Chapitre 9

Trigonométrie des triangles rectangles

9.1 Introduction

Définition 9.1 Dans un triangle ABC rectangle en B, d'hypoténuse AC.

Le « côté opposé à $\widehat{BAC}$ » est le côté BC.

Le « côté adjacent à $\widehat{BAC}$ » est le côté de l'angle droit AB.

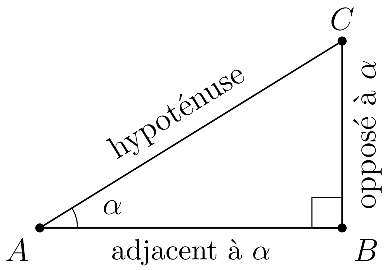
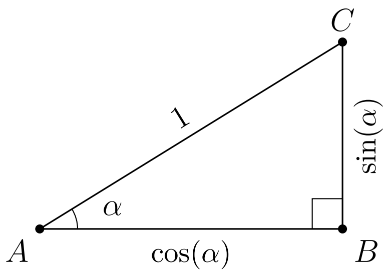


Figure 9.1 – Vocabulaire

Définition 9.2 — triangle rectangle d'hypoténuse 1. On considère un triangle ABC rectangle en B dont l'hypoténuse $AC = 1$.

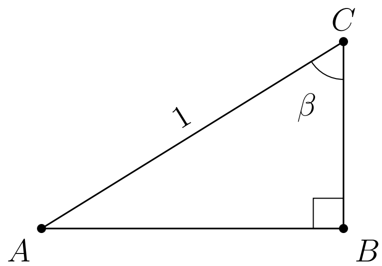
Pour $\alpha = \widehat{BAC}$ désigne la mesure d'un angle aiguë $\widehat{BAC}$, on pose :

- $\cos(\alpha) = \dfrac{AB}{1} = AB$ la longueur du côté adjacent.
- $\sin(\alpha) = \dfrac{BC}{1} = BC$ la longueur du côté opposé.
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{BC}{AB}$.



R cos, sin et tan font référence à l'angle. Par exemple si on choisit $\beta = \widehat{BCA}$, alors :

- $\cos(\beta) =$
- $\sin(\beta) =$
- $\tan(\beta) =$

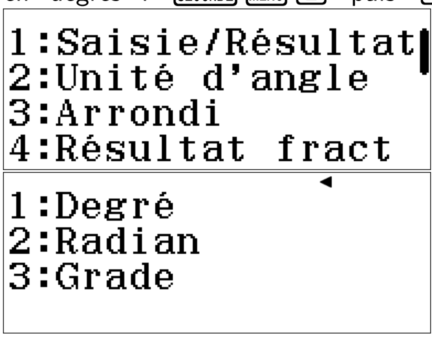


Le mot trigonométrie vient du grec *trigonos* qui signifie triangulaire et *métron* qui signifie mesure. La trigonométrie étudie les relations entre les angles et les longueurs des côtés d'un triangle.

Aujourd'hui, la calculatrice dispose d'algorithmes qui donnent la correspondance entre mesure d'un angle et ses rapports trigonométriques :

- Si je connais la mesure α d'un angle aigu alors je peux calculer une valeur (approchée le plus souvent) de $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ à l'aide les touches [sin] [cos] [tan].
- Si je connais la valeur de l'UN des rapports trigonométrique $\cos(\alpha)$, ou $\sin(\alpha)$ ou $\tan(\alpha)$ alors je peux calculer une valeur (approchée le plus souvent) de l'angle **aigu** à l'aide des touches (Arcsin) (Arccos) (Arctan) .

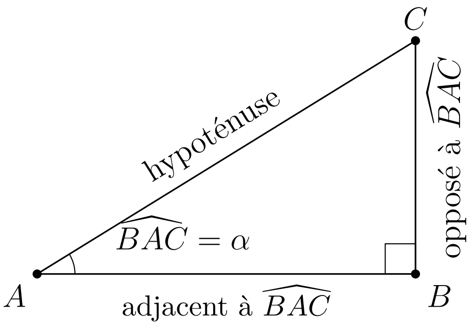
Table 9.1 – Régler la calculatrice pour que les mesures des angles soient en degrés : [SECONDE] [MENU] [2] puis [1]

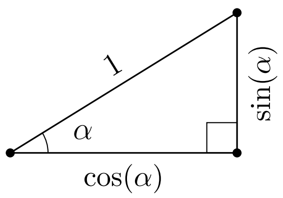


Rapport trigonométrique (au centième près)	**Mesure de l'angle aigu** (au dixième près)
$\cos(a) \approx$	$a = 25°$
$\sin(a) \approx$	$a = 35°$
$\sin(a) \approx$	$a = 85°$
$\cos(a) \approx$	$a = 75°$
$\tan(a) \approx$	$a = 15°$
$\tan(a) =$	$a = 45°$
$\sin(a) =$	$a = 45°$
$\cos(a) = 0.5$	$a =$
$\sin(a) = 0.5$	$a =$
$\tan(a) = 0.5$	$a \approx$
$\cos(a) = 1.75$	$a \approx$
$\tan(a) = 1.75$	$a \approx$

9.2 Les rapports trigonométriques

Et si le triangle rectangle n'a pas une hypoténuse unité ?





