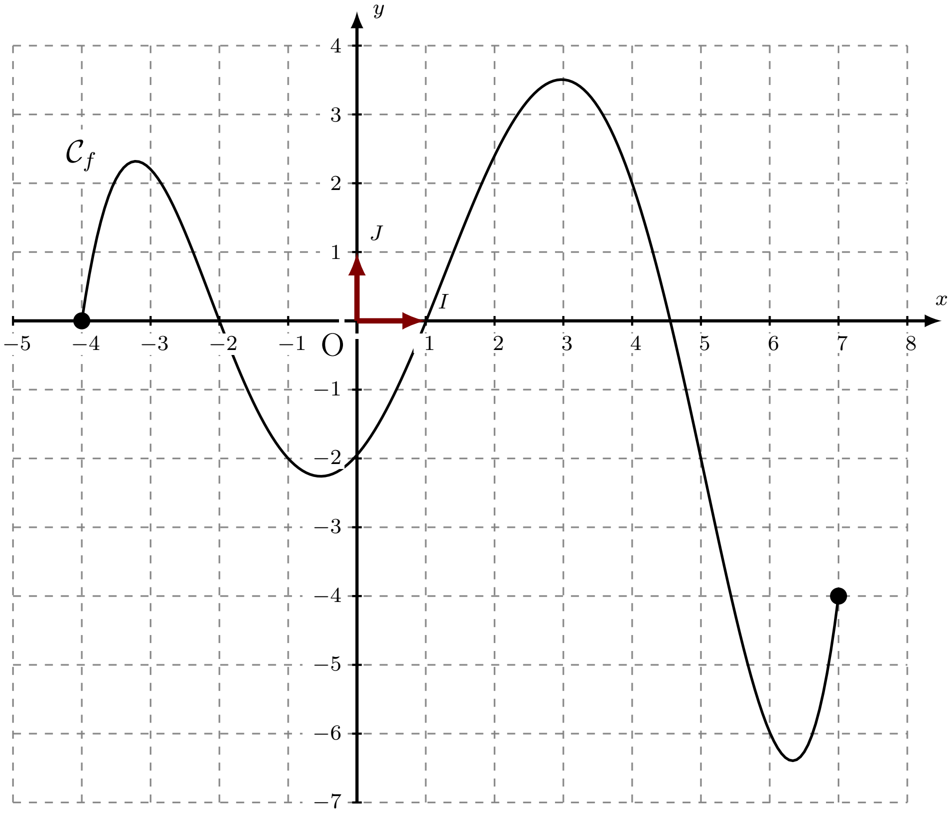
Annexe A

Rappels de seconde et compléments

tableaux de signe

A.1 Généralités sur les fonctions

Exercice 1 — À partir d'une représentation graphique.



Soit la fonction f définie par la représentation graphique ci-dessus :

a) Donner le domaine de f.

b) Déterminer graphiquement $f(-2)$ et $f(2)$.

c) Déterminer graphiquement l'image de 0 et les antécédents de 0.

d) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -2$. Laisser les traces sur le graphique.

e) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant -2$.

f) Compléter le tableau de variation de la fonction f :

x	
$f(x)$	

g) Compléter le tableau de signe de $f(x)$ en fonction de x.

x	
signe de $f(x)$	

Exercice 2 On considère une fonction f dont le tableau de variations est le suivant :

x	-10		$-\frac{7}{2}$		1		2		$\frac{17}{3}$		8
$f(x)$	-2	↘	-5	↗	0	↘	-3	↗	0	↗	4

a) Quel est le domaine de f ?

b) Complétez :

Si $-10 < a < b < -\frac{7}{2}$ alors .... $f(a) \ldots f(b)$ .... car f est ....

Si $2 < a < b < 8$ alors .... $f(a) \ldots f(b)$ .... car f est ....

$f(-4) \ldots\ldots f(-\frac{13}{3})$ car f est ....sur ....

$f(\frac{3}{2}) \ldots\ldots f(7)$ car f est ....sur ....

c) Complétez (sans justifier) par $<$ ou $>$. Si la comparaison n'est pas possible écrire X.

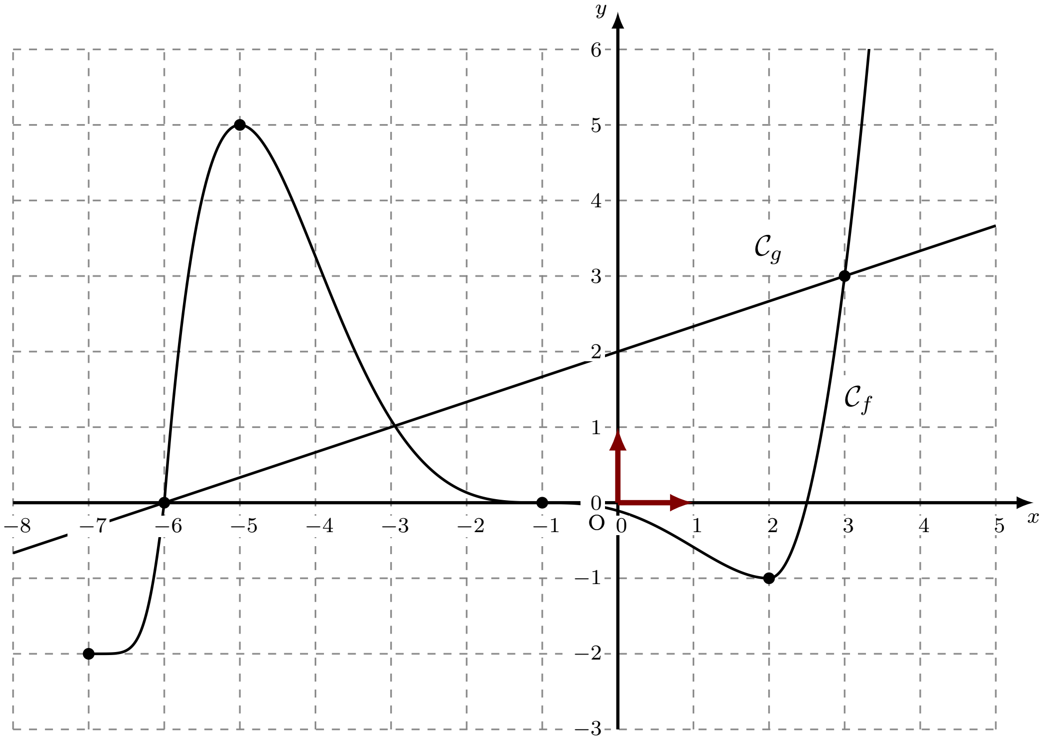
$f(0) \ldots f(2)$ $\qquad$ $f(-1) \ldots f(6)$ $\qquad$ $f(5) \ldots -3$ $\qquad$ $f(5) \ldots f(-3)$

d) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ d'inconnue x. ....

e) Donner pour chaque solution de l'équation $f(x) = -1$ un encadrement le plus précis possible. .

....

Exercice 3 Soit les fonctions f et g définies par les représentations ci-dessous :



a) Donner les domaines de définition des fonctions f .... et g ....

b) Résoudre l'équations $f(x) = g(x)$ inconnue x. ....

c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$ inconnue x. ....

A.2 Fonctions affines

[1] à lire : « qui à tout réel x associe $y = f(x)$ »

Définition A.1 La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$ [1] est **affine** s'il existe deux nombres réels m et p tel que

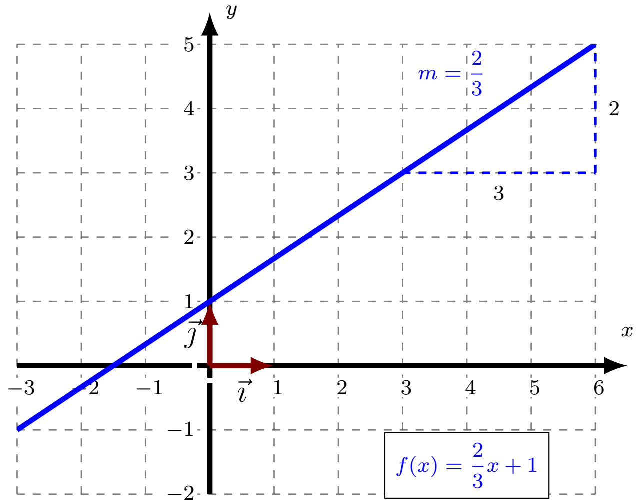
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = mx + p$$

Proposition A.1 Les écarts sur la variable image y sont proportionnels aux écarts sur la variable initiale x.
Plus précisément il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :

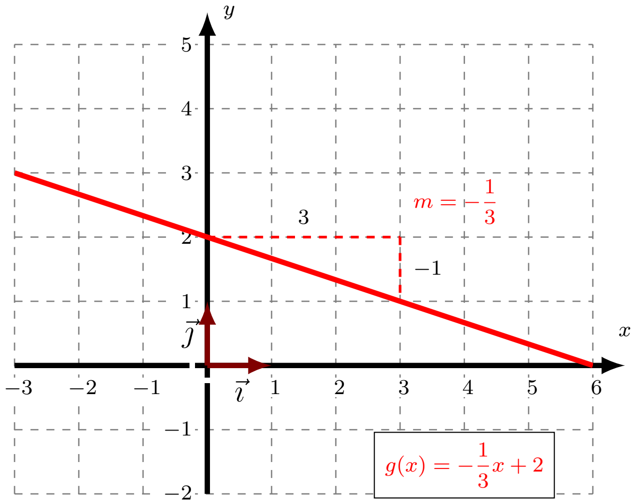
$$\text{Pour tout } x_A \text{ et } x_B \in \mathbb{R} \qquad f(x_A) - f(x_B) = m(x_A - x_B)$$

Le réel m est appelé **coefficient directeur** de f.
Si $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$ alors :

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \qquad x_A \neq x_B$$



x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f(x) = \frac{2}{3}x + 1$		0	
signe de f	$-$	0	$+$



x	$-\infty$	6	$+\infty$
$g(x) = -\frac{1}{3}x + 2$		0	
signe de g	$+$	0	$-$

Figure A.1 – Graphiquement, m est le rapport de l'augmentation verticale sur l'augmentation horizontale. $p = f(0)$ est l'ordonnée à l'origine

Proposition A.2 Si $m > 0$ alors f est **strictement croissante**.

Si $m < 0$ alors f est une fonction **strictement décroissante**.

■ **Exemple A.1** m représente un taux d'accroissement de x_A à x_B :

$$m = \frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B}$$

Il est constant pour une fonction affine.

a) Si $f(x)$ est le coût total de x objets. m est le **coût marginal** moyen d'un objet supplémentaire lorsqu'on la production passe de x_A à x_B objets.

b) Si $f(x)$ est la position d'un objet sur un axe (em mètres) au bout de x minutes. Alors m représente la **vitesse moyenne** en mètres par minutes entre les instants x_A et x_B. Cette vitesse est constante.

