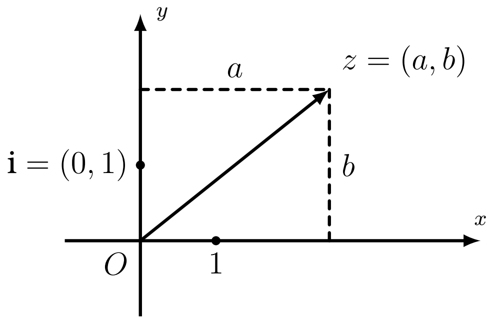
2
Nombres complexes (1) approche algébrique

Table 2.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 2…

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître…/savoir faire…**	🪨	💎	💍
Forme algébrique et opérations, conjuguqés et modules			
sommes et produits		1 à 6	
conjugués, inverses et quotients		8, 9	10 à 12
Résolution d'équations			
résolution d'équations en z et $\overline{z}$	7	13, 14	
résolution d'équations quadratiques	15	16 à 18	
racine carrée d'un nombre complexe			19, 20
division de polynômes	23	21 , 22	
résolutions d'équations de degré $\geqslant 3$	24 à 27	28, 29	30, 31
Formule du binôme de Newton et applications			
utilisation de la formule du binôme	32	33, 34, 35	36

2.1 Définition formelle d'un nombre complexe



Définition 2.1 — Hamilton 1833. Un nombre complexe z est un couple de deux réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

On pose $\mathrm{i} = (0,1) \in \mathbb{C}$.

Définition 2.2 Pour tout réel r et deux nombres complexes $z = (a,b)$ et $z' = (c,d)$:

$$z = z' \iff (a,b) = (c,d) \iff a = c \text{ et } b = d \quad \textbf{égalité de complexes}$$

$$z + z' = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \quad \textbf{addition de nombres complexes}$$

$$rz = r(a,b) = (ra, rb) \quad \textbf{multiplication par un réel}$$

$$z \times z' = (a,b) \times (c,d) = (ac - bd, ad + bc) \quad \textbf{multiplication de nombres complexes}$$

■ **Exemple 2.1** $z_1 = (1,5)$, $z_2 = (-2,3)$, $z_3 = (3,0)$.

$z_1 + z_2 = (1,5) + (-2,3) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$3z_1 = 3(1,5) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$; $\quad -2z_3 = -2(3,0) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(-2,0)(3,0) = (-2)(\dots) - (0)(\dots)\ ,\ (-2)(\dots) + (0)(\dots)) = (\dots\ ,\ \dots)$

$z_1 z_2 = (1,5)(-2,3) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(r_1, 0) + (r_2, 0) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(r,0) \times (a,b) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots (a,b)$

Propriétés 2.1 — $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. On identifie tout réel $r \in \mathbb{R}$ avec le complexe $(r,0) \in \mathbb{C}$.

En particulier $1 = (1,0)$ et $0 = (0,0)$.

R L'addition et la multiplication de nombres réels (en tant que nombres complexes) correspond à l'addition et la multiplication en tant que nombres réels :

$$(r_1,0) + (r_2,0) = (r_1 + r_2, 0) \qquad (r_1,0) \times (r_2,0) = (r_1 r_2, 0)$$

Multiplier par le complexe $(r,0)$ revient à multiplier par le réel r :

$$(r,0) \times (c,d) = (rc, rd) = r(c,d)$$

Propriétés 2.2 $\mathrm{i}^2 = -1$.

Démonstration. $\mathrm{i}^2 = (0,1)(0,1) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ ■

Théorème 2.3 — admis. L'addition et la multiplication de nombres complexes sont **commutatives** et **associatives**. De plus la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

commutativité	associativité	distributivité
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$
$z_1z_2 = z_2z_1$	$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$	

Table 2.2 – Les démonstrations de ces propriétés sont assomantes d'ennui. Nous les admettrons.

Définition 2.3 — forme algébrique. Soit a et $b \in \mathbb{R}$.

Il est d'usage de noter le nombre complexe $z = (a, b)$ sous la **forme algébrique** $z = a + ib$.

$a = \mathfrak{Re}(z)$ est la **partie réelle** de z.

$b = \mathfrak{Im}(z)$ est la **partie imaginaire** de z.

Les nombres réels $r = r + 0\mathrm{i}$ on une partie imaginaire nulle.

Démonstration. $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a1 + \mathrm{i}b = a + b\mathrm{i}$. ■

■ **Exemple 2.2**

Si $z = 2 + 3\mathrm{i}$ alors $z \in \mathbb{C}$ et $\mathfrak{Re}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\mathfrak{Im}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Si $z = 4\mathrm{i}$ alors $z \in \mathbb{C}$ et $\mathfrak{Re}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\mathfrak{Im}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Si $z = 5$ alors $z \in \ldots\ldots \subset \mathbb{C}$ et $\mathfrak{Re}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\mathfrak{Im}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Si $z = -2 + \mathrm{i}$ alors $z \in \mathbb{C}$ et $\mathfrak{Re}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\mathfrak{Im}(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(R) La somme et le produit de deux nombres complexes $z_1 = x + \mathrm{i}y$ et $z_2 = x' + \mathrm{i}y'$ s'écrivent :

$$z_1 + z_2 = x + x' + \mathrm{i}(y + y') \qquad z_1z_2 = xx' - yy' + \mathrm{i}(xy' + x'y)$$

