Chapitre 4

Fractions : inverse, multiplication et division

R Distinguer « signifie » et « est égal à ». Par exemple 3×4, $4+4+4$ et $10+2$ sont des écritures différentes du nombre 12.

$3 \times 4 = 10+2$. Mais 3×4 ne signifie pas $10+2$.

En effet 3×4 signifie $4+4+4$.

■ **Exemple 4.1 — un b-ième.**

a) $\frac{1}{7}$ est **un septième** : il en faut 7 pour faire 1. C'est le nombre qui multiplié par 7 donne 1, donc $7 \times \frac{1}{7} = 1$

b) $\frac{1}{100}$ est **un centième** : il en faut 100 pour faire 1. C'est le nombre qui multiplié par 100 donne 1, donc

$$100 \times \frac{1}{100} = 1$$

c) $\frac{1}{1000}$ est un millième. Il en faut 1000 pour faire 1.

$$1000 \times \frac{1}{1000} = 1$$

L'écriture $\frac{1}{b}$ s'étend au cas ou b n'est pas un entier.

4.1 Inverse et propriétés

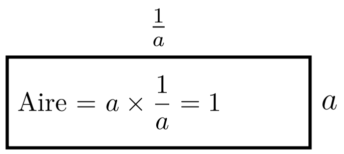


Figure 4.1 – Pour a nombre positif : $a \geqslant 0$. L'inverse de a s'interprète comme « la hauteur d'un rectangle de largeur a et d'aire totale 1 »

Définition 4.1 — Inverse d'un nombre. Deux nombres a et b sont **inverses** l'un de l'autre si leur produit vaut 1.

$$ab = 1$$

$$a = \text{inverse de}\, b = \frac{1}{b} \qquad b = \text{inverse de}\, a = \frac{1}{a}$$

■ **Exemple 4.2**

a) $1 \times 1 = 1$.
1 est l'inverse de 1 : $1 = \frac{1}{1}$

b) $(-1) \times (-1) = 1$.
-1 est l'inverse de -1 : $-1 = \frac{1}{-1}$

c) $0,1 \times 10 = 1$.
0,1 est l'inverse de 10 : $0,1 = \frac{1}{10}$
10 est l'inverse de 0,1 : $10 = \frac{1}{0{,}1}$

d) $4 \times 0{,}25 = 1$
0,25 est l'inverse de 4 : $0{,}25 = \frac{1}{4}$
4 est l'inverse 0,25 : $4 = \frac{1}{0{,}25}$

e) $(-4) \times (-0{,}25) = 1$.
$-0{,}25$ est l'inverse de -4 : $-\frac{1}{4} = -0{,}25 = \frac{1}{-4}$
4 est l'inverse $-0{,}25$: $-4 = \frac{1}{-0{,}25}$

R L'inverse de l'inverse est le nombre lui même : $\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)} = a$.

R Un nombre et son inverse sont de même signe car leur produit est positif.

R L'inverse de certains nombres n'ont pas une écriture décimale finie. Par exemple $3 \times 0{,}333\ 333\ 333 = 0{,}999\ 999\ 999$, et $7 \times 0{,}142\ 857 = 0{,}999\ 999$.
On garde l'écriture fractionnaire $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{7}$ pour désigner les inverses de 3 et 7.

R $0 \times ? = 1$. L'inverse de 0 n'est pas défini, et l'écriture $\frac{1}{0}$ n'a pas de sens.

4.1.1 Exercices inverses

Exercice 1

Compléter les espaces par un nombre décimal.

a) $1 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 1 » $= \dfrac{1}{1} = \boxed{}$

b) $0{,}1 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 0,1 » $= \dfrac{1}{0{,}1} = \boxed{}$. De plus $\dfrac{1}{\boxed{}} = 0{,}1$

c) $0{,}01 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 0,01 » $= \dfrac{1}{0{,}01} = \boxed{}$. De plus $\dfrac{1}{\boxed{}} = 0{,}01$

d) $0{,}5 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 0,5 » $= \dfrac{1}{0{,}5} = \boxed{}$. De plus $\dfrac{1}{\boxed{}} = 0{,}5$

e) $0{,}05 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 0,05 » $= \dfrac{1}{0{,}05} = \boxed{}$. De plus $\dfrac{1}{\boxed{}} = 0{,}5$

f) $0{,}2 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 0,2 » $= \dfrac{1}{0{,}2} = \boxed{}$. De plus $\dfrac{1}{\boxed{}} = 0{,}2$

g) $0{,}02 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 0,02 » $= \dfrac{1}{0{,}02} = \boxed{}$. De plus $\dfrac{1}{\boxed{}} = 0{,}02$