Les deux triangles sont semblables car partagent 2 paires d'angles homologues égaux (critère AA).
On a l'égalité des rapports :

$$\frac{1}{\qquad\qquad} = \frac{\cos(\alpha)}{\qquad\qquad} = \frac{\sin(\alpha)}{\qquad\qquad}$$

Pour mémoriser ces rapports on utilise le moyen mnémotechnique « **CAHSOHTOA** » (Casse-toi !).

Définition 9.3 — Rapports trigonométriques. Dans le triangle ABC rectangle en B.
le **cosinus** de l'angle $\widehat{BAC}$:

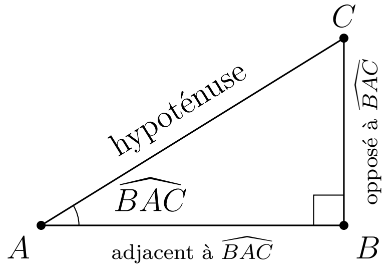
$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{BAC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC} \leqslant 1$$

le **sinus** de l'angle $\widehat{BAC}$:

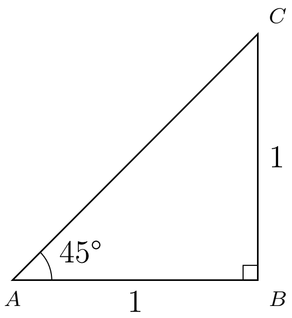
$$\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC} \leqslant 1$$

la **tangente** de l'angle $\widehat{BAC}$:

$$\tan\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{BAC}} = \frac{BC}{AB}$$



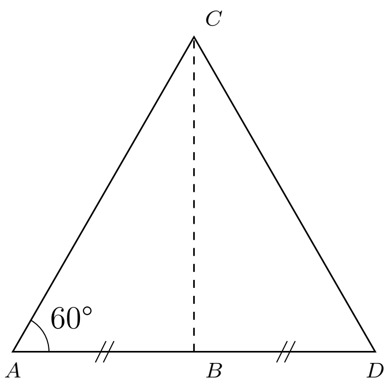
9.3 Rapports trigonométriques d'angles particuliers



Exemple 9.1 — Angle 45°.

1. À l'aide du théorème de Pythagore, calculer AC.
2. Justifier que $\widehat{BAC} = 45°$ (sans trigonométrie).
3. En déduire les rapports trigonométriques suivants :

$$\cos(45°); \quad \sin(45°); \quad \tan(45°);$$



Exercice 1 — Angles 30° et 60°.

ABD est un triangle équilatéral de côté 2. B est le milieu du segment $[AD]$.

1. Pour cette question nous allons montrer que $[BC]$ est perpendiculaire à $[AD]$
   a) Montrer que les triangles ABC et BDC sont égaux.
   b) En déduire que $\widehat{ABC} = 90°$.
2. Par la suite, $[BC]$ est perpendiculaire à $[AD]$.
   a) À l'aide du théorème de Pythagore, calculer $[BC]$.
   b) En utilisant le triangle rectangle ABC donner les rapports trigonométriques suivants :

$$\cos(30°); \quad \sin(60°); \quad \tan(30°);$$
$$\cos(60°); \quad \sin(60°); \quad \tan(60°)$$

9.4 Exercices

Exercice 1

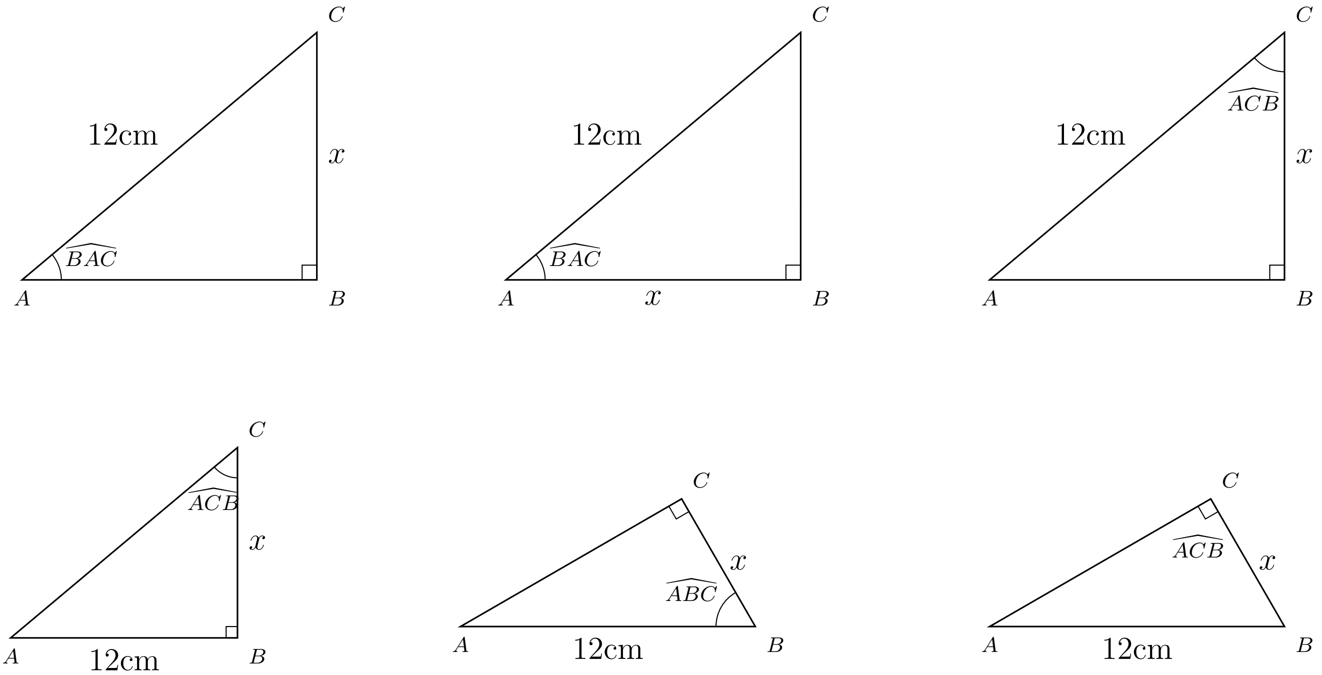
À l'aide de la calculatrice complète le tableau suivant