Dans la pratique, on manipule les nombres complexes comme des polynômes de la variable i, et on utilise l'égalité $\mathrm{i}^2 = -1$, pour obtenir un resultat sous **sous forme algébrique** (partie réelle + i partie imaginaire)

■ **Exemple 2.3** Simplifier sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$A = (3 + 5\mathrm{i}) + (4 - 2\mathrm{i})$ $B = (3 + 5\mathrm{i}) - (4 - 2\mathrm{i})$ $C = (3 + 5\mathrm{i})(4 - 2\mathrm{i})$ $D = \mathrm{i}^7$

solution. $A = (3 + 5\mathrm{i}) + (4 - 2\mathrm{i}) = 3 + 4 + 5\mathrm{i} - 2\mathrm{i} = 7 + 3\mathrm{i}$

$B = (3 + 5\mathrm{i}) - (4 - 2\mathrm{i}) = 3 - 4 + 5\mathrm{i} + 2\mathrm{i} = -1 + 7\mathrm{i}$

$C = (3 + 5\mathrm{i})(4 - 2\mathrm{i}) = 3(4) - 3(2)\mathrm{i} + 5\mathrm{i}(4) - 5(2)\mathrm{i}^2 = 12 - 6\mathrm{i} + 20\mathrm{i} + 10 = 22 + 14\mathrm{i}$

$D = \mathrm{i}^7 = \mathrm{i}^{6+1} = \mathrm{i}^6\mathrm{i} = (\mathrm{i}^2)^3\mathrm{i} = (-1)^3\mathrm{i} = -\mathrm{i}$

■

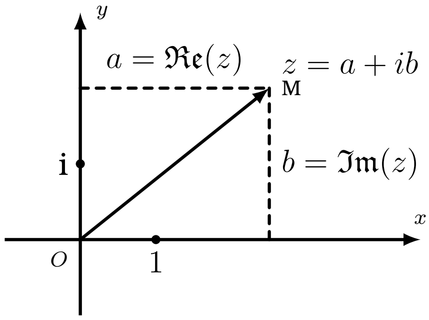
Définition 2.4 — plan complexe. $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, tout nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ est représenté par le point $M(a, b)$:

z est l'affixe complexe du point M

z est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$

Les réels $a = a + 0\mathrm{i}$ sont représentés par les points de l'axe des abscisses.



Proposition 2.4 Pour a et $b \in \mathbb{R}$.

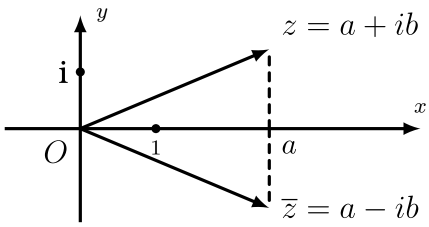
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ **factorisation d'une différence de carrés**

$a^2 + b^2 = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b)$ **factorisation d'une somme de carrés**

Démonstration. $a^2 + b^2 = a^2 - b^2\mathrm{i}^2 = a^2 - (b\mathrm{i})^2 = (a - b\mathrm{i})(a + b\mathrm{i})$ ∎

Définition 2.5 — conjugué. Pour tout nombre complexe $z = a+\mathrm{i}b$, le **conjugué** de z est le nombre **complexe** noté $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

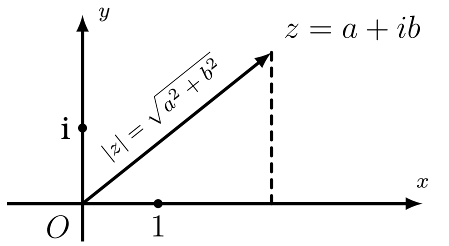
Dans le plan complexe les points d'affixes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



■ **Exemple 2.4** Si $z = 3 + 5\mathrm{i}$, alors $\overline{z} = 3 - 5\mathrm{i}$.

Définition 2.6 — module. Pour tout nombre complexe $z = a+\mathrm{i}b$, le **module** de z est le nombre **réel positif ou nul** noté $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dans le plan complexe, si M est d'affixe z, alors $|z| = OM$.



■ **Exemple 2.5** $z = 3 - 5\mathrm{i}$. Alors $|z|^2 = 3^2 + 5^2$, $|z| = \sqrt{34}$.

R Si $z \in \mathbb{R}$, le module de z est égal à sa valeur absolue.

Propriété 2.5 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2 \geqslant 0$.

Démonstration. $z\overline{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 - (\mathrm{i})^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$. ∎

Corollaire 2.6 Si $|z| \neq 0$ alors $\dfrac{\overline{z}}{|z|^2} \in \mathbb{C}$ et $z\dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1$.

Définition 2.7 — inverse. Tout $z \in \mathbb{C}^*$ admet un inverse noté $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Définition 2.8 — quotient. Pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$. Le quotient de z_1 par z_2 est le **nombre complexe** défini par $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \times \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$.

■ **Exemple 2.6** Pour retrouver la forme algébrique d'un quotient $\dfrac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d}$ on multipliera numérateur et dénominateur par le **conjugué** du dénominateur.