Point méthode Pour déterminer l'expression réduite d'une fonction affine f tel que $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$:

- On calcule m à l'aide du taux de variation entre x_A et x_B.
- On remarque que si $y = f(x)$ alors $y - y_A = m(x - x_A)$
- $y = m(x - x_A) + y_A$
- On en déduit la forme réduite.

■ **Exemple A.2** Soit f fonction affine tel que $f(12) = 17$ et $f(16) = 25$. Trouvez la forme réduite :

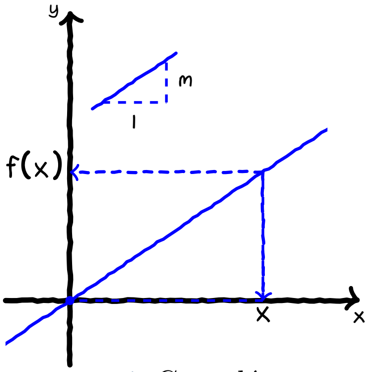
On calcule le taux de variation de 12 à 16 :

$$m = \frac{f(12) - f(16)}{12 - 16} = \frac{17 - 25}{12 - 16} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

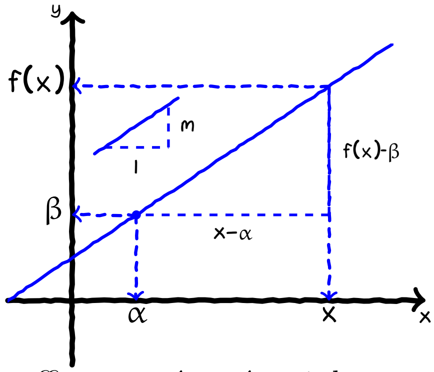
$$\begin{aligned} f(x) - f(12) &= m(x - 12) \\ f(x) &= 2(x - 12) + f(12) \\ &= 2x - 24 + 17 \\ f(x) &= 2x - 7 \end{aligned}$$

Exercices : Fonction affines et applications

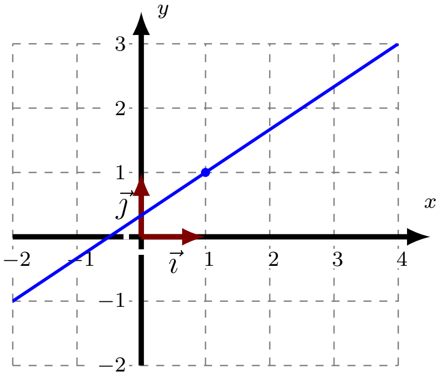


fonction f affine de taux m et $\beta = f(\alpha)$.
pour tout x :

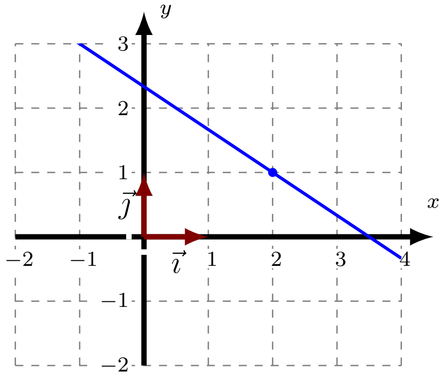
$$f(x) - \beta = m(x - \alpha)$$
$$f(x) = m(x - \alpha) + \beta$$



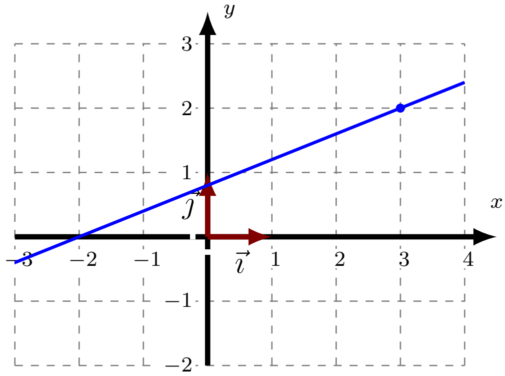
Exercice 1 Complétez et retrouvez l'expression réduite des fonctions affines représentées ci-dessous :



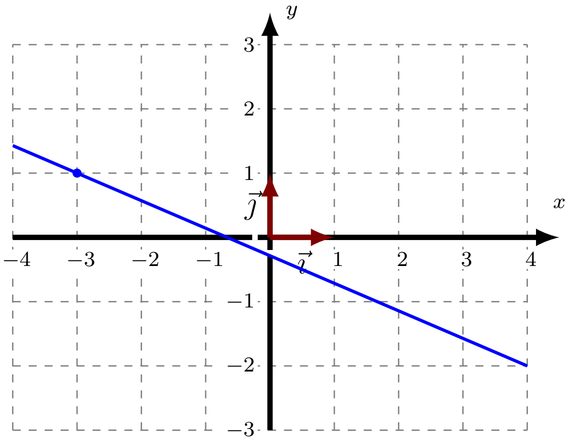
$$f(x) - \ldots = \ldots(x - \ldots\ldots)$$
$$f(x) =$$
$$f(x) = \ldots m + \ldots$$



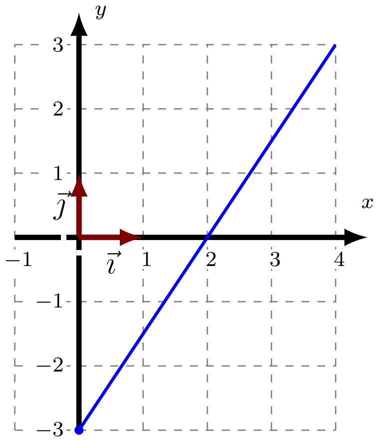
$$f(x) - \ldots = \ldots(x - \ldots\ldots)$$
$$f(x) =$$
$$f(x) = \ldots m + \ldots$$



