Chapitre 12

Géométrie analytique (1)

La *géométrie analytique* est une approche de la géométrie à l'aide d'un système de coordonnées.

Table 12.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 12…

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
Formule de la distance dans un repère orthonormé			
calculer une distance dans un repère orthonormé		1	
déterminer la nature d'un triangle		2, 3	4
problèmes		5	12
Coordonnées du milieu d'un segment			
déterminer graphiqument ou par le calcul le milieu d'un segment	6	7, 8	
déterminer la nature d'un quadrilatère		9, 10	11
déterminer les coordonnées d'une extrémité d'un segment	13	14, 15	
4^{e} sommet d'un parallélogramme)		16	

12.1 Repères orthonomés

Définition 12.1 O, I et J sont trois points non alignés. Le repère $(O; I, J)$ du plan est formé de :

1. l'origine O du repère
2. (OI) est l'axe gradué des abscisses (des x). Le point I a pour abscisse 1.
3. (OJ) est l'axe gradué des ordonnées (des y). Le point J a pour ordonnée 1.

Chaque point M du plan correspond à un unique couple de coordonnées $(x\ ;\ y)$. Ces coordonnées se lisent sur les deux axes en tracant leurs *parallèles* passant par M.

■ **Exemple 12.1** Dans le repère $(O; I, J)$ ci-dessous, préciser les coordonnées des points suivants :

$O(\quad ; \quad)$

$I(\quad ; \quad)$

$J(\quad ; \quad)$

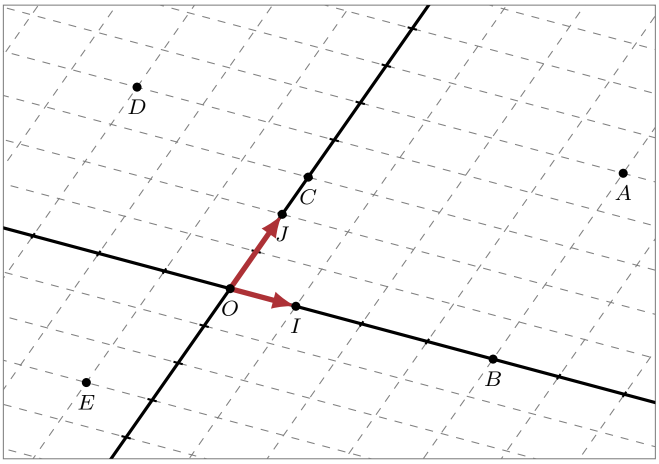
$A(\quad ; \quad)$

$B(\quad ; \quad)$

$C(\quad ; \quad)$

$D(\quad ; \quad)$

$E(\quad ; \quad)$



Définition 12.2 — types de repères.

— Si le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O, le repère $(O; I, J)$ est dit *orthonormé.*

— Si le triangle OIJ est rectangle non isocèle en O, le repère $(O; I, J)$ est dit *orthogonal.*