Déterminer la forme algébrique des inverses ou quotients suivants :

$A = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$ $\qquad C = \dfrac{3+5\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ $\qquad D = \dfrac{7+3\mathrm{i}}{4\mathrm{i}}$

solution.

$$A = \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{\overline{(1+\mathrm{i})}}{(1+\mathrm{i})\overline{(1+\mathrm{i})}} = \frac{(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1-\mathrm{i}}{1^2-(\mathrm{i})^2} = \frac{1-\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$B = \frac{3+5\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{(3+5\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})}\frac{\overline{(1-2\mathrm{i})}}{\overline{(1-2\mathrm{i})}} = \frac{(3+5\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})}\frac{(1+2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})} = \frac{3+5\mathrm{i}+6\mathrm{i}+10\mathrm{i}^2}{1^2-(2\mathrm{i})^2} = \frac{-7+11\mathrm{i}}{1+4} = \frac{-7}{5} + \frac{11}{5}\mathrm{i}$$

$$C = \frac{7+3\mathrm{i}}{4\mathrm{i}} = \frac{(7+3\mathrm{i})}{(4\mathrm{i})}\frac{\overline{(4\mathrm{i})}}{\overline{(4\mathrm{i})}} = \frac{(7+3\mathrm{i})}{(4\mathrm{i})}\frac{(-4\mathrm{i})}{(-4\mathrm{i})} = \frac{-28\mathrm{i}-12\mathrm{i}^2}{-16\mathrm{i}^2} = \frac{12-28\mathrm{i}}{16} = \frac{3}{4} - \frac{7}{4}\mathrm{i}$$

■

Propriétés 2.7 Pour tout z et $w \in \mathbb{C}^*$:

$$\overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\ \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

Démonstration. Conséquences directes des définitions de conjuguées et opérations. ■

Propriétés 2.8 Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z + \overline{z} = 2\,\mathfrak{Re}(z) \qquad z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathfrak{Im}(z)$$

D'où les équivalences :

1. $\overline{z} = -z \iff z$ est un imaginaire pur.
2. $\overline{z} = z \iff z$ est un réel.

Propriétés 2.9 Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$:

$$|zw| = |z||w| \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

Démonstration. $|z_1z_2|^2 = z_1z_2\overline{z_1z_2} = z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = |z_1|^2|z_2|^2$. Idem $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|^2 = \dfrac{z_1}{z_2}\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{z_1\overline{z_1}}{z_2\overline{z_2}} = \dfrac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$ ■

Propriété 2.10 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $|z| = 0 \iff z = 0$.

Démonstration. $z = x + \mathrm{i}y$, $|z| = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0 \iff z = 0$. ■

2.2 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Théorème 2.11 — équation produit nul dans $\mathbb{C}$. Si $zw = 0$ alors $z = 0$ ou $w = 0$.

Démonstration. $zw = 0 \Rightarrow |zw| = 0 \Rightarrow |z||w| = 0 \Rightarrow |z| = 0$ ou $|w| = 0 \Rightarrow z = 0$ ou $w = 0$. ■

Théorème 2.12 Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions réelles $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
2. Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ admet une unique solution $x = 0$
3. Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions complexes conjuguées $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Démonstration. Cas $a < 0$, développer $(x - i\sqrt{-a})(x + i\sqrt{-a}) =$

■

Théorème 2.13 — équation quadratiques à coefficients réels. Pour une équation quadratique donnée sous forme standard $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et $c \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta > 0$, L'équation admet deux racines réelles distinctes $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle double $\dfrac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées $\dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

forme canonique $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ *et* $\beta = \dfrac{-\Delta}{4a}$

$$a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} = 0$$

$$\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

■

2.3 Résolution d'équations polynomiales de degré supérieur à 2

Théorème 2.14 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{Z}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $z^n - \alpha^n$ est factorisable par $z - \alpha$. Plus précisément il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $z^n - \alpha^n = (z-\alpha)Q(z)$

Démonstration. (à l'aide d'une somme téléscopique)

On pose :
$$Q(z) = z^{n-1} + \alpha z^{n-2} + \alpha^2 z^{n-1} + \ldots + \alpha^{n-2} z + a^{n-1}$$
$$zQ(z) = z^n + \alpha z^{n-1} + \alpha^2 z^{n-2} + \ldots + \alpha^{n-2} z^2 + \alpha^{n-1} z$$
$$\alpha Q(z) = \qquad \alpha z^{n-1} + \alpha^2 z^{n-2} + \alpha^3 z^{n-1} + \ldots + \alpha^{n-1} z + \alpha^n$$
$$zQ(z) - \alpha Q(z) =$$
■

Corollaire 2.15 Soit $a \in \mathbb{C}$ et P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 ($\deg(P) \geqslant 1$).
Si $P(\alpha) = 0$, alors il existe un polynôme Q de degré $\deg(Q) = \deg(P) - 1$ tel que :
$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad P(z) = (z-\alpha)Q(z)$$

Démonstration. (exigible). Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n$
$$P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \ldots + a_n\alpha^n$$
$$P(z) - P(\alpha) = a_1(z-\alpha) + a_2(z^2-\alpha^2) + a_3(z^3-\alpha^3) + \ldots + a_n(z^n-\alpha^n)$$
D'après théorème 2.14, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ il existe un polynôme $Q_k(z)$ de degré $k-1$ en z tel que :
$$P(z) - P(\alpha) = a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)Q_2(z) + a_3(z-\alpha)Q_3(z) + \ldots + a_n(z-\alpha)Q_n(z)$$
$$P(z) - \underbrace{P(\alpha)}_{=0} = (z-\alpha)\underbrace{\left(a_1 + a_2Q_2(z) + a_3Q_3(z) + \ldots + a_nQ_n(z)\right)}_{\text{degré } n-1}$$
■

R Pour déterminer le quotient Q dans $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$ on procèdera par division euclidienne.

