6}$

$\sqrt{\boxed{}} = \sqrt{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}} = 15\sqrt{2}$

$\sqrt{\boxed{}} = \sqrt{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}} = 8\sqrt{5}$

$\sqrt{900} =$ ....

$\sqrt{8100} =$ ....

$\sqrt{2500} =$ ....

$\sqrt{160} =$ ....

$\sqrt{49 \times 10^2} =$ ....

$\sqrt{25 \times 10^4} =$ ....

Exercice 8 — . Complétez par des entiers, afin de rendre les égalités vraies.

$$\sqrt{0{,}25}=\sqrt{\frac{25}{100}}=\frac{\sqrt{\boxed{}}}{\sqrt{\boxed{}}}=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}=\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sqrt{0{,}36}=\sqrt{\frac{36}{100}}=\frac{\sqrt{\boxed{}}}{\sqrt{\boxed{}}}=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}=\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sqrt{1{,}96}=\sqrt{\frac{\boxed{}}{\boxed{}}}=\frac{\sqrt{\boxed{}}}{\sqrt{\boxed{}}}=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}=\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sqrt{\frac{\boxed{}}{\boxed{}}}=\frac{\sqrt{\boxed{}}}{\sqrt{\boxed{}}}=\frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{\boxed{}}{\boxed{}}}=\frac{\sqrt{\boxed{}}}{\sqrt{\boxed{}}}=\frac{5}{7}$$

$$\sqrt{\frac{\boxed{}}{\boxed{}}}=\frac{\sqrt{\boxed{}}}{\sqrt{\boxed{}}}=\frac{5^2}{7^3}$$

Exercice 9 — . Déterminer $\sqrt{a}$ et comparer avec a dans chaque cas.

1. $a=0{,}16$ | **2.** $a=1{,}21$ | **3.** $a=0{,}64$ | **4.** $a=2{,}25$

■ **Exemple 5.9** Simplifier sous la forme $a\sqrt{b}$, ou $a\in\mathbb{Z}$, et $b\in\mathbb{N}$ est le plus petit possible.

$A=\sqrt{2}\times 3$

$=3\sqrt{2}$

mettre la racine après le coefficient

$C=3\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

$=3\sqrt{6}$

utiliser l'identité $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

$B=3\sqrt{50}=3\sqrt{25(2)}$

$=3\sqrt{25}\sqrt{2}$

$=3(5)\sqrt{2}=15\sqrt{2}$

utiliser l'identité $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

$D=(2\sqrt{3})\times(5\sqrt{12})$

$=(2\sqrt{3})\times(5\sqrt{4}\sqrt{3})$

$=20\sqrt{3}\sqrt{3}=20(3)=60$

Exercice 10 — . Simplifier sous la forme $a\sqrt{b}$, ou $a\in\mathbb{Z}$, et $b\in\mathbb{N}$ est le plus petit possible.

$A=\sqrt{7}\sqrt{5}$	$D=2\sqrt{48}$	$G=(5\sqrt{2})\times(2\sqrt{12})$	$J=(3\sqrt{20})(2\sqrt{18})$
$B=\sqrt{5}(5)$	$E=5\sqrt{63}$	$H=(5\sqrt{21})(2\sqrt{3})$	$K=(7\sqrt{2})^2$
$C=\sqrt{5}\sqrt{2}$	$F=10\sqrt{8}$	$I=(2\sqrt{8})\sqrt{27}$	$L=(2\sqrt{5})^3$

■ **Exemple 5.10 — Réduire des sommes de radicaux.** Réduire les expressions suivantes :

$A=\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

$=4\sqrt{2}$

comme pour réduire $x+3x$

$B=\sqrt{27}+5\sqrt{3}$

$=\sqrt{9}\sqrt{3}+5\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

simplifier les racines

$C=5\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+5$

$=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$D=2\sqrt{27}-5\sqrt{12}=\dots\dots\dots$

$=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 11 — . Réduire et simplifier les sommes suivantes :