— Si le triangle OIJ n'est pas rectangle. Le repère est dit *oblique.*

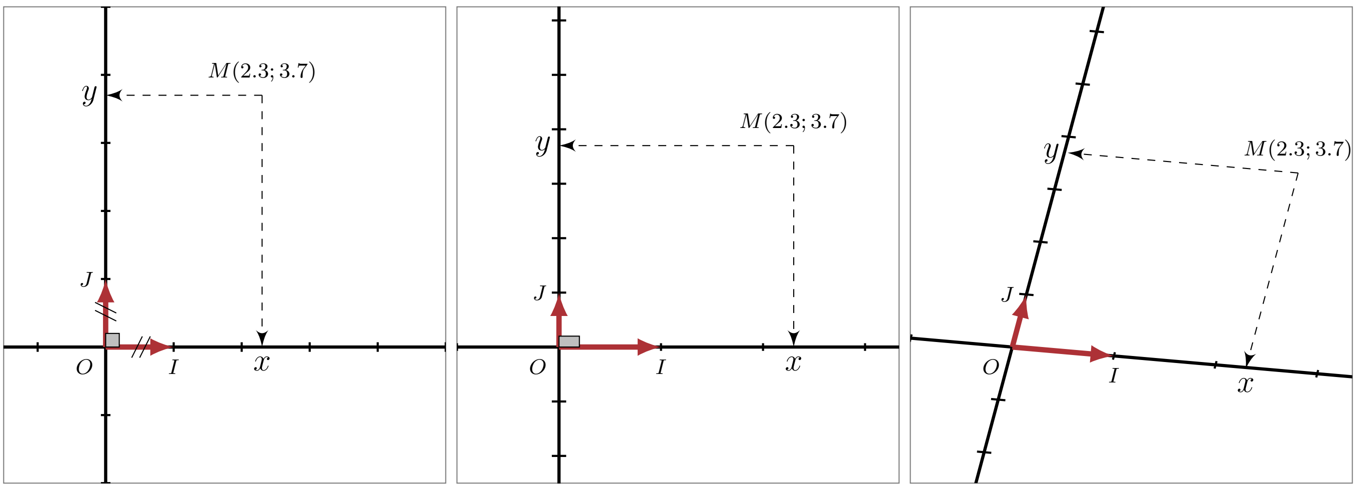


Figure 12.1 – Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, le triangle OIJ est rectangle isocèle (gauche). Le repère $(O; I, J)$ est orthogonal si OIJ est rectangle mais pas isocèle (milieu). Les repères peuvent être obliques (droite).

12.2 Formule de la distance dans un repère orthonormé

Théorème 12.1 Dans le repère *orthonormé* $(O\ ;\ I, J)$ et les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

La longueur du segment AB est donnée par :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Démonstration.

Le repère est orthonormé et le triangle ABC est rectangle en C.

D'après théorème de Pythagore :

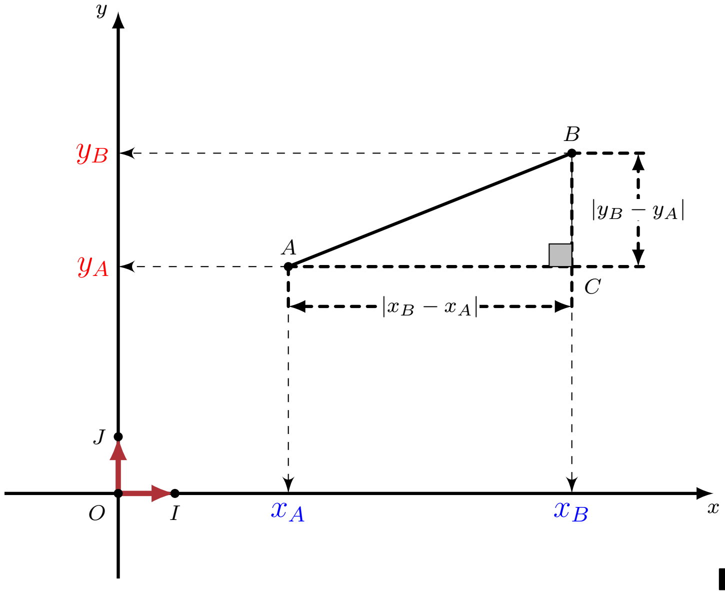
$$AC = |x_B - x_A| \qquad BC = |y_B - y_A|$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

$$AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \quad |a|^2 = a^2$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