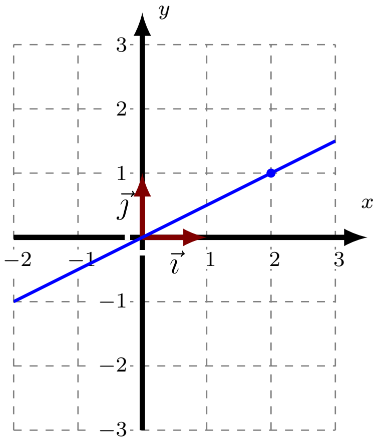
$$f(x) - \ldots\ldots = \ldots(x - \ldots\ldots)$$
$$f(x) =$$
$$f(x) = \ldots m + \ldots$$



$$f(x) - \ldots = \ldots(x - \ldots\ldots)$$
$$f(x) =$$
$$f(x) = \ldots m + \ldots$$



$$f(x) - \ldots = \ldots(x - \ldots\ldots)$$
$$f(x) =$$
$$f(x) = \ldots m + \ldots$$



$$f(x) - \ldots\ldots = \ldots(x - \ldots\ldots)$$
$$f(x) =$$
$$f(x) = \ldots m + \ldots$$

Exercice 2 Déterminer l'expression réduite de la fonction affine f dans les cas suivants.

1) le taux d'accroissement vaut $\frac{2}{3}$ et $f(15) = 3$
2) le taux d'accroissement vaut $\frac{-1}{2}$ et $f(-16) = \frac{11}{2}$
3) $f(-1) = 4$ et $f(2) = 3$.
4) $f(2) = -5$ et $f(7) = 3$.
5) sa courbe représentative passe par $A(-2; 3)$ et $B(3; -1)$.
6) sa courbe représentative passe par $A(3; -2)$ et $B(-1; 3)$.
7) f est linéaire et $f(-8) = 12$.
8) f est linéaire et sa courbe représentative passe par $A(-7; -21)$.

Exercice 3 Complétez les tableaux de variation et de signe des fonctions affines suivantes.

a) $f_1(x) = 3x + 2$

x	
variation de $f_1(x)$	
signe de $f_1(x)$	

b) $f_2(x) = -9x + 5$

x	
variation de $f_2(x)$	
signe de $f_2(x)$	

Exercice 4 Détérminez le signe des fonctions suivantes selon les valeurs de x.

(I_1) : $f_1(x) = 7(x + 2)(x - 3)$

(I_2) : $f_2(x) = 5(-3x + 1)(2x + 3)$

(I_3) : $f_3(x) = -3(5x - 4)(-3x - 8)$

(I_4) : $f_4(x) = -2(4x + 3)(3x + 5)$

x	$-\infty$				$+\infty$

x	$-\infty$				$+\infty$

x	$-\infty$				$+\infty$

x	$-\infty$				$+\infty$

A.3 Fonction carré

Définition A.2 La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Un carré est toujours positif ou nul : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geqslant 0$.

Proposition A.3 — sens de variation. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; -\infty[$:

- Si $a < b \leqslant 0$ alors $a^2 > b^2 \geqslant 0$
- Si $0 \leqslant a < b$ alors $0 \leqslant a^2 < b^2$