$A=\sqrt{3}+\sqrt{3}$	$D=\sqrt{12}-5\sqrt{27}$	$G=7\sqrt{8}+3\sqrt{2}$	$J=\sqrt{27}-2\sqrt{3}$
$B=\sqrt{5}+\sqrt{10}$	$E=2\sqrt{80}-3\sqrt{20}$	$H=\sqrt{12}-\sqrt{10}$	$K=(10+4\sqrt{7})-(2+\sqrt{7})$
$C=\sqrt{45}-\sqrt{20}$	$F=9\sqrt{7}+\sqrt{63}$	$I=\sqrt{15}+\sqrt{20}$	$L=(2\sqrt{2}+8)-(\sqrt{2}+1)$

■ **Exemple 5.11** Développer, simplifier et réduire les produits suivants :

$(\sqrt{3}-2)(\sqrt{6}+5)=\sqrt{3}\sqrt{6}-2\sqrt{6}+5\sqrt{3}-10=\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{2}-2\sqrt{6}+5\sqrt{3}-10=3\sqrt{2}-2\sqrt{6}+5\sqrt{3}-10$

$(\sqrt{8}+3)(\sqrt{2}-1)=\sqrt{8}\sqrt{2}-\sqrt{8}+3\sqrt{2}-3=\sqrt{16}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-3=4-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-3=\sqrt{2}+1$

Exercice 12 — 🖩. Développer, simplifier et réduire les produits suivants :

$A=3(4+\sqrt{2})$	$D=(\sqrt{7}+3)(\sqrt{3}+5)$	$G=(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+2)$
$B=\sqrt{3}(4+\sqrt{3})$	$E=(7\sqrt{11}-9)(3+8\sqrt{11})$	$H=(\sqrt{8}-\sqrt{12})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$
$C=\sqrt{3}(\sqrt{12}+2\sqrt{3})$	$F=(6\sqrt{6}-8)(2+9\sqrt{6})$	$I=(4\sqrt{5}-\sqrt{2})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})$

Exercice 13 — 🖩. Développer à l'aide d'indentités remarquables les produits suivants :

$A=(-2\sqrt{5}-5)^2$	$B=(3+\sqrt{11})(3-\sqrt{11})$	$C=(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

Exercice 14 — communiquer.

$$\begin{aligned} & x^2=(x-2)^2 \\ \iff & \sqrt{x^2}=\sqrt{(x-2)^2} \\ \iff & x=x-2 \\ \iff & 0=-2 \quad \text{impossible} \end{aligned}$$

La conclusion de la résolution de Jim est $\mathscr{S}=\varnothing$.

Jean-luc fait remarquer que $x=1$ est pourtant une solution !

Expliquer l'erreur de Jim dans la résolution.

Exercice 15 — 🖩. Simplifier à l'aide de $\sqrt{a^2}=|a|$ les racines de carrés suivantes :

$A=\sqrt{5^2}$	$C=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$	$E=\sqrt{(1-\pi)^2}$
$B=\sqrt{(-5)^2}$	$D=\sqrt{\left(\sqrt{10}-9\right)^2}$	$F=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}$

■ **Exemple 5.12 — simplifier des expressions de la forme $\sqrt{a\pm 2b\sqrt{c}}$.**

1. Développer, simplifier et réduire $(3-\sqrt{10})^2$.
2. En déduire une forme simplifiée de l'écriture $\sqrt{19-6\sqrt{10}}$.

solution.

$$\begin{aligned} (3-\sqrt{10})^2 &= (3)^2-2(3)(\sqrt{10})+(\sqrt{10})^2 \\ \therefore (3-\sqrt{10})^2 &= 19-6\sqrt{10} \\ \sqrt{(3-\sqrt{10})^2} &= \sqrt{19-6\sqrt{10}} \\ |3-\sqrt{10}| &= \sqrt{19-6\sqrt{10}} && \sqrt{a^2}=|a| \\ -(3-\sqrt{10}) &= \sqrt{19-6\sqrt{10}} && ⚠ \; 3-\sqrt{10}<0 \\ \therefore \sqrt{19-6\sqrt{10}} &= -3+\sqrt{10} \end{aligned}$$

■

Exercice 16 — un grand classique.

