Chapitre 11

Situations de proportionnalité et fonctions linéaires

11.1 Fonctions linéaires et proportionnalité

Définition 11.1 — expression. m un nombre réel donné.
Une « **fonction linéaire de coefficient** m » est donnée par :

$$\text{pour tout } x : \qquad f(x) = mx$$

Une fonction linéaire modélise une situation de proportionnalité entre abscisse (antécédent) et ordonnée (image) dont le coefficient de proportionnalité est m.

Proposition 11.1 Pour une fonction linéaire de coefficient m :

- $f(0) = 0$;
- pour tout $x \neq 0$ on a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(1)}{1} = m$

Proposition 11.2 — tableau de valeur. Le tableau de valeur d'une fonction linéaire est un tableau de proportionnalité :

x	0	1	x_1	x_2	x_3	$\dots$
$y = f(x)$	0	m	y_1	y_2	y_3	$\dots$

$\times m = \dfrac{y}{x} = \dots$

Proposition 11.3 — représentation graphique. La représentation graphique d'une fonction linéaire d'expression $f(x) = mx$ est la droite (d) d'équation $y = mx$ passant par l'origine $O(0;0)$ et de pente m.
La droite (d) a pour équation $y = mx$, cela signifie :

Un point $P(x\ ;\ y)$ est sur la droite (d)

signifie

Les coordonnées de $P(x\ ;\ y)$ vérifient $y = mx$.

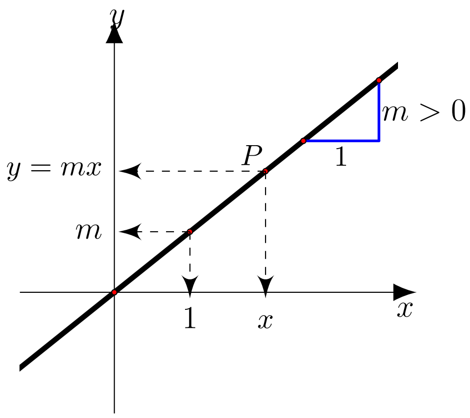


Figure 11.1 – m est le **coefficient directeur** de la droite d.

$$m = \frac{m}{1} = \frac{y}{x} = \frac{\Uparrow y}{\Rightarrow x}$$

11.1.1 Exercices : situations de proportionnalité

> Une variable Y est proportionnelle à une variable X signifie « il existe un nombre k tel que $Y = kX$. »
> Le nombre k est indépendant des valeurs prises par X et Y.

■ **Exemple 11.4** A est proportionnel à B. Si $A = 10$ alors $B = 2$. Trouver A lorsque $B = 12$

Équation générale $A = kB$

Trouver k $10 = k \times 2$ donc $k = 5$

Nouvelle équation $A = 5B$

Trouver la valeur à l'aide de l'équation $A = 5 \times 12 = 60$

A	10	?	
B	2	12	$\times k$

Exercice 1 Complétez

1) y est proportionnel à x. Si $x = -4$ alors $y = 20$.

Équation générale ....

Trouver k ....

Nouvelle équation ....

2) y est proportionnel à x. Si $y = 55$ alors $x = 5$. Trouver y lorsque $x = 9$.

Équation générale ....

Trouver k ....

Nouvelle équation ....

Trouver la valeur à l'aide de l'équation ....

3) N est proportionnel à L. Si $N = 1{,}8$ alors $L = 0{,}6$. Trouver N lorsque $L = 2{,}5$.

Équation générale ....

Trouver k ....

Nouvelle équation ....

Trouver la valeur à l'aide de l'équation ....

4) y est proportionnel à x. Si $y = 255$ alors $x = 5$. Trouver x lorsque $y = 7{,}5$.

Équation générale ....

Trouver k ....

Nouvelle équation ....

Trouver la valeur à l'aide de l'équation ....

5) y est proportionnel à x. Si $y = 64$ alors $x = 2$. Trouver x lorsque $y = 80$.

Équation générale ....

Trouver k ....

Nouvelle équation ....

Trouver la valeur à l'aide de l'équation ....

■ **Exemple 11.5** y est proportionnel à x. Si $x = 8$ alors $y = 36$. Trouver x (et y) lorsque $y - x = 154$

Équation générale : $y = kx$

Trouver k : $36 = k \times 8$ donc $k = \dfrac{36}{8} = \dfrac{9}{2}$

Nouvelle équation : $y = \dfrac{9}{2}x$

Trouver la valeur à l'aide de l'équation : $\dfrac{9}{2}x - x = 154$ donc $3{,}5x = 154$, donc $x = \dfrac{154}{3.5} = 44$.

Exercice 2 Complétez

1) y est proportionnel à x. Si $y = 28$ alors $x = 21$. Trouver x (et y) lorsque $y + x = 56$

Équation générale ....

Trouver k ....

Nouvelle équation ....

Trouver les valeurs à l'aide de l'équation ....

....

2) y est proportionnel à x. Si $y = 12$ alors $x = 15$. Trouver x (et y) lorsque $y + 2x = 36{,}75$

Équation générale ....

Trouver k ....

Nouvelle équation ....

Trouver les valeurs à l'aide de l'équation ....

....

Exercice 3 Complétez

1) Dans l'expression du périmètre d'un cercle $C = 2\pi r$, C est .... au rayon r.

2) Dans l'expression du perimètre d'un carré ...., le périmètre p est proportionnel ....

3) Dans l'expression $y = -\dfrac{x}{2}$, la variable y est proportionnelle ....

4) Dans l'expresion $y = 2(x + 1)$, la variable y est proportionnelle ....

5) Dans l'expression $y = 5x - 1$, la variable .... est proportionnelle à x.

6) Dans l'expresion $y = 3x + k$, la variable y est proportionnelle à la variable x lorsque $k =$ ....

7) Dans l'expresion $y = 3\sqrt{x}$, la variable y .... à la variable $\sqrt{x}$.

8) Dans l'expresion $y = x^2$, la variable y .... à la variable x^2.

Exercice 4

On a $y = (2m+6)x^2 + (1-m)x$. Sachant que y est proportionnel à x déterminer la valeur de m.

Exercice 5

On a $y = (a-2)x + (a^2-4)$. Sachant que y est proportionnel à x déterminer la valeur de a.

Exercice 6

On suppose que la consomation en essence d'un véhicule donné est proportionnelle à la distance qu'il parcourt. Un bus consomme 30 L d'essence tous les 120 km, et une camionnette 12 L tous les 50 km.

1) Exprime l'essence consommée b par le bus en fonction de la distance parcourue x en km
2) Exprime l'essence consommée c par le camion en fonction de la distance parcourue x en km
3) Marc voyage en camionnette. S'il prenait le bus il consommerait 22,50 L de plus. x est la longueur du trajet. Écrire une équation en x et déterminer x.

> Dans un mouvement uniforme, la distance parcourue d est proportionnel au temps écoulé t. La vitesse moyenne est le quotient de la distance parcourue par le temps de parcours.
>
> $$d = v \times t \qquad v = \frac{d}{t} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temp écoulé}} \qquad t =$$
>
> L'unité officielle est le mètre par seconde (m/s mais on utilise souvent le kilomètre par heure (km/h) .

■ **Exemple 11.6** Déterminer la distance parcourue d en $t = $ 2h52min à la vitesse 45 km/h.

$$t = \text{2h52min} = 2 + \frac{52}{60}\text{h} = \frac{172}{60}\text{h} \qquad d = vt = 45\,\text{km/h} \times \frac{52}{60} = 129\,\text{km}t$$

Exercice 7 Pour chacun des déplacements uniformes données, détérminer la grandeur demandée.