Corollaire 2.16 Un polynôme de degré $n \geqslant 1$ admet au plus n racines complexes.

Démonstration. (par récurrence) ■

Théorème 2.17 — de la division euclidienne, admis. Soient A et B deux polynômes avec B non nul.
Il existe un unique couple $(Q\,,\,R)$ de polynômes tel que $A = B \times Q + R$ avec $deg(R) < deg(Q)$.
Q est le quotient et R est le reste de la division de A par B.
Si R est le polynôme nul, alors $A = BQ$. On dira que A est factorisable par B.

2.4 Exercices

2.4.1 Exercices : forme algébrique d'un nombre complexe

Exercice 1 Compléter :

z	$3+2\mathrm{i}$	$5-\mathrm{i}$	3	$-11\mathrm{i}$			0
$\mathfrak{Re}\, z$					-3	0	
$\mathfrak{Im}\, z$					4	$\sqrt{3}$	

Exercice 2 — sommes et différences. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

$a = (3+2\mathrm{i})+\mathrm{i}$

$b = 3\mathrm{i}-(2-3\mathrm{i})$

$c = (5-3\mathrm{i})+(-4-7\mathrm{i})$

$d = (7-\frac{1}{2}\mathrm{i})-(5+\frac{3}{2}\mathrm{i})$

$e = (-12+8\mathrm{i})-(7+4\mathrm{i})$

$f = 6\mathrm{i}-(4-\mathrm{i})$

Exercice 3 — produits. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

$a = 4(-1+2\mathrm{i})$

$b = -2(3-4\mathrm{i})$

$c = (5-3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$

$d = (6+5\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})$

$e = (2+5\mathrm{i})^2$

$f = (3-7\mathrm{i})^2$

Exercice 4 $z = 5-2\mathrm{i}$ et $w = 2+\mathrm{i}$, écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z+2w$

$2z$

iw

$z-w$

$2z-3w$

zw

w^2

z^2

Exercice 5 — puissances. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

i^3 | i^{10} | $(3\mathrm{i})^5$ | $(2\mathrm{i})^4$ | i^{2024}

Exercice 6

1. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $(1+\mathrm{i})^4$
2. En déduire la forme algébrique de $(1+\mathrm{i})^{101}$.

■ **Exemple 2.7** Résoudre pour x et y dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$(x+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 5+y\mathrm{i}$

$x - x\mathrm{i} + 2\mathrm{i} + 2 = 5+y\mathrm{i}$

$x+2+\mathrm{i}(2-x) = 5+y\mathrm{i}$

$$\begin{cases} x+2=5 \\ 2-x=y \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

deux nombres complexes sont égaux si parties imaginaires et réelles sont égales

Exercice 7 Résoudre pour x et $y \in \mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x+3y\mathrm{i} = -x-6\mathrm{i}$
2. $(x+\mathrm{i}y)(2-\mathrm{i}) = 8+\mathrm{i}$
3. $x^2+x\mathrm{i} = 4-2\mathrm{i}$
4. $2(x+y\mathrm{i}) = x-y\mathrm{i}$
5. $(x+\mathrm{i})(3-\mathrm{i}y) = 1+13\mathrm{i}$
6. $(x+2\mathrm{i})(y-\mathrm{i}) = -4-7\mathrm{i}$

Exercice 8 Déterminer la forme algébrique des nombres suivants :

$A=\dfrac{1}{\mathrm{i}}$; $B=\dfrac{1}{2-\mathrm{i}\sqrt{3}}$

$C=\dfrac{1}{4-3\mathrm{i}}$; $D=\dfrac{2-3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

$E=\dfrac{5-\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$; $F=\dfrac{10\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$

$G=\dfrac{4+6\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}$; $H=\dfrac{(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}$

Exercice 9 Déterminer la forme algébrique des nombres suivants :

$A=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}-\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$; $B=\dfrac{1}{2-\mathrm{i}}-\dfrac{2}{2+\mathrm{i}}$; $C=\dfrac{3-6\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}+\dfrac{4}{3+\mathrm{i}}$; $D=\dfrac{4-6\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+\dfrac{1+3\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}$

Exercice 10 Soit $z=a+b\mathrm{i}$ et $w=c+\mathrm{i}d$ ou a, b, c et $d\in\mathbb{R}$. Justifiez les affirmations suivantes :

1. $z+\overline{z}$ est un nombre réel.
2. $z-\overline{z}$ est un nombre imaginaire pur.
3. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$
4. $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$

Exercice 11 Montrer que pour tout z et $w\in\mathbb{C}$:

1. $z\overline{w}+\overline{z}w$ est un réel.
2. $z\overline{w}-\overline{z}w$ est imaginaire pur.