Figure A.2 – Tableau de variation de la fonction carré

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	

Démonstration. Exigible en fin de seconde ∎

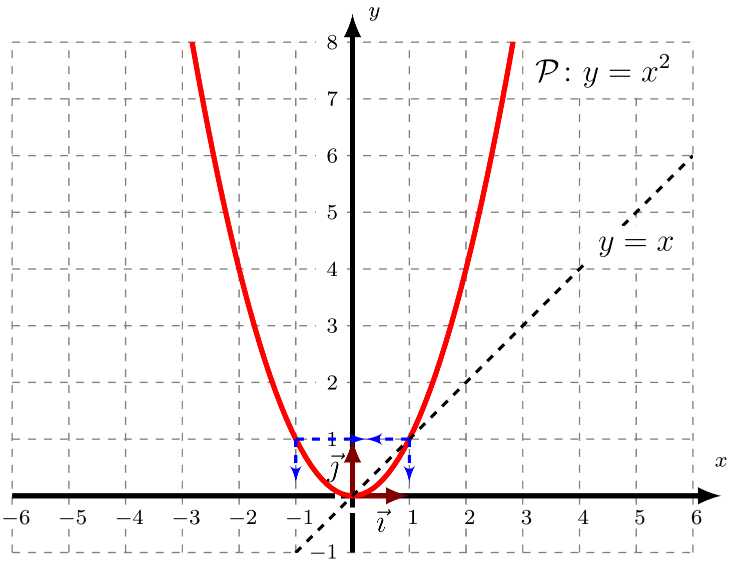
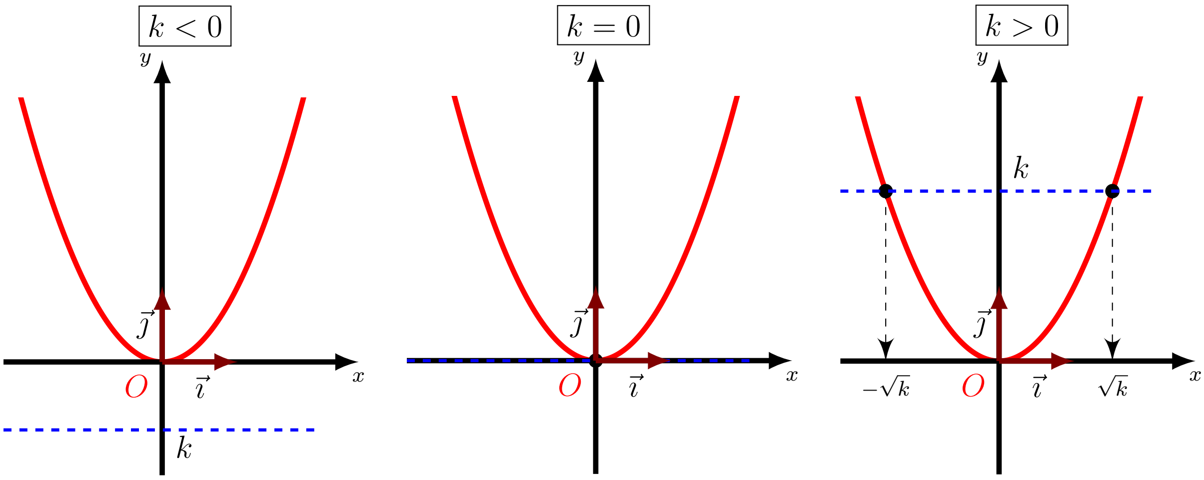
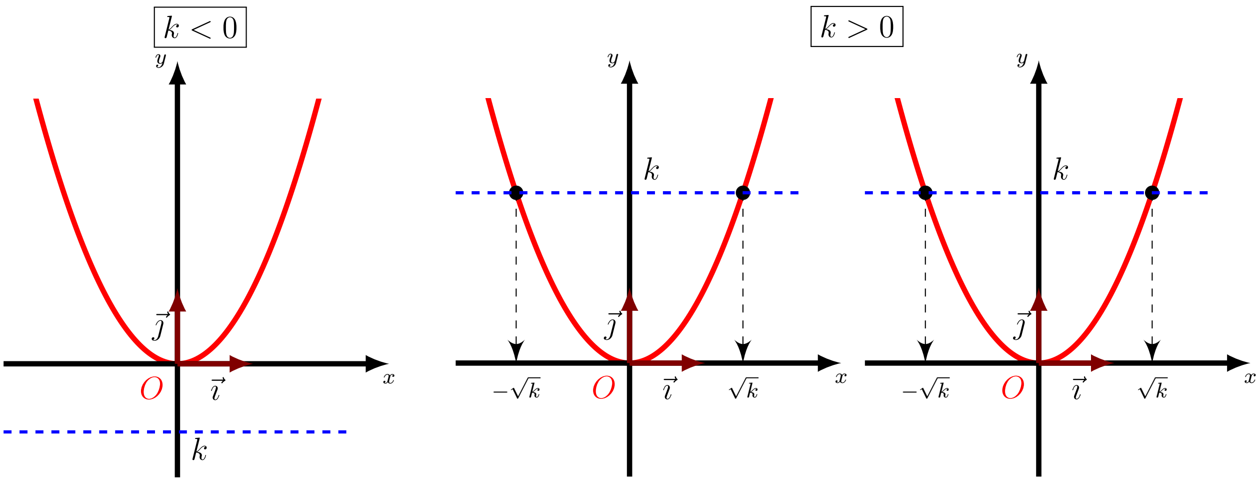


Figure A.3 – La courbe représentative de la fonction carré est la **parabole** d'équation $\mathscr{P}\colon y = x^2$.



pas de solution $S = \emptyset$ — solution unique $S = \{0\}$ — 2 solutions $S = \{-\sqrt{k}; \sqrt{k}\}$

Figure A.4 – Les solutions de l'équation $x^2 = k$ inconnue x, selon les valeurs de k.



L'inéquation $x^2 \leqslant k$ n'a pas de solution : $S = \emptyset$
L'inéquation $x^2 \geqslant k$ est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$

L'inéquation $x^2 \leqslant k$ a pour ensemble solution $S = [-\sqrt{k}; \sqrt{k}]$
L'inéquation $x^2 \geqslant k$ a pour ensemble solution $S =]-\infty; -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}; +\infty[$

Figure A.5 – Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant k$ inconnue x.

■ **Exemple A.3** En isolant x^2, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue x :

a) $5x^2 = 15$ | b) $x^2 - 5 < 11$ | c) $12 > 2x^2 - 2 > 7$ | d) $1 - 5x^2 \geqslant 2$

Exercices : Fonction carré

Exercice 1 — calculer les images et antécédents par une fonction carré.
f est la fonction carré définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$
a) Sans calculatrice. Calculer (et simplifier) les images de $-\sqrt{6}$, 10^{-2}, $\dfrac{7}{13}$ et $1-\sqrt{2}$.
b) Quels sont les antécédents éventuels de 10 ? de 0 ? de -4 ?

Exercice 2 — Révisions. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en isolant x^2.

a) $x^2 = 9$ | b) $3x^2 = 5$ | c) $2x^2 - 5 = 3$ | d) $1 - 4x^2 = 5$ | e) $3x^2 - 5 = 13$

Exercice 3 — Résoudre des inéquations de la forme $f(x) < k$. En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carré, donner les solutions des inéquations suivantes d'inconnues x :

a) $x^2 \geqslant 9$
b) $x^2 > 3$
c) $-2 < x^2$
d) $x^2 < -5$
e) $x^2 > -5$
f) $5 \leqslant x^2 \leqslant 7$
g) $12 < x^2 < 18$
h) $0 \leqslant x^2 < 27$
i) $-5 < x^2 \leqslant 2$

Exercice 4 — Utiliser le sens de variation de la fonction carré. Comparer et encadrer si possible a^2 et b^2 dans les cas suivants :
a) Si $0 \geqslant a > b$ alors . . . . a^2 . . . b^2 . . . .
b) Si $a < b < -2$ alors . . . . a^2 . . . b^2 . . . . . .
c) Si $a < b < 10$ alors . . . . a^2 . . . b^2 . . . .
d) Si $a < 0 < b < \sqrt{7}$ alors . . . . a^2 . . . b^2 . . . . . .