1) $v = 52\,\text{km/h}$, $t = 2{,}50\,\text{h}$. $d =$ . . . .
2) $v = 17\,\text{km/h}$, $t = 3\,\text{h}$. $d =$ . . . .
3) $v = 22\,\text{km/h}$, $t = 2\,\text{h}50\,\text{min}$ . . . .

   $d =$ . . . .
4) $v = 62\,\text{km/h}$, de 10h40 à 14h30. $t =$ . . . .

   $d =$ . . . .
5) $v = 95\,\text{km/h}$, $t =$ 3h 50min= . . . .

   $d =$ . . . .
6) $v = 25{,}30\,\text{km/h}$, $t =$ 3h 23min= . . . .

   $d =$ . . . .
7) $v = 400\,\text{km/h}$, $d = 1\,000\,\text{km}$

   $t =$ . . . .
8) $v = 18\,\text{km/h}$, $d = 22\,\text{km}$. $t =$ . . . .

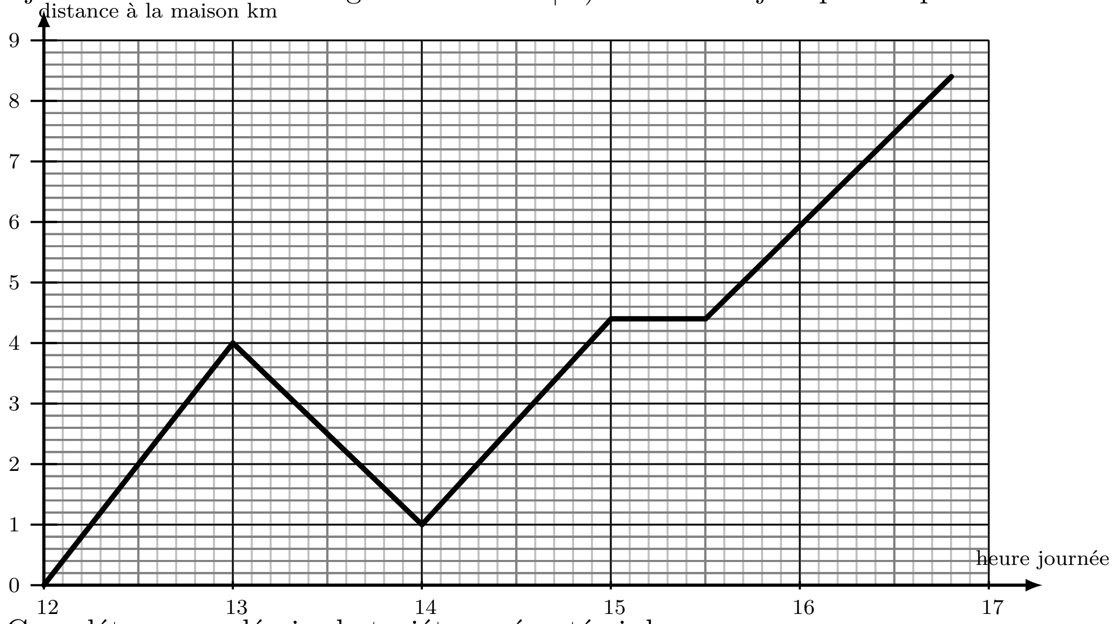
Exercice 8 Détermine la vitesse moyenne d'une voiture dans les cas suivants :

1) Elle parcourt 71,20 km en 51 min
2) Elle parcourt 468 km en 5 h37 min

Exercice 9 Le trajet en avion Londre-Frankfort de 634 km dure 86 min. Donner la vitesse moyenne en km/h.

Exercice 10 Lors d'une promenade, Tasha decide de retourner dans un magasin, et plus tard s'arrête pour une demi heure. À l'aide du graphique ci-dessous déterminer les vitesse moyennes :

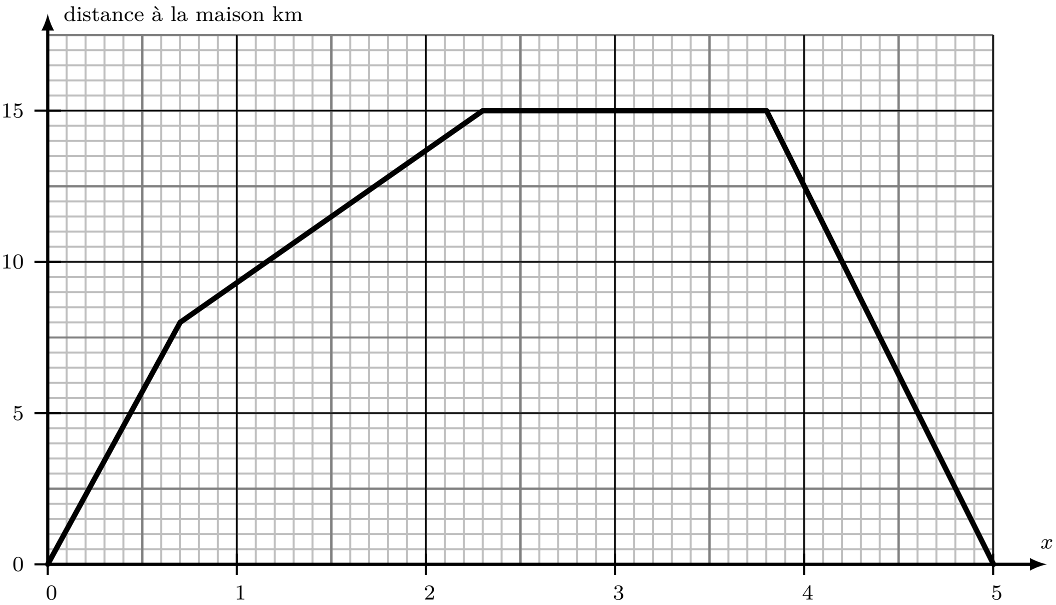
1) lors de la première heure de trajet
2) lors du trajet de retour vers le magasin
3) lors du trajet entre le magasin et leur pause.
4) lors du trajet après la pause.



Exercice 11 Complétez pour décrire le trajét représenté ci-dessous :

« En sortant de chez lui, un cycliste fait __________ km à la vitesse de __________ km/h.

__________ min après avoir quitté la maison le cycliste ralenti à la vitesse de __________ km/h pour h. Arrivé à __________ km de la maison, il prend une pause de __________ h. Il prend le chemin du retour à la vitesse de __________ km/h »

