Chapitre 6
Dérivation (2) Calcul de fonctions dérivées simples et applications

Table 6.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 6...

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître**.../**savoir faire**...	🪨	💎	💍
Calcul de fonction dérivées : premiers principes			
les dérivées de fonctions de référence	1		
dérivée d'une somme et d'une multiplication par constante	2	3	
dérivée d'une composée par une fonction affine	4, 5	6	
dérivée d'un produit		35, 36, 37	
dérivée d'un inverse et d'un quotient	42	38, 39, 40	41
Application 1 : équations de tangentes et problèmes			
calcul d'équations réduite de tangentes	7, 8	9	
problèmes inverses	10, 11,	12,	
intersection de tangentes et de courbes	13	14 à 17	18
Application 2 : sens de variation d'une fonction et signe de sa dérivée			
sens de variation d'une fonction	19	20, 21, 22	43, 44
extremums d'une expression, point critiques	23, 24	25, 26, 27	
problèmes			28
Application 3 : méthodes numériques pour une résolution approchée de $f(x) = 0$			
algorithme de Newton-Raphson		29, 30, 31	33, 34

6.1 Dérivées des fonctions de référence

Définition 6.1

Soit une fonction f définie sur un intervalle $D \in \mathbb{R}$. L'ensemble $D' \subset D$ des abscisses x pour lesquelles f est dérivable en x est le **domaine de dérivabilité**.

La fonction dérivée f' est définie sur D' par $f' \colon x \mapsto f'(x)$.

■ **Exemple 6.1** Soit c, m et $p \in \mathbb{R}$.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = c$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 0$.
2. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = mx + p$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = m$.

Démonstration. vu au chapitre 04 ■

Proposition 6.1 — admis. Pour $n \geqslant 0$ entier positif. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = nx^{n-1}$.

Proposition 6.2 — admis. Pour $n < 0$ entier négatif. La fonction f définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ et $f'(x) = -nx^{-n-1} = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$

■ **Exemple 6.2**

1. $(n = 1)$. $f \colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x = x^1 \end{array}$, alors f dérivable, et $f' \colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{1-1} = 1 \end{array}$.
2. $(n = 10)$. $f \colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x = x^{10} \end{array}$, alors f dérivable, et $f' \colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 10x^{10-1} = 10x^9 \end{array}$.
3. $(n = -1)$ $f \colon \begin{array}{l}]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$, alors f dérivable, et $f' \colon \begin{array}{l}]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{-1}{x^2} \end{array}$.
4. $(n = -10)$ $f \colon \begin{array}{l}]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x^{10}} \end{array}$, alors f dérivable, et $f' \colon \begin{array}{l}]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{-10}{x^{11}} \end{array}$.

Proposition 6.3 — racine carrée. Soit la fonction f définie sur définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

R La formule de la dérivée de $f \colon x \mapsto \sqrt{x} = x^{0.5}$, est similaire à la formule de la dérivée de $x \mapsto x^n$. En effet $f'(x) = 0.5x^{0.5-1} = 0.5x^{-0.5} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^{0.5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

6.2 Dérivées et opérations

Définition 6.2 — somme et produit par une constante. Soit u et v deux fonctions dévinies sur un intervalle I. $c \in \mathbb{R}$ un réel.

On défini les fonctions $(u+v)$, (cu) sur l'intervalle I par :

- $(u+v)\colon x \mapsto u(x)+v(x)$ (somme)
- $(ku)\colon x \mapsto c \times u(x)$ (multiplier par constante)

Proposition 6.4 Soit $c \in \mathbb{R}$.

Si les fonctions u et v sont dérivable sur I, alors cu et $u+v$ sont aussi dérivables sur I :

1. Pour tout $x \in I$, $(cu)'(x) = cu'(x)$. On peut écrire : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cu) = c\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.
2. Pour tout $x \in I$, $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)$. On peut écrire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v$.

Démonstration. $x \in I$. On pose $f = cu$ et $g = u+v$

■

Exemple 6.3

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2$. $f = 4u$ ou $u\colon x \mapsto x^2$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(x) = (4u)'(x) = 4u'(x) = 4(2x) = 8x$
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x$.

   $f = u + 5v$ ou u et v sont définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$ et $v(x) = 5x$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (3x^2) - 5(1) = 3x^2 - 5$.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 7x + 6$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   $f'(x) = 3(4x^3) + 2(3x^2) - 5(2x) + 7(1) + 0 = 12x^3 + 6x^2 - 10x + 7$
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{4}{x^2}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car combinaison linéaire de fonctions chacune dérivable sur $\mathbb{R}^*$:

   $f'(x) = 2(x) - 4\left(\dfrac{-2}{x^3}\right) = 2x + \dfrac{8}{x^3}$

■ **Exemple 6.4 — composée.**

1. Soit u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^4$ et $v(x) = x^2 + 3x$.

   La fonction définie par $f(x) = u(v(x)) = u(x^2 + 3x) = (x^2 + 3x)^4$ est une fonction composée.

   On peut aussi écrire $g(x) = v(u(x)) = v(x^4) = (x^4)^2 + 3(x^4)$ est une fonction composée.

2. La fonction définie par $f(x) = \sqrt{2 - 3x}$, peut être regardée une fonction composée $f(x) = u(v(x))$ ou u et v sont définies par $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 2 - 3x$.

Proposition 6.5 — Dérivée d'une composée avec une fonction affine. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle J, et soit la fonction affine définie sur I par $v(x) = ax + b$.

La fonction f définie sur I par $f(x) = u(ax + b)$ est aussi dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = au'(ax+b) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(ax+b)) = a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(ax+b)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u\big(a(x+h)+b\big) - u\big(ax+b\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u\big(ax+b+ah\big) - u\big(ax+b\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} a\frac{u\big(ax+b+ah\big) - u\big(ax+b\big)}{ah} \\
&= a\lim_{h\to 0} \frac{u\big(ax+b+ah\big) - u\big(ax+b\big)}{ah} \\
&= a\lim_{h'\to 0} \frac{u\big(ax+b+h'\big) - u\big(ax+b\big)}{h'} \\
&= au'(ax+b)
\end{aligned}$$

■

R Nous verrons l'année prochaine que pour $f(x) = u(v(x))$, la dérivée s'écrit $f'(x) = v'(x)u'(v(x))$, soit $\dfrac{\mathrm{d}u(v(x))}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(v(x))$

■ **Exemple 6.5**

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)^3$.

   On peut regarder f comme la composée $f(x) = u(2x + 1)$ ou u est définie par $u(x) = x^3$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 3x^2$

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 2u'(2x + 1) = 3(2x + 1)^2$.

2. Soit f définie sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{2x+1}$.

   f est la composée $f(x) = u(2x - 1)$ ou u est définie par $u(x) = \dfrac{4}{x}$. On a $u'(x) = -\dfrac{4}{x^2}$.

   f est dérivable et $f'(x) = 2u'(2x - 1) = 2\dfrac{-4}{(2x-1)^2} = -\dfrac{8}{(2x-1)^2}$

Définition 6.3 Soit u et v deux fonctions dévinies sur un intervalle I. $c \in \mathbb{R}$ un réel.

