1

Matrices (1) : algèbre et systèmes linéaires

Table 1.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 1...

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître**.../**savoir faire**...	🪨	💎	💍
Résolution de systèmes linéaires			
résoudre par élimination de Gauss	2	1	
matrice augmentée d'un système et pivot de Gauss	4	3	
Algèbre des matrices			
égalité	5,	6, 7	
addition et multiplication par un réel	8, 9, 10	11, 12, 13	
multiplication de matrices	14, 15, 17	16	18, 19, 31
confusions à éviter	20, 21, 22	23, 24, 25	
développer	32, 33	34, 35	
puissances de matrices et récurrence	26, 27, 28	29, 30	36, 37, 38
vérifier et calculer une matrice inverse A^{-1}	39, 40, 41	42, 43, 44	45, 46, 47
inverses de matrices 2×2	48	49	
résolution d'un système linéaire par inversion		50, 51, 52	
Applications			
Problèmes inverses		53, 54	
Décomposition en éléments simples	55 56	57	
Suites de matrices colonnes $U_{n+1} = AU_n + B$	58	59, 60, 61	62, 63

1.1 Systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues

Une **équation linéaire à n inconnues** est une équation qui peut se mettre sous la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$$

ou a_1, a_2, ..., a_n et c sont des réels, et x_1, x_2, ...et x_n ssont les inconnues. Pour 3 ou 4 inconnues, on utilisera les lettres x, y, z et w au lieu de x_1, x_2, x_3 et x_4.

■ **Exemple 1.1 — Équations linéaires.** $4x_1 - 8x_2 + \sqrt{2}x_3 = 11$ et $x + y + z = 3w - \frac{5}{2}$

■ **Exemple 1.2 — Équations non linéaires.** $x^2 + 2y - \sqrt{z} = 2$ et $x_1x_2 + 3x_3 = -4$

Ci-dessous deux exemples de systèmes de 3 équations linéaires avec 3 inconnues :

système linéaire

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ -x + 3y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 10 \end{cases}$$

système linéaire échelonné

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

■ **Exemple 1.3** Les **systèmes échelonnés** se résolvent aisément par **substitutions remontantes**

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ z = 3 \end{cases} \overset{y+2(3)=5}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \overset{x-2(-1)-(3)=1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

L'**algorithme d'élimination de Gauss** permet de transformer un système linéaire en système échelonné équivalent à l'aide de 3 opérations simples sur les lignes :

- Échange de deux lignes.
- Multiplication d'une ligne par un **scalaire non nul**.
- Ajout du multiple d'une ligne à une autre ligne.

■ **Exemple 1.4 — système avec un unique triplet solution.**

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ -x + 3y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 12 \end{cases} \underset{L3-2L1\to L3}{\overset{L2+L1\to L2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ y + 3z = 10 \end{cases} \overset{L3-L2\to L3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ z = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{cases}$$

■ **Exemple 1.5 — système sans triplet solution.**

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3z = 5 \\ 3x + y + 4z = 6 \end{cases} \underset{L3-3L1\to L3}{\overset{L2-2L1\to L2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y + z = 1 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \overset{L3-L2\to L3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y + z = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

pas de solutions

■ **Exemple 1.6 — système avec une infinité de triplets solutions.**

$$\begin{cases} x+4y-2z=1 \\ x+8y-6z=9 \\ \quad 4y-4z=8 \end{cases} \xLeftrightarrow{L2-L1\to L2} \begin{cases} x+4y-2z=1 \\ \quad +4y-4z=8 \\ \quad 4y-4z=8 \end{cases} \iff \begin{cases} x+4y-2z=1 \\ 4y \qquad =4z+8 \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad =6z+9 \\ y=z+2 \end{cases}$$

z est une variable libre. Elle peut prendre n'importe quelle valeur $s \in \mathbb{R}$. x et y sont des variables liés. Les solutions du systèmes sont les triplets $(x=6s+9;\ y=s+2;\ z=s)$, avec $s \in \mathbb{R}$.

1.2 Matrices et systèmes linéaires

Définition 1.1 Une matrice $m \times n$ est un tableau de nombres réels arrangés en m lignes et n colonnes.
a_{ij} est le **coefficient** de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice. On sépare les indices par une vigule $a_{i,j}$ en cas de confusion.
On dira que la matrice est de **dimension** $m \times n$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \quad \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} m \text{ lignes}$$

■ **Exemple 1.7** 1. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ -6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3. On a $M_{23} = 9$.

2. Le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×1.

3. Le vecteur ligne $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -10 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 1×3.