1. Développer simplifier et réduire $(3+5\sqrt{2})^2$. En déduire une écriture simplifiée de $\sqrt{59+30\sqrt{2}}$.
2. Développer simplifier et réduire $(2-\sqrt{5})^2$. En déduire une écriture simplifiée de $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.
3. Développer simplifier et réduire $(3-2\sqrt{5})^2$. Que pouvez vous en conclure ?

■ **Exemple 5.13 — simplifier des quotients de racines en rendant rationnel le dénominateur.**

$$A = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{10}}{3(5)} = \frac{7\sqrt{10}}{15}$$

rendre rationnel le dénominateur

simplifier les produits de racines

$$B = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{\sqrt{4(3)}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$C = \frac{\sqrt{28}}{5\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{4(7)}}{5\sqrt{4(3)}} = \frac{2\sqrt{7}}{5(2)\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{5\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{15}$$

simplifier les radicaux

rendre rationnel le dénominateur

simplifier les produits de racines

Exercice 17 — . Simplifier les quotients en rendant rationel le dénominateur :

$A = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ | $B = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$ | $C = \dfrac{5}{\sqrt{7}}$ | $D = \dfrac{7}{2\sqrt{3}}$ | $E = \dfrac{14}{3\sqrt{7}}$ | $F = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ | $G = \dfrac{\sqrt{12}}{2\sqrt{5}}$ | $H = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Si le dénominateur d'une fraction est de la forme $A + B\sqrt{C}$, on peut rendre rationel le dénominateur en multipliant numérateur et dénominateur par le **conjugué** $A - B\sqrt{C}$.

■ **Exemple 5.14** Simplifier en rendant rationel le dénominateur. Montrer les calculs.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{4}{\sqrt{5}-2} = \frac{4}{(\sqrt{5}-2)}\frac{(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}+2)} = \frac{4\sqrt{5}+8}{\sqrt{5}^2-2^2} = \frac{4\sqrt{5}+8}{5-4} = 4\sqrt{5}+8$$

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{6}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{6\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2} = \frac{6\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$$

Exercice 18 — . Rendre rationel le dénominateur dans les expressions suivantes.

$A = \dfrac{1}{5-\sqrt{3}}$, $B = \dfrac{3}{2-\sqrt{5}}$ | $C = \dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$, $D = \dfrac{15}{\sqrt{7}-5}$ | $E = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $F = \dfrac{3}{7-4\sqrt{3}}$ | $G = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$, $H = \dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

à retenir Pour rendre rationnel le dénominateur d'une fraction :

- si le dénominateur est un produit ayant pour facteur $\sqrt{a}$, alors on multiplie par $\sqrt{a}$.
- si le dénominateur est de la forme $a \pm \sqrt{b}$ (ou $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$) alors on multipliera par le conjugué.

■ **Exemple 5.15** Simplifier les termes racines au **numérateur**.

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\frac{(\sqrt{4+h}+2)}{(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{(\sqrt{4+h})^2-2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$

Exercice 19 Simplifier les termes racines au **numérateur** dans les expressions suivantes.

$A = \dfrac{1-\sqrt{5}}{3}$ | $B = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$ | $C = \dfrac{\sqrt{r}+\sqrt{2}}{5}$ | $D = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

5.4 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 1 . ■

solution de l'exercice 2 . ■

solution de l'exercice 3. $S_1 = \{-2, 2\}$; $S_2 = \varnothing$; $S_3 = \{-4, 4\}$; $S_4 = \{0\}$; $S_5 = \{0\}$; $S_6 = \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$; $S_7 = \left\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right\}$; $S_8 = \varnothing$; ■

solution de l'exercice 4. $S_1 = \{-1, 7\}$; $S_2 = \left\{-4-\sqrt{13}, -4+\sqrt{13}\right\}$; $S_3 = \{-4, 2\}$; $S_4 = \{7\}$; $S_5 = \varnothing$; $S_6 = \left\{2-\sqrt{10}, 2+\sqrt{10}\right\}$; $S_7 = \{-1, 4\}$; $S_8 = \left\{-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{14}}{3}, -\dfrac{\sqrt{14}}{3}-\dfrac{1}{3}\right\}$; ■