On défini les fonctions (uv) et $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sur l'intervalle I par :

$$(uv)\colon x \mapsto u(x) \times v(x) \qquad \left(\frac{1}{v}\right) : x \mapsto \frac{1}{v(x)} \qquad \left(\frac{u}{v}\right) : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$$

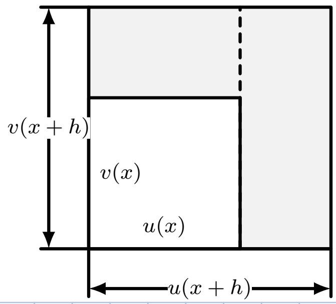
Proposition 6.6 — dérivée d'un produit, de l'inverse et du quotient.

Soit les fonctions u et v sont dérivables pour tout $x \in I$.

1. uv est aussi dérivable sur I.
2. Si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont aussi dérivables sur I et on a :

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{(v)^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{(v)^2}$$

Démonstration.



■

6.3 Application 1 : droites tangentes et approximation affine

f est dérivable en x_0. T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f\colon y = f(x)$ au point $(x_0; f(x_0))$:

$$T\colon y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

R Alternativement, pour x au voisinage de x_0 on a $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

■ Exemple 6.6 — déterminer l'équation d'une tangente.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$, et sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$. Déterminer (algébriquement) l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

solution.

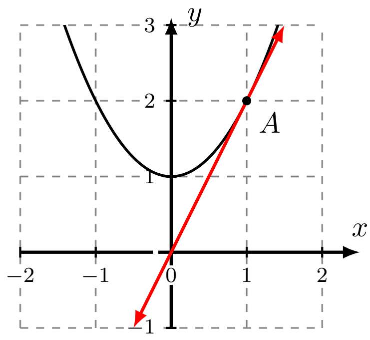
$f(1) = (1)^2 + 1 = 2$. $A(1\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_f$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$

$f'(1) = 2(1) = 2$

$T\colon y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

$\therefore T\colon y = 2x$.



■

■ Exemple 6.7 — déterminer l'équation d'une tangente.

Soit f définie par $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$, et sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$.

1. Déterminer le domaine et le domaine de dérivabilité de f.
2. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

solution.

1. Il faut $10 - 3x \geqslant 0$. $\therefore D =]-\infty; \frac{10}{3}]$.

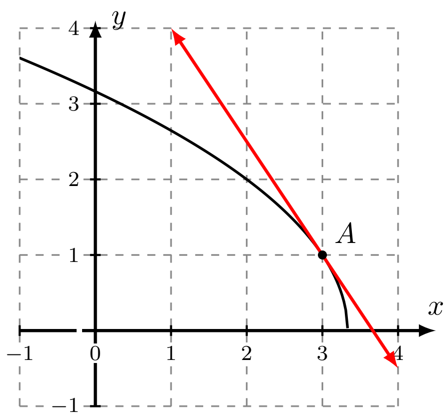
   $f(x) = u(10 - 3x)$, avec $u\colon x \to \sqrt{x}$, u est dérivable sur $]0; +\infty[$

   $\therefore D' =]-\infty; \frac{10}{3}[$.
2. $f'(x) = -3u'(10 - 3x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{10 - 3x}}$

   $f'(3) = \dfrac{-3}{2\sqrt{10 - 3(3)}} = -\dfrac{3}{2}$

   La tangente au point d'abscisse 3 est $T\colon y = f'(3)(x - 3) + f(3)$

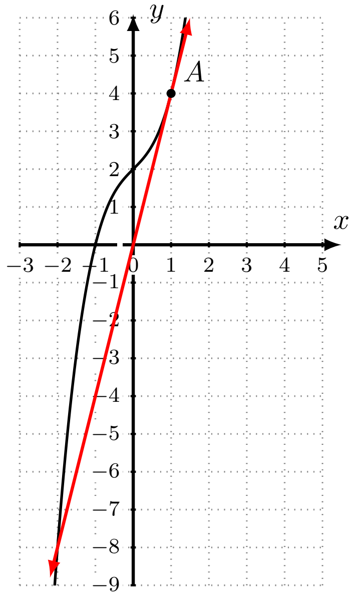
   $\therefore T\colon y = -\dfrac{3}{x}x + \dfrac{11}{2}$



■

■ **Exemple 6.8 — trouver un autre point de rencontre avec la tangente.** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 2$ et sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$. Soit T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1. Déterminer les coordonnées du point ou T coupe $\mathscr{C}_f$ à nouveau.

solution.



f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 + 1$

$f(1) = (1)^3 + (1) + 2 = 4$, $A(1\ ;\ 4) \in \mathscr{C}_f$.

$f'(x) = 3x^2 + 1$, $f'(1) = 3(1)^2 + 1 = 4$.

La tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A est $T\colon y = 4(x-1) + 4 = 4x$.

Un point $P(x\ ;\ y)$ est sur $\mathscr{C}_f$ et sur T si ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} y = x^3 + x + 2 \\ y = 4x \end{cases},$$

Donc x est solution de

$$x^3 + x + 2 = 4x. \therefore x = 1 \text{ ou } x = -2.$$

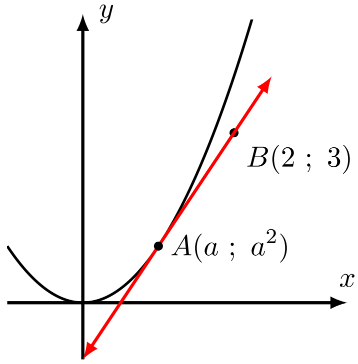
$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= 0 && \text{\textit{On sait que } } x = 1 \text{ \textit{est solution, on factorise par} } (x-1) \\ (x-1)(x^2 + x - 2) &= 0 && \text{\textit{On factorise le facteur quadratique}} \\ (x-1)(x-1)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Si $x = 1$ alors $A(1\ ;\ 4)$ que l'on connait déjà.

Si $x = -2$, $y = 4(-2) = -8$. Donc la tangente T rencontre à nouveau $\mathscr{C}_f$ au point $B(-2\ ;\ -8)$. ■

■ **Exemple 6.9 — trouver une tangente.** Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par le point $B(2\ ;\ 3)$ (extérieur à $\mathscr{C}_f$).

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$, le point $A(a\ ;\ a^2) \in \mathscr{C}_f$.



$f'(x) = 2x$, donc $f'(a) = 2a$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A a pour équation $T_a\colon y = 2a(x-a) + a^2$.

On cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que $B(2\ ;\ 3) \in T_a$. Donc a vérifie :

$$\begin{aligned} 2a(2-a) + a^2 &= 3 \\ 0 &= a^2 - 4a + 3 \\ a = 1 \quad &\text{ou} \quad a = 3 \end{aligned}.$$

Si $a = 1$, alors $T_1\colon y = 2x - 1$ au point $A_1(1\ ;\ 1)$

Si $a = 3$, alors $T_3\colon y = 6x - 9$ au point $A_3(3\ ;\ 9)$ ■

6.4 Application 2 : sens de variation d'une fonction

R Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a;b]$.

Si f est une (strictement) croissante alors pour tout $a < x < b$: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$

Si f est une (strictement) décroissante alors pour tout $a < x < b$: $f'(x) \leqslant 0$.

Si f est constante sur $[a;b]$, alors pour tout $a < x < b$: $f'(x) = 0$.