On peut écrire un système d'équations linéaires sous forme d'une **matrice augmentée** du système en écrivant uniquement les coefficients qui apparaissent dans les équations :

système linéaire

$$\begin{cases} 3x-9y+12z=-9 \\ 3x-7y+\ \ 8z=-5 \\ 0x+3y-\ \ 6z=6 \end{cases}$$

matrice augmentée associée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 \\ 3 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

■ **Exemple 1.8 — déterminer la matrice augmentée.** d'un système linéaire :

$$\begin{cases} 3x-2y+z=4 \\ x+2z=5 \\ 8y+z=1 \end{cases} \xrightarrow[\text{variables}]{\text{aligner les}} \begin{cases} 3x-2y+\ \ z=4 \\ x \qquad\ \ +2z=5 \\ \qquad 8y+\ \ z=1 \end{cases} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Les opérations utilisées dans la résolution de systèmes correspondent à des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée :

Symbole	**Description**
$L_i + kL_j \to L_i$	On remplace la ligne i par la somme de la ligne i et de k fois la ligne j
kL_i	On multiplie la ligne i par k
$L_i \leftrightarrow L_j$	On échange les lignes i et j

■ **Exemple 1.9 — résolution d'un système par pivot de Gauss (élimination de Gauss-Jordan).**

doit être un 1 — faut des 0

$$\begin{cases} 4x+8y-\ \ 4z=4 \\ 3x+8y+\ \ 5z=-11 \\ -2x+\ \ y+12z=-17 \end{cases} \xrightarrow[\text{augmentée}]{\text{matrice}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & -4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{array}\right)$$

doit être un 1 — doit être un 0 — doit être un 1

$$\xrightarrow[L3+2L1\to L3]{L2-3L1\to L2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & -14 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3-5L_2\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{array}\right)$$

les pivots

$$\xrightarrow{\frac{-1}{10}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

> **forme échelonnée**
>
> le nombre de coefficients nuls croît strictement ligne après ligne.

faut des 0 — faut un 0

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2-4L_2\to L_2]{L_1+L_3\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1-2L_2\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

> **forme échelonnée réduite**
>
> le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1 et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=-3 \\ y=1 \\ z=-2 \end{pmatrix}$$

1.3 Algèbre des matrices

Définition 1.2 — matrices égales. Deux matrices $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}$ sont égales si elles sont de même dimension $m \times n$ et si les coefficients correspondants sont égaux :

$$\text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant m \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n \text{ on a : } a_{ij} = b_{ij}$$

■ **Exemple 1.10** Si $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & c \\ 2 & d \end{pmatrix}$ alors $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$ et $d = 1$.

Définition 1.3 Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de mêmes dimensions $m \times n$, et $k \in \mathbb{R}$.

1. La matrice **somme** $A + B$ est la matrice de dimension $m \times n$ avec $A + B = \begin{pmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{pmatrix}$
2. La matrice **différence** $A - B$ est la matrice de dimention $m \times n$ avec $A - B = \begin{pmatrix} a_{ij} - b_{ij} \end{pmatrix}$
3. La matrice **produit** de A par le réel k est la matrice cA de dimension $m \times n$ avec $kA = \begin{pmatrix} ka_{ij} \end{pmatrix}$

■ **Exemple 1.11** 1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ alors $-A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{1,1} & a_{12}+b_{1,2} & a_{13}+b_{1,3} \\ a_{21}+b_{2,1} & a_{22}+b_{2,2} & a_{23}+b_{2,3} \end{pmatrix}$

3. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ alors $5A = \begin{pmatrix} 5a_{11} & 5a_{12} & 5a_{13} \\ 5a_{21} & 5a_{22} & 5a_{23} \end{pmatrix}$.

Propriétés 1.1 Pour les matrices A, B, C de même dimensions $m \times n$ et les nombres $k, l \in \mathbb{R}$:

$A + B = B + A$	l'addition est commutative
$(A + B) + C = A + (B + C)$	l'addition est associative
$k(lA) = klA$	la multiplication par un réel est associative
$(k + l)A = kA + lA$	distributivité de la multiplication par un réel
$k(A + B) = kA + kB$	

■ **Exemple 1.12 — équation matricielle.** Sachant que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, déterminer la matrice X solution de $2X - A = B$.

solution. $2X = A + B$ donc $X = \dfrac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ■

$X = \dfrac{1}{2}(A + B)$

Définition 1.4 — produit d'un vecteur $1 \times n$ ligne par un vecteur colonne $n \times 1$. est le scalaire :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum a_k b_k$$

■ **Exemple 1.13** $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$. Par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2(-1) + 5(3) = 13$

■ **Exemple 1.14** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2(5) + (-1)4 + 0(-3) + 4(\frac{1}{2}) = 8$

Définition 1.5 — multiplication d'une matrice $m \times n$ par une matrice $n \times p$.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ est de dimensions $m \times n$, et $B = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}$ est de dimensions $m \times p$.

La matrice produit $AB = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}$ est la matrice de dimensions $n \times p$ tel que :

pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{n1}b_{nj} \\ &= \sum a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

$$L_i \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots a_{ik} \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{array}{c} C_j \\ \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & b_{kj} & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

■ **Exemple 1.15** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. AB est une matrice de dimensions 2×3 :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ c_{21} & & \end{pmatrix}$$

$c_{11} = 1(-1) + 3(0) = -1$ $\qquad$ $c_{21} = 1(-1) + 0(0) = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & c_{12} & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & c_{22} & \end{pmatrix}$$

$c_{12} = 1(5) + 3(4) = 17$ $\qquad$ $c_{22} = -1(5) + 0(4) = -5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & c_{13} \\ & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & c_{23} \end{pmatrix}$$

$c_{13} =$ .... $\qquad$ $c_{23} =$ ....

■ **Exemple 1.16** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$. AB n'est pas possible.