∎

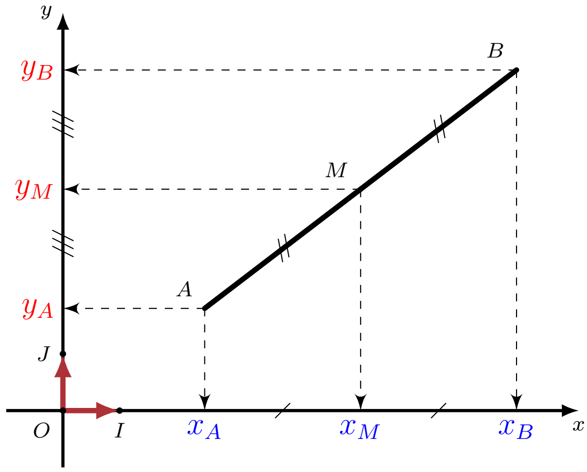
12.3 Coordonnées du milieu d'un segment

Théorème 12.2 Dans le repère $(O\ ;\ I, J)$, les coordonnées du milieu $M(x_M; y_M)$ du segment $[AB]$ sont les *demi-sommes* des coordonnées des extrémités $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

$$(x_M\ ;\ y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

R Le théorème 12.2 est une conséquence du théorème de Thalès.

Le théorème reste valable dans un repère oblique.



12.4 Exercices

■ **Exemple 12.2** Déterminer la distance entre $A(6\ ;\ 3)$ et $B(8\ ;\ -2)$.

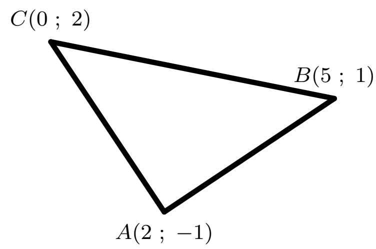
solution.
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(8-6)^2 + (3-(-2))^2} \\ &= \sqrt{2^2+5^2} \\ &= \sqrt{4+25} \\ &= \sqrt{29} \text{ Unités de longueurs (U.L.)} \end{aligned}$$ ■

Exercice 1

Déterminer les distances séparant les deux points données. Le repère est supposé orthonormé.

1. $A(2\ ;\ 6)$ et $B(3\ ;\ 3)$
2. $M(2\ ;\ 4)$ et $N(-1\ ;\ -3)$
3. $R(3\ ;\ -2)$ et $S(5\ ;\ -2)$
4. $W(-4\ ;\ 0)$ et $X(0\ ;\ 3)$
5. $C(-2\ ;\ 3)$ et $D(1\ ;\ 5)$
6. $O(0\ ;\ 0)$ et $P(-2\ ;\ 4)$
7. $T(0\ ;\ 3)$ et $U(2\ ;\ -1)$
8. $Y(-1\ ;\ -4)$ et $Z(-3\ ;\ 3)$
9. $E(1\ ;\ 5)$ et $F(-2\ ;\ 7)$

■ **Exemple 12.3 — nature d'un triangle.**



Soit $A(2\ ;\ -1)$, $B(5\ ;\ 1)$ et $C(0\ ;\ 2)$ dans un repère orthonormé

1. Déterminer, à l'aide de la formule de la distance, si le triangle ABC est équilatéral, isocèle non équilatéral où scalène.
2. Le triangle est-il rectangle ? Justifier.

solution.

1. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$; $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$; $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
$$\begin{array}{lll} = \sqrt{(5-2)^2 + (1-(-1))^2} & = \sqrt{(0-2)^2 + (2-(-1))^2} & = \sqrt{(0-5)^2 + (2-1)^2} \\ = \sqrt{3^2+2^2} & = \sqrt{(-2)^2+3^2} & = \sqrt{(-5)^2+1^2} \\ = \sqrt{13} \text{ U.L.} & = \sqrt{13} \text{ U.L.} & = \sqrt{26} \text{ U.L.} \end{array}$$
$AB = AC$, le triangle ABC est isocèle en A
2. Dans le triangle ABC, $[BC]$ est le plus grand côté :
$$\begin{array}{c|ccc} BC^2 & AB^2 & + & AC^2 \\ (\sqrt{26})^2 & (\sqrt{13})^2 & + & (\sqrt{13})^2 \\ & 13 & + & 13 \\ 26 & & 26 & \end{array}$$

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore. ■

Exercice 2

Classifier le triangle ABC parmi équilatéral, isocèle non équilatéral ou scalène.