Arrondir les mesure des angles au **dixième** près, et les rapports trigonométriques au **centième**.

α	56°			45°			
$\cos(\alpha)$			1,21				
$\sin(\alpha)$		0,76				15%	
$\tan(\alpha)$					15%		$\sqrt{3}$

■ **Exemple 9.2**

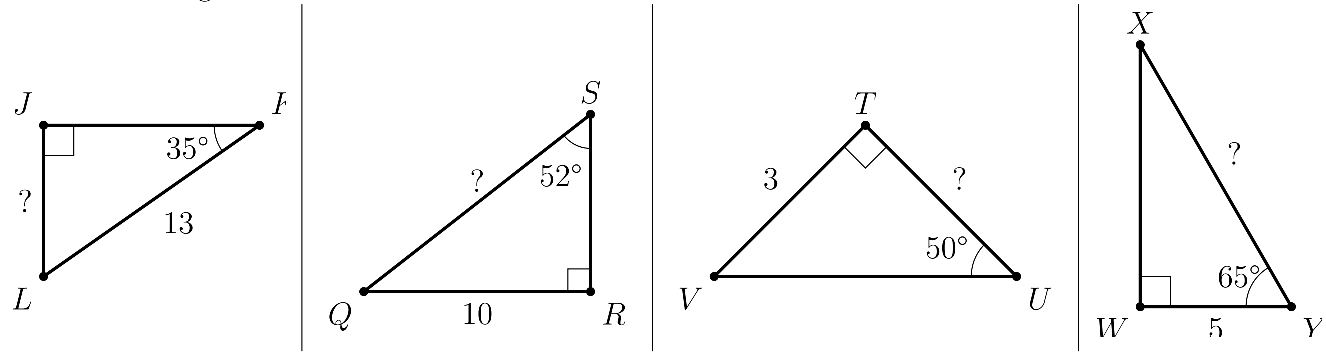
Écrire pour chaque triangle le rapport trigonométrique qui relie les grandeurs indiquées.



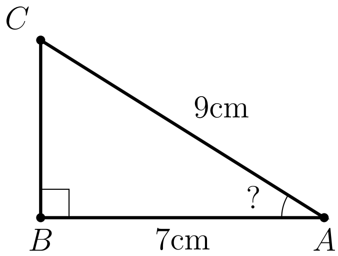
■ **Exemple 9.3 — Calculer une longueur manquante connaissant la mesure d'un angle aiguë et la longueur d'un côté d'un triangle rectangle.**