■ **Exemple A.4 — Utiliser le sens de variation de la fonction carré.**
Soit a un nombre réel. En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carré ou de son tableau de variation, encadrer au mieux a^2 dans chaque cas suivant :

$2\sqrt{3} < a \leqslant 4$ $\qquad$ $0 < a < 3$ $\qquad$ $-5 < a < 3$

Exercice 5 Mêmes consignes

a) $a > 3\sqrt{2}$
b) $-2 < a \leqslant 0$
c) $-5 \leqslant a < -2$
d) $0 < a < 2\sqrt{7}$
e) $3\sqrt{2} < a < 2\sqrt{7}$
f) $a < -5$
g) $-5 < a < 0$
h) $-5 < a$

A.4 Fonction cube

Théorème A.4 — Identités remarquables avec des cubes.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Démonstration.

∎

Théorème A.5 — Identités remarquables avec des cubes.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Démonstration.

∎

Définition A.3 La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ d'expression $f(x) = x^3$

Proposition A.6 — sens de variation. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

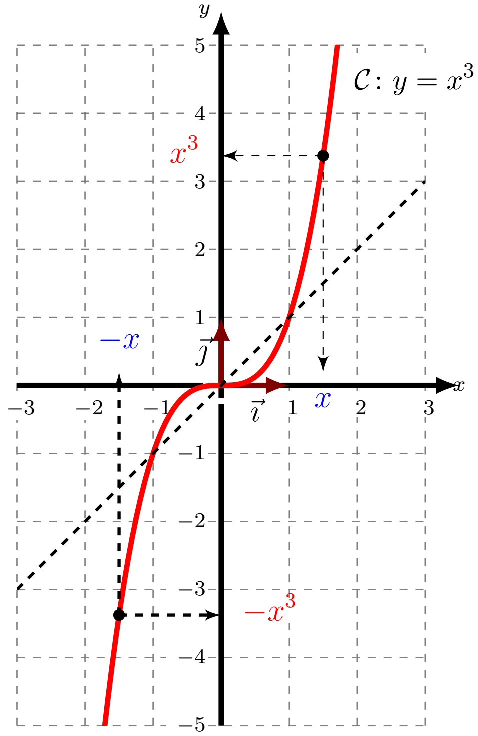


Figure A.6 – Tableau de variation de la fonction cube

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^3$	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Théorème A.7 — équation $x^3 = k$ d'inconnue x. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'équation $x^3 = k$ admet une unique solution notée $k^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{k}$.

- **Exemple A.5** Résoudre l'inéquation $x^3 > 2$ d'inconnue x

Exercices : Fonction cube

Exercice 1 — calculer les images et antécédents par une fonction cube.
f est la fonction cube définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

a) Sans calculatrice. Calculer (et simplifier) les images de 2, -3, 4 et -5.

b) Quels sont les antécédents éventuels de -8 ? de 125 ? de 9 ? de -9 ?

■ **Exemple A.6 — Résoudre équations et inéquations en isolant x^3.**

$x^3 > 27$ $\qquad$ $3x^3 + 12 \geqslant 204$ $\qquad$ $-3x^3 + 15 \geqslant 207$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant x^3.

(E_1) $x^3 = 9$	(E_2) $10x^3 + 8 = -632$	(E_3) $-9x^3 - 1 = 575$	(E_4) $3x^3 = 5$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en isolant x^3.

(I_1) $x^3 > 9$	(I_3) $3x^3 > 375$	(I_5) $-9x^3 - 1 < 575$
(I_2) $x^3 \leqslant 27$	(I_4) $2x^3 - 14 > -30$	(I_6) $-27 > x^3 \geqslant -64$

Exercice 4 — Utiliser le sens de variation de la fonction cube. Soit a un nombre réel. En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carré ou de son tableau de variation, encadrer au mieux a^3 dans chaque cas suivant :

a) $a \geqslant -5$	c) $-3 \leqslant a < 2$	e) $2 \leqslant a \leqslant 5$	g) $-5 < 2a \leqslant 1$
b) $a < 2$	d) $-2 < a \leqslant 5$	f) $-2 > a \geqslant -5$	h) $5 > -3a - 1 > 1$

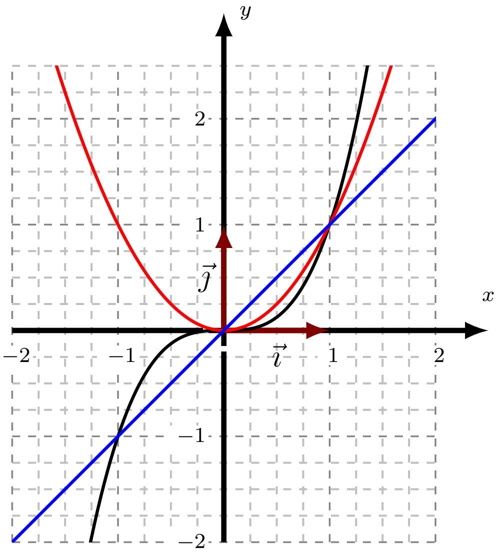
Exercice 5 — Comparer x^3, x^2 et x pour différentes valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 > x^2$.

b) Si $x > 1$, ranger dans l' ordre croissant :0, x, 1, x^3 et x^2.

c) Si $0 < x < 1$, ranger dans l' ordre croissant 0, x, 1, x^3 et x^2.

d) Ci-contre les représentations graphiques des fonctions $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x$ et $h : x \mapsto x^3$. Associer chaque courbe à la fonction correspondante.