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(2) + 6(3) & 5(1) + 6(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 29 \end{pmatrix}$$

Propriétés 1.2 Pour les matrices A, B et C pour lesquels les produits ci-dessous sont définis, on a les égalités suivantes :

$A(BC) = (AB)C = ABC$ la multiplication est associative

$A(B+C) = AB + AC$

$(B+C)A = BA + CA$ distributivité de la multiplication

R La multiplication n'est pas commutative. Par exemple $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$

1.4 Matrices carrées, puissances et inverses

Une matrice de dimensions $n \times n$ est dite **matrice carrée d'ordre** n.

Définition 1.6 La matice $\mathbf{O}_n$ est la matrice carrée d'ordre n a coefficients nuls :

$$\mathbf{O}_2 = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{O}_3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{O}_n = \begin{pmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

Pour des matrices carrées d'ordre n : $A\mathbf{O} = \mathbf{O}A = \mathbf{O}$ et $A + \mathbf{O} = \mathbf{O} + A = A$.

R $AB = \mathbf{O}$ n'implique pas que la matrice A ou B est une matrice nulle.

Définition 1.7 Pour une matrice carrée A on pose : $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$...

Définition 1.8 — matrice identité. La matrice identité d'ordre n est une matrice carrée $n \times n$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, et tous les autres sont nuls.

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$$

Les matrices identités sont des éléments neutres pour la multiplication :

$$A\mathbf{I}_n = A \qquad \mathbf{I}_n B = B \qquad \text{(si les produits sont définis)}$$

■ **Exemple 1.17** $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&6\\-1&2&7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&5&6\\-1&2&7\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1&7&\frac{1}{2}\\12&1&3\\-2&0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&7&\frac{1}{2}\\12&1&3\\-2&0&7\end{pmatrix}$

Définition 1.9 — inverse d'une matrice carrée. Une matrice carrée A d'ordre n est inversible s'il existe une matrice carrée d'ordre n B tel que

$$AB = BA = \mathbf{I}_n$$

Cette matrice est unique, et s'appelle l'**inverse** de A. On la note A^{-1}.

R $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I}_n$

■ **Exemple 1.18 — rechercher l'inverse par pivot de Gauss.** de $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}L_1 \to L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - 2L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2L_2 \to L2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 - \frac{5}{4}L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 1.19 — rechercher l'inverse par pivot de Gauss.** de $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -6 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}L_1 \to L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 + 3L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \to A \text{ n'est pas inversible}$$

■ **Exemple 1.20 — inverse une matrice 3×3.** Le pivot de Gauss reste la méthode la plus efficace pour inverser une matrice de dimension 3×3 (ou plus). Pour chercher l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ on applique le pivot de Gauss à la matrice augmentée pour obtenir $\mathbf{I}_3$ sur la partie gauche :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{pivot de}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Lemme 1.3 Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, alors $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (ad - bc)\mathbf{I}_2$.

Théorème 1.4 — inverse d'une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = ad - bc \neq 0$, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Si $\det(A) = ad - bc = 0$, alors A n'est pas inversible.

1.5 Application à la résolution de systèmes

■ **Exemple 1.21 — écrire un système comme une équation matricielle $AX = B$.**

$$\begin{cases} 3x - 9y + 12z = -9 \\ 3x - 7y + 8z = -5 \\ 0x + 3y - 6z = 6 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3x - 9y + 12z \\ 3x - 7y + 8z \\ 0x + 3y - 6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 \\ 3 & -7 & 8 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Théorème 1.5 Si la matrice carrée A est inversible, alors le système de n équations à n inconnues $AX = B$ a une solution unique donnée par la matrice colonne $X = A^{-1}B$.

Démonstration. $AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff \mathbf{I}X = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$ ■

■ **Exemple 1.22 — résolution d'un système à l'aide de la calculatrice.**

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 7x + 9y = 20 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

1.6 Exercices

1.6.1 Exercices : résoudre des systèmes linéaires par pivot de Gauss

Exercice 1 Résoudre les systèmes suivants par élimination de Gauss.

$$\begin{cases} x-2y+\ \ z=1 \\ \quad\ \ y+2z=5 \\ x+\ \ y+3z=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+\ \ y+6z=3 \\ x+\ \ y+3z=3 \\ x+2y+4z=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+\ \ z=2 \\ \quad\ y-3z=1 \\ 2x+y+5z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y-9z=-5 \\ x\qquad +3z=2 \\ -3x+\ \ y-4z=-3 \end{cases}$$

Exercice 2 — concepts. 1. Écrire la matrice augmentée associée du système :

$$\begin{cases} x+\ \ y-12z=1 \\ x\qquad +\ \ 2z=-3 \\ \quad 2y-\quad z=3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \ & \ & \ & \ \\ \ & \ & \ & \ \\ \ & \ & \ & \ \end{array}\right)$$

2. La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée du système d'inconnues x, y et z :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) Le système admet :

(A) triplet solution unique

(B) infinité de triplets solution

b) Le(s) triplet(s) solution(s) sont : $x=\ldots\ldots y=\ldots\ldots z=\ldots\ldots$

3. Les matrices augmentées de systèmes linéaires sont données sous forme échelonnée réduite.

Déterminer les solutions de chaque :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{cases} x= \\ y= \\ z= \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x= \\ y= \\ z= \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{cases} x= \\ y= \\ z= \end{cases}$$

Exercice 3 Résoudre les systèmes suivants par élimination de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=2 \\ 2x-3y+2z=4 \\ 4x+\ \ y-3z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\qquad +3z=3 \\ 2x+y-2z=5 \\ \quad -y+8z=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-z=-2 \\ x\qquad +z=0 \\ 2x-\ \ y-z=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x+6y-2z=-12 \\ x-3y+2z=10 \\ -x+3y+2z=6 \end{cases}$$

Exercice 4 À l'aide des instructions `ref()` (*row-echelon form*) et `rref()` (*reduced row-echelon form*) de la calculatrice, retrouver les formes échelonnées et échelonnées réduites des matrices augmentées de l'exercice 3.