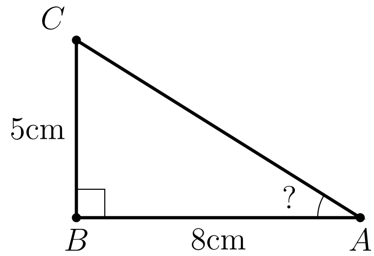
Exercice 2

Calcule les longueurs demandées



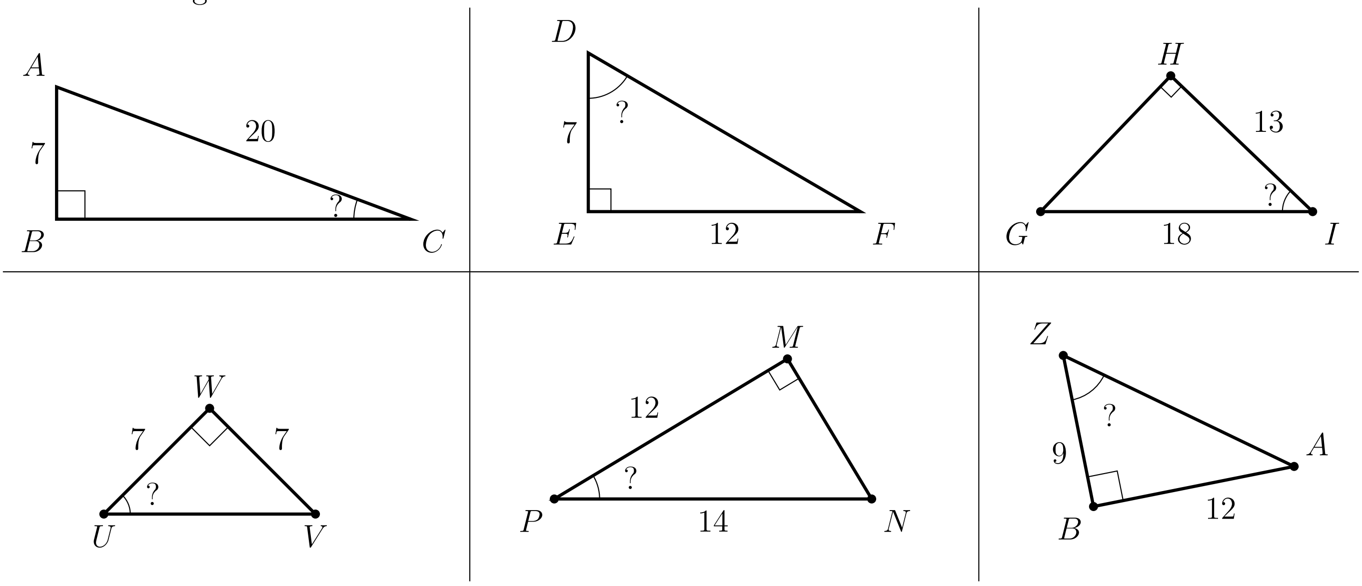
■ **Exemple 9.4 — Calculer un angle aiguë connaissant les longueurs de 2 côtés d'un triangle rectangle.**





Exercice 3

Calcule les angles demandés



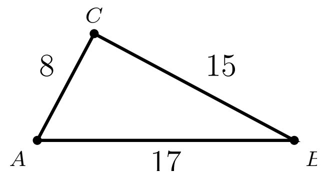
Exercice 4

Soit le triangle ABC ci-contre :

a) Montre que le triangle ABC est rectangle en C

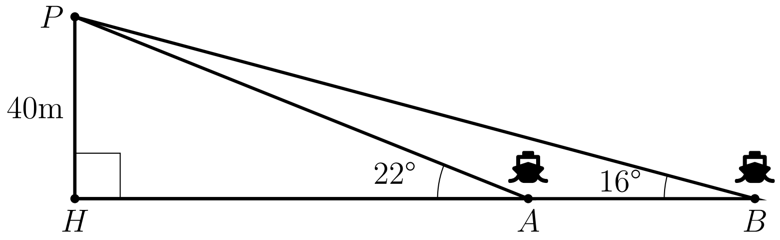
b) Calcule tous les rapports trigonométriques des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$.

c) Calculer la mesure de chacun des angles de ce triangle au degré près.



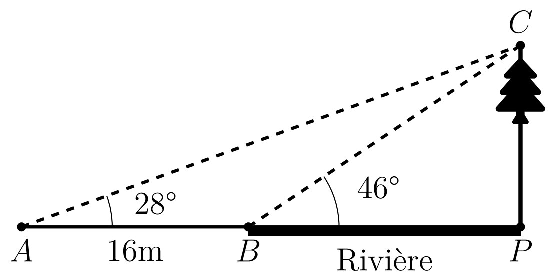
Exercice 5

Calcule la distance qui sépare les deux bateaux.



Exercice 6

Un arbre inaccessible est situé sur la rive opposée d'une rivière. On effectue quelques mesures de notre côté de la rivière :



On suppose que les points A, B et P sont alignés à l'horizontale, et que la cime de l'arbre C est située à la verticale de son pied P. Soit $x = BP$.

a) Exprime à l'aide de rapports trigonométrique la hauteur CP en fonction de x de 2 manière différentes à l'aide des triangles APC et BPC.

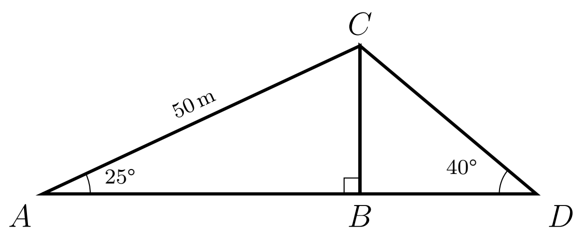
b) En déduire une équation vérifiée par x

c) Résoudre et déterminer la largeur de la rivière BP et la hauteur de l'arbre PC.

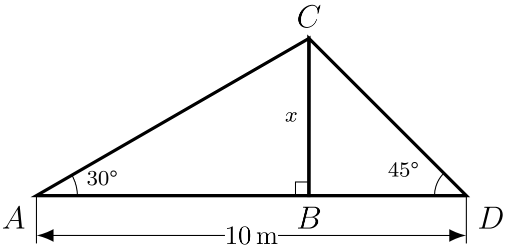
Exercice 7

Calculer la longueur AD arrondie au centième près. Montrer les calculs.

Indication On pourra commencer par calculer AB et BC.