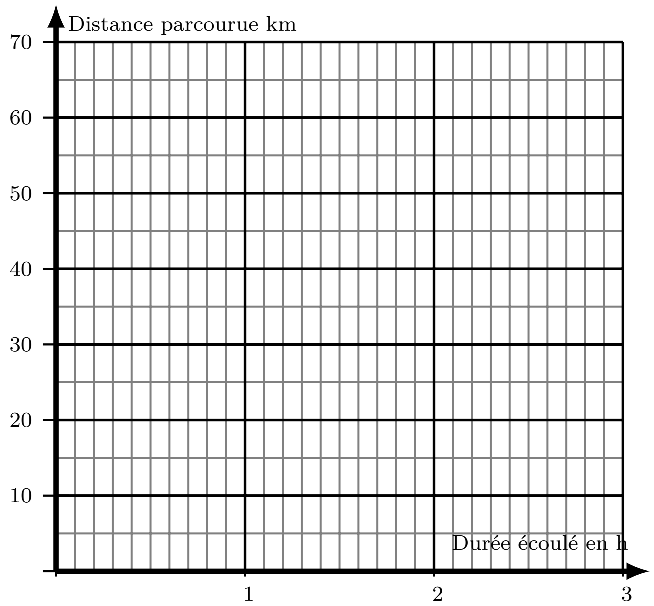


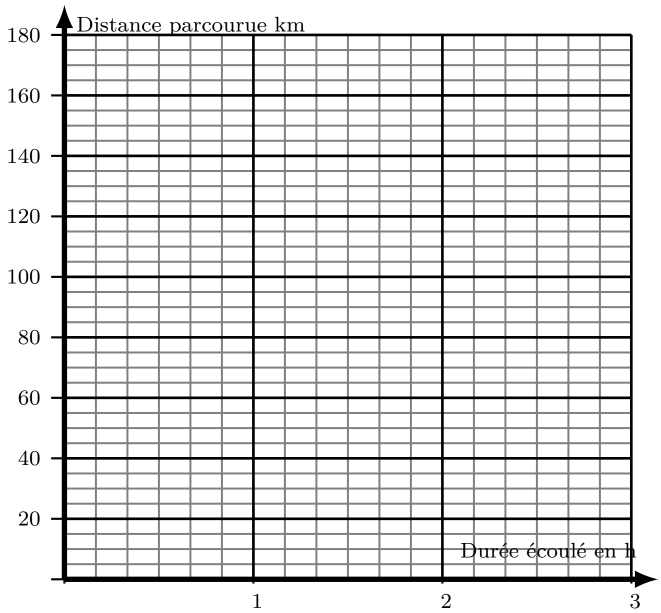
Exercice 12 Un cycliste roulant à vitesse constante a effectué 36 km en 1 h20 min.

1) Représenter sur le graphe de gauche la distance parcourue en fonction de la durée écoulée.
2) Déterminer graphiquement (montrer les traces sur le graphique) :

   a) La distance parcourue en 2 h20 min.

   b) Le temps mis pour parcourir 45 km.





Exercice 13

Un motocycliste et un cycliste partis en même temps sur la même route roulent à vitesse constante.
Le premier a parcouru 80 km en 1 h 20 min, et le second 35 km en 1 h10 min.

1) Représenter sur le graphe de droite les distances parcourues en fonction de la durée écoulée.
2) Déterminer graphiquement (montrer les traces sur le graphique):
   a) L'avance en km du motocycliste au bout de 2 h30 min.
   b) L'intervalle de temps séparant les passages au kilomètre 65 km.

Exercice 14 Calculer la distance et la durée de la totalité du trajet pour chacune des situations suivantes. En déduire la vitesse moyenne de l'ensemble en km/h.

1) 36 min à 20 km/h puis 2 h 20 min à 90 km/h
2) 2 h 20 min à 110 km/h, une pause de 25 min , puis 1 h 30 min à 145 km/h
3) trajet aller de 12 km à 80 km/h , et le retour en 60 km h

Exercice 15

Le lièvre et la tortue font la course sur une piste ovale de 300 m de long. Le lièvre court à une vitesse constante de 15km/h. La tortue court à la vitesse de 13,80 km/h.

1) Exprime la distance parcourue par le lièvre l en fonction du temps écoulé t en h
2) Exprime la distance parcourue par le lièvre t en fonction du temps écoulé t en h
3) On cherche l'instant t ou le lièvre rattrape une première fois la tortue. Écrire un équation en t et déterminer t et le nombre de tours fait par le lièvre.

Exercice 16

A l'aéroport un tapis roulant de 500 m se déplace à 4 km /h. Marcel et Billy s'avancent sur le tapis au même moment. Marcel reste immobile et se laisse porter. Bill marche à une cadence constante de 6 km/h. Quand Bill arrive à l'autre extrémité du tapis, combien de mètres le séparent de Marcel ?

> **Le %** désigne un centième. Ainsi $p\% = \dfrac{p}{100}$.

> La proportion de Y parmi X est la fraction $\dfrac{Y}{X}$.

> « k **de** X » désigne $k \times X$.

■ **Exemple 11.7** $0{,}2 = 0{,}20 = 20\%$ $\quad 0{,}035 = 3{,}5\%$

■ **Exemple 11.8** La proportion de 12 parmi $15 = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8 = 80\%$

■ **Exemple 11.9** « $\dfrac{3}{5}$ de 50 » $= \dfrac{3}{5} \times 50 = 30$

■ **Exemple 11.10** Écrire 12 comme un pourcentage de 50.
On cherche k tel que $12 = k$ de 50 : $k = \dfrac{12}{50} = 0{,}24 = 24\%$

Exercice 17

1) Écrire 8 comme un pourcentage de 50 : ....

2) Écrire 20 centimes comme fraction de 4€..

3) Écrire 2 400 m comme proportion de 5 km ....

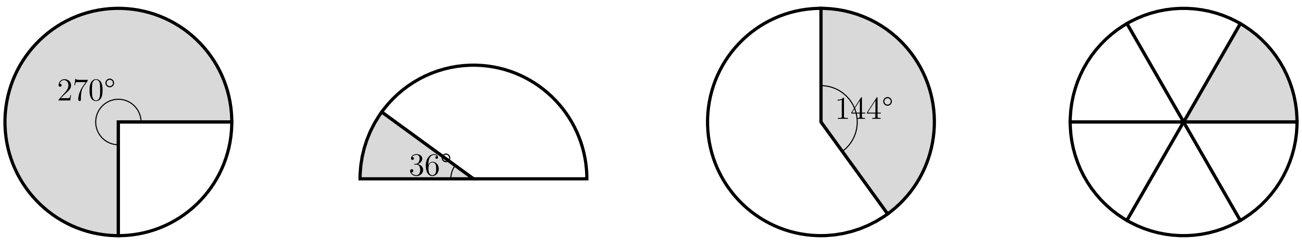
4) Le prix d'un abonnement train a augmenté de 42€ à 49€. Écrire l'augmentation comme pourcentage du prix de départ..

....

5) Écrire 16€ comme pourcentage de 12€..

6) Écrire 24€ comme pourcentage de 8€..

7) Pour chaque figure préciser le pourcentage de la partie grisée.



Exercice 18 Écrire les nombres suivants sous forme de pourcentages.

$\dfrac{23}{100} =$	$2 =$ ....
$0{,}05 =$	$0{,}5 + 2\% =$ ....
$0{,}15 =$	$0{,}12 + 5\% =$ ....
$0{,}035 =$	$\dfrac{3}{50} + 3\% =$ ....
$0{,}3 =$	$1{,}2 + 4{,}8\% =$ ....

Exercice 19 Calcule les valeurs demandées et montrant le calcul à réaliser.

$\frac{2}{3}$ de $24 = \frac{2}{3} \times 24 =$ ....

12% de $150 = 0{,}12 \times 150 =$ ....

5% de $180 =$ ....

15% de $90 =$ ....

1% de $23 =$ ....

72% de $110 =$ ....

23% de $110 =$ ....

0.5% de $60 =$ ....

100% de $24 =$ ....

200% de $24 =$ ....

$\frac{1}{8}$ de $-64 =$ ....

105% de $40 =$ ....

140% de $130 =$ ....

$\frac{1}{4}$ de 20% de $150 =$ ....

15% de $\frac{1}{3}$ de $96 =$ ....

40% de $\frac{2}{5}$ de $90 =$ ....