Exercice 12 — communiquer. Soit $z=a+\mathrm{i}b$ (a et $b\in\mathbb{R}$) et $w=\dfrac{z-1}{\overline{z}+1}$.
Déterminer les conditions sur a et b dans les cas suivants :

1. w est un réel
2. w est un imaginaire pur.

■ **Exemple 2.8** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue $z=x+\mathrm{i}y$:

$$z(2-\mathrm{i})=-\mathrm{i}$$
$$z=\frac{-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$$
$$z=\frac{(-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$$
$$z=\frac{1-2\mathrm{i}}{5}$$
$$z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$$

$$2\overline{z}+5-2\mathrm{i}=4+\mathrm{i}+3\overline{z}$$
$$-2\overline{z}-4-\mathrm{i}\quad -4-\mathrm{i}-2\overline{z}$$
$$1-3\mathrm{i}=\overline{z}$$
$$\overline{1-3\mathrm{i}}=\overline{\overline{z}}$$
$$1+3\mathrm{i}=z$$

$$2z+\mathrm{i}\overline{z}=5-2\mathrm{i}$$
$$2(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}\overline{(x+\mathrm{i}y)}=5-2\mathrm{i}$$
$$2x+2\mathrm{i}y+\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)=5-2\mathrm{i}$$
$$2x+2\mathrm{i}y+\mathrm{i}x+y=5-2\mathrm{i}$$
$$2x+y+\mathrm{i}(2y+x)=5-2\mathrm{i}$$
$$\iff\begin{cases}2x+y=5\\ 2y+x=-2\end{cases}\iff\begin{cases}x=4\\ y=-3\end{cases}$$
$$\iff z=4-3\mathrm{i}$$

Exercice 13 Résoudre pour $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(E_1) $3z+17\mathrm{i}=\mathrm{i}z+11$

(E_2) $(1+2\mathrm{i})\overline{z}=3+\mathrm{i}$

(E_3) $3\mathrm{i}-2z+1=\mathrm{i}(\mathrm{i}z+4)-2$

(E_4) $2z-3\mathrm{i}\overline{z}=-5-\mathrm{i}$

(E_5) $3z-\mathrm{i}=\mathrm{i}z-2$

(E_6) $2z+\mathrm{i}\overline{z}=4$

(E_7) $\overline{2+\mathrm{i}z}=2-\mathrm{i}z$

(E_8) $2\mathrm{i}z-\overline{z}=4\mathrm{i}$

(E_9) $\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z+2}=4\mathrm{i}$

(E_{10}) $(1+\mathrm{i})z+(3-\mathrm{i})\overline{z}=2-6\mathrm{i}$

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes linéaires suivants :

$S_1 \begin{cases} 3z + w = 2 - 5\mathrm{i} \\ z - w = -2 + \mathrm{i} \end{cases}$ | $S_2 \begin{cases} 3z + w = 5 + \mathrm{i} \\ -z + w = 1 - 2\mathrm{i} \end{cases}$

Exercice 15 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(E_1) $(z + 3\mathrm{i})(2z - 3 + \mathrm{i}) = 0$ | (E_2) $(z - 2\mathrm{i})(\mathrm{i}z + 1) = 0$ | (E_3) $(3\mathrm{i}z - 1)(\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}) = 0$

Exercice 16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(E_1) $x^2 = -49$ | (E_4) $x^2 - x + 2 = 0$ | (E_7) $x^2 - 3x + 3 = 0$

(E_2) $x^2 = -3$ | (E_5) $x^2 + 2x + 2 = 0$ | (E_8) $2x^2 - 2x + 1 = 0$

(E_3) $(2x + 1)(x^2 + 3) = 0$ | (E_6) $x^2 + x + 1 = 0$ | (E_9) $(x^2 + 2)(x^2 - 4x + 4) = 0$

Exercice 17 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(E_1) $\dfrac{3z + 2}{z + 1} = z + 3$ | (E_2) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$ | (E_3) $t + 3 + \dfrac{3}{t} = 0$

> Les racines z et z' de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ vérifient $z + z' = \dfrac{-b}{a}$ et $zz' = \dfrac{c}{a}$.

Exercice 18 Déterminer les nombres complexes connaissant leur produit et leur somme. On pourra déterminer une équation quadratique dont ils sont les racines.

$(S_1) \begin{cases} z + w = 0 \\ zw = 9 \end{cases}$ | $(S_2) \begin{cases} z + w = 1 \\ zw = \dfrac{13}{2} \end{cases}$ | $(S_3) \begin{cases} z + w = 2\sqrt{2} \\ zw = 3 \end{cases}$ | $(S_4) \begin{cases} z + w = \dfrac{5}{3} \\ zw = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$

Exercice 19 — Résolution de $z^2 = w$ ou $w \in \mathbb{C}$.

L'objectif de cet exercice est de détermier le(s) solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^2 = -16 - 30\mathrm{i}$.

1. **Préliminaires** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^4 + 16X^2 - 225 = 0$.
2. On pose $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et $b \in \mathbb{R}$ tel que $z^2 = -16 - 30\mathrm{i}$.

   Montrer que a et b vérifient le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -16 \\ ab = -15 \end{cases}$.
3. Résoudre par substitution le système et déterminer les valeurs possibles pour $z = a + \mathrm{i}b$.

Exercice 20 — Entrainement : racines complexes de $5 - 12\mathrm{i}$.

