1.4 Forme factorisée : produit et somme des racines

Les exercices de cette section peuvent être écourtés. Soit f fonction quadratique factorisable, de racines r_1 et r_2 :

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-r_1)(x-r_2) \\ &= a(x^2 - r_1x - r_2x + r_1r_2) \\ &= ax^2 - a(r_1+r_2)x + ar_1r_2 \\ &= ax^2 - asx + ap \end{aligned}$$

Théorème 1.5 Les racines r_1 et r_2 d'une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ doivent vérifier :

- La somme des racines $s = r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$.
- Le produit des racines $p = r_1r_2 = \dfrac{c}{a}$

1.4.1 Exercices : forme factorisée et somme et produit des racines

Pour x, r_1 et $r_2 \in \mathbb{R}$:

Pour factoriser : $f(x) = 1x^2 - sx + p$

$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)$

développer

$=$

réduire

$= x^2 + \dots\dots\dots x + \dots\dots\dots$

■ **Exemple 1.11 — Cas p>0.** Factoriser en cherchant des racines entières r_1 et r_2 de même signe.

$f(x) = x^2 + 7x + 10$

$g(x) = x^2 - 9x + 20$

Exercice 1 — À vous. Mêmes consignes

$f_1(x) = x^2 + 6x + 5$	$f_3(x) = x^2 - 17x + 16$	$f_5(x) = x^2 + 7x + 10$
$f_2(x) = x^2 + 10x + 16$	$f_4(x) = x^2 + 6x + 8$	$f_6(x) = x^2 - 7x + 12$

■ **Exemple 1.12 — Cas p<0.** Factoriser en cherchant des racines entières r_1 et r_2 de signes contraires.

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$g(x) = x^2 - 14x - 15$

Exercice 2 — À vous. Mêmes consignes

$f_1(x) = x^2 + x - 6$	$f_3(x) = x^2 - 6x - 40$	$f_5(x) = x^2 + 2x - 8$
$f_2(x) = x^2 - 5x - 14$	$f_4(x) = x^2 - x - 12$	$f_6(x) = x^2 + 5x - 24$

Exercice 3 On se donne une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$, factorisable de racines r_1 et r_2. Cochez, dans chaque cas la bonne réponse.

	r_1 et $r_2 < 0$	$r_1 < 0 < r_2$	r_1 et $r_2 > 0$
1/ $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$	☐	☐	☐
2/ $a > 0$, $b < 0$ et $c > 0$	☐	☐	☐
3/ $a < 0$, $b > 0$ et $c < 0$	☐	☐	☐
4/ $a < 0$, $b > 0$ et $c > 0$	☐	☐	☐

■ **Exemple 1.13 — racines évidentes.** Certaines fonctions quadratiques ont une racine évidente, en déduire la seconde est immédiat.

$f(x) = 3x^2 + 10x + 8$ $\qquad\qquad$ $g(x) = 3x^2 + 14x + 8$

$f(\ldots) =$ $\qquad\qquad$ $g(\ldots) =$

Exercice 4 Factoriser les expressions suivantes en identifiant une racine évidente.

$f_1(x) = 2x^2 - 3x - 2$	$f_2(x) = 2x^2 - 5x + 3$	$f_3(x) = 4x^2 + 5x + 1$	$f_4(x) = 6x^2 + 2x - 4$

> Soit $P(x)$ un polynôme de degré quelconque. Si r est une racine : $P(r) = 0$, alors il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - r)Q(x)$.

Exercice 5 Soit la fonction cubique $f(x) = -x^3 + 8x^2 + 11 - 18$.

a) Montrer que $P(-2) = 0$.
b) Développer ordonner et réduire l'expression $(x + 2)(ax^2 + bx + c)$
c) Trouver les réels a, b et c tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$$

d) On pose $Q(x) = -x^2 + 10x - 9$. À l'aide d'une racine évidente, factoriser Q.
e) Quel est le nombre de racines du polynôme P ?

Exercice 6 — entraînement. Soit la fonction cubique $f(x) = -2x^3 + 10x^2 - 16 + 8$.

a) Montrer que $P(1) = 0$.
b) Développer ordonner et réduire l'expression $(x - 1)(ax^2 + bx + c)$
c) Trouver les réels a, b et c tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

d) On pose $Q(x) = -2x^2 + 8x - 8$. À l'aide d'une racine évidente, factoriser Q.
e) Quel est le nombre de racines du polynôme P ?

solution de l'exercice 1 . $A(x) = (x+1)(x+5)$; $B(x) = (x+2)(x+8)$; $C(x) = (x-16)(x-1)$; $D(x) = (x+2)(x+4)$; $E(x) = (x+2)(x+5)$; $F(x) = (x-4)(x-3)$; $G(x) = (x+2)(x+6)$; $H(x) = (x-8)(x-5)$; ■

solution de l'exercice 2 . $A(x) = (x-2)(x+3)$; $B(x) = (x-7)(x+2)$; $C(x) = (x-10)(x+4)$; $D(x) = (x-4)(x+3)$; $E(x) = (x-2)(x+4)$; $F(x) = (x-3)(x+8)$; $G(x) = (x-5)(x+6)$; $H(x) = (x-20)(x+1)$; ■

solution de l'exercice 4 . $A(x) = (x-2)(2x+1)$; $B(x) = (x-1)(2x-3)$; $C(x) = (x+1)(4x+1)$; $D(x) = 2(x+1)(3x-2)$; ■