1.6.2 Exercices : algèbre des matrices

Exercice 5 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles égales ? Justifier.

Exercice 6 Déterminer x et y dans chaque cas.

1. $\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 4 \\ 3 & y+1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & x \\ x & -y \end{pmatrix}$

Exercice 7 Déterminer x, y, z et v sachant que $\begin{pmatrix} x & 2y \\ z & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u & u \\ 4 & 3x \end{pmatrix}$

Exercice 8 Déterminer les additions suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 9 Déterminer les sommes suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

Exercice 10 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer $3A$ et $\frac{1}{2}A$.

Exercice 11 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Simplifier puis calculer :

1. $3A - B + 2C$
2. $A + 2B - (A - B)$
3. $2(A - B + 2C) + 3B - C$

Exercice 12 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice X solution de $2B + X = A$.

Exercice 13 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer dans chaque cas, la matrice X solution de :

1. $A - X = 2(X - B)$
2. $X + A = 2(2B - X)$
3. $3A + \dfrac{1}{2}X = X + 4A - \dfrac{1}{2}B$

Exercice 14 Calculer les produits suivants :

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} w & x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 15 Complétez pour calculer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$$

Exercice 16 Calculer les produits de matrices suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 Un fabricant de voitures vend 3 modèles fabriqués sur trois sites de production. La production quotidienne est donnée par la matrice A. Les profits par voiture vendue sont indiqués dans la matrice B selon chaque modèle. Les profits ont diminués avec l'augmentation des coûts de production.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \textbf{Model K} & \textbf{Model R} & \textbf{Model W} \end{array} \\ \begin{array}{r} \textbf{Agnin} \\ \textbf{Bagneux} \\ \textbf{Clais} \end{array} & \begin{pmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \end{array} = A \qquad \begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \textbf{janvier} & \textbf{février} \end{array} \\ \begin{array}{r} \textbf{Model K} \\ \textbf{Model R} \\ \textbf{Model W} \end{array} & \begin{pmatrix} 1000€ & 500€ \\ 2000€ & 1200€ \\ 1500€ & 10000€ \end{pmatrix} \end{array} = B$$

1. Déterminer AB.
2. Toutes les voitures sont vendues. Quel est le profit en janvier réalisé par Bagneux ?
3. Quel est le profit réalisé sur les 3 sites de production en février ?

Exercice 18 — concepts. Compléter :

1. On peut ajouter deux matrices uniquement si ....
2. On peut multiplier deux matrices si le nombre de .... de la première est le même que le nombre de .... de la seconde.
3. Si A est une matrice 2×3 et B est une matrice 3×2 alors AB est une matrice de dimensions $\ldots \times \ldots$ et BA est une matrice de dimensions $\ldots \times \ldots$.
4. A est une matrice de dimensions $m \times n$, et B de dimensions 5×2. Si AB existe alors .....
5. Si A est une matrice de dimensions 3×3 et B est une matrice 4×3 alors le(s) multiplication(s) possible(s) sont : (A) AB (B) BA (C) AA (D) BB
6. A est une matrice de dimensions $m \times n$. Si $A^2 = AA$ existe alors ....
7. Pour toute matrice A on peut calculer : (A) $A + A$ (B) $2A$ (C) AA
8. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \square & -7 \\ 7 & -7 & \square \\ \square & -5 & -5 \end{pmatrix}$

Exercice 19 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -9 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Préciser les produits de matrices bien définis parmi : (A) ABC (B) ACB (C) BAC (D) BCA (E) CAB (F) CBA

Exercice 20 Calculer AB et BA lorsque :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 21 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BC.
2. Montrer que $(AB)C = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ -20 & -10 \end{pmatrix}$.
3. Vérifier que $A(BC) = (AB)C$

Exercice 22 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Montrer que $A(B+C) = AB + AC$.

Exercice 23 Montrer en utilisant les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que l'implication « Si $AB = \mathbf{O}_2$ alors $A = \mathbf{O}_2$ ou $B = \mathbf{O}_2$ » est fausse.

Exercice 24 Montrer en utilisant les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, que l'implication « Si $AB = AC$ et $A \neq \mathbf{O}_2$ alors $B = C$ » est fausse.

Exercice 25 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$. Déterminer x et y sachant que $A^2 = \mathbf{O}_2$

Exercice 26 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3.

Exercice 27 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^3.

Exercice 28 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer :

$AB - AC$ | $ABAB$ | A^4

Exercice 29 Préciser parmi les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{I}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, celles qui vérifient $A^2 = A$.

Exercice 30 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que $A^2 = \mathbf{I}$.