Montrer que $x\%$ de $y = y\%$ de x.

Exercice 20

1) Dans une école de 1 800 élèves, 25% font partie d'un club. De ceux qui font partie d'un club, $\frac{1}{5}$ font des compétitions locales. Quel est le nombre d'élèves faisant l'AS ? ....

2) Tasha gagne 72€ par jour. Après une augmentation, sa paye est $\frac{6}{5}$ de son ancien salaire. Donner son nouveau salaire. ....

3) Dans un test sur 48 points, Alice a 87,5% des points, Béa a $\frac{5}{8}$ des points, et Carl a 8 points. Quel élève a la plus grande note ? ....

Exercice 21 Écrire une équation vérifiée par x et déterminer le.

1) $\frac{1}{5}$ de x est 7 ....

2) $\frac{3}{4}$ de x est 18 ....

3) $\frac{7}{2}$ de x est 49 ....

4) 15% de x est 24 ....

5) 60% de x est 120 ....

6) 40% de x est 3200 ....

7) x de 35 vaut 60 ....

11.2 Problèmes d'évolution

Définition 11.2 Une évolution est un couple $(V_I; V_F)$ d'une valeur initiale et d'une valeur finale (généralement positifs).

Si $V_F > V_I$ c'est une appréciation, augmentation, ou inflation

Si $V_F < V_I$ c'est une dépréciation, ou réduction.

Définition 11.3 Une évolution de taux TE correspond à une multiplication par $1 + TE$.

$$\text{coefficient multiplicateur} = 1 + \text{taux d'évolution}$$

$$\text{Valeur Initiale} \times CM = \text{Valeur Finale}$$

$TE > 0$ taux d'évolution positif augmentation : $CM > 1$.

$TE < 0$ taux d'évolution négatif diminution : $CM < 1$.

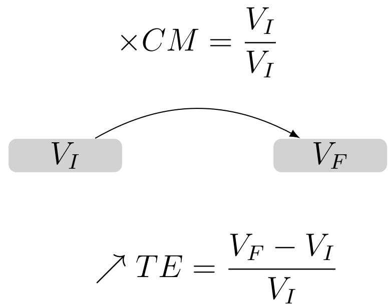


Figure 11.2 – Evolution, CM et TE

Proposition 11.11 On a les relations :

$$CM = \frac{V_F}{V_I} \qquad \text{et} \qquad TE = \frac{V_F - V_I}{V_I}$$

.

11.2.1 Exercices : problèmes d'évolutions

Exercice 22 Complétez.

1) Une augmentation de 3% est une évolution de taux $TE =$ ....

   Elle correspond à une multiplication par $CM = \ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) Une augmentation de 5% est une évolution de taux $TE =$ ....

   Elle correspond à une multiplication par $CM = \ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3) Une diminution de 7% est une évolution de taux $TE = -$ ....

   Elle correspond à une multiplication par $CM = \ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4) Une diminution de 10% est une évolution de taux $TE = -$ ....

   Elle correspond à une multiplication par $CM = \ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5) Multiplier par $CM = 1.2$ correspond à une évolution de taux $TE =$ ....

   C'est une (augmentation/diminution) de ......%.

6) Multiplier par $CM = 1.075$ correspond à une évolution de taux $TE =$ ....

   C'est une (augmentation/diminution) de ......%.

7) Multiplier par $CM = 0.95$ correspond à une évolution de taux $TE = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   C'est une (augmentation/diminution) de ......%.

8) Multiplier par $CM = 0.7$ correspond à une évolution de taux $TE = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   C'est une (augmentation/diminution) de ......%.

9) Une évolution de 1.50 € à 1.86 € correspond à une multiplication par $CM = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$. C'est une évolution de taux $TE = \boxed{} - 1 = \boxed{}$%.

10) Une évolution de 40 € à 24 € correspond à une multiplication par $CM = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$. C'est une évolution de taux $TE = \boxed{} - 1 = \boxed{}$%.

11) Une évolution de 320 € à 288 € est de taux $TE = \dfrac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{} = \boxed{}$%.

12) Une évolution de 90 € à 100 € est de taux $TE = \dfrac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{} = \boxed{}$%.

Exercice 23 Compléter afin d'associer les TE avec les CM correspondants à l'évolution donnée.

taux d'évolution TE	Augmentation/diminution	Coefficient Multiplicateur CM
0,07	augmenter de 7%	$\times$ 1,07
	augmenter de 70%	
$-0{,}07$		
	diminuer de 10%	
	augmenter de 10%	
	augmenter de 200%	
	diminuer de 4%	
	diminuer de 12%	
		$\times$ 1,22
-0,72		
0,82		
0,92		
	diminuer de 1%	
		$\times$ 0,89
	augmenter de 0,1%	
	diminuer de 0,1%	

Exercice 24

Le prix de ma taxe d'habitation était de 917 € l'année dernière et il a augmenté de 2 %. Calculer son nouveau prix.

$\times CM =$

$V_I =$ $\qquad$ $V_F =$

$TE =$

↗ de

Nouveau prix = ...

Exercice 25

Il y a 6 ans, la population d'une ville était de 29 000 habitants. Depuis, elle a diminué de 26 %. Calculer le nombre d'habitants actuel de cette ville.

$\times CM =$

$V_I =$ $\qquad$ $V_F =$

$TE =$

↗ de

Population actuelle = ...

Exercice 26

Un article coûtait $6,20$ € et son prix a augmenté de 40 %. Calculer son nouveau prix.

$\times CM =$

$V_I =$ $\qquad$ $V_F =$

$TE =$

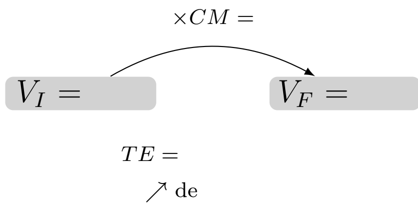
↗ de

Nouveau prix = ...

Exercice 27
Après une augmentation de 40 % un article coûte maintenant $4,06$ €. Calculer son prix avant l'augmentation.

Ancien prix × . . . . = $4,06$ €

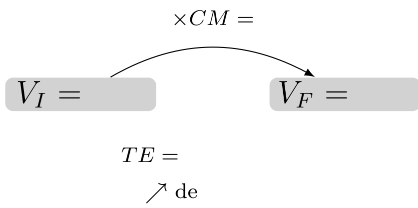
Ancien prix = ...



Exercice 28
Après une augmentation de 9 % le prix de ma facture annuelle de gaz est maintenant $1154,31$ €. Calculer son prix avant l'augmentation.

Ancien prix × . . . . = $1154,31$ €

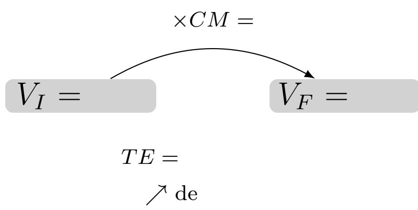
Ancien prix = ...



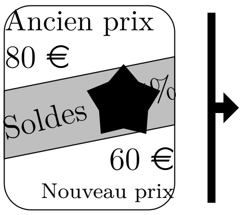
Exercice 29
Soldé à -40 % un article coûte maintenant 414 €. Calculer son prix avant les soldes.

Ancien prix × . . . . = $1154,31$ €

Ancien prix = ...



■ **Exemple 11.12** Quel nombre se cache sous l'étoile ?