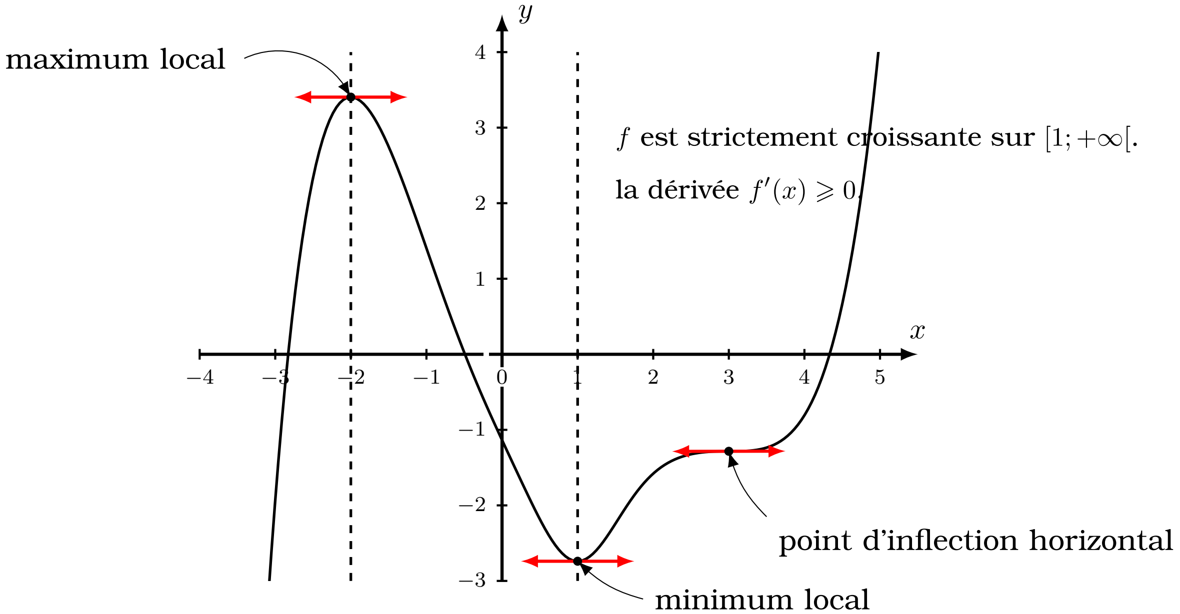
Définition 6.4 Soit $\mathscr{C} : y = f(x)$ la représentation de la fonction f.

On appelle **point critique** tout point $P(x;y) \in \mathscr{C}_f$ tel que :

$$f'(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f' \text{ n'est pas définie}$$

Si $f'(x) = 0$ et **la dérivée change de signe**, x est un **extremum** local.

Si $f'(x) = 0$ et **la dérivée ne change pas de signe**, on parle d'un point d'inflection horizontal.



x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
variation de f		$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	

Théorème 6.7 — admis.

Pour une fonction f définie sur intervalle $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$.

- Si pour tout $x \in]a;b[$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur $[a;b]$
- Si pour tout $x \in]a;b[$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[a;b]$
- Si pour tout $x \in]a;b[$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $[a;b]$

■ **Exemple 6.10** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$.

1. Préciser le domaine de dérivabilité de f ainsi que l'expression de $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f.

solution.

1. $D' = \mathbb{R}$. pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$
2. Les valeurs critiques

$$f'(x) = 0$$

$$-3x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$f(0) = -(0)^2 + 3(0)^2 + 5 = 5$

$f(2) = -(2)^3 + 3(2)^2 + 5 = 9$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f		↘	5	↗	9	↘	

f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;2]$

f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et sur l'intervalle $[2;+\infty[$

■

■ **Exemple 6.11** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 2$.

1. Préciser le domaine de dérivabilité de f ainsi que l'expression de $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f.

solution.

1. $D' = \mathbb{R}$. pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f'(x) = 12x^3 - 24x^3 = 12x^2(x-2)$
2. Les valeurs critiques

$$f'(x) = 0$$

$$12x^2(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$f(0) = 3(0)^4 - 8(0)^3 + 2 = 2$

$f(2) = 3(2)^4 - 8(2)^3 + 2 = -14$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de $12x^2$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
variation de f		↘	2	↘	-14	↗	

f est strictment croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;2]$

■

■ **Exemple 6.12** Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{3x+2}$.

1. Préciser le domaine de f.
2. Préciser le domaine de dérivabilité de f ainsi que l'expression de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f.

solution.

Valeur interdite $3x+2=0$, $x=-\frac{2}{3}$ donc $D=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\}$

f est dérivable sur $D'=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{3}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{(3x+2)^2}{(3x+2)^2}-\frac{3}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{9x^2+12x+4-3}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{9x^2+12x+1}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{9(x-r_1)(x-r_2)}{(3x+2)^2} \end{aligned}$$

factoriser

$r_1 = \dfrac{-2-\sqrt{3}}{3}$ et $r_2 = \dfrac{-2+\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{-2}{3}$		$\frac{-2+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$9x^2+12x+1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(3x+2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variation de f		$\nearrow$	$f(r_1)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$f(r_2)$	$\nearrow$	

■

■ **Exemple 6.13 — identifier les points critiques d'une courbe.**

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3-3x^2-9x+5$.

Déterminer les points crituqes de $\mathscr{C}_f$.

solution.

$D=D'=\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-6x-9 \\ &= 3(x-3)(x+1) \end{aligned}$$

factoriser

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f		$\nearrow$	10	$\searrow$	-22	$\nearrow$	

La fonction admet un maximum local en -1, et un minimum local en $x=3$.

$f(-1) = (-1)^3-3(-1)^2-9(-1)+5 = 10$ et $f(3) = (3)^3-3(3)^2-9(3)+5 = -22$

Les points critiques sont $A(-1\ ;\ 10)$ et $B(3\ ;\ -22)$. ■

6.5 Exercices : calcul de fonctions dérivées

Exercice 1 — Connaitre les formules des dérivées de fonctions de référence.

Pour chaque cas, donner le domaine, le domaine de dérivabilité et l'expression de f' :

1. $f(x) = x^3$ $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $D' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $D' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^5} = x^{-5}$ $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $D' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $f(x) = x^6$ $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $D' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $f(x) = x^7$ $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $D' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} = \ldots\ldots$ $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $D' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^9} = \ldots\ldots$ $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $D' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
8. $f(x) = x^9.$ $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $D' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

■ **Exemple 6.14 — dérivée de somme, ou d'une multiplication par consante.**

Donner le domaine de définition puis de dérivabilité et l'expressoin de la dérivée :

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

   $D = \mathbb{R}$ et $D' = \mathbb{R}$

   combinaison de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ et $x \mapsto 4$, dérivable sur $\mathbb{R}$

   $f'(x) = 3(2x) - 2(1) + 0 = 6x - 2$

2. $f(x) = \sqrt{x} + 2x$

   $D = [0; +\infty[$ $D' =]0; +\infty[$

   combinaison de $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}$

   $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2(1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2$$

3. $f(x) = 7x - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^3}$

   $D = \mathbb{R}^*$ et $D' = \mathbb{R}^*$

   combinaison de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}$

   $f(x) = 7x - 4x^{-1} + 3x^{-3}$

   $f'(x) = 7(1) - 4(-x^{-2}) + 3(-3x^{-4})$

   $$f'(x) = 7 + \frac{4}{x^2} - \frac{9}{x^4}$$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x} = \dfrac{x^2}{x} + 4 - \dfrac{5}{x}$

   $f(x) = x + 4 - 5x^{-1}$

   $D = \mathbb{R}^*$ $D' = \mathbb{R}^*$

   $$f'(x) = (1) + 0 - 5(-x^{-2}) = 1 + \frac{5}{x^2}$$

Exercice 2

Donner le domaine, le domaine de dérivation et l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes.