1. Montrer que les matrices $\mathbf{I}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ vérifient toutes $A^2 = \mathbf{I}$.
2. Écrire le système vérifié par a, b, c et d.
3. Le système est-il linéaire ? Justifier.
4. Montrer que $a + d = 0$ ou $b = c = 0$.
5. Montrer que si $a+d = 0$, alors $a^2 = d^2 = 1 - bc$
6. $b = 4$ et $c = -2$. Proposer 2 matrices $A^2 = \mathbf{I}$.

Exercice 31 — notion clef.

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. L_1, L_2 et L_3 désignent les lignes de la matrice M.

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice PM.
2. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Écrire la matrice DM.
3. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice EM.
4. Compléter :

multiplier à gauche par ...	**correspond à ...**
P	$L_{\dots} \leftrightarrow L_{\dots}$
D	$\dots L_{\dots} \to L_{\dots}$; $\dots L_{\dots} \to L_{\dots}$; $\dots L_{\dots} \to L_{\dots}$
E	$\dots L_{\dots} + L_{\dots} \to L_{\dots}$; $\dots L_{\dots} + L_{\dots} \to L_{\dots}$
$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$	$L_1 \leftrightarrow L2$
$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$	$2L_2 + L_3 \to L_3$
$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$	$2L_2 + L_1 \to L_1$

■ **Exemple 1.23** Développer et simplifier $(A+2\mathbf{I})^2$ et $(A-B)^2$

solution.
$$\begin{aligned}(A+2\mathbf{I})^2 &= (A+2\mathbf{I})(A+2\mathbf{I}) \\ &= AA+2A\mathbf{I}+2\mathbf{I}A+2\mathbf{I}2\mathbf{I} \\ &= A^2+4A+4\mathbf{I}\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}(A-B)^2 &= (A-B)(A-B) \\ &= AA-AB-BA+B^2\end{aligned}$$
$AB \neq BA$ on ne peut simplifier davantage ■

■ **Exemple 1.24** Si $A^2 = 2A+3\mathbf{I}$. Exprimer A^3 et A^4 sous la forme $aA+b\mathbf{I}$.

solution. $A^3 = AA^2 = A(2A+3\mathbf{I}) = 2AA+3A\mathbf{I}$, $A^4 = (A^2)^2 = A(7A+6\mathbf{I})$ ■
$$= 2A^2+3A = 2(2A+3\mathbf{I})+3A \qquad = 7AA+6A\mathbf{I} = 7(2A+3\mathbf{I})+6A$$
$$= 7A+6\mathbf{I} \qquad = 20A+21\mathbf{I}$$

■ **Exemple 1.25** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver a et b tel que $A^2 = aA+b\mathbf{I}$.

solution. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $a+b=7 \quad 2a=10$ ■

$\begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 3a & 4a+n \end{pmatrix} \qquad a=5 \quad b=2$

Exercice 32 Simplifier les matrices suivantes :

$(A+B)(A-B)$ | $(B+2\mathbf{I})B$ | $(3\mathbf{I}-B)^2$

Exercice 33 Si $A^2 = \mathbf{I}$, simplifier :

$A(A+2\mathbf{I})$ | $(A-\mathbf{I})^2$ | $A(A+3\mathbf{I})^2$

Exercice 34 Si $A^2 = 2\mathbf{I}-A$, exprimer A^3 et A^4 sous la forme $aA+b\mathbf{I}$.

Exercice 35 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Trouver a et b tel que $A^2 = aA+b\mathbf{I}$.

Exercice 36 — récurences et matrices. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer par récurrence que pour tout $k \geqslant 1$:
   $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 1-2^k & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 37 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer par récurrence que pour tout $k \geqslant 1$:
   $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 3^k-1 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

Exercice 38 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer par récurrence que pour tout $k \geqslant 1$:
   $A^k = \begin{pmatrix} k+1 & k \\ -k & -k+1 \end{pmatrix}$

■ **Exemple 1.26** Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ sont inverses.

solution. La multiplication étant non commutative *a priori*, il faut calculer AB et BA :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+1(-5) & 2(-1)+1(2) \\ 5(3)+3(-5) & 5(-1)+3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(2)+(-1)(5) & 3(1)+(-1)(3) \\ (-5)(2)+2(5) & (-5)(1)+2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
■

Exercice 39 Vérifiez que la matrice B est l'inverse de la matrice A dans les cas suivants.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-7}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 40 Utiliser le pivot de Gauss pour déterminer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

Exercice 41 — inverse d'un produit. Soit A et B deux matrices carrées inversibles de dimensions $n \times n$. Montrer que AB est inversible et que son inverse est $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exercice 42 $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB.
2. Déterminer A^{-1}.
3. En déduire A^2 et $(A^2)^{-1} = A^{-2}$.

Exercice 43 — matrices diagonales.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et montrer que $AB = BA$.
2. On suppose a_{11}, a_{22} et a_{33} sont non nuls. Déduire l'inverse de A.

Exercice 44 — matrice triangulaire supérieure. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. À l'aide d'un pivot de Gauss retrouver l'inverse de A, et vérifier que A^{-1} est aussi triangulaire supérieure.

Exercice 45 A est une matrice carrée tel que $A^2 = \mathbf{O}$.

1. Calculer $(\mathbf{I} - A)(\mathbf{I} + A)$
2. En déduire que $\mathbf{I} - A$ est inversible.

Exercice 46 A est une matrice carrée tel que $(A - 2\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$.