Exercice 8



Dans cet exercice on utilisera les valeurs suivantes :

$\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan(45°) = 1$

$\cos(30°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(30°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$

$\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan(60°) = \sqrt{3}$

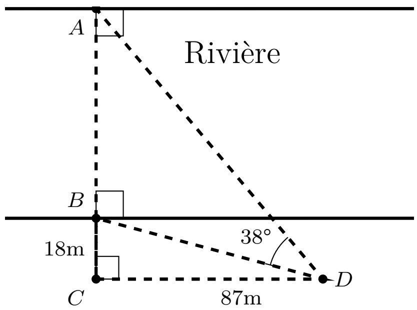
a) Justifier que x est solution de l'équation $x\sqrt{3} + x = 10$.

b) Résoudre l'équation et donner une valeur de x au centième de mètre près.

Exercice 9

Dukat se trouve sur la rive droite d'un fleuve. Il souhaite calculer sa largeur et a pris diverses mesures : $BC = 18\text{m}$, $CD = 87\text{m}$, $\widehat{ADB} = 38°$.

Calculer la largeur AB de la rivière au centimètre près.



Exercice 10 — Brevet. Amérique du nord, 2019.

environ 9 min

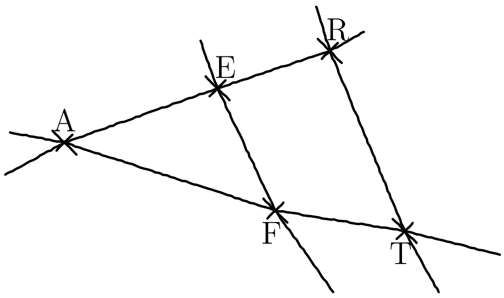
On considère la figure ci-contre, réalisée à main levée et qui n'est pas à l'échelle.

On donne les informations suivantes :

— les droites (ER) et (FT) sont sécantes en A ;

— AE = 8 cm, AF = 10 cm, EF = 6 cm ;

— AR = 12 cm, AT = 14 cm



a) Démontrer que le triangle AEF est rectangle en E.

b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\text{EAF}}$ au degré près.

c) Les droites (EF) et (RT) sont-elles parallèles ?

Exercice 11 — Brevet. Réunion, 2018.

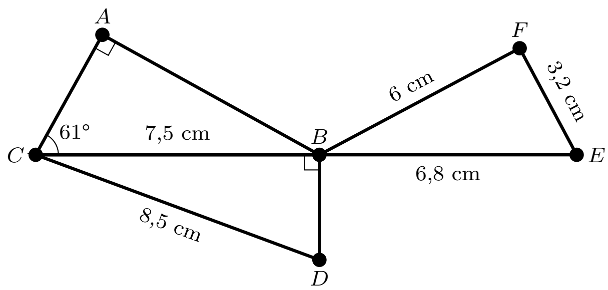
environ 9 min

La figure ci-dessous n'est pas représentée en vraie grandeur.

Les points B, C et E sont alignés.

Le triangle ABC est rectangle en A.

Le triangle BDC est rectangle en B.



a) Montrer que la longueur BD est égale à 4cm.

b) Montrer que les triangles CBD et BFE sont semblables.

c) Sophie affirme que l'angle $\widehat{BFE}$ est un angle droit. A-t-elle raison ?

d) Max affirme que l'angle $\widehat{ACD}$ est un angle droite. A-t-il raison ?

Corrections

Il faut toujours vérifier que les calculs de rapports trigonométriques se font dans un triangle rectangle.

Pour les premiers exemples d'illustrations, la figure contient un unique triangle rectangle.

On vérifie enfin la cohérence des résultats : l'hypoténuse est le plus grand coté d'un triangle rectangle.

solution de l'exercice 2.

Dans le triangle KJL, rectangle en J, on a :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\widehat{JKL}\right) &= \frac{JL}{KL} \\
\sin(35°) &= \frac{JL}{13} \\
13 \times \sin(35°) &= JL \\
7{,}46 \text{ cm} &\approx JL
\end{aligned}$$

La longueur JL mesure environ 7.46.

Dans le triangle SRQ, rectangle en R, on a :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\widehat{RSQ}\right) &= \frac{RQ}{SQ} \\
\sin(52°) &= \frac{10}{SQ} \\
SQ &= \frac{10}{\sin(52°)} \\
SQ &\approx 12{,}69 \text{ cm}
\end{aligned}$$

La longueur QS mesure environ 12.69.

Dans le triangle UTV, rectangle en T, on a :

$$\begin{aligned}
\tan\left(\widehat{TUV}\right) &= \frac{TV}{UT} \\
\tan(50°) &= \frac{3}{UT} \\
UT &= \frac{3}{\tan(50°)} \\
UT &\approx 2{,}52 \text{ cm}
\end{aligned}$$

La longueur TU mesure environ 2.52.

Dans le triangle XWY, rectangle en W, on a :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{WXY}\right) &= \frac{XW}{XY} \\
\cos(65°) &= \frac{5}{XY} \\
XY &= \frac{5}{\cos(65°)} \\
XY &\approx 11{,}83 \text{ cm}
\end{aligned}$$

La longueur XY mesure environ 11.83.

■

solution de l'exercice 3.

Dans le triangle CBA, rectangle en B, on a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\widehat{BCA}\right) &= \frac{BA}{CA}\\ \sin\left(\widehat{BCA}\right) &= \frac{7}{20}\\ \widehat{BCA} &\approx 20^\circ\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{ACB}$ mesure environ 20.49.