1. **Préliminaires** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^4 - 5X^2 - 36 = 0$.
2. On pose $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et $b \in \mathbb{R}$ tel que $z^2 = 5 - 12\mathrm{i}$.

   Montrer que a et b vérifient le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ ab = -6 \end{cases}$.
3. Résoudre par substitution le système et déterminer les valeurs possibles pour $z = a + \mathrm{i}b$.

■ **Exemple 2.9 — algorithme de la division euclidienne de polynômes.**

Prenons $A(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ et $B(x) = x - 1$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \; + x^2 + 2x + 1 & x - 1 \\ \cline{2-2}
- x^3 \; + x^2 \qquad\qquad & x^2 + 2x + 4 \\ \cline{1-1}
2x^2 + 2x \quad\; & \\
- 2x^2 + 2x \quad\; & \\ \cline{1-1}
4x + 1 & \\
- 4x + 4 & \\ \cline{1-1}
5 &
\end{array}
$$

$\therefore x^3 + x^2 + 2x + 1 = (x-1)(x^2 + 2x + 4) + 5$

Prenons $A(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ et $B(x) = x - 1$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2}
- 2x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{1-1}
- x^2 + 2x \quad\; & \\
x^2 \;\; - x \quad\; & \\ \cline{1-1}
x - 1 & \\
- x + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$\therefore 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = (x-1)(2x^2 - x + 1)$

Exercice 21 Dans chaque cas, effectuer la division euclidienne de A par B et conclure.

1. $A(x) = x^3 + x^2 - 3x - 6$ et $B(x) = x - 2$
2. $A(x) = 6x^4 + x^3 - 10x^2 + 7x + 6$ et $B(x) = 2x + 3$
3. $A(x) = 3x^2 + 2x + 1$ et $B(x) = 3x - 4$
4. $A(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ et $B(x) = x + 2$
5. $A(x) = 4x - 5$ et $B(x) = x + 2$
6. $A(x) = x^4 - 2x^2 - x + 8$ et $B(x) = x^2 - x - 2$

■ **Exemple 2.10 — division synthétique ou méthode de Ruffini-Hörner par un polynôme de la forme $x - \alpha$.**

Nous souhaitons diviser $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ par $x - \alpha$:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = (x-\alpha)(b_0x^2 + b_1x + b_2) + R$$

Par identification des coefficients on a :

$$
\begin{cases}
a_0 = b_0 \\
a_1 = b_1 - \alpha b_0 \\
a_2 = b_2 - \alpha b_1 \\
a_3 = R - \alpha b_2
\end{cases}
\quad \text{i.e.} \quad
\begin{cases}
b_0 = a_0 \\
b_1 = a_1 + \alpha b_0 \\
b_2 = a_2 + \alpha b_1 \\
R = a_3 + \alpha b_2
\end{cases}
$$

Ces calculs s'illustrent par la figure :

$$
\begin{array}{c|cccc}
\boxed{\quad\alpha} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
 & & \alpha b_0 & \alpha b_1 & \alpha b_2 \\ \hline
 & b_0 & b_1 & b_2 & \boxed{R} \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & a_0 & a_1 + \alpha b_0 & a_2 + \alpha b_1 & a_3 + \alpha b_2
\end{array}
$$

Ainsi pour diviser $3x^3 + 2x^2 - 6x - 1$ par $x - 2$ on écrit

$$
\begin{array}{c|cccc}
\boxed{\;2} & 3 & 2 & -6 & -1 \\
 & & 6 & 16 & 20 \\ \hline
 & 3 & 8 & 10 & \boxed{19}
\end{array}
$$

$\therefore 3x^3 + 2x^2 - 6x - 1 = (x-2)(3x^2 + 8x + 10) + 19$

Exercice 22 Dans chaque cas, effectuer la division euclidienne de A par B et conclure.

1. $A(x) = x^3 - x^2 - 3x - 5$ et $B(x) = x - 3$
2. $A(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 15$ et $B(x) = x + 2$
3. $A(x) = x^4 + 2x^2 - 1$ et $B(x) = x + 3$
4. $A(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 3$ et $B(x) = x - 2$

■ **Exemple 2.11** Si Q et R sont le quotient et le reste de la division euclidienne d'une polynôme P par $x-\alpha$.

Alors $\forall x \in \mathbb{C}$ $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$

1. R est un terme constant car $\deg(R)<1$.
2. $P(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+R=R$.

Exercice 23 Sans effectuer la division, déterminer le reste de la division des polynômes A par B

1. $A(x)=x^3+2x^2-7x+5$ par $B(x)=x-1$
2. $A(x)=x^4-2x^2+3x-1$ par $B(x)=x+2$.

Exercice 24 — communiquer. Soit l'équation $z^3+z^2+z+1=0$ d'inconnue z.

1. Montrer que -1, i et $-$i sont des solutions de l'équations.
2. Peut-il y avoir d'autres solutions ? Justifier votre réponse.

Exercice 25 Soit le polynôme $P(z)=z^3+4z^2+2z-28$.

1. Vérifier que $P(2)=0$
2. Déterminer par division euclidienne le quotient Q tel que $\forall z \in \mathbb{C}$ on a $P(z)=(z-2)Q(z)$.
3. Déterminer toutes les racines complexes du polynômes P.