1. Montrer que $A^2 - 4A = -4\mathbf{I}$
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 47 A est une matrice carrée tel que $A^2 + 2A + \mathbf{I} = \mathbf{O}$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 48 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et donner leur inverse :

$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

Exercice 49 Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la matrice $A = \begin{pmatrix} 2-x & 4 \\ 5 & 3-x \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Exercice 50 Écrire les systèmes suivants sous forme d'une équation matricielle $AX = B$:

$$\begin{cases} 6x - y + z = 12 \\ 2x + z = 7 \\ y - 2z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 5 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

Exercice 51 Écrire les systèmes suivants sous forme d'une équation matricielle $AX = B$, puis utiliser la calculatrice retrouver les solutions par inversion.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x - 5y = 4 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 4y + z = 7 \\ -x + y - z = 0 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

Exercice 52 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer pour chaque cas la matrice solution X :

1. $AX = B$
2. $XA = B$

1.6.3 Exercices : applications du calcul matriciel

Exercice 53 — problème inverse. Soit la fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $f(0) = 5$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 6$.

1. Écrire le système vérifié par $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sous la forme $AX = B$.
2. Utiliser un pivot de Gauss pour déterminer l'inverse de A.
3. Écrire l'expression de la fonction f.

Exercice 54 On suppose que la courbe cubique $\mathscr{C}$ d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passe par les points $A(1\ ;\ 12)$, $B(2\ ;\ 40)$, $C(3\ ;\ 6)$ et $D(-1\ ;\ -14)$.

1. Écrire le système d'équation $AX = B$ vérifié par $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.
2. Utilise la calculatrice pour déterminer l'inverse de A.
3. Écrire l'équation de la courbe $\mathscr{C}$.

> La décomposition en éléments simple est la réciproque d'une mise au même dénominateur
> $$\frac{3x}{2x^2 - x - 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+1}$$

Exercice 55 — décomposition en éléments simples. On cherche A, B et C tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1, -2\} \quad \frac{5x+7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

1. Vérifier que $(x-1)(x+1)(x+2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.
2. Ramener au même dénominateur, et déduire que A, B et C vérifient $\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 3A + B = 5 \\ 2A - 2B - C = 7 \end{cases}$
3. Résoudre le système par inversion, et conclure.

Exercice 56 Déterminer A et B tel que $\forall x \neq 1$ et -1 : $\dfrac{2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$

Exercice 57 Déterminer A, B et C tel que $\forall x \neq 0$: $\dfrac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 4}$

> P matrice carrée inversible. Si $A = PBP^{-1}$ alors on dira que A et B sont semblables.
>
> Et on peut écrire $A^2 = PBP^{-1}PBP^{-1} = PB\mathbf{I}BP^{-1} = PB^2P^{-1}$. L'exercice suivant montre une utilisation de matrice semblables ou le calcul des puissances de B est facile.

Exercice 58 Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $PQ = \mathbf{I}$ et déterminer $D = QAP$ à l'aide de la calculatrice.
2. Calculer D^2, D^3, puis donner l'expression de D^n pour $n \geqslant 1$.
3. Exprimer A en fonction de D. Et en déduire une expression de A^n.

> Soit la suite de matrices (U_n) définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n$. On démontre par récurrence pour tout $n \geqslant 1$ $U_n = A^n U_0$ (la forme explicite).

Exercice 59 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 6$ et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$.

1. On pose pour $n \geqslant 0$: $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Exprimer U_0 et U_1.
2. a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$: $U_{n+1} = AU_n$ ou $A = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$: $U_n = A^n U_0$
3. On poste $P = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ \frac{-1}{2} & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$
   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$ on a $A^n = 2^n P + 4^n Q$.
   b) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$ on a $u_n = -2^n + 2 \times 4^n$.

Exercice 60 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$.

1. On pose pour $n \geqslant 0$: $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Exprimer U_0 et U_1.
2. a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$: $U_{n+1} = AU_n$ ou $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$: $U_n = A^n U_0$
3. On poste $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
   a) Donner P^{-1}. Et vérifier à l'aide de la calculatrice que $A = PDP^{-1}$
   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$: $A^n = PD^nP^{-1}$ et que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$
   c) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$: $u_n = \frac{\alpha}{2}(3 - 3^n) + \frac{\beta}{2}(3^n - 1)$

Exercice 61 — Modèle S-I. 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$. On pose $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

   a) Vérifier que $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = QP = \mathbf{O}$ et $A = 0.7P + Q$.
   b) Montrer par récurrence que $A^n = 0.7^n P + Q$
   c) Quelle semble être la limite $\lim\limits_{n \to \infty} A^n$?

2. On étudie la propagation d'une infection au sein d'une population. À la semaine n, on compte s_n individus susceptibles d'être infectés par une maladie, et i_n indivudus infectés. On suppose que chaque semaine 10% des individus susceptibles sont infectés, et que 20% des individus infectés se rétablissent pour redevenir susceptibles. Notez que nous supposons qu'aucune immunité n'est possible, et que l'infection n'est pas fatale.
   a) Montrer que pour $n \geqslant 0$, $s_{n+1} = (1 - a)s_n + bi_n$ et $i_{n+1} = as_n + (1 - b)i_n$. Préciser a et $b \in \mathbb{R}$.
   b) On pose $U_n = \begin{pmatrix} s_n \\ i_n \end{pmatrix}$. Déduire que pour tout $n \geqslant 0$: $U_{n+1} = AU_n$.
   c) Sachant que à la semaine zéro, la population comptait 20 individus susceptibles et 40 infectés, déterminer la répartition de la population après un grand nombre de semaines.