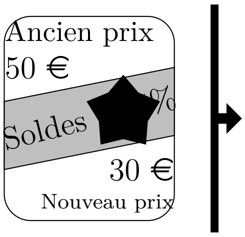
valeur de départ = 80 €. valeur finale = 60 €

Le coefficient multiplicateur CM vérifie : valeur de départ $\times CM$ = valeur finale

$CM = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur de départ}} = \frac{60}{80} = 0{,}75$

Comme « $CM = 1 + \text{TE}$ » donc : $TE = 0{,}75 - 1 = -0{,}25$.

Il s'agit d'une **diminution** de 25%



Exercice 30 Exprimer les augmentations/diminutions suivantes en pourcentage.

1) En 5 ans, la population d'une ville est passé de 820 000 habitants à 721 600.
2) En 10 ans, la population d'une ville est passé de 64 000 habitants à 78 720.
3) En 2020, il y avait 1 000 élèves dans un lycée. En 2021, ils sont 1 100.
4) Le prix de ma taxe d'habitation est passé de 928 € à $937,28$ €.

Exercice 31 Déterminer le taux d'évolution des évolutions suivantes.

1) Valeur de départ : 125 €. Valeur finale : 100 €
2) Valeur de départ : 16 €. Valeur finale : 12.5 €
3) Valeur de départ : 100 €. Valeur finale : 36 €
4) Valeur de départ : 20 €. Valeur finale : 36 €
5) Valeur de départ : 20 €. Valeur finale : 18 €
6) Valeur de départ : 200 €. Valeur finale : 160 €
7) Valeur de départ : 160 €. Valeur finale : 200 €
8) Valeur de départ : 22 €. Valeur finale : 40 €
9) Valeur de départ : 22 €. Valeur finale : 88 €
10) Valeur de départ : 88 €. Valeur finale : 22 €
11) Valeur de départ : 125 €. Valeur finale : 80 €
12) Valeur de départ : 80 €. Valeur finale : 125 €

Exercice 32 Le montant de la TVA (taxe sur la valeur ajoutée) est généralement 20% du prix HT (hors taxe). Le prix TTC (toutes taxes comprises) est égal au prix HT augmenté de 20%.

a) Quel est le coefficient multiplicateur entre prix HT et TVA ? entre prix HT et prix TTC ?
b) Le prix hors taxe d'une chemise est 80 €. Calculer le prix TTC.
c) Le prix TTC d'un pull est égal à 135 €. Quel était le prix HT ?
d) Le prix TTC d'une veste est 159 €. Quel est le montant de la TVA ?

Exercice 33 — Brevet, Nouvelle Calédonie 2018. Un prix TTC (Toutes Taxes Comprises) s'obtient en ajoutant la taxe appelée TGC (Taxe Générale sur la Consommation) au prix HT (Hors Taxes). En Nouvelle-Calédonie, il existe quatre taux de TGC selon les cas : 22 %, 11 %, 6 % et 3 %.

Alexis vient de faire réparer sa voiture chez un carrossier. Voici un extrait de sa facture qui a été tâchée par de la peinture. Les colonnes B, D et E désignent des prix en francs.

	A	B	C	D	E
1	**Référence**	Prix HT	TGC (en %)	Montant TGC	Prix TTC
2	Phare avant	64 000	22 %	14 080	78 080
3	Pare-chocs	18 000	22 %		21 960
4	Peinture	11 700	11 %	1 287	12 987
5	Main d'œuvre	24 000		1 440	25 440
6				**TOTAL À RÉGLER (en Francs)**	**138 467**

1) Quel est le montant TGC pour le pare-chocs ?
2) Quel est le pourcentage de la TGC qui s'applique à la main d'œuvre?
3) La facture a été faite à l'aide d'un tableur.
Quelle formule a été saisie dans la cellule E6 pour obtenir le total à payer ?

Exercice 34 — bilan. Compléter le tableau

Prix de départ	taux d'évolution	Augmentation/diminution	Coefficient Multiplicateur	Prix final	Variation absolue
72 €	-20%				
72 €				54 €	
	20%			54 €	
	-20%			54 €	
54 €					+54 €
40 €			×0,7		
				108 €	-27 €
96 €				108 €	
			×1,3	91 €	
	+25%			98.40 €	
130 €			×1,007		
98.40 €					-19.68 €

11.3 Fonctions linéaires

Définition 11.4 — expression. m un nombre réel donné.
Une « **fonction linéaire de coefficient** m » est donnée par :

$$\text{pour tout } x : \qquad f(x) = mx$$

Une fonction linéaire modélise une situation de proportionnalité entre abscisse (antécédent) et ordonnée (image) dont le coefficient de proportionnalité est m.

Proposition 11.13 Pour une fonction linéaire de coefficient m :

- $f(0) = 0$;
- pour tout $x \neq 0$ on a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(1)}{1} = m$

Proposition 11.14 — tableau de valeur. Le tableau de valeur d'une fonction linéaire est un tableau de proportionnalité :

x	0	1	x_1	x_2	x_3	$\dots$
$y = f(x)$	0	m	y_1	y_2	y_3	$\dots$

$\times m = \dfrac{y}{x} = \dots$

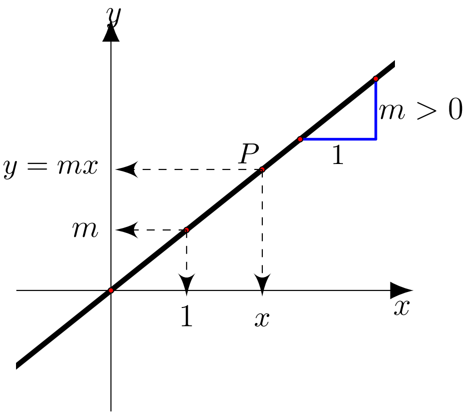


Figure 11.3 – m est le **coefficient directeur** de la droite d.

$$m = \frac{m}{1} = \frac{y}{x} = \frac{\Uparrow y}{\Rightarrow x}$$

Proposition 11.15 — représentation graphique. La représentation graphique d'une fonction linéaire d'expression $f(x) = mx$ est la droite (d) d'équation $y = mx$ passant par l'origine $O(0;0)$ et de pente m.
La droite (d) a pour équation $y = mx$, cela signifie :

Un point $P(x\ ;\ y)$ est sur la droite (d)
signifie
Les coordonnées de $P(x\ ;\ y)$ vérifient $y = mx$.

11.3.1 Exercices : Fonctions linéaires

■ **Exemple 11.16** Les tableaux de valeurs suivants sont des tableaux de valeurs de fonctions linéaires. Compléter les tableaux et placer les points dans le repère donné.