solution de l'exercice 5. $S_1 = \{81\}$; $S_2 = \varnothing$; $S_3 = \{0\}$; $S_4 = \{17\}$; $S_5 = \{6\}$; $S_6 = \{2\}$; ■

solution de l'exercice 6 . ■

solution de l'exercice 7 . ■

solution de l'exercice 8 . ■

solution de l'exercice 9 . ■

solution de l'exercice 10 . $A = \sqrt{35}$; $B = 5\sqrt{5}$; $C = \sqrt{10}$; $D = 8\sqrt{3}$; $E = 15\sqrt{7}$; $F = 20\sqrt{2}$; $G = 20\sqrt{6}$; $H = 30\sqrt{7}$; $I = 12\sqrt{6}$; $J = 36\sqrt{10}$; $K = 98$; $L = 40\sqrt{5}$; ■

solution de l'exercice 11 . $A = 2\sqrt{3}$; $B = \sqrt{5}+\sqrt{10}$; $C = \sqrt{5}$; $D = -13\sqrt{3}$; $E = 2\sqrt{5}$; $F = 12\sqrt{7}$; $G = 17\sqrt{2}$; $H = -\sqrt{10}+2\sqrt{3}$; $I = \sqrt{15}+2\sqrt{5}$; $J = \sqrt{3}$; $K = 3\sqrt{7}+8$; $L = \sqrt{2}+7$; ■

solution de l'exercice 12 . $A = 3\sqrt{2}+12$; $B = 3+4\sqrt{3}$; $C = 12$; $D = \sqrt{21}+3\sqrt{3}+5\sqrt{7}+15$; $E = 589-51\sqrt{11}$; $F = 308-60\sqrt{6}$; $G = -2\sqrt{3}-3+\sqrt{15}+2\sqrt{5}$; $H = 10-4\sqrt{6}$; $I = -26+13\sqrt{10}$; ■

solution de l'exercice 13 . $A = 20\sqrt{5}+45$; $B = -2$; $C = 3$; ■

solution de l'exercice 14 . ■

solution de l'exercice 15 . ■

solution de l'exercice 16 . ■

solution de l'exercice 17 . $A = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$; $B = 4\sqrt{3}$; $C = \dfrac{5\sqrt{7}}{7}$; $D = \dfrac{7\sqrt{3}}{6}$; $E = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$; $F = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $G = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$; $H = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; ■

solution de l'exercice 18 . $A = \dfrac{\sqrt{3}+5}{22}$; $B = -3\sqrt{5}-6$; $C = \dfrac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{7}}{5}$; $D = \dfrac{-25-5\sqrt{7}}{6}$; $E = 5-2\sqrt{6}$; $F = 12\sqrt{3}+21$; $G = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; $H = \dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. ■

solution de l'exercice 19 . ■

5.5 Club maths : puissances et multiplications de radicaux

Problème 1 Sachant que $a+\dfrac{1}{a}=1+\sqrt{10}$, déterminer $a^2+\dfrac{1}{a^2}$.

Problème 2 Calculer $(1+\sqrt{2})^{2022}(1-\sqrt{2})^{2023}$.

Problème 3

Pour chaque cas trouver des nombres entiers a, b ou c qui rendent l'égalité vraie.

1. $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=3$
2. $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=1$
3. $(3+b\sqrt{c})(3-b\sqrt{c})=1$
4. $(8+b\sqrt{c})(8-b\sqrt{c})=1$
5. $(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})=1$
6. $(a+b\sqrt{5})(a-b\sqrt{5})=1$ $(b\neq 0)$

Problème 4 — Un peu plus dur !. Mêmes consignes.

1. $(a+b\sqrt{11})(a-b\sqrt{11})=1$
2. $(a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c})=4$ (b et c sont $\neq$ de 1 et 0)
3. $(a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c})=5$
4. $(a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c})=13$

■ **Exemple 5.16 — expression de la forme $\sqrt{m+2\sqrt{n}}$.** peut se simplifier en cherchant deux entiers a et b tel que $m+2\sqrt{n}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$. On peut alors écrire $\sqrt{m+2\sqrt{n}}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

$\sqrt{9+4\sqrt{5}}=?$

Nous cherchons deux nombres a et $b\in\mathbb{N}$:

$$9+4\sqrt{5}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$
$$9+2(2)\sqrt{5}=a+2\sqrt{ab}+b$$
$$9+2\sqrt{4}\sqrt{5}=a+b+2\sqrt{ab}$$

Il **suffit** que a et b vérifient $\begin{cases}a+b=9\\ ab=20\end{cases}$.