$f_1(x) = 4x^3 - x$	$f_4(x) = 2x^3$	$f_7(x) = 7x^2$	$f_{10}(x) = x^2 + x$
$f_2(x) = 4 - 2x^2$	$f_5(x) = x^2 + 3x - 5$	$f_8(x) = \dfrac{2x-3}{x^2}$	$f_{11}(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 1$
$f_3(x) = 3 - \dfrac{6}{x}$	$f_6(x) = \dfrac{x^3+5}{x}$	$f_9(x) = 5x^4 - 6x^2$	$f_{12}(x) = \dfrac{x^3+x-3}{x}$

Exercice 3 Dérive la fonction donnée et détermine la valeur du nombre dérivé demandé.

1. $f(x) = x^2$, $f'(x) =$ .... $f'(2) =$ ....
2. $f(x) = x^3$, $f'(x) =$ .... $f'(2) =$ ....
3. $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$, $f'(x) =$ .... $f'(-1) =$ ....
4. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 - 2$, $f'(x) =$ .... $f'(-1) =$ ....
5. $f(x) = \dfrac{8}{x^2}$, $f'(x) =$ .... $f'(9) =$ ....
6. $f(x) = 2x - \dfrac{5}{x}$, $f'(x) =$ .... $f'(2) =$ ....
7. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x - 8}{x^2}$, $f'(x) =$ .... $f'(-1) =$ ....

Exercice 4

Déterminer l'expression de la fonction composée $x \to f(g(x))$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 7$
2. $f(x) = 2x + 7$ et $g(x) = x^2$
3. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3 - 4x$
4. $f(x) = 3 - 4x$ et $g(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = \dfrac{2}{x}$ et $g(x) = x^2 + 3$
6. $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = \dfrac{2}{x}$

Exercice 5

Pour la fonction composée $f: x \to u(v(x))$, préciser les expressions de u et v dans chaque cas.

1. $f(x) = (3x + 10)^3$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2x+4}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$
4. $f(x) = \dfrac{10}{(3x - x^2)^3}$

■ **Exemple 6.15 — dérivée d'une composée.**

Donner le domaine de dérivabilité et l'expressoin de la dérivée dans les cas suivants :

1. $f(x) = (5x+3)^3$

$$D = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D' = \mathbb{R}$$

composée $u(v(x))$ *de* $u: x \mapsto x^3$ *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $v: x \mapsto 5x+3$

$u'(x) = 3x^2$

$$f'(x) = 5u'(5x+3) = 15(5x+3)^2$$

2. $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\} \quad \text{et} \quad D' = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\}$$

composée $u(v(x))$ *de* $u: x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et* $v: x \mapsto 2x-1$

$u'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

$$f'(x) = 2u'(2x-1) = \frac{-2}{(2x-1)^2}$$

3. $f(x) = \sqrt{4x-1} = u(4x-1)$

$D = \left[\frac{1}{4} ; +\infty\right[$ — *il faut* $4x-1 \geqslant 0$

$D' = \left]\frac{1}{4} ; +\infty\right[$ — $u\colon x \mapsto \sqrt{x}$ *n'est pas dérivable en* 0

$f'(x) = 4u'(4x-1) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x-1}}$ — $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 6

Déterminer le domaine de définition et de dérivation de chaque fonction, ainsi que l'expression de la fonction dérivée f' .

1. $f(x) = \dfrac{1}{3x+6}$
2. $f(x) = (3x+4)^3$
3. $f(x) = (5-3x)^2$
4. $f(x) = \sqrt{5x-3}$
5. $f(x) = 5x + \sqrt{3x+18}$
6. $f(x) = (ax+b)^3$
7. $f(x) = \dfrac{5}{(2x-5)^2}$
8. $f(x) = 3x + 1 + \dfrac{1}{2x+8}$
9. $f(x) = \sqrt{-3x+12}$

6.5.1 Exercices : Application 1 équations de tangentes

Exercice 7

On donne l'expression de la fonction f de représentation graphique $\mathscr{C}_f$. Déterminer pour chaque cas l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0.

1. pour tout x , $f(x) = x - 2x^2 + 3$ et $x_0 = 2$.
2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 5x$ et $x_0 = 1$.
3. pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \sqrt{x} + 1$ et $x_0 = 4$.
4. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 7x + 5$ aux points d'abscisse 2 et -4.

Exercice 8

1. Soit $\mathscr{C} : y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$. Déterminer les équations des tangentes horizontales à $\mathscr{C}$.
2. Déterminer le point de la courbe $\mathscr{C} : y = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est horizontale.
3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + kx^2 - 3$ représentée par $\mathscr{C}_f$. Déterminer la valeur de k sachant que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 2$ est de pente 4.
4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - 3x + 12x^2 - 8x^3$. Justifier que $A(1 ; 2) \in \mathscr{C}_f$, puis déterminer l'équation réduite de l'autre tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la tangente en A.

Exercice 9

Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentation graphique des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = x^2 - 4x + 6$.

1. Déterminer le point d'intersection A de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune en A.

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + ax + b$ représentée par $\mathscr{C}_f$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est d'équation réduite $y = -2x + 6$.

1. Justifier que $f(1) = 4$ et $f'(1) = -2$.
2. En déduire un système d'équations linéaires vérifié par a et b, et le résoudre.

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\sqrt{1 - bx}$ représentée par $\mathscr{C}_f$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 est d'équation réduite $y = -3x + 5$.

1. Montrer que $f(-1) = 8$ et $f'(-1) = 3$.
2. Déterminer un système d'équations vérifiée par a et b.
3. Déterminer par substitution de a une équation vérifiée par b et déduire que $b = 3$.
4. Déterminer la valeur de a.

Exercice 12 — problème inverse.

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est d'équation réduite $y = 3x + 1$, et que $A(2\ ;\ -13) \in \mathscr{C}_f$.

1. Entoure l'équation vraie : (A) $f'(2) = -13$ (B) $f'(-13) = 2$ (C) $f(-13) = 5$ (D) $f(2) = -13$
2. Justifier que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.
3. Écrire le système vérifié par a, b et c et donner l'expression de la fonction f.

Exercice 13

1. Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Soit T_2 la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2. Déterminer les coordonnées du point où T coupe $\mathscr{C}_f$ à nouveau.
2. Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 1$. Soit T_{-1} la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1. Déterminer les coordonnées du point où T_{-1} coupe $\mathscr{C}_f$ à nouveau.
3. Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^3 + \dfrac{4}{x}$. Soit T_1 la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1. Déterminer les coordonnées du point où T_1 coupe $\mathscr{C}_f$ à nouveau.
4. Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x$. Soit T_1 la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1. Déterminer les coordonnées du point où T_1 coupe $\mathscr{C}_f$ à nouveau.

Exercice 14 Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 9$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
2. En déduire les équations réduites de deux tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui passent par l'origine $O(0\ ;\ 0)$ du repère. Préciser les points de contacts de ces tangentes avec $\mathscr{C}_f$.

Exercice 15

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On suppose que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points $A(0\ ;\ 1.2)$ et $B(2;0)$ sont horizontales.

1. Déterminer l'expression de f'
2. Donner $f(0)$ et $f'(0)$ et en déduire les valeurs de c et d.
3. Donner $f(2)$ et $f'(2)$ et en déduire que a et b vérifient $\begin{cases} 8a + 4b + 1.2 = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases}$.
4. Trouver a et b et retrouver l'expression de f.

Exercice 16

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Déterminer les tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par $(-2\ ;\ 0)$.