Dans le triangle DEF, rectangle en E, on a :

$$\begin{aligned}\tan\left(\widehat{EDF}\right) &= \frac{EF}{DE}\\ \tan\left(\widehat{EDF}\right) &= \frac{12}{7}\\ \widehat{EDF} &\approx 60^\circ\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{EDF}$ mesure environ 60.

Dans le triangle IHG, rectangle en H, on a :

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{HIG}\right) &= \frac{IH}{IG}\\ \cos\left(\widehat{HIG}\right) &= \frac{13}{18}\\ \widehat{HIG} &\approx 44^\circ\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{HIG}$ mesure environ 43.76.

Dans le triangle UWV, rectangle en W, on a :

$$\begin{aligned}\tan\left(\widehat{WUV}\right) &= \frac{WV}{UW}\\ \tan\left(\widehat{WUV}\right) &= \frac{7}{7}\\ \widehat{WUV} &= 45^\circ\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{WUV}$ mesure environ 45.

Dans le triangle PMN, rectangle en M, on a :

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{MPN}\right) &= \frac{PM}{PN}\\ \cos\left(\widehat{MPN}\right) &= \frac{12}{14}\\ \widehat{MPN} &\approx 31^\circ\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{MPN}$ mesure environ 31.

Dans le triangle ZBA, rectangle en B, on a :

$$\begin{aligned}\tan\left(\widehat{BZA}\right) &= \frac{BA}{ZB}\\ \tan\left(\widehat{BZA}\right) &= \frac{12}{9}\\ \widehat{BZA} &\approx 53^\circ\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{ZBA}$ mesure environ 53.

■

solution de l'exercice 10.

a) Dans le triangle AEF, $[AF]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} AF^2 = 10^2 = 100 \\ \\ AE^2 + EF^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \end{array}\right\} AF^2 = AE^2 + EF^2$$

Comme $AF^2 = AE^2 + EF^2$, alors le triangle AEF est rectangle en E d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

b) Dans le triangle AEF, rectangle en E, on a :

$$\begin{aligned} \cos\left(\widehat{EAF}\right) &= \frac{AE}{AF} \\ \cos\left(\widehat{EAF}\right) &= \frac{8}{10} \\ \widehat{EAF} &\approx 37^\circ \end{aligned}$$

c) Dans le triangle AEF, R est un point de la droite (AE), T est un point de la droite (AF).

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AR}{AE} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{12_{\triangledown\,.\,4}}{8_{\triangledown\,.\,4}} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{3 \times 5}{2 \times 5} = \dfrac{15}{10} \\ \\ \dfrac{AT}{AF} = \dfrac{14}{10} = \dfrac{14_{\triangledown\,.\,2}}{10_{\triangledown\,.\,2}} = \dfrac{7}{5} = \dfrac{7 \times 2}{5 \times 2} = \dfrac{14}{10} \end{array}\right\} \frac{AR}{AE} \neq \frac{AT}{AF}$$

Donc les droites (RT) et (EF) ne sont pas parallèles.

■

solution de l'exercice 11.

a) Dans le triangle CBD rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
CD^2 &= CB^2 + BD^2\\
8{,}50^2 &= CB^2 + 7{,}50^2\\
72{,}25 &= CB^2 + 56{,}25\\
CB^2 &= 72{,}25 - 56{,}25\\
CB^2 &= 16\\
CB &= \sqrt{16}\\
CB &= 4 \text{ cm}
\end{aligned}$$

b)

$$\frac{BE}{CD} = \frac{6.8}{8.5} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{BF}{BC} = \frac{6}{7.5} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{EF}{BD} = \frac{3.2}{4} = \frac{4}{5}$$

On a $\dfrac{BE}{CD} = \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{EF}{BD}$. Les longueurs des côtés des triangles CBD et EFB sont proportionnelles. Les triangles sont semblables.

c) Les triangles étant semblables, ils ont des angles homologues égaux, en particulier $\widehat{CBD} = \widehat{BFE} = 90°$. Sophie a raison.

d) Dans le triangle CBD, rectangle en B, on a :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{BCD}\right) &= \frac{CB}{CD}\\
\cos\left(\widehat{BCD}\right) &= \frac{7{,}50}{8{,}50}\\
\widehat{BCD} &\approx 28°
\end{aligned}$$