On peut procéder par essai erreur :

a	b	ab	$a+b$	
2	10	20	12	✗
4	5	20	9	✓

$\therefore\ \sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{5})^2}=|2+\sqrt{5}|=2+\sqrt{5}$.

$\sqrt{18-12\sqrt{2}}=?$

Nous cherchons deux nombres a et $b\in\mathbb{N}$:

$$18-12\sqrt{2}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$
$$18-2(6)\sqrt{2}=a-2\sqrt{ab}+b$$
$$18-2\sqrt{36}\sqrt{2}=a+b-2\sqrt{ab}$$

Il **suffit** que a et b vérifient $\begin{cases}a+b=18\\ ab=36\times 2=72\end{cases}$

On peut procéder par essai erreur :

a	b	ab	$a+b$	
2	36	72	12	✗
3	24	72	39	✗
4	18	72	40	✗
8	9	72	18	✓

$\sqrt{18-12\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{8}-\sqrt{9})^2}=|\sqrt{8}-\sqrt{9}|=3-\sqrt{8}$

Problème 5 Simplifier les racines de radicaux suivants :

$A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ | $B=\sqrt{8+2\sqrt{7}}$ | $C=\sqrt{11+4\sqrt{6}}$

Problème 6 Simplifier les expressions suivantes.

$A=\dfrac{1}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$ | $B=\dfrac{1}{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}$ | $C=\dfrac{1}{\sqrt{15-10\sqrt{2}}}$

Problème 7 Montrer que pour tout a et $b \in \mathbb{R}$ on a $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$.

■ **Exemple 5.17 — méthode alternative :** $\sqrt{52+16\sqrt{3}} =?$. On cherche a et b :

$$52+16\sqrt{3} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$52+2\sqrt{192} = a+2\sqrt{ab}+b$$

a et b solutions du système **non linéaire** $\begin{cases} a+b=52 \\ ab=192 \end{cases}$.

On peut utiliser l'identité du problème 7 pour se ramener au système **linéaire** $\begin{cases} a+b=52 \\ a-b=44 \end{cases}$.

En effet : $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 52^2 - 4\times 192 = 1936$ donc $a-b=44$. $a=48$ et $b=4$.

$$52+16\sqrt{3} = (\sqrt{48}+\sqrt{4})^2 = (4\sqrt{3}+2)^2$$

$$\sqrt{52+16\sqrt{3}} = |4\sqrt{3}+2| = 4\sqrt{3}+2$$

Problème 8 Déterminer les racines carrées de quelques radicaux parmi :

$A = \sqrt{36-10\sqrt{11}}$	$C = \sqrt{49+20\sqrt{6}}$	$E = \sqrt{52+16\sqrt{3}}$	$G = \sqrt{55+30\sqrt{2}}$
$B = \sqrt{36+16\sqrt{2}}$	$D = \sqrt{29-12\sqrt{5}}$	$F = \sqrt{64-24\sqrt{7}}$	$H = \sqrt{42-24\sqrt{3}}$

Problème 9

m et n sont deux nombres entier positifs.

Rendre rationnel le dénominateur et simplifier l'expression $\dfrac{m+n-2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$.

Problème 10

Soit $x>1$. Rendre rationnel le dénominateur et simplifier l'expression $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

Problème 11

On pose $x = 4-\sqrt{2}$ et $y = 4+\sqrt{2}$. Simplifier les expressions suivantes :

1. xy
2. xy^2+x^2y
3. $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$

Problème 12

On pose $x = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ et $y = \sqrt{3}-\sqrt{2}$. Simplifier les expressions suivantes :

1. x^2-xy+y^2
2. x^3y+x^3y