Exercice 17 Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

1. Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée f'.
2. Soit $A(a, f(a)) \in \mathscr{C}_f$, et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
   a) Montrer que T a pour équation $y = (3a^2 + 6a + 2)x - 2a^3 - 3a^2$
   b) Déterminer le(s) abscisse(s) a pour lesquelles la tangente T est parallèle à $D_1 : y = 2x$.
   c) Déterminer le(s) abscisse(s) a pour lesquelles la tangente T est parallèle à $D_2 : y = -x$.
   d) Démontrer que la droite $D_3 : y = 11x - 4$ avec $\mathscr{C}_f$ est tangente à $\mathscr{C}_f$. Préciser le point de contact.

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{8}{x^2}$.

1. Tracer à main levée, une représentation graphique de $\mathscr{C}_f$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
3. Déterminer en fonction de a, les coordonnées des intersections A et B de la tangente T avec les axes du repère.
4. Déterminer l'aire du triangle OAB, ainsi que sa limite lorsque $a \to +\infty$.

6.5.2 Exercices : application de la dérivation à l'étude du sens de variation

R Exercices du manuel pour associer f et sa dérivée f' pages 143 à 150.

- 15, 16, 17 p143, 25, 27, 28, 26 , 21, 22
- De f vers f' : 29 et 30
- De f' vers f : 32 et 33, 34, 38, 39, 40, 36
- Entrainement : 54, 57, 58, 70, 73, 79, 80

Exercice 19

Pour chacune des fonctions f suivantes :

- déterminer sa dérivée f', factoriser f' et complétez le tableau de signe de f'.
- déterminer le sens de variation de f et préciser les extremum locaux.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 1$
2. $f(x) = x^3 + 4x - 7$
3. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$
4. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$
5. $f(x) = 3x - x^3$
6. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 4$
7. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2$
8. $f(x) = x^4 + 2x^3$
9. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Exercice 20

Pour chacune des fonction définie sur $\mathbb{R}$, déterminez les points critiques et les extremums locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$
2. $f(x) = x^2(x-1)(x+1)$
3. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 9$
4. $f(x) = x^6 - 3x^2$

Exercice 21

Montrer que les fonctions suivantes sont monotones sur $\mathbb{R}$ sans d'extremums locaux :

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$
2. $f(x) = -x^5 - 5x^3 - 10x$

Exercice 22 Pour chacune des fonctions f suivantes :

- préciser le domaine de définition et de dérivabilité et déterminer l'expression de f'
- ramener au même dénominateur pour complétez le tableau de signe de f'.
- déterminer le sens de variation de f et préciser les extremum locaux.

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = x - \dfrac{4}{x}$
3. $f(x) = 4 + \dfrac{1}{x-2}$
4. $f(x) = x - \dfrac{1}{2x-1}$
5. $f(x) = x - \sqrt{x}$
6. $f(x) = x^5 + \sqrt{x}$

Exercice 23

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Quelle est le point critique de f ? Sous quelle condition s'agit-il d'un maximum local ?

Exercice 24

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 24x + 1$ admet un maximum local en $x = -4$. Déterminer a.

Exercice 25

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + ax + b$. On suppose que le point $A(-2\ ;\ 3)$ est un point critique de $\mathscr{C}_f$

1. Déterminer un système vérifié par a et b et le résoudre.
2. En déduire les coordonnées de tous les points critiques de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 26

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On suppose que le point $A(-1\ ;\ -7)$ est un point critique de $\mathscr{C}_f$, et que la droite $T\colon y = 9x + 2$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $B(0\ ;\ 2)$

Déterminer a, b, c et d.

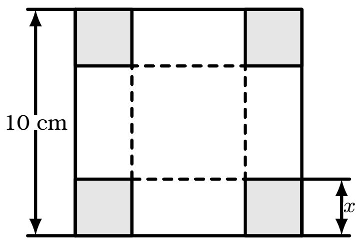
Exercice 27 — extremums d'une expression.

Déterminer le maximum et le minimum des expressions suivantes.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ pour $-2 \leqslant x \leqslant 5$
2. $f(x) = x^3 - 12x - 2$ pour $-3 \leqslant x \leqslant 5$
3. $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$ pour $-2 \leqslant x \leqslant 3$

Exercice 28 — un exemple d'optimisation.

On dispose d'un carton carré de longueur de côté 10 cm. Pour fabriquer une boite sans couvercle on enlève 4 coins carrés identiques de côté x et on relève les bords par pliage.



1. Exprime à l'aide de x les dimensions de la boite.
2. Montrer que le volume de la boite $f(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$.
3. Expliquer pourquoi $x \in [0; 5]$.
4. Déterminer f' et étudier le sens de variation de f sur $[0; 5]$.
5. Déterminer x pour laquelle le volume est maximal et que le maximum vaut $\frac{2000}{7}$.

6.5.3 Application 3 : L'algorithme de Newton-Raphson

Préliminaires On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 5$.

1. Calculer $f'(x)$
2. En déduire le sens de variation de f sur $[2;3]$
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $x^* \in [2;3]$.

L'algorithme de Newton-Raphson permet d'obtenir par itération une valeur approchée d'une solution à une équation du type $f(x) = 0$.

On se donne x_0 une abscisse proche de x^*. On sait que :

— $T_0 \colon y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0.

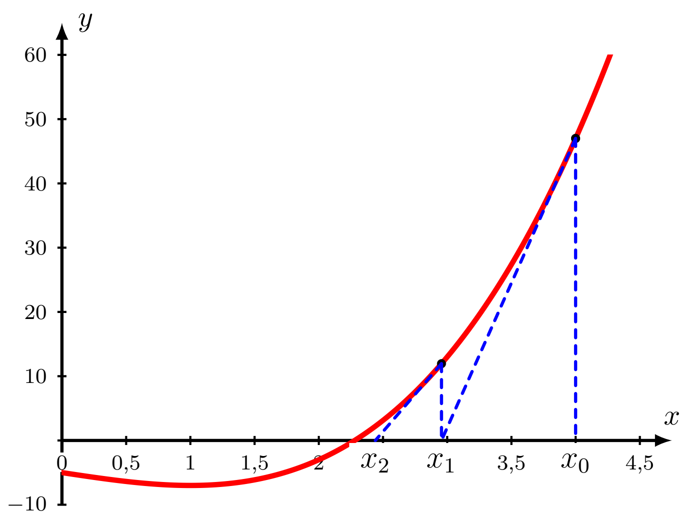
— Au voisinage de x_0, on sait que $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Idée Au lieu de résoudre $f(x) = 0$, on résout $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) &= 0 \\ f'(x_0)(x - x_0) &= -f(x_0) \\ x - x_0 &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

x_1 obtenue correspond à l'abscisse du point d'intersection de la tangente T_0 avec l'axe des abscisses. Répétons le processus une seconde fois en arrondissant f au voisinage de x_1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) &= 0 \\ \ldots &= -f(x_1) \\ \ldots &= \ldots \\ x_2 &= x_1 - \ldots \end{aligned}$$



En poursuivant, on pose $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 4 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 - 3}$
2. Rentrer la suite sur la calculatrice, et déterminer x_{10}.
3. Déterminer la limite de la suite x'. S'agit-il d'une valeur approchée de x^*.

Exercice 29

Dans chaque cas, complète une itération et détermine le terme x_1 de l'algorithme de Newton :

1. $f(x) = x^3 - 3$ et $x_0 = 1{,}7$.
2. $f(x) = 3x^2 - 23$ et $x_0 = 1$.

Exercice 30

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 3$.