h) $0{,}25 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 0,25 » $= \dfrac{1}{0{,}25} = \boxed{}$. De plus $\dfrac{1}{\boxed{}} = 0{,}25$

i) $0{,}025 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 0,025 » $= \dfrac{1}{0{,}025} = \boxed{}$. De plus $\dfrac{1}{\boxed{}} = 0{,}025$

j) $0{,}125 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 0,125 » $= \dfrac{1}{0{,}125} = \boxed{}$. De plus $\dfrac{1}{\boxed{}} = 0{,}125$

k) $2{,}5 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 2,5 » $= \dfrac{1}{2{,}5} = \boxed{}$. De plus $\dfrac{1}{\boxed{}} = 2{,}5$

l) $25 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 25 » $= \dfrac{1}{25} = \boxed{}$. De plus $\dfrac{1}{\boxed{}} = 25$

m) $20 \times \boxed{} = 1$, « l'inverse de 20 » $= \dfrac{1}{20} = \boxed{}$. De plus $\dfrac{1}{\boxed{}} = 20$

Exercice 2

Compléter les cadres par les mots « opposés » ou « inverses » et justifier la réponse.

a) -2 et 2 sont $\boxed{}$ car ....

b) $-6{,}25$ et $-0{,}16$ sont $\boxed{}$ car ....

c) -4 et 4 sont $\boxed{}$ car ....

d) $-0{,}4$ et $-2{,}5$ sont $\boxed{}$ car ....

e) $0{,}44$ et $2{,}25$ ne sont pas $\boxed{\text{inverses}}$ car ....

f) 12 et $0{,}833\,333$ ne sont pas $\boxed{\text{inverses}}$ car ....

g) 12 et ____ sont $\boxed{\text{opposés}}$ car ....

■ **Exemple 4.3 — rappels.** Écrire les nombres décimaux ci-dessous sous forme d'une fraction décimale, puis comme somme d'un entier + fraction décimale inférieure à 1.

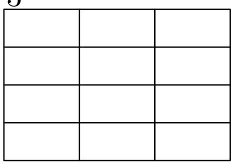
Partie entière						,	Partie décimale		
centaines de milliers	dizaines de milliers	unités de milliers	centaines	dizaines	unités	,	dixièmes	centièmes	millièmes
					0	,	3		
					0	,	0	7	
					2	,	3	1	
				1	5	,	9	8	7
			2	5	0	,			

Exercice 3 Mêmes consignes

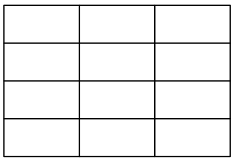
a) $0{,}71$
b) $-0{,}7$
c) $2{,}03$
d) $15{,}821$
e) $6{,}11$
f) $-0{,}029$
g) $18{,}75$
h) $20{,}01$

Exercice 4 Colorier

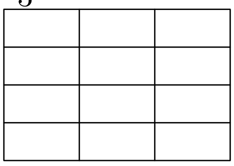
$\frac{1}{3}$ du rectangle



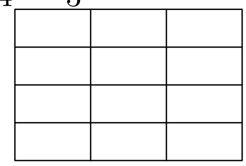
$\frac{1}{4}$ du rectangle



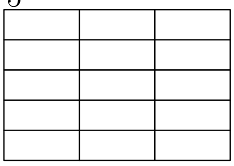
$\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ du rectangle



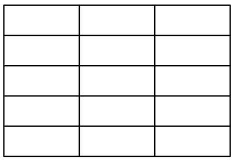
$\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ du rectangle



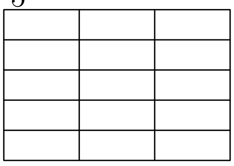
$\frac{1}{5}$ du rectangle



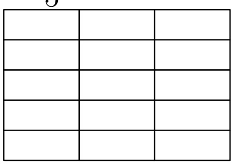
$\frac{1}{3}$ du rectangle



$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{5}$ du rectangle



$\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ du rectangle



En mathématique, le mot « de » se traduit par $\times$. Compléter les égalités suivantes :

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\qquad \frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

4.2 Écriture fractionnaire

Définition 4.2 L'écriture fractionnaire[1] $\frac{a}{b}$ (a b-ième) signifie « le résultat de la **multiplication** de a par l'inverse de b » :

$$a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

On parle de fraction, si a et b sont des nombres entiers.