1. $A(-1\ ;\ 0)$, $B(-2\ ;\ 3)$ et $C(-5\ ;\ 4)$
2. $A(0\ ;\ 1)$, $B(0\ ;\ -1)$ et $C(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$
3. $A(-2\ ;\ -4)$, $B(1\ ;\ 4)$ et $C(2\ ;\ -3)$
4. $A(0\ ;\ -4)$, $B(\sqrt{3}\ ;\ 1)$ et $C(3\sqrt{3}\ ;\ -5)$

Exercice 3

Utiliser la forme de la distance pour déterminer les triangles ABC rectangles. Vous indiquerez le sommet de l'angle droit.

1. $A(1\ ;\ -1)$, $B(-1\ ;\ 2)$ et $C(7\ ;\ 3)$
2. $A(-2\ ;\ 3)$, $B(-5\ ;\ 4)$ et $C(1\ ;\ 2)$
3. $A(-1\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ 4)$ et $C(5\ ;\ 0)$
4. $A(5\ ;\ 4)$, $B(-4\ ;\ 6)$ et $C(-3\ ;\ 2)$

Exercice 4

Déterminer la nature du triangle ABC (les longueurs des côtés et la présence d'un angle droit).

1. $A(-4\ ;\ 5)$, $B(3\ ;\ 4)$ et $C(8\ ;\ -1)$
2. $A(2\ ;\ -5)$, $B(-2\ ;\ 2)$ et $C(-4\ ;\ -1)$
3. $A(-2\ ;\ 1)$, $B(-3\ ;\ 4)$ et $C(1\ ;\ 2)$
4. $A(\sqrt{3}\ ;\ -1)$, $B(0\ ;\ 2)$ et $C(-\sqrt{3}\ ;\ -1)$

■ **Exemple 12.4** Déterminer a sachant que $P(-2\ ;\ 4)$ et $Q(-1\ ;\ a)$ et $PQ = \sqrt{10}$.

solution.

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \\ \sqrt{10} &= \sqrt{((-1) - (-2))^2 + (a-4)^2} \\ 10 &= 1^2 + (a-4)^2 \\ 9 &= (a-4)^2 \end{aligned}$$

, on a alors : $a - 4 = \pm 3$

$$\begin{aligned} a &= 4 + 3 \text{ ou } 4 - 3 \\ a &= 7 \text{ ou } 1 \end{aligned}$$

■

Exercice 5

On se place dans un repère orthonormé $O\ ;\ I\ ,\ J)$. Déterminer a dans chaque cas.

1. $P(2\ ;\ 1)$ et $Q(a\ ;\ -3)$ avec $PQ = 5$.
2. $P(a\ ;\ 6)$ et $Q(-2\ ;\ 1)$ avec $PQ = \sqrt{29}$.
3. $P(a\ ;\ a)$ et avec $OP = \sqrt{8}$.
4. $Q(3\ ;\ a)$, $A(-1\ ;\ 5)$, $B(6\ ;\ 4)$ avec $AQ = BQ$.

■ **Exemple 12.5**

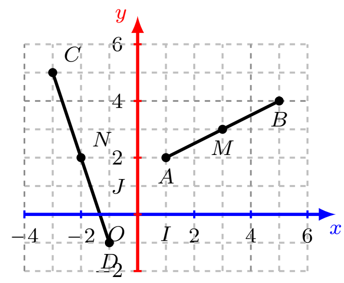
Déterminer les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$, avec $A(-1\ ;\ 3)$ et $B(5\ ;\ -2)$.

solution. $x_M = \dfrac{(x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \dfrac{(y_A + y_B}{2}$. $\therefore M(2\ ;\ \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{(x_A + x_B}{2} & y_M &= \frac{(y_A + y_B}{2} \\ &= \frac{-1+5}{2} & &= \frac{3+(-2)}{2} \\ &= 2 & &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