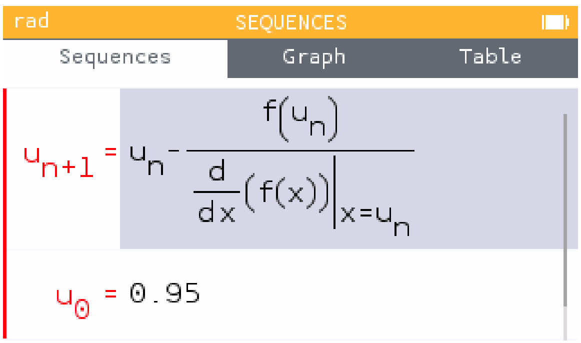
1. Calculer f' et justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[5; 6]$.
2. On pose $x_0 = 5$, et (x_n) la suite donnée par l'itération de Newton Raphson.
   a) Déterminer la relation de récurrence vérifiée par la suite (x_n).
   b) En déduire x_2.

Exercice 31

Dans chaque cas, complète une itération et explique pourquoi l'algorithme de Newton echoue.

1. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1$ et $x_0 = 1$.
2. $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 3$ et $x_0 = 1{,}5$.

■ **Exemple 6.16 — Point numworks.**



La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ admet 3 racines.

1. Rentrer l'expression f dans le menu fonctions, puis définir la suite de la méthode de Newton par récurrence à l'aide de f et $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
2. Pour chaque choix de la valeur initiale, calculer quelques termes de la suite et déterminer son comportement pour n grand.

a) $x_0 = 1{,}05$.	c) $x_0 = 0{,}95$.	e) $x_0 = 0{,}91$.
b) $x_0 = 1$.	d) $x_0 = 0{,}911$.	f) $x_0 = 0{,}85$.

Exercice 32 — Algorithme de Babylone.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$.

1. Donner les zéros de f.
2. Montrer que la suite donnée par l'itération Newton-Raphson vérifie la relation de récurrence $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$.
3. On pose $x_0 = 1$. Déterminer x_5. Quel semble être la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$?

Exercice 33 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$.

1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $x^* \in [1;2]$.
3. Proposer une suite définie par récurrence qui permet d'approcher la solution x^*. Préciser la valeur initiale.
4. Complétez le script Python afin que la fonction d'appel `newton(x0,n)` retourne le terme de rang `n` de la suite de Newton-Raphson de premier terme `x0`.

```
def f(u) :
    return u**3+2*u**2+10*u-20
def df(u) :
    return .............
def newton(x0,n) :
    x = x0
    for i in ..........
        ..........
    return(x)

```

L'algorithme de Newton-Raphson est efficace sous des conditions favorables : le nombre de chiffres corrects donnée par la suite double à chaque itération. Au bout d'une dizaine d'itérations on dépasse la précision de la calculatrice à 10^{-15}.

Deux aspects pratiques doivent être pris en compte : (1) la valeur initiale ne doit pas très éloignée du zéro recherché (2) la dérivée ne s'annule pas.

L'algorithme ne donne pas un encadrement a priori du zéro. On peut néanmoins introduire comme condition d'arrêt $\left|\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| < 10^{-p}$.

Exercice 34 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.

1. Déterminer la dérivée de f et montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $x^* \in [0;1]$.
2. Proposer une suite de Newton-Raphson définie par récurrence qui permet d'approcher la solution x^*.
3. Complétez le script Python afin que la fonction d'appel `newton(x0,p)` retourne le premier terme de la suite de Newton-Raphson (premier terme `x0`) qui respecte la condition $\left|\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| < 10^{-p}$.

```
def f(u) :
    return u**3+u-1
def df(u) :
    return .............
def newton(x0,p) :
    x = x0
    ..........
    while ..........
        ..........
        ..........
    return(x)
```

L'algorithme de Newton-Raphson peut rentrer en boucle infinie si la condition d'approximation n'est pas réalisée. À cause de cela, toute mise en œuvre de la méthode de Newton-Raphson doit inclure un le contrôle du nombre d'itérations maximum.

6.5.4 Exercices : dérivées de produit et de quotient et applications

■ **Exemple 6.17 — dérivation d'un produit.**

Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée dans les cas suivants :

$f(x) = \sqrt{x}(2x+1)^3$

$D = [0;+\infty[$

$D' =]0;+\infty[$

produit de $u\colon x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $v\colon x \mapsto (2x+1)^3$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1)^3 + \sqrt{x} \times 2 \times 3(2x+1)^2 \\ &= \frac{(2x+1)^3}{2\sqrt{x}} + 6\sqrt{x}(2x+1)^2 \end{aligned}$$

$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $v'(x) = 2 \times 3(2x+1)^2$

$f(x) = (8x-1)(2x^2-5x-3)$

$D' = \mathbb{R}$

produit de $u\colon x \mapsto 8x-1$ et $v\colon x \mapsto 2x^2-5x-3$ toutes dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (8x-1)'(2x^2-5x-3) + (8x-1)(2x^2-5x-3)' \\ &= 8(2x^2-5x-3) + (8x-1)\big(2(2x) - 5(1) + 0\big) \\ &= 16x^2 - 40x - 24 + (8x-1)\big(4x-5\big) \\ &= 48x^2 - 84x - 19 \end{aligned}$$

Exercice 35 Dériver en utilisant la règle de la dérivé d'un produit.

1. $f(x) = x^2(2x-1)$
2. $f(x) = 4x(2x+1)^3$
3. $f(x) = x^5(3x-1)^2$
4. $f(x) = x^2(7-3x^2)$
5. $f(x) = x^2\sqrt{3-x}$
6. $f(x) = (8-9x)\sqrt{x}$
7. $f(x) = \sqrt{x}(x^2+1)$
8. $f(x) = \sqrt{3x-12}(x^2-1)$
9. $f(x) = (4x-1)\sqrt{3x-15}$

Exercice 36

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f. Déterminer la pente de la tangente au point d'abscisse x_0 dans les cas suivants :

1. f définie par $f(x) = x^4(1-2x)^2$, au point d'abscisse $x = -1$.
2. f définie par $f(x) = x\sqrt{1-2x}$, au point d'abscisse $x = -4$.

Exercice 37

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2\sqrt{x}$.

1. Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f.
2. Montrer que pour tout $x \in D'$, $f'(x) = \dfrac{(x-3)(5x-3)}{2\sqrt{x}}$.

■ **Exemple 6.18 — dérivation d'un quotient.**

Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée dans les cas suivants :

$$f(x) = \frac{1+3x}{x^2+1}$$

$u(x) = 1+3x$ $v(x) = x^2+1$, pas de valeur interdites

$$D = \mathbb{R} \quad D' = \mathbb{R}$$

on applique $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(1+3x)'(x^2+1)-(1+3x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1)-(1+3x)2x}{(x^2+1)^2}$$

on simplifie le numérateur sans développer le dénominateur

$$= \frac{3x^2+3-2x-6x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3-2x-3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{1-2x}{3x+3}$$

$u(x) = 1-2x$ $v(x) = 3x+3$, valeur interdite $x=-1$

$$D = \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad D' = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

on applique $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(1-2x)'(3x+3)-(1-2x)(3x+3)'}{(3x+3)^2}$$

$$= \frac{-2(3x+3)-(1-2x)\times 3}{(3x+3)^2}$$

on simplifie le numérateur sans développer le dénominateur

$$= \frac{-9}{(3x+3)^2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(1-2x)^2}$$