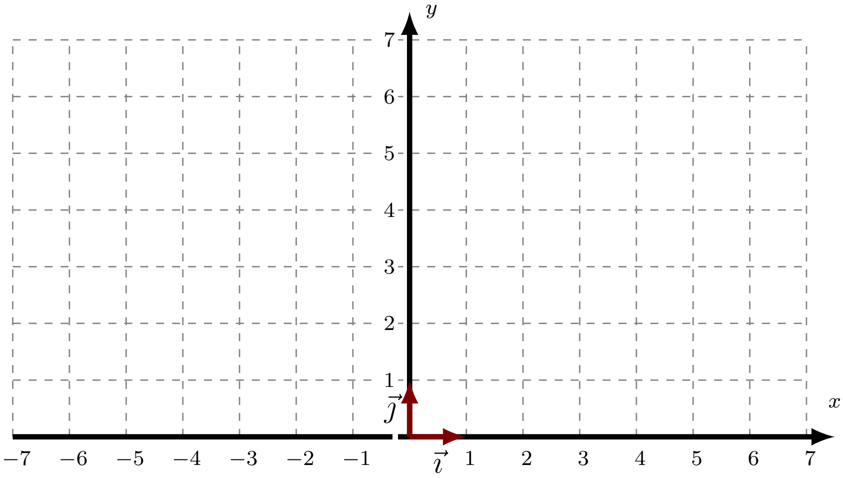


A.5 Fonction valeur absolue

Définition A.4 La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction valeur absolue est **strictement décroissante** sur $]-\infty; 0]$ et **strictement croissante** sur $[0; \infty[$



Théorème A.8 — équation $|x| = k$ d'inconnue x.
Si $k < 0$, l'équation $|x| = k$ n'a pas de solutions
Si $k = 0$, l'équation $|x| = 0$ a pour unique solution $x = 0$.
Si $k > 0$, l'équation $|x| = k$ admet 2 solutions $x = k$ et $x = -k$.

■ **Exemple A.7** Résoudre graphiquement l'équation $|x| > 3$ d'inconnue x

■ **Exemple A.8 — rappel.** Résoudre l'équation $|2x - 3| > 3$ d'inconnue x

A.6 Fonction racine carrée

Définition A.5 La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f\colon [0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \sqrt{x}$$

Sa représentation graphique est la courbe « $\mathscr{C}\colon y = \sqrt{x}$ »

Proposition A.9 — sens de variation. La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0;+\infty[$.

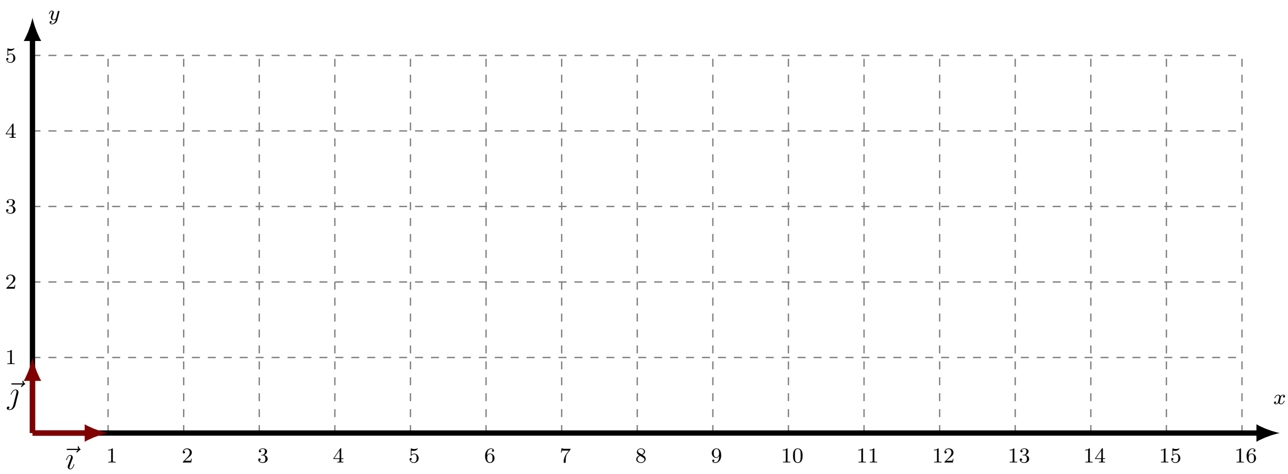
$$\text{Si} \qquad 0 \leqslant a < b \qquad \text{alors} \qquad 0 \leqslant \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

Démonstration. Exigible en fin de seconde

■

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	
Signe de $f(x)$	

Figure A.7 – Tableau de variation de la fonction racine carrée



Exercices : racine carrée, valeurs aboslues

rappels des propriétés des racines carrées, quelques manipulations d'égalités.

A.7 Fonction inverse

Définition A.6 La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; -\infty[$ par

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \frac{1}{x}$$

Théorème A.10 Pour $x \neq 0$, l'image de x par f est aussi l'antécédent de x par f. En effet $f(f(x)) = x$.