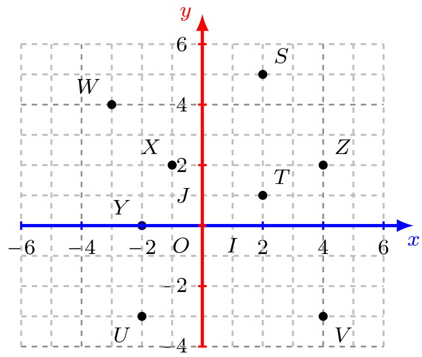
■

Exercice 6



1. Utiliser la formule de la distance pour vérifier que :
   a) M est le milieu de $[AB]$.
   b) N est le milieu de $[CD]$.
2. Utiliser la formule du milieu pour vérifier les réponses.

Exercice 7



Déterminer graphiquement les coordonnées du milieu des segments suivants :

1. $[ST]$
2. $[UV]$
3. $[WX]$
4. $[YZ]$
5. $[SV]$
6. $[UT]$
7. $[YT]$
8. $[TV]$

Exercice 8

Déterminer les coordonnées du milieu des segments reliant les paires suivantes :

1. $S(2\ ;\ 5)$ et $T(4\ ;\ 7)$
2. $U(1\ ;\ 6)$ et $V(4\ ;\ 2)$
3. $W(0\ ;\ 5)$ et $X(2\ ;\ 0)$
4. $Y(3\ ;\ -2)$ et $Z(3\ ;\ 2)$
5. $S(-1\ ;\ 4)$ et $V(2\ ;\ 2)$
6. $U(0\ ;\ -3)$ et $T(-2\ ;\ 5)$
7. $Y(-4\ ;\ -1)$ et $T(3\ ;\ -2)$
8. $Y(1\ ;\ 0)$ et $T(-6\ ;\ 8)$

Exercice 9

Soit le quadrilatère $ABCD$ tel que $A(-2\ ;\ -1)$, $B(4\ ;\ 2)$, $C(7\ ;\ 7)$ et $D(1\ ;\ 4)$.

1. Déterminer les coordonnées des milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
2. En déduire que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 10

Montrer que $FUNK$ est un parallélogramme sachant que $F(10;-8)$, $U(13;0)$, $N(24;9)$ et $F(21;1)$.

Exercice 11

Dans un repère orthonormé, soit les points $A(-2\ ;\ 9)$, $B(4\ ;\ 6)$, $C(1\ ;\ 0)$ et $D(-5\ ;\ 3)$.

1. Justifier que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Justifier à l'aide de la formule des longueurs que $ABCD$ est un rectangle.
3. Justifier à l'aide de la formule des longueurs que $ABCD$ est un carré.

Exercice 12

1. Calculer les coordonnées du milieu de $[PQ]$ sachant que $P(2;3)$, $Q(5;4)$.
2. Montrer que $R(4;5)$ appartient au cercle de diamètre $[PQ]$.

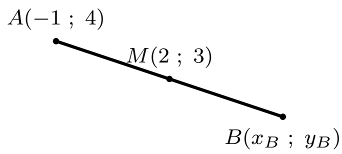
■ **Exemple 12.6**

$M(2\ ;\ 3)$ est le milieu de $[AB]$. Déterminer les coordonnées de B sachant que $A(-1\ ;\ 4)$.

solution. $B(x_B\ ;\ y_B)$ vérifie : $\dfrac{-1+x_B}{2}=2$ et $\dfrac{4+y_B}{2}=3$. $\therefore B(5\ ;\ 2)$ ■

$$-1+x_B=4 \qquad 4+y_B=6$$

$$x_B=5 \qquad y_B=2$$



Exercice 13

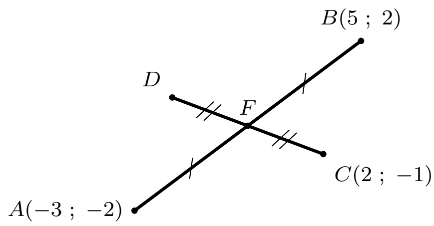
M est le milieu du segment $[AB]$. Déterminer les coordonnées de B dans chaque cas :