$u(x) = \sqrt{x}$ dérivable sur $]0;+\infty[$ et $v(x) = (1-2x)^2$, valeur interdite $x = \frac{1}{2}$

$$D = [0;\tfrac{1}{2}[\cup]\tfrac{1}{2};+\infty[\quad D' =]0;\tfrac{1}{2}[\cup]\tfrac{1}{2};+\infty[$$

on applique $(\frac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-2x)^2-\sqrt{x}(-2\times 2(1-2x))}{(1-2x)^4}$$

factoriser par $1-2x$ pour simplifier

$$f'(x) = \frac{(1-2x)\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}+4\sqrt{x}\right)}{(1-2x)^4}$$

ramener au même dénominateur

$$= \frac{1}{(1-2x)^3}\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}+4\sqrt{x}\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1-2x+8x}{2\sqrt{x}(1-2x)^3}$$

$$= \frac{6x+1}{2\sqrt{x}(1-2x)^3}$$

Exercice 38

Donner les domaines de définition et de dérivabilité, puis dériver les fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{1+3x}{2-x}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-2x}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-3}{3x-x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-3x}}$

Exercice 39

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f. Déterminer la pente de la tangente au point d'abscisse x_0 dans les cas suivants :

1. f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1-2x}$, au point d'abscisse $x = 1$.
2. f définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, au point d'abscisse $x = -1$.
3. f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}$, au point d'abscisse $x = 4$.
4. f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}$, au point d'abscisse $x = -2$.

Exercice 40

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f donnée par $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1-x}$.

1. Déterminer le domaine et le domaine de dérivabilité de f.
2. Montrer que pour tout $x \in D'$, $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}(1-x)^2}$.
3. Déterminer les points critiques de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 41

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f donnée par $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x+2}$.

1. Déterminer le domaine et le domaine de dérivabilité de f.
2. Montrer que pour tout $x \in D'$, $f'(x) = \dfrac{x^2+4x-7}{(x+2)^2}$.
3. Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ ou la tangente est horizontale.

■ **Exemple 6.19 — dérivation d'un inverse.**

Donner le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée dans les cas suivants :

$$f(x) = \frac{1}{(5x+3)^2}$$

inverse de $v\colon x \mapsto (5x+3)^2$, *dérivable pour* $5x+3 \neq 0$.

$$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{3}{5}\}$$

on applique $(\frac{1}{v})' = \dfrac{-v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{-((5x+3)^2)'}{\left((5x+3)^2\right)^2}$$

$u(x) = x^2$, *on dérive* $(u(5x+3))' = 5u'(5x+3)$

$$= \frac{-(5x+3)' \times 2(5x+3)}{(5x+3)^4}$$

on simplifie le numérateur sans développer le dénominateur

$$= \frac{-10(5x+3)}{(5x+3)^4}$$

$$= \frac{-10}{(5x+3)^3}$$

Exercice 42

Donner les domaines de définition et de dérivabilité, puis dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2}{3x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
3. $f(x) = \dfrac{-5}{x^2-1}$
4. $f(x) = \dfrac{3}{2-3x}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$
6. $f(x) = \dfrac{-5}{3x^2+2}$

■ **Exemple 6.20 — fonctions rationnelles.** Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$.

— Préciser le domaine de f.

— Préciser le domaine de dérivabilité de f ainsi que l'expression de $f'(x)$.

— Dresser le tableau de signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f.

solution.

1. Valeur interdite $x-1=0$, $x=1$ donc $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$
2. f est dérivable sur $D' = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
3. $f'(x) = \dfrac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2}$
$= \dfrac{-3}{(x-1)^2}$
f est strictement décroissante sur $[-\infty;0]$ et sur $[0;+\infty]$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
-3		$-$		$-$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	‖	$-$	
variation de f		↘	‖	↘	

■

Exercice 43

Pour chacune des fonctions f suivantes :

— préciser le domaine de définition et de dérivabilité

— déterminer sa dérivée f', factoriser le numérateur.

— déterminer le sens de variation de f et préciser les extremum locaux.

1. $f(x) = \dfrac{5x-2}{x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{3-x}{1+4x}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$
5. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$
6. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+x-1}$

Exercice 44 — entrainement : exercices page 147 du manuel.

Pour chacune des fonctions f suivantes :

— préciser le domaine de définition et de dérivabilité

— déterminer sa dérivée f', factoriser le numérateur.

— déterminer le sens de variation de f et préciser les extremum locaux.

1. $f(x) = \dfrac{-4}{x^2+1}$
2. $f(x) = x-1+\dfrac{4}{x-2}$
3. $f(x) = 2x-3+\dfrac{2}{x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$
6. $f(x) = \dfrac{-x^2+8x-13}{x^2-4x+5}$

6.6 Exercices : solutions et éléments de réponse

correction exercice 1.

■

correction exercice 2. $f_1'(x) = 12x^2 - 1$; $f_2'(x) = -4x$; $f_3'(x) = -\frac{1}{6}$; $f_4'(x) = 6x^2$; $f_5'(x) = 2x+3$; $f_6'(x) = 3x - \frac{x^3+5}{x^2}$; $f_7'(x) = 14x$; $f_8'(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{2\cdot(2x-3)}{x^3}$; $f_9'(x) = 20x^3 - 12x$; $f_{10}'(x) = 2x+1$; $f_{11}'(x) = 3x^2+6x+4$; $f_{12}'(x) = \frac{3x^2+1}{x} - \frac{x^3+x-3}{x^2}$; ■

correction exercice 3.

■

correction exercice 4.

■

correction exercice 5.

■

correction exercice 6.
$f_1'(x) = -\frac{1}{3\left(x+2\right)^2}$; $f_2'(x) = 9\left(3x+4\right)^2$; $f_3'(x) = 6\cdot\left(3x-5\right)$; $f_4'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-3}}$; $f_5'(x) = \frac{10\sqrt{x+6}+\sqrt{3}}{2\sqrt{x+6}}$; $f_6'(x) = 3a\left(ax+b\right)^2$; $f_7'(x) = -\frac{20}{\left(2x-5\right)^3}$; $f_8'(x) = \frac{6x^2+48x+95}{2\left(x+4\right)^2}$; $f_9'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4-x}}$; ■

correction exercice 9. $A(1,3)$ ■

correction exercice 12. $a=-5$, $b=3$ et $c=1$. ■

correction exercice 17 . Les tangentes aux points $A(-2;1)$ et $B(0,1)$ ont pour pente 2 et sont parallèles à D_1. La tangente à $C(-2;1)$ a pour pente -1 et sont parallèles à D_2. Les tangentes aux points d'abscisse 1 et -3 on pour pente 11. T passe par le point $D(1,7)$ et est tangente à $\mathscr{C}_f$. ■

correction exercice 19.

$f_1'(x) = 2x-6 = 2\left(x-3\right)$; $f_2'(x) = 3x^2+4 = 3\left(x^2+\dfrac{4}{3}\right)$; $f_3'(x) = 3x^2+6x-9 = 3\left(x-1\right)\left(x+3\right)$; $f_4'(x) = 3x^2+6x = 3x\left(x+2\right)$; $f_5'(x) = 3-3x^2 = -3\left(x-1\right)\left(x+1\right)$; $f_6'(x) = 3x^2-16 = 3\left(x-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$; $f_7'(x) = x^3-\dfrac{3x^2}{2}-2x = x\left(x-\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{41}}{4}-\dfrac{3}{4}\right)$; $f_8'(x) = 4x^3+6x^2 = 4x^2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$; $f_9'(x) = 3x^2-6x = 3x\left(x-2\right)$; ■

correction exercice 20.