Proposition A.11 — sens de variation. f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]0; -\infty[$ et : $]-\infty; 0[$:

$$\text{Si} \quad a < b < 0 \quad \text{alors} \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$$

$$\text{Si} \quad 0 < a < b \quad \text{alors} \quad 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Démonstration. Exigible en fin de seconde

■

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0
signe de $f(x)$		$-$	‖	$+$	

Figure A.8 – Tableau de variation de la fonction inverse

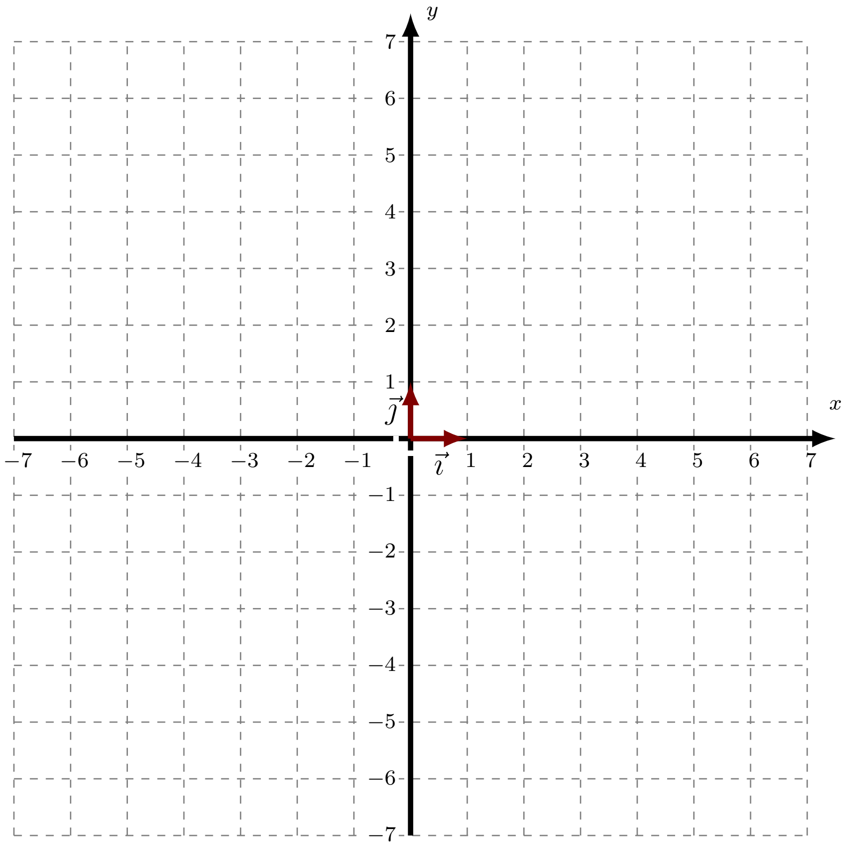


Figure A.9 – La courbe représentative de la fonction inverse dans un repère orthonormé est l'**hyperbole** d'équation $\mathscr{C} : y = \dfrac{1}{x}$ (on peut aussi dire $\mathscr{C} : xy = 1$)

■ **Exemple A.9** Résoudre graphiquement les inéquation $\dfrac{1}{x} > 2$ et $\dfrac{1}{x} > -3$ d'inconnue x

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de	
signe de	
signe de	

Exercices : Fonction inverse

Exercice 1 — calculer les images et antécédents par une fonction inverse.

f est la fonction inverse définie dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

a) Sans l'aide de la calculatrice, exprimer l'image par la fonction inverse de chacun des nombres réels suivants sans laisser de racine carrée au dénominateur : $2\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Exprimer l'antécédent des nombres suivants par la fonction inverse sous la forme d'un entier ou d'une fraction d'entiers : $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{2}$, 10^{-2}, $0,001$, -10^{3} et -10^{-4}.

■ **Exemple A.10 — Résoudre équations et équations en isolant $\frac{1}{x}$.**

$\dfrac{1}{x} = 12$ $\qquad$ $\dfrac{3}{x} = -11$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x} + 8 = \dfrac{10}{13}$ $\qquad$ $40 - \dfrac{14}{x} = 20$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en isolant $\frac{1}{x}$.

(E_1) $\frac{1}{x} = 2$	(E_3) $\frac{15}{x} = \frac{-5}{17}$	(E_5) $\frac{-7}{x} = 2$
(E_2) $\frac{1}{x} = \frac{-1}{7}$	(E_4) $\frac{2}{x} = 26$	(E_6) $\frac{1}{x} - 11 = \frac{10}{23}$

■ **Exemple A.11 — Résoudre équations et inéquations en isolant $\frac{1}{x}$.**

$\dfrac{1}{x} > 5$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x} \leqslant 2$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x} \leqslant -3$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x} \geqslant -\dfrac{1}{2}$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en isolant $\frac{1}{x}$.

(I_1) $\frac{1}{x} \geqslant 7$	(I_3) $\frac{1}{x} > -2$	(I_5) $\frac{1}{x} \leqslant 2$
(I_2) $\frac{1}{x} < -\frac{3}{2}$	(I_4) $\frac{1}{x} > -\frac{2}{5}$	(I_6) $\frac{1}{x} \leqslant \frac{2}{5}$

Exercice 4 — Utiliser le sens de variation de la fonction inverse. En s'aidant de la courbe de la fonction inverse ou de son tableau de variation donner un encadrement de $\frac{1}{x}$ dans chaque cas :

a) $x > 3$	d) $2 \leqslant x < 5$	g) $-4 \leqslant x < 0$	j) $-4 \leqslant x < 0$
b) $x > \frac{2}{3}$	e) $\frac{2}{5} < x \leqslant \frac{7}{8}$	h) $x \leqslant -8$	k) $-4 < x$
c) $3 > x > 0$	f) $-5 \leqslant x < -2$	i) $x \leqslant -\frac{2}{3}$	l) $x < 0$