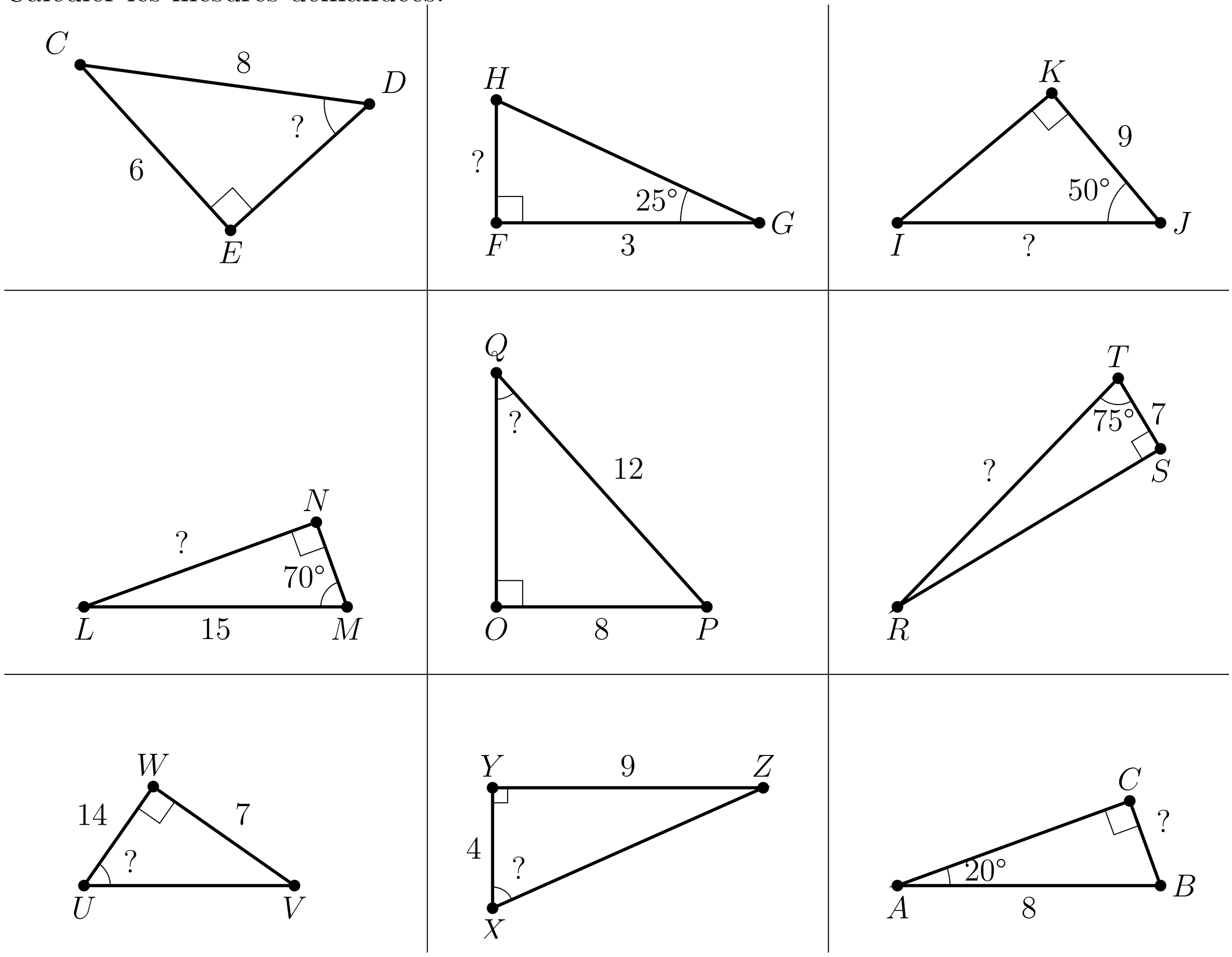
$\widehat{ACD} \neq 90°$, Max a tord.

■

9.5 AP Trigonométrie

Exercice 1

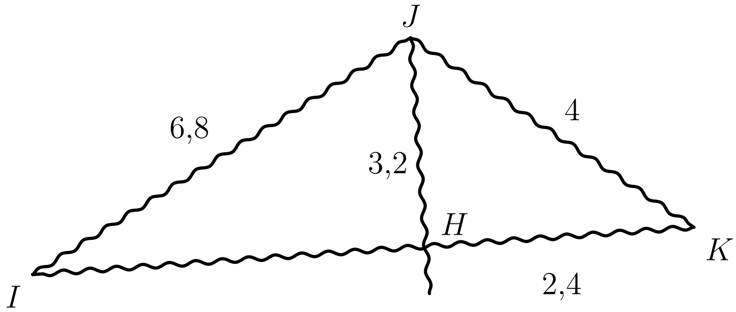
Calculer les mesures demandées.



Exercice 2 — Brevet. Polynésie, 2015.

environ 25 min

On considère la figure ci-contre dessinée à main levée.
L'unité utilisée est le centimètre.
Les points I, H et K sont alignés.



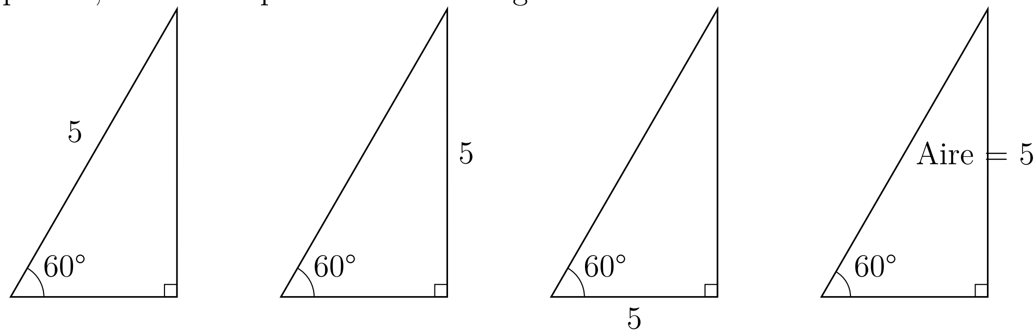
1. Construire la figure ci-dessus en vraie grandeur.
2. Démontrer que les droites (IK) et (JH) sont perpendiculaires.
3. Démontrer que $IH = 6\,\text{cm}$.
4. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{\text{HJK}}$, arrondie au degré.
5. La parallèle à (IJ) passant par K coupe (JH) en L. Compléter la figure.
6. Expliquer pourquoi $LK = 0,4 \times IJ$.