$f_1'(x) = 4x^3-12x^2 = 4x^2\left(x-3\right)$; $f_2'(x) = 4x^3-2x = 4x\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $f_3'(x) = 4x^3-12x+8 = 4\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)$; $f_4'(x) = 6x^5-6x = 6x\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)$; ■

correction exercice 21. $f_1'(x) = 3x^2-6x+3 = 3\left(x-1\right)^2$; $f_2'(x) = -5x^4-15x^2-10 = -5\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)$; ■

correction exercice 22. $f_1'(x) = 1-\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{x^2}$; $f_2'(x) = 1+\dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2+4}{x^2}$; $f_3'(x) = -\dfrac{1}{x^2-4x+4} = -\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}$; $f_4'(x) = 1+\dfrac{2}{4x^2-4x+1} = \dfrac{4x^2-4x+3}{\left(2x-1\right)^2}$; $f_5'(x) = 1-\dfrac{0.5}{x^{0.5}} = -1.0\cdot\left(\dfrac{0.5}{x^{0.5}}-1.0\right)$; $f_6'(x) = \dfrac{0.5}{x^{0.5}}+5x^4 = 5.0\cdot\left(\dfrac{0.1}{x^{0.5}}+1.0x^4\right)$; ■

correction exercice 35.

$f_1'(x) = 6x^2-2x = 2x\left(3x-1\right)$;

$f_2'(x) = 128x^3+144x^2+48x+4 = 4\left(2x+1\right)^2\cdot\left(8x+1\right)$;

$f_3'(x) = 63x^6-36x^5+5x^4 = x^4\cdot\left(3x-1\right)\left(21x-5\right)$;

$f_4'(x) = -12x^3+14x = -2x\left(6x^2-7\right)$;

$f_5'(x) = -\dfrac{x^2}{2\sqrt{3-x}}+2x\sqrt{3-x} = -\dfrac{x\left(5x-12\right)}{2\sqrt{3-x}}$;

$f_6'(x) = -\dfrac{27\sqrt{x}}{2}+\dfrac{4}{\sqrt{x}} = -\dfrac{27x-8}{2\sqrt{x}}$;

$f_7'(x) = \dfrac{5x^{\frac{3}{2}}}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}$;

$f_8'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{3x-12}}+2x\sqrt{3x-12}-\dfrac{3}{2\sqrt{3x-12}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(5x^2-16x-1\right)}{2\sqrt{x-4}}$;

$f_9'(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{3x-15}}+4\sqrt{3x-15}-\dfrac{3}{2\sqrt{3x-15}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(12x-41\right)}{2\sqrt{x-5}}$;

■

correction exercice 38. $f_1'(x) = \dfrac{7}{\left(x-2\right)^2}$;

$f_2'(x) = \dfrac{2x\left(x+1\right)}{\left(2x+1\right)^2}$;

$f_3'(x) = -\dfrac{x^2+3}{(x^2-3)^2}$;
$f_4'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x}\,(2x-1)^2}$;
$f_5'(x) = \dfrac{3\,(x^2-2x+3)}{x^2\,(x-3)^2}$;
$f_6'(x) = -\dfrac{3x-2}{2\,(1-3x)^{\frac{3}{2}}}$;

■

correction exercice 42. $f_1'(x) = -\dfrac{6}{(3x-1)^2}$;
$f_2'(x) = -\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$;
$f_3'(x) = \dfrac{10x}{(x-1)^2\,(x+1)^2}$;
$f_4'(x) = \dfrac{9}{(3x-2)^2}$;
$f_5'(x) = -\dfrac{1}{(2x-3)^{\frac{3}{2}}}$;
$f_6'(x) = \dfrac{90x}{(3x^2+2)^4}$;

■

correction exercice 43.
$f_1'(x) = \dfrac{12}{(x+2)^2}$;
$f_2'(x) = -\dfrac{13}{(4x+1)^2}$;
$f_3'(x) = -\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2}$;
$f_4'(x) = -\dfrac{3x^2-1}{2\sqrt{x}\,(x^2+1)^2}$;
$f_5'(x) = -\dfrac{(x-1)\,(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$;
$f_6'(x) = -\dfrac{5\,(x^2+1)}{(x^2+x-1)^2}$;

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
$f_1'(x) = \dfrac{12}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
12		$+$		$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $f_1'(x) = \frac{12}{(x+2)^2}$		$+$	||	$+$	
variation de f_1		↗	||	↗	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\}$

$f_2'(x) = -\dfrac{13}{(4x+1)^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
-13		$-$		$-$	
$(4x+1)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $f_2'(x) = \frac{-13}{(4x+1)^2}$		$-$	$\|\|$	$-$	
variation de f_2		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

$D = [0;1[\cup]1;\infty[$

$D' =]0;1[\cup]1;\infty[$ **et** $f_3'(x) = -\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$

x	0		1		$+\infty$
$-x-1$		$-$		$-$	
$\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $f_3'(x) = \frac{-13}{(4x+1)^2}$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	
variation de f_3	0	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

$D = [0;\infty[$

$D' =]0;\infty[$ **et** $f_4'(x) = \dfrac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$

x	0		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$-3x^2+1$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$	
signe de $f_4'(x) = \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
variation de f_4	0	$\nearrow$	$\frac{3^{0.75}}{4}$	$\searrow$	

$D = D' = \mathbb{R}$

$f_5'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x^2+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+x+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
signe de $f_5'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f_5		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

$f_6'(x) = \dfrac{-5x^2-5}{(x^2+x-1)^2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$-5x^2 - 5$		$-$		$-$		$-$	
$(x^2 + x - 1)^2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $f_6'(x) = \dfrac{-5x^2-5}{(x^2+x-1)^2}$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
variation de f_6		↘	$\Vert$	↘	$\Vert$	↘	

■

correction exercice 44.

$f_1'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$; $f_2'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$; $f_3'(x) = \dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$; $f_4'(x) = -\dfrac{x-5}{(x-1)^3}$; $f_5'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$; $f_6'(x) = -\dfrac{4(x-3)(x-1)}{(x^2-4x+5)^2}$;

$D = D' = \mathbb{R}$

$f_1(x) = \dfrac{-4}{x^2+1}$

$f_1'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$8x$		$-$	0	$+$	
$x^2 + 1$		$+$		$+$	
signe de $f_1'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$		$-$	0	$+$	
variation de f_1		↘	-4	↗	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f_2(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$

$f_2'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$x(x - 4)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x - 2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $f_2'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variation de f_2		↗	-3	↘	$\Vert$	↘	5	↗	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f_3(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x-1}$

$f_3'(x) = \dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$2x(x-2)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $f_3'(x) = \dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variation de f_3		$\nearrow$	-5	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f_4(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2}$

$f_4'(x) = \dfrac{-x+5}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f_4'(x) = \dfrac{-x+5}{(x-1)^3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
variation de f_4		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$\dfrac{9}{8}$	$\searrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f_5(x) = \dfrac{(x^2+3)}{x+1}$

$f_5'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$(x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $f_5'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variation de f_5		$\nearrow$	-6	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

$D = D' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f_6(x) = \dfrac{-x^2 + 8x - 13}{x^2 - 4x + 5}$

$f_6'(x) = \dfrac{-4(x-3)(x-1)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-4(x-3)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2-4x+5)^2$		$+$		$+$		$+$	
signe de $f_6'(x) = \dfrac{-4(x-3)(x-1)}{(x^2-4x+5)^2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f_6		$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	

■