x	0	1		
$y = \ldots x$	0	3	6	-9

$\times \ldots$

x	0	1	3	-5
$y = \ldots x$	0	$\frac{5}{3}$		

$\times \ldots$

x	5	1		
$y = \ldots x$	7		5	7

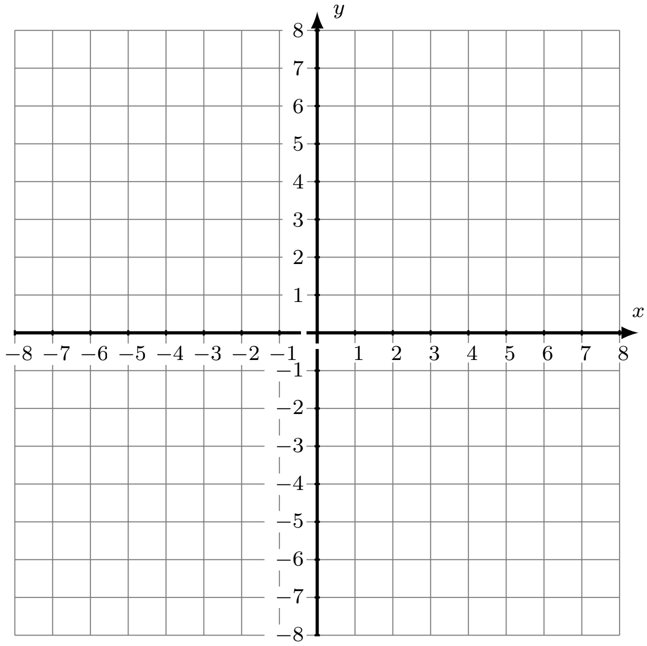
$\times \ldots$

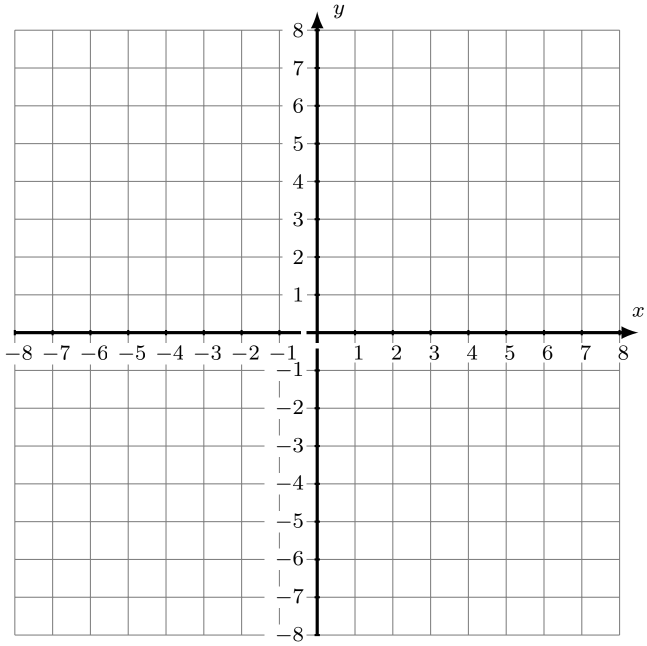
x	-4			
$y = \ldots x$	3	4	3	7

$\times \ldots$

x	-3			
$y = \ldots x$	4	4	3	3

$\times \ldots$





■ **Exemple 11.17** Parmi les tableaux de valeurs suivants, lesquels ne peuvent être ceux d'une fonction linéaire ?

x	3	15	21	-105
$y = \ldots x$	8	40	55	-280

$\times \ldots$

x	-5	15	8	-35
$y = \ldots x$	7	-21	$-11{,}2$	50

$\times \ldots$

Exercice 35 Pour les fonctions linéaires suivantes, préciser la valeur du coefficient m :

$f_1(x) = 0$ .... $m =$ ....

$f_2(x) = 5x$ .... $m =$ ....

$f_3(x) = (7-1)x$ .... $m =$ ....

$f_4(x) = x$ .... $m =$ ....

$f_5(x) = x \times 3$ .... $m =$ ....

$f_6(x) = 2x + 3x$ .... $m =$ ....

$f_7(x) = -x$ .... $m =$ ....

$f_8(x) = \dfrac{5}{6}x$ .... $m =$ ....

$f_9(x) = \dfrac{x}{3}$ .... $m =$ ....

$f_{10}(x) = -\dfrac{2x}{3}$ .... $m =$ ....

Exercice 36 Soit la fonction f définie par $f(x) = 5x$.

1) Déterminer l'image de 2.
2) Résoudre l'équation $f(x) = 13$.
3) Quel est l'antécédent de 13 ?

Exercice 37 Soit la fonction g définie par $g(x) = -3x$.

1) Déterminer $g(3)$ et $g(5)$.
2) Résoudre l'équation $g(x) = -9$.
3) Déterminer l'antécédent de -5.

Exercice 38 La fonction linéaire f est telle que $f(12) = 42$. Calculer le coefficient m de la fonction f.

Exercice 39

Une fonction linéaire g est telle que $g(-17) = 52{,}87$. Déterminer le coefficient m de g et en déduire $g(-10)$.

Exercice 40

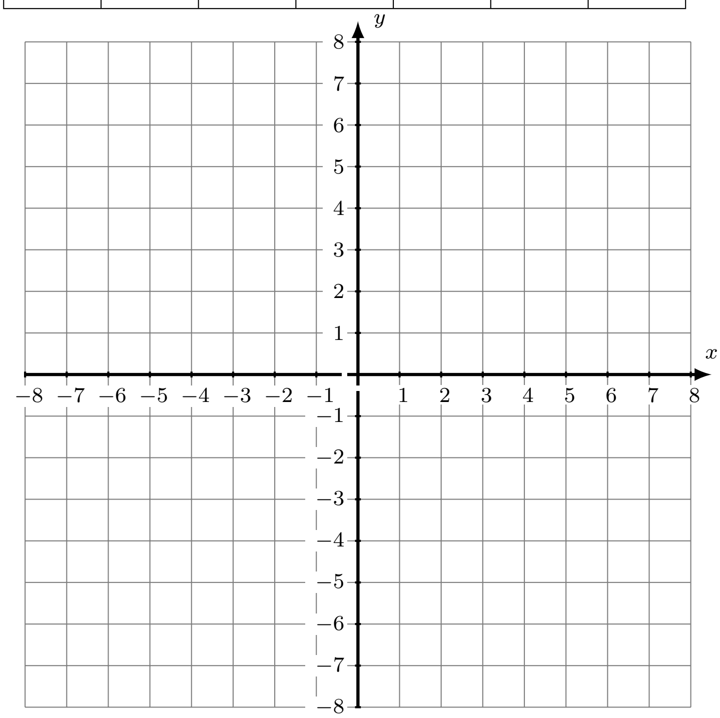
Une fonction linéaire h est telle que $h(14) = -2{,}1$. Résoudre l'équation $h(x) = 5$.

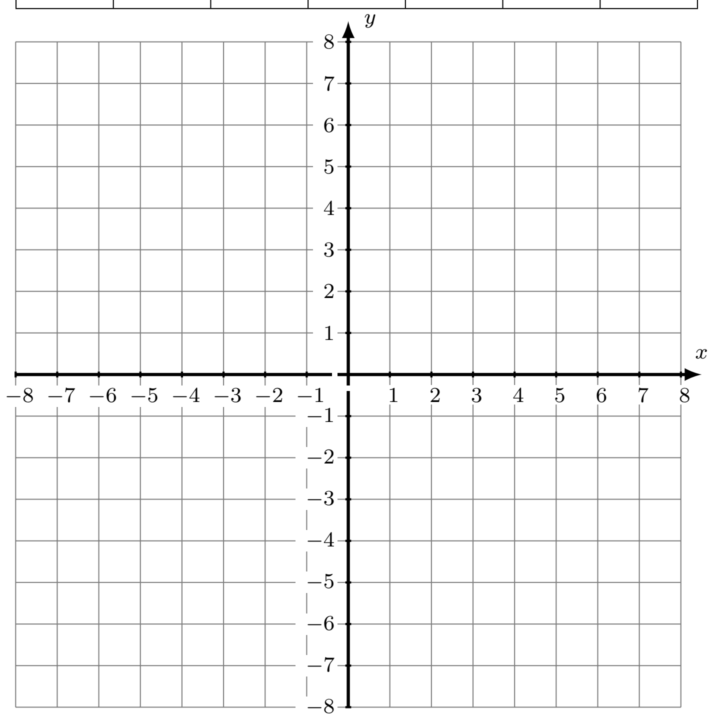
Exercice 41

Représenter graphiquement les fonctions linéaires f et g d'expressions $f(x) = \dfrac{3}{2}x$ et $g(x) = -\dfrac{5}{4}x$.