Exercice 3 — Brevet. Polynésie, 2019. *environ* 9 min

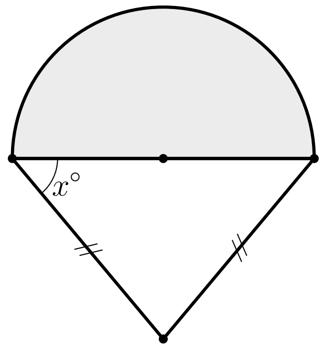
Lorsqu'un voilier est face au vent, il ne peut pas avancer.
Si la destination choisie nécessite de prendre une direction face au vent, le voilier devra progresser en faisant des zigzags.
Comparer les trajectoires de ces deux voiliers en calculant la distance, en kilomètres et arrondie au dixième que chacun a parcourue.

Exercice 4

Dans chaque cas, calculer le périmètre du triangle.

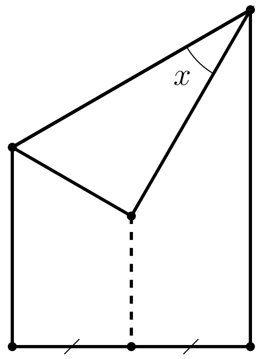


Problème 1



Dans le cône de glace ci-dessous, l'aire du demi-cercle est égale à l'aire du triangle isocèle.
Calcule x.
Indication : l'aire d'un disque de rayon r est $A = \pi r^2$.

Problème 2



Les dimensions d'une feuille A4 sont de 210mm × 297mm. On plie une feuille A4 dans le sens de la longueur (pointillés) puis on rabat un coin sur la marque comme sur la figure ci-dessous.

1. Que vaut l'angle x ? Justifier le par le calcul.
2. Le résultat reste-t-il toujours vrai si la feuille n'est pas au format A4 ?

solution de l'exercice 1 de l'AP.

Dans le triangle DEC, rectangle en E, on a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\widehat{EDC}\right) &= \frac{EC}{DC}\\ \sin\left(\widehat{EDC}\right) &= \frac{6}{8}\\ \widehat{EDC} &\approx 49°\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{CDE}$ mesure environ 48.59.

Dans le triangle GFH, rectangle en F, on a :

$$\begin{aligned}\tan\left(\widehat{FGH}\right) &= \frac{FH}{GF}\\ \tan(25°) &= \frac{FH}{3}\\ 3\times\tan(25°) &= FH\\ 1{,}40\text{ cm} &\approx FH\end{aligned}$$

La longueur HF mesure environ 1.4.

Dans le triangle JKI, rectangle en K, on a :

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{KJI}\right) &= \frac{JK}{JI}\\ \cos(50°) &= \frac{9}{JI}\\ JI &= \frac{9}{\cos(50°)}\\ JI &\approx 14\text{ cm}\end{aligned}$$

La longueur IJ mesure environ 14.

Dans le triangle MNL, rectangle en N, on a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\widehat{NML}\right) &= \frac{NL}{ML}\\ \sin(70°) &= \frac{NL}{15}\\ 15\times\sin(70°) &= NL\\ 14{,}10\text{ cm} &\approx NL\end{aligned}$$

La longueur LN mesure environ 14.1.

Dans le triangle QOP, rectangle en O, on a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\widehat{OQP}\right) &= \frac{OP}{QP}\\ \sin\left(\widehat{OQP}\right) &= \frac{8}{12}\\ \widehat{OQP} &\approx 42°\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{OQP}$ mesure environ 41.81.

Dans le triangle TSR, rectangle en S, on a :

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{STR}\right) &= \frac{TS}{TR}\\ \cos(75°) &= \frac{7}{TR}\\ TR &= \frac{7}{\cos(75°)}\\ TR &\approx 27{,}05\text{ cm}\end{aligned}$$

La longueur RT mesure environ 27.05.

Dans le triangle UWV, rectangle en W, on a :

$$\begin{aligned}\tan\left(\widehat{WUV}\right) &= \frac{WV}{UW}\\ \tan\left(\widehat{WUV}\right) &= \frac{7}{14}\\ \widehat{WUV} &\approx 27°\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{WUV}$ mesure environ 27.

Dans le triangle XYZ, rectangle en Y, on a :

$$\begin{aligned}\tan\left(\widehat{YXZ}\right) &= \frac{YZ}{XY}\\ \tan\left(\widehat{YXZ}\right) &= \frac{9}{4}\\ \widehat{YXZ} &\approx 66°\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{YXZ}$ mesure environ 66.

Dans le triangle ACB, rectangle en C, on a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\widehat{CAB}\right) &= \frac{CB}{AB}\\ \sin(20^\circ) &= \frac{CB}{8}\\ 8\times\sin(20^\circ) &= CB\\ 2{,}74\text{ cm} &\approx CB\end{aligned}$$

La longueur CB mesure environ 2.74.

■