1. $A(1\ ;\ 3)$ et $M(2\ ;\ -1)$
2. $A(-2\ ;\ 1)$ et $M(-\frac{3}{2}\ ;\ 3)$
3. $A(0\ ;\ 0)$ et $M(2\ ;\ -\frac{1}{2})$
4. $A(2\ ;\ 1)$ et $M(0\ ;\ 2)$
5. $A(3\ ;\ -2)$ et $M(\frac{7}{2}\ ;\ -2)$
6. $A(-3\ ;\ \frac{1}{2})$ et $M(0\ ;\ 0)$

Exercice 14

Sur la figure ci-contre, F est le milieu des segments $[AB]$ et $[CD]$. Les axes du repère ne sont pas tracés.

Déterminer les coordonnées de F et en déduire celles de D.



Exercice 15

$[AB]$ est le diamètre d'un cercle de centre $C(\frac{7}{2}\ ;\ -1)$. Déterminer A sachant que $B(2\ ;\ 0)$.

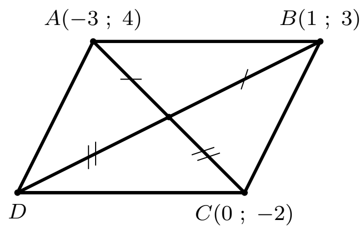
■ **Exemple 12.7 — déterminer le 4^e^ sommet d'un parallélogramme.**

Utiliser les coordonnées du milieu pour déterminer les coordonnées du sommet D du parallélogramme $ABCD$ sachant que $A(-3\ ;4)$, $B(1\ ;\ 3)$ et $C(0\ ;\ -2)$.

solution. (faire une figure à main levée)

$ABCD$ est un parallélogramme. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. $D(x_D\ ;\ y_D)$ vérifie :

$$\frac{1+x_D}{2}=\frac{-3+0}{2} \text{ et } \frac{3+y_D}{2}=\frac{4+(-2)}{2}. \therefore D(-4\ ;\ -1)$$ ■



$$1+x_D=-3 \qquad 3+y_D=2$$

$$x_D=-4 \qquad y_D=-1$$

Exercice 16 Déterminer les coordonnées du 4^e sommet du parallélogramme donné.

1. $ABCD$ est un parallélogramme avec $A(5\ ;\ -1)$, $B(4\ ;\ -2)$ et $C(8\ ;\ -3)$.
2. $WXYZ$ est un parallélogramme avec $W(-5\ ;\ 3)$, $Y(2\ ;\ 0)$ et $Z(-6\ ;\ -4)$.
3. $PQRS$ est un parallélogramme avec $P(-2\ ;-3)$, $Q(-1\ ;\ -2)$ et $S(1\ ;\ 0)$.
4. $PQRS$ est un parallélogramme avec $P(-1\ ;-4)$, $Q(1\ ;\ 1)$ et $R(4\ ;\ 2)$.

12.5 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 1.

■

solution de l'exercice 2.

■

solution de l'exercice 3.

■

solution de l'exercice 4.

■

solution de l'exercice 5.

■

solution de l'exercice 6.

■

solution de l'exercice 7.

■

solution de l'exercice 8.

■

solution de l'exercice 9.

■

solution de l'exercice 10.

■

solution de l'exercice 11.

■

solution de l'exercice 12.

■

solution de l'exercice 13.

■

solution de l'exercice 14.

■

solution de l'exercice 15.

■

solution de l'exercice 16.

■

12.6 B.A.R. Maths :