[1] fraction décimale, fraction d'entiers, écriture fractionnaire

■ **Exemple 4.4**

a) $\dfrac{37}{100} = 37 \times \dfrac{1}{100} = 37$ centièmes $= 0{,}37$

b) $\dfrac{3{,}5}{10} = 3{,}5 \times \dfrac{1}{10} = 3{,}5$ dixièmes $= 0{,}35$

c) $\frac{5}{3} = 5 \times \frac{1}{3}$.

d) $\frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4} = 5 \times 0{,}25 = 1{,}25$.

e) Pour tout nombre a la fraction $\dfrac{a}{1} = a \times \dfrac{1}{1} = a$

f) Pour tout nombre non nul $\dfrac{b}{b} = b \times \dfrac{1}{b} = 1$

g) Pour tout a, la fraction $\dfrac{a}{0} = a \times \dfrac{1}{0}$ n'est pas définie

h) Pour tout b non nul, $\dfrac{0}{b} = 0 \times \dfrac{1}{b} = 0$.

Théorème 4.5 — Inverse d'une écriture fractionnaire. Pour tous a et b non nuls, $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ sont inverses l'un de l'autre :

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

On peut écrire $\dfrac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \dfrac{b}{a}$

Démonstration. $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{a} = a \times \dfrac{1}{b} \times b \times \dfrac{1}{a} = a \times \dfrac{1}{a} \times b \times \dfrac{1}{b} = 1$ ■

■ **Exemple 4.6**

a) $\dfrac{1}{\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{3}$

b) $\dfrac{1}{\frac{12}{7}} = \dfrac{7}{12}$

c) $\frac{1}{0{,}8} = \dfrac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

d) $\dfrac{1}{1{,}25} = \dfrac{1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

e) $\dfrac{1}{0{,}1} = \dfrac{1}{\frac{1}{10}} = \dfrac{10}{1} = 10$

4.2.1 Exercices écritures fractionnaires, ratios

Exercice 1 Donner les inverses des fractions suivantes.

a= 3	b= 1	c= $\frac{1}{7}$	d= $\frac{2}{3}$	e= $\frac{1}{10}$	f= $\frac{3}{10}$	g= 0	h= $\frac{5}{7}$

Exercice 2 Compléter par des entiers pour rendre les égalités vraies.

$5 \times \frac{\square}{\square} = 1$

$9 \times \frac{\square}{\square} = 1$

$\frac{11}{5} \times \frac{\square}{\square} = 1$

$\frac{2}{3} \times \frac{\square}{\square} = 1$

$\frac{1}{7} \times \frac{\square}{\square} = 1$

$\frac{3}{13} \times \frac{\square}{\square} = 1$

$3 \times \frac{\square}{\square} = 3 \times \frac{1}{\square} \times \square = 5$

$5 \times \frac{\square}{\square} = 5 \times \frac{1}{\square} \times \square = 13$

$12 \times \frac{\square}{\square} = 12 \times \frac{1}{\square} \times \square = 7$

> Un ratio est une paire de deux nombres qui fait une comparaison, ou décrit un quotient. On peut l'écrire $\frac{a}{b}$ ou « $a : b$ » ou encore « a pour b ». a est le premier terme du ratio, et b est le second terme.

■ **Exemple 4.7**

a) Le ratio du nombre de côtés d'un triangle pour le nombre de côtés d'un carré est de $\frac{3}{4}$, ou $3 : 4$.
b) Le ratio du nombre d'externes pour le nombre de demi-pensionnaire parmi les élèves de 4B est de $18 : 10 =$ ....
c) le ratio de 25 g pour 1 kg est de ....

Exercice 3 Écrire un ratio qui décrit chacune des situations suivantes. Simplifier le ratio.

a) Lire 3 livres en 4 semaines.
b) parcourir 60 km en 3 h
c) 5 ordinateurs pour 20 élèves.
d) 1 centimes pour 1 €.
e) 12 filles pour 30 élèves.
f) 5 cm pour 1 m

■ **Exemple 4.8** Simplifier les ratios suivants sous la forme d'un ratio d'entiers.

$9 : 12$	$9 : 15$	$3{,}5 : 15$	$14 : 21 : 35$

Exercice 4 Mêmes consignes.

a) $10 : 16$	c) $8 : 10$	e) $4{,}5 : 5$	g) $64 : 96$	i) $84 : 96 : 20$
b) $16 : 10$	d) $4 : 5$	f) $3{,}2 : 4{,}8$	h) $60 : 80 : 100$	j) $128 : 96 : 40$

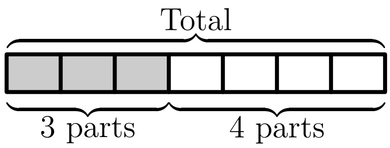
■ Exemple 4.9 — Problèmes de partage.

Cindy et Mindy se partagent une somme d'argent avec un ratio de $3\colon 4$.

c est l'argent reçu par Cindy, et m celui reçu par Mindy.

On interprète ceci : Cindy a reçu 3 parts, alors que Mindy en a reçu 4.

$$\text{montant d'une part} = \frac{c}{3} = \frac{m}{4} = \frac{\text{total}}{7}$$



a) Dans cette question Mindy a reçu 30 €.