Exercice 26 Soit l'équation $z^3+5z^2+11z+15=0$ d'inconnue z.

1. Vérifier que -3 est une racine de $P(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

Exercice 27 Soit l'équation $z^3-6z^2+12z-7=0$ d'inconnue z.

1. Trouver une racine évidente.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation.

Exercice 28 Soit le polynôme $P(z)=z^3-(2+\mathrm{i})z^2+2(1+\mathrm{i})z-2\mathrm{i}$.

1. Calculer $P(\mathrm{i})$ et en déduire une factorisation du polynôme P
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

Exercice 29 — entrainement. Soit le polynôme $P(z)=z^3-3z^2+z-3$.

1. Calculer $P(-\mathrm{i})$ et en déduire une factorisation du polynôme P
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

Exercice 30 Soit le polynôme $P(z)=z^4-4z^3+4z^2-4z+3$.

1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidiennet de P par $D(z)=z^2+1$.
2. En déduire les solutions complexes de l'équation $z^4-4z^3+4z^2-4z+3=0$

Exercice 31 — raisonner. 3 est une racine de $P(z)=z^3-z^2+(k-5)z+(k^2-7)$. Déterminer k puis toutes les racines de P.

2.5 Compléments : formule du binôme de Newton

Définition 2.9 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $n!$ comment le produit des n premiers entiers non nuls.

■ **Exemple 2.12** $0! = 1$ par convention

$1! = 1$

$2! = 1 \times 2 = 2$

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

■ **Exemple 2.13** Pour tout entiers $0 \geqslant k \geqslant n$, simplifier :

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \times 1}{n-1)(n-2)\dots 2 \times 1} =$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} =$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} =$$

Définition 2.10 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et p entier tel que $0 \geqslant p \geqslant n$, on définit le coefficient binomial :

« p parmi n » $$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

R Les coefficients binomiaux apparaissent en algèbre, en dénombrement et dans les lois de probabilités... Ils seront abordés en enseignement de spécilité dans le chapitre « Dénombrement ».

■ **Exemple 2.14** Calculer les coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{\cancel{1(2)(3)(4)(5)}(6)(7)(8)(9)}{1(2)(3)(4) \times \cancel{1(2)(3)(4)(5)}} = \frac{6(7)(8)(9)}{1(2)(3)(4)} = 126$$

$$\binom{100}{3} = \frac{100!}{3!(100-3)!} =$$

$$\binom{100}{97} =$$

$$\binom{n}{0} =$$

$$\binom{n}{1} =$$

$$\binom{n}{n} =$$

$$\binom{n}{n-1} =$$

Propriété 2.18 Pour tout entiers $0 \leqslant k \leqslant n$; $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration. ■

Propriété 2.19 — formule de Pascal. Pour tout entiers $0 \leqslant k \leqslant n$; $\displaystyle\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k \qquad)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k \qquad)!}\,\underline{\qquad\qquad} + \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\underline{\qquad\qquad} \\
&= \frac{n!(\qquad\qquad) + n!(\qquad\qquad)}{\qquad}
\end{aligned}$$

ramener au même dénominateur

■

Triangle de Pascal La propriété 2.19 est à la base de la construction du **triangle de Pascal** et permet un calcul rapide des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour de petites valeurs de n :

n							
n=0	$\binom{0}{0}$						
n=1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
n=2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
n=3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
n=4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
n=5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
n=6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$
	0	1	2	3	4	5	6
				k			

n							
n=0	1						
n=1	1	1					
n=2	1	2	1				
n=3	1	3	3	1			
n=4	1	4	6	4	1		
n=5	1	5	10	10	5	1	
n=6	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6
				k			

■ **Exemple 2.15** $(x+y)^0 = 1$

$$(x+y)^1 = 1x + 1y$$

$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$

$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$

$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

Théorème 2.20 — formule du binôme de Newton. Pour tout x, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

Démonstration. Par récurrence sur k. L'initialisation est connue.

Supposons $\exists k \geqslant 0$ on a $(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k-i}y^i$. Montrons que $(x+y)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}x^{k+1-i}y^i$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= \left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k-i}y^i\right)(x+y) \\
&= \left(\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y + \binom{k}{2}x^{k-2}y^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}xy^{k-1} + \binom{k}{k}y^k\right)x \\
&\qquad + \left(\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y + \binom{k}{2}x^{k-2}y^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}xy^{k-1} + \binom{k}{k}y^k\right)y \\
&=
\end{aligned}$$

■

2.5.1 Exercices : formule du binôme de Newton

Exercice 32

Calculer les expressions suivantes :

$\binom{6}{4}$	$\binom{8}{3}$	$\binom{100}{98}$	$\binom{3}{1}\binom{4}{2}$

Exercice 33

Développer simplifier, réduire et ordonner les expressions suivantes :

1. $(x+2y)^4$	**2.** $(1-x)^5$	**3.** $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$	**4.** $(\sqrt{x}-1)^3$

Exercice 34

Déterminer les 3 premiers termes du développements de $(x+2y)^{20}$.