x	-6	-4	-2	0	2	4
$f(x)$						

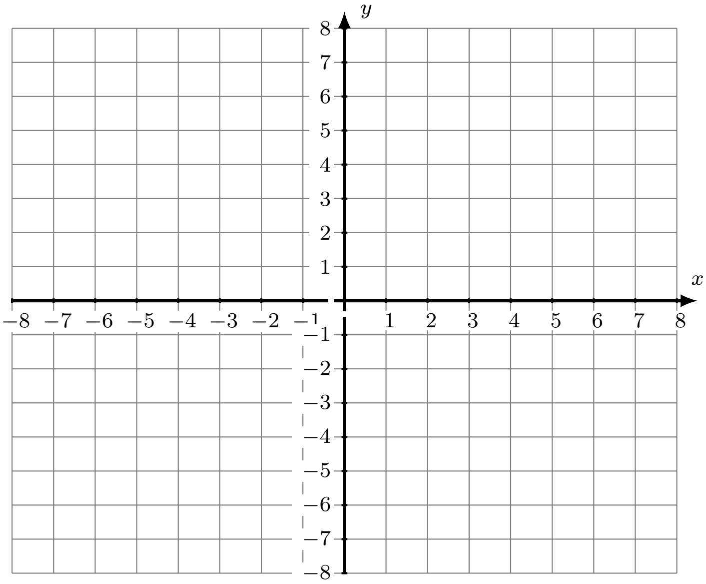
x	-6	-4	-2	0	2	4
$g(x)$						

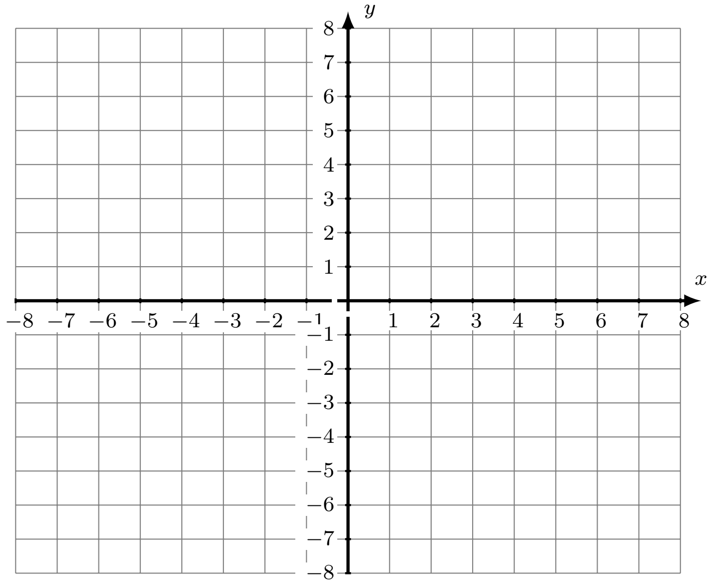


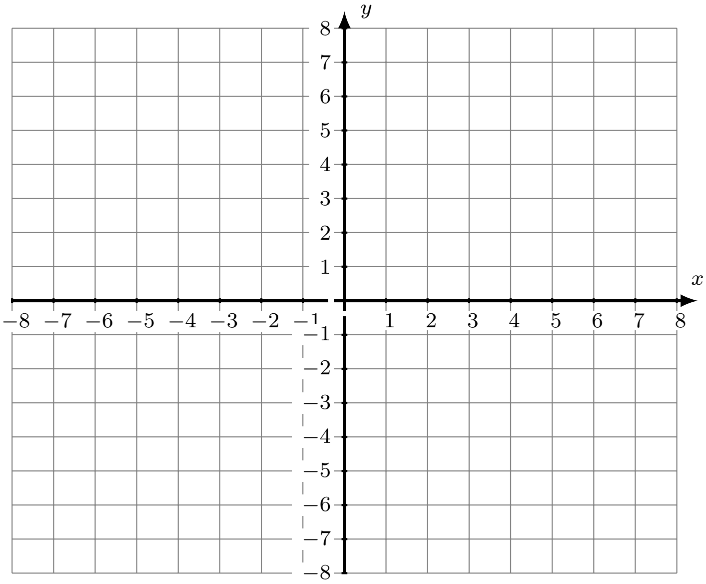


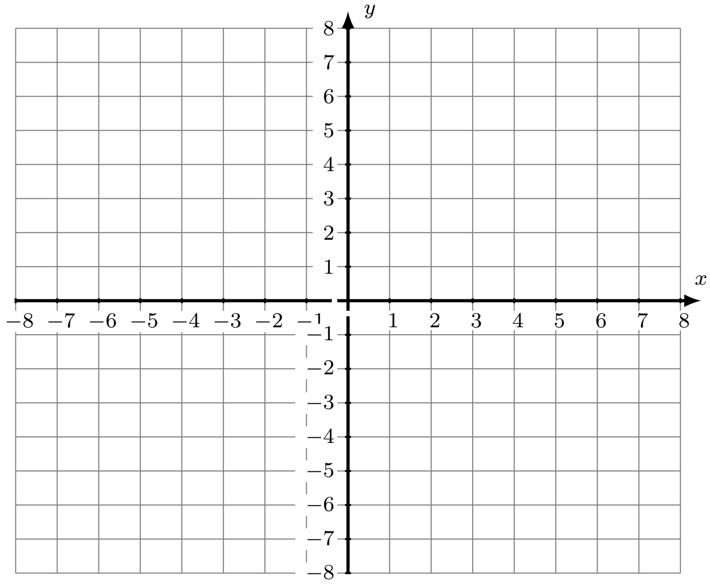
Exercice 42 Représenter les fonctions linéaires suivantes. Vous préciserez un point sur le quadrillage (coordonnées entières) appartenant à chaque représentation.

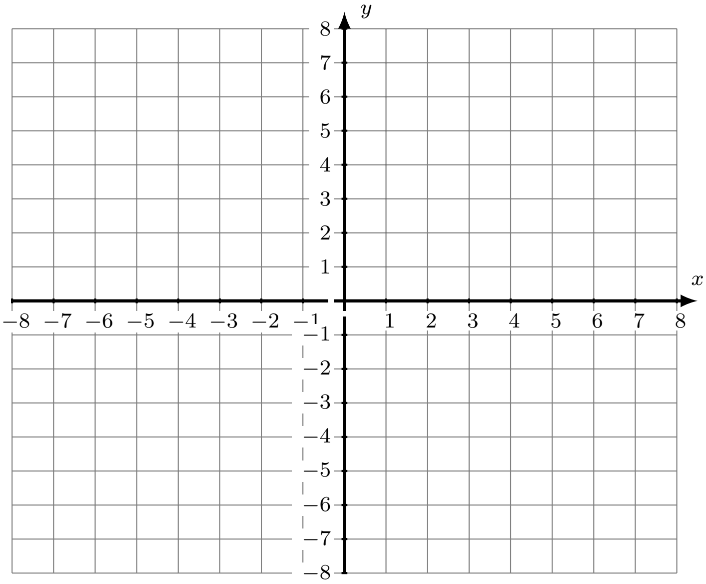
$$f_1(x) = 2x \qquad f_2(x) = \frac{4}{3}x \qquad f_3(x) = -3x \qquad f_4(x) = \frac{1}{3}x \qquad f_5(x) = -\frac{x}{2} \qquad f_6(x) = -\frac{3}{4}x$$