■ **Exemple 1.27** A est une matrice carrée d'ordre n, et B une matrice colonne de n lignes.

Soit la suite (U_n) de matrices colonnes vérifiant la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$.

Si l'équation $X = AX + B$ admet une matrice solution X (c'est le cas si $\mathbf{I} - A$ est inversible), alors la **suite associée** (V_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $V_n = U_n - X$ vérifie $V_{n+1} = AV_n$.

On peut conclure que poru tout $n \geqslant 0$: $V_n = A^n V_0$ et donc que $U_n - X = A^n(U_0 - X)$.

Exercice 62 Soit la suite (u_n) tel que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n - 5$ et $u_0 = 0$ et $u_1 = 6$.

1. On pose pour tout $n \geqslant 0$: $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$: $U_{n+1} = AU_n + B$ ou A est une matrice carrée, et B une matrice colonne à préciser.
   b) Résoudre l'équation $X = AX + B$.
2. Soit la suite (V_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $V_n = U_n - X$
   a) Vérifier que $V_0 = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.
   b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$: $V_{n+1} = AV_n$.
   c) Comment démontrer que pour tout $n \geqslant 0$ on a $V_n = A^n V_0$?
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
   a) Donner sans justifier la valeur de la matrice D^n pour $n \geqslant 0$.
   b) Déterminer PDP^{-1}.
   c) Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$: $A^n = PD^nP^{-1}$
4. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $V_n = \begin{pmatrix} -2\times 2^n + \frac{21}{2}\times 3^n \\ -2^n + \frac{7}{2}\times 3^n \end{pmatrix}$
5. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = -2^n + \frac{7}{2} \times 3^n - \frac{5}{2}$

Exercice 63 — bis repetita. La suite (u_n) vérifie $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + 1$.

1. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Résoudre l'équation $X = AX + B$.
   b) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
   c) Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$: $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n & \frac{-2}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n \\ \frac{-1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \end{pmatrix}$
2. On pose pour tout $n \geqslant 0$: $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et la suite associée $V_n = U_n - X$
   a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$: $U_{n+1} = AU_n + B$.
   b) Vérifier que $V_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, et que pour tout $n \geqslant 0$: $V_{n+1} = AV_n$.
   c) Exprimer V_n en fonction de A et V_0.
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{4}{3}2^n - \frac{1}{2}$

1.7 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 1 . $S_1 : \{x = 1,\ y = 1,\ z = 2\}$;

$S_2 : \{x = -1,\ y = 4,\ z = 0\}$;
$S_3 : \left\{x = \frac{11}{10},\ y = -\frac{1}{5},\ z = -\frac{2}{5}\right\}$;
$S_4 : \{x = 2 - 3z,\ y = 3 - 5z\}$;

■

solution de l'exercice 2 . ■

solution de l'exercice 3 .
$S_1 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; solution unique $\{x = 1,\ y = 0,\ z = 1\}$
$S_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; pas de solutions[]
$S_3 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; solution unique $\{x = -1,\ y = 0,\ z = 1\}$
$S_4 : \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & -12 \\ 1 & -3 & 2 & 10 \\ -1 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; infinité de solutions$\{x = 3y + 2,\ z = 4\}$

■

solution de l'exercice 4 . ■

solution de l'exercice 5 . Non, elles n'ont pas les mêmes dimensions ! ■

solution de l'exercice 6 . 1: $[(-2,\ -2)]$

2: $\{x = -5,\ y = 3\}$

3: $\{x = 0,\ y = 0\}$

■

solution de l'exercice 7 . : $\left\{u = 1,\ x = -2,\ y = \frac{1}{2},\ z = 4\right\}$ ■

solution de l'exercice 8 . 8 ■

solution de l'exercice 9 . ■

solution de l'exercice 10 . 10 ■

solution de l'exercice 11 . (1) $\begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 & -21 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 25 & 2 \end{bmatrix}$ ■

solution de l'exercice 12 . $X = A - 2B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$ ■

solution de l'exercice 13 . 1. $X = \frac{1}{3}(A + 2B) = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

2. $X = \frac{1}{3}(-A + 4B) = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

3. $X = 2(-A + \frac{1}{2}B) = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 15 \end{bmatrix}$