Exercice 35

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $(1+\mathrm{i})^5$	**2.** $(1-\mathrm{i})^6$	**3.** $(2+3\mathrm{i})^3$	**4.** $(1-2\mathrm{i})^4$

R Les identités remarquables ainsi que la formule du binôme de Newton ne s'appliquent généralement aux matrices **car le produit de matrice n'est pas commutatif**.
Cependant, Si A et B sont deux matrices carrées tel que $AB = BA$, alors la formule de Newton s'applique, et on peut écrire $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} A^{n-i}B^i$

Exercice 36 — vu en DM. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On pose $N = A - \mathbf{I}$. Vérifier que $N^3 = \mathbf{O}$.
2. Justifier que le produit de N et $\mathbf{I}$ est commutatif.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de $A^n = (\mathbf{I}+N)^n$.

2.6 Exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 21.

1.
$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +x^2 & -3x & -6 & x-2 \\ \cline{5-5} -x^3 & +2x^2 & & & x^2+3x+3 \\ \cline{1-2} & 3x^2 & -3x & & \\ & -3x^2 & +6x & & \\ \cline{2-3} & & 3x & -6 & \\ & & -3x & +6 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^4 & +x^3 & -10x^2 & +7x & +6 & 2x+3 \\ \cline{6-6} -6x^4 & -9x^3 & & & & 3x^3-4x^2+x+2 \\ \cline{1-2} & -8x^3 & -10x^2 & & & \\ & 8x^3 & +12x^2 & & & \\ \cline{2-3} & & 2x^2 & +7x & & \\ & & -2x^2 & -3x & & \\ \cline{3-4} & & & 4x & +6 & \\ & & & -4x & -6 & \\ \cline{4-5} & & & & 0 & \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rrr|l} 3x^2 & +2x & +1 & 3x-4 \\ \cline{4-4} -3x^2 & +4x & & x+2 \\ \cline{1-2} & 6x & +1 & \\ & -6x & +8 & \\ \cline{2-3} & & 9 & \end{array}$$

4.
$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & +x & -1 & x+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & & & x^2-3x+7 \\ \cline{1-2}
 & -3x^2 & +x & & \\
 & 3x^2 & +6x & & \\ \cline{2-3}
 & & 7x & -1 & \\
 & & -7x & -14 & \\ \cline{3-4}
 & & & -15 &
\end{array}
$$

5.
$$
\begin{array}{rr|l}
4x & -5 & x+2 \\ \cline{3-3}
-4x & -8 & 4 \\ \cline{1-2}
 & -13 &
\end{array}
$$

6.
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -2x^2 & -x & +8 & x^2-x-2 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & +2x^2 & & & x^2+x+1 \\ \cline{1-3}
 & x^3 & & -x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & +2x & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2 & +x & +8 & \\
 & & -x^2 & +x & +2 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & +10 &
\end{array}
$$

■

solution de l'exercice 22.

1.
$$
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\
 & & 3 & 6 & 9 \\ \hline
 & 1 & 2 & 3 & 4
\end{array}
$$

2.
$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 2 & 7 & 10 & 15 \\
 & & -4 & -6 & -8 \\ \hline
 & 2 & 3 & 4 & 7
\end{array}
$$

3.
$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-3 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\
 & & -3 & 9 & -33 & 99 \\ \hline
 & 1 & -3 & 11 & -33 & 98
\end{array}
$$

4.
$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & 6 & -4 & 3 \\ & & 4 & 20 & 32 \\ \hline & 2 & 10 & 16 & 35 \end{array}$$

■

solution de l'exercice 25 .

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +4x^2 & +2x & -28 & x-2 \\ \cline{5-5} -x^3 & +2x^2 & & & x^2+6x+14 \\ \cline{1-2} & 6x^2 & +2x & & \\ & -6x^2 & +12x & & \\ \cline{2-3} & & 14x & -28 & \\ & & -14x & +28 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 4 & 2 & -28 \\ & & 2 & 12 & 28 \\ \hline & 1 & 6 & 14 & 0 \end{array}$$

■

solution de l'exercice 26 .

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +5x^2 & +11x & +15 & x+3 \\ \cline{5-5} -x^3 & -3x^2 & & & x^2+2x+5 \\ \cline{1-2} & 2x^2 & +11x & & \\ & -2x^2 & -6x & & \\ \cline{2-3} & & 5x & +15 & \\ & & -5x & -15 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c|cccc} -3 & 1 & 5 & 11 & 15 \\ & & -3 & -6 & -15 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

■

solution de l'exercice 27 .

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -6x^2 & +12x & -7 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2-5x+7 \\ \cline{1-2}
& -5x^2 & +12x & & \\
& 5x^2 & -5x & & \\ \cline{2-3}
& & 7x & -7 & \\
& & -7x & +7 & \\ \cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & -6 & 12 & -7 \\
 & & 1 & -5 & 7 \\ \hline
 & 1 & -5 & 7 & 0
\end{array}$$

■

solution de l'exercice 30.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -4x^3 & +4x^2 & -4x & +3 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & -x^2 & & & x^2-4x+3 \\ \cline{1-3}
& -4x^3 & +3x^2 & -4x & & \\
& 4x^3 & & +4x & & \\ \cline{2-4}
& & 3x^2 & & +3 & \\
& & -3x^2 & & -3 & \\ \cline{3-5}
& & & & 0 &
\end{array}$$

■

solution de l'exercice 31.

■

solution de l'exercice 32.

■

solution de l'exercice 33.

■

solution de l'exercice 34.

■

solution de l'exercice 35.

■

solution de l'exercice 36.

■