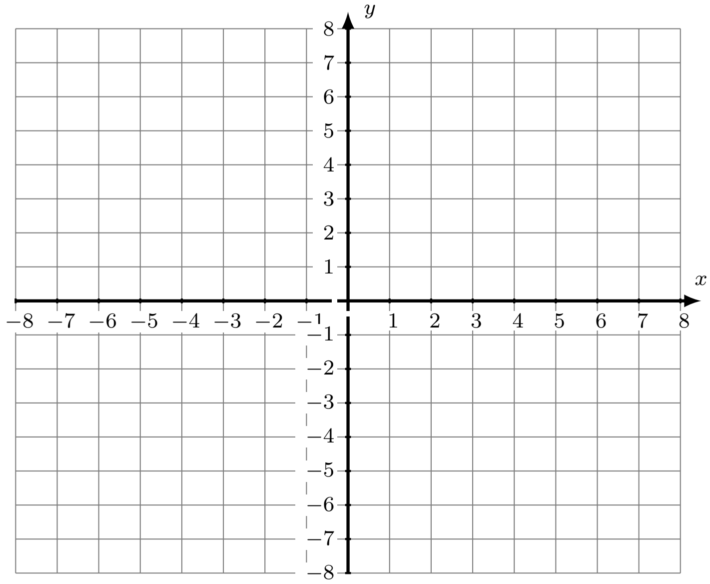




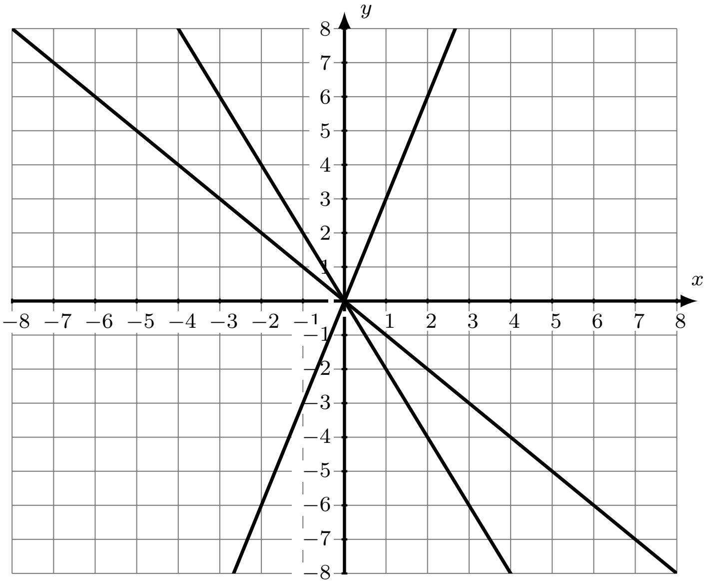


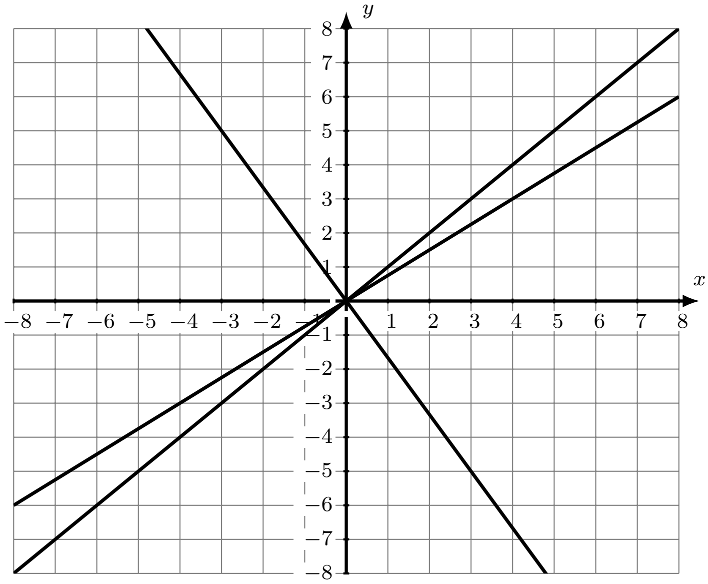






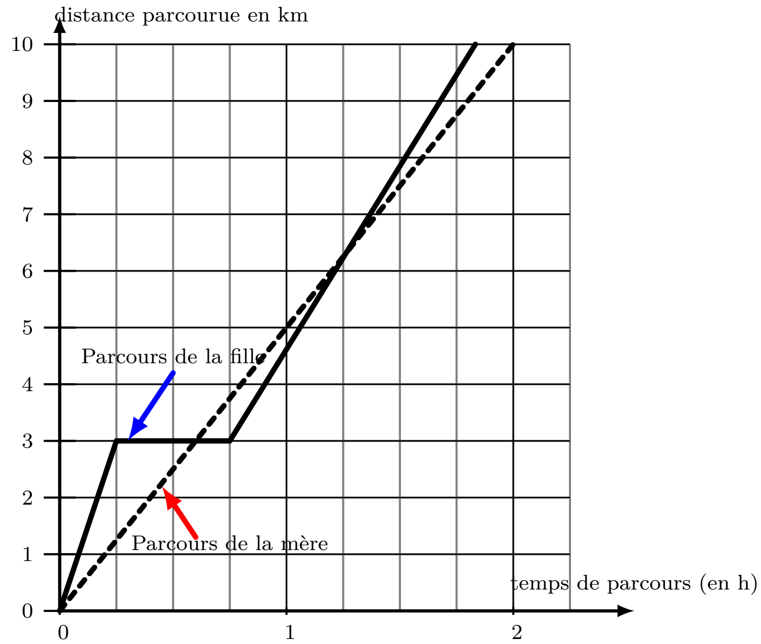
Exercice 43 Pour chacune des fonctions linéaires représentées ci-dessous , déterminer la pente de la droite puis l'expression de la fonction représentée.





Exercice 44

Une mère et sa fille rentrent chez elles à pied en empruntant le même trajet de 10 kilomètres. La mère décide de s'y rendre en marchant et sa fille en courant. Le graphique ci-dessous modélise les parcours de la mère et de la fille depuis leur départ.



1) a) Indiquer le temps mis par la mère pour rentrer chez elle, avec la précision que permet la lecture du graphique.
   b) Déterminer la vitesse moyenne en km/h de la mère sur l'ensemble de son parcours.
   c) La distance parcourue par la mère est-elle proportionnelle au temps ?
2) La fille est partie à 16 h et est arrivée chez elle à 17 h 50. Elle a fait une pause durant sa course.
   a) Indiquer la durée de la pause de la fille, avec la précision que permet la lecture graphique.
   b) Quand a-t-elle couru le plus vite: avant ou après sa pause ?
3) Combien de fois la mère et la fille se sont retrouvées au même endroit et au même moment, au cours de leur trajet ?
4) Dans cette question, on note f la fonction qui, au temps de parcours x (exprimé en heure) de la mère depuis le départ, associe la distance parcourue (exprimée en kilomètre) par la mère depuis le départ. Parmi les propositions suivantes, quelle est l'expression de $f(x)$: $f(x) = \frac{1}{5}x$; $f(x) = 5x$; $f(x) = x+5$.