■

solution de l'exercice 14 . ■

solution de l'exercice 15 . 15 ■

solution de l'exercice 16 . ■

solution de l'exercice 17 . ■

solution de l'exercice 18 . ■

solution de l'exercice 19 . A est de dimensions 2×4, B est de dimensions 1×4, et C de dimensions 4×1. ACB est le seul possible $(2 \times 4) \times (4 \times 1) \times (1 \times 4)$, et donne une matrice de dimensions 2×4. ■

solution de l'exercice 20 . 20 ■

solution de l'exercice 21 . ■

solution de l'exercice 22 . ■

solution de l'exercice 23 . ■

solution de l'exercice 24 . ■

solution de l'exercice 25 . 25 ■

solution de l'exercice 26 . ■

solution de l'exercice 27 . ■

solution de l'exercice 28 . ■

solution de l'exercice 29 . ■

solution de l'exercice 30 . 30 ■

solution de l'exercice 31 . ■

solution de l'exercice 32 . ■

solution de l'exercice 33 . ■

solution de l'exercice 34 . ■

solution de l'exercice 35 . 35 ■

solution de l'exercice 36 . ■

solution de l'exercice 37 . ■

solution de l'exercice 38 . ■

solution de l'exercice 39 . ■

solution de l'exercice 40 . 40 ■

solution de l'exercice 41 . ■

solution de l'exercice 42 . ■

solution de l'exercice 43 . ■

solution de l'exercice 44 . ■

solution de l'exercice 45 . 45 ■

solution de l'exercice 46 . ■

solution de l'exercice 47 . ■

solution de l'exercice 48 . ■

solution de l'exercice 49 . ■

solution de l'exercice 50 . 50 ■

solution de l'exercice 51 . ■

solution de l'exercice 52 . ■

solution de l'exercice 53 .

$$\begin{cases} f(0)=5 \\ f(1)=2 \\ f(2)=6 \end{cases} \iff \begin{cases} 0a+0b+1c=5 \\ 1a+1b+1c=2 \\ 4a+2b+1c=6 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \iff AX = B.$$ **D'où**

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -6.5 \\ 5 \end{pmatrix}$$ ■

solution de l'exercice 54 .

$$\begin{cases} A(1;12) \in \mathscr{C}_f \\ B(2;40) \in \mathscr{C}_f \\ C(3;6) \in \mathscr{C}_f \\ D(-1;-14) \in \mathscr{C}_f \end{cases} \iff \begin{cases} f(1)=12 \\ f(2)=40 \\ f(3)=6 \\ f(-1)=-14 \end{cases} \iff \begin{cases} 1a+1b+1c+1d=12 \\ 8a+4b+2c+1d=40 \\ 27a+9b+3c+1d=6 \\ -a+b-c+e=-14 \end{cases} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 40 \\ 6 \\ -14 \end{pmatrix} \iff AX = B.$$ **D'où** $$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ 40 \\ 6 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 23 \\ 22 \\ -24 \end{pmatrix}$$ ■

solution de l'exercice 55 . 55 ■

solution de l'exercice 56 . ■

solution de l'exercice 57 . ■

solution de l'exercice 58 . ■

solution de l'exercice 59 .

1. $U_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. et $U_1 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6(6) - 8(1) \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 6 \end{pmatrix}$.
2. Soit $n \geqslant 0$. $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u_{n+1} - 8u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AU_n$
3. On veut montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = A^n U_0$. On procède par récurrence.

   Initialisation $n = 0$. $A^0 U_0 = IU_0 = U_0$. L'égalité est vraie.

   Hérédité On suppose qu'il existe n telque la relation est vrai : $U_n = A^n U_0$.

   D'après 2a : $U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$. La propriété est vrai au rang $n + 1$.
4. **Initialisation** $n = 0$. $2^0 P + 4^0 Q = P + Q = \mathbf{I} = A^0$

   Hérédité On suppose qu'il existe un rang n pour lequel $A^n = 2^n P + 4^n Q$.

   $A^{n+1} = A(2^n P + 4^n Q) = 2^n AP + 4^n AQ = 2^n \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + 4^n \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = 2^n 2P + 4^n 4Q = 2^{n+1} P + 4^{n+1} Q$. La propriété est vrai au rang $n + 1$.
5. Pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = A^n U_0$, donc $u_n = (2^n P + 4^n Q) \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^n(6(-0.5) + 1(2)) + 4^n(0.5(6) - 1(1)) = -2^n + 2 \times 4^n$

■

solution de l'exercice 60 .

1. $U_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$. et $U_1 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(\beta) - 3(\alpha) \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\beta - 3\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
2. Soit $n \geqslant 0$. $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+1} - 3u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AU_n$
3. On veut montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = A^n U_0$. On procède par récurrence.

   Initialisation $n = 0$. $A^0 U_0 = IU_0 = U_0$. L'égalité est vraie.

   Hérédité On suppose qu'il existe n telque la relation est vrai : $U_n = A^n U_0$.

   D'après 2a : $U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$. La propriété est vrai au rang $n + 1$.
4. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{1(1) - 3(1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

$$PDP^{-1} = P\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2} & \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{-3}{2} \end{pmatrix} = A)$$

5. On veut montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

   Initialisation $n = 0$. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \mathbf{I} = D^0$, $PD^0P^{-1} = P\mathbf{I}P^{-1} = \mathbf{I} = A^0$,

   Hérédité On suppose qu'il existe un rang n pour lequel $A^n = PD^nP^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

   $D^{n+1} = DD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$
   $A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

   La propriété est vrai au rang $n + 1$.

6.
7. Pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = A^nU_0$, donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3 \cdot 3^n}{2} - \dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} - \dfrac{3 \cdot 3^n}{2} \\ \dfrac{3^n}{2} - \dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} - \dfrac{3^n}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$.

   Et $u_n = \frac{\beta}{2}(3^n - 1) + \frac{\alpha}{2}(3 - 3^n)$

■

solution de l'exercice 61 . ■

solution de l'exercice 62 . ■

solution de l'exercice 63 . ■