1 part est $\dfrac{1}{\boxed{}}$ de ....

Cindy a reçu ....

b) Dans cette question on connait le total partagé : 66,5 €.

1 part est $\dfrac{1}{\boxed{}}$ de ....

Cindy a reçu ....

Exercice 5

Pour chacune des situations suivantes déterminer les montants manquants.

a) Mork et Cindy se partagent une somme d'argent dans un ratio $5\colon 2$. Mork reçoit 30 €.
b) Mork et Cindy partagent une somme d'argent dans un ratio $3\colon 2$. Mork reçoit 18 €.
c) Mork et Cindy partagent une somme d'argent dans un ratio $6\colon 4$. Mork reçoit 18 €.
d) Cara, Lara et Tara partagent des bonbons dans un ratio $7\colon 8\colon 9$. Cara reçoit 14 bonbons.

Exercice 6

Pour chaque question, préciser les parts :

a) On partage 30g dans le ratio $1\colon 2$
b) On partage 30g dans le ratio $2\colon 4$
c) On partage 60g dans le ratio $4\colon 1$
d) On partage 60g dans le ratio $0\colon 8$
e) On partage 60g dans le ratio $1\colon 1$
f) On partage 60g dans le ratio $8\colon 8$
g) On partage 4g dans le ratio $3\colon 5$
h) On partage 4g dans le ratio $4\colon 10\colon 2$

Exercice 7

3 angles sont dans un ratio $63\colon 126\colon 105$. Le plus grand vaut 72°.

a) Simplifier le ratio des 3 angles au maximum.
b) Déterminer la mesure des 3 angles.
c) S'agit-il de 3 angles d'un triangle ?

Exercice 8

Les trois angles d'un triangle sont dans le ratio $36\colon 36\colon 90$.

a) Simplifier le ratio des 3 angles.
b) Quelle est la mesure de chaque angle ?

4.3 Multiplication de fractions

Théorème 4.10 Pour tous nombres a b, c et d **non nuls** on a :

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b} = a \times \frac{c}{b}$$

Démonstration.

$$a \times \frac{1}{b} \times c = \left(a \times \frac{1}{b}\right) \times c = a \times \left(\frac{1}{b} \times c\right) = (a \times c) \times \frac{1}{b}$$

■

Théorème 4.11 — Le produit des inverses est l'inverse du produit.

$$\frac{1}{b} \times \frac{1}{d} = \frac{1}{b \times d}$$

Démonstration. $\frac{1}{b} \times \frac{1}{d}$ est l'inverse de ab car :

$$(bd) \times \left(\frac{1}{b} \times \frac{1}{d}\right) = b \times \frac{1}{b} \times d \times \frac{1}{d} = 1$$

■

Théorème 4.12 — Multiplication de fractions.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Proposition 4.13 — Règle des signes. On a :

$$\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \qquad -1 = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

Pour tout nombres a et b (b non nul) :

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Théorème 4.14 — Simplification/Amplification par un facteur commun. Pour tout nombres x, a et b (x et b non nuls) :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}$$

cas particulier.

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b} \times \frac{c}{c} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

■

4.3.1 Exercices multiplications, simplifications, amplifications

Exemple 4.15

$\dfrac{5}{7} \times 7 =$

$=$

$\dfrac{60}{3} =$

$=$

$\dfrac{3}{5} \times 20 =$

$=$

Exercice 1 Écrire les expressions suivantes sous forme d'un entier.

a) $\dfrac{-3}{3}$

b) $-3 \times \dfrac{15}{3}$

c) $-6 \times \dfrac{15}{3}$

d) $5 \times \dfrac{18}{3}$

e) $\dfrac{-15}{15}$

f) $\dfrac{15}{3}$

g) $\dfrac{45}{1}$

h) $\dfrac{45}{3}$

i) $5 \times \dfrac{-5}{25}$

j) $-8 \times \dfrac{11}{-8}$

k) $22 \times \dfrac{-4}{11}$

l) $-25 \times \dfrac{8}{5}$

Exemple 4.16

$\dfrac{4}{24} = \dfrac{4}{4 \times \ldots} = \dfrac{4}{4} \times \dfrac{\ldots}{\ldots}$

$=$

$\dfrac{9}{54} =$

$=$

$\dfrac{3}{54} =$

$=$

Exercice 2 — fractions de l'unité. Simplifier les expressions suivantes sous forme d'une fraction de numérateur égal à 1. a et b désignent des nombres non nuls.

$A = \dfrac{5}{10}$

$B = \dfrac{5}{15}$

$C = \dfrac{5}{25}$

$D = \dfrac{5}{5^2}$

$E = \dfrac{25}{75}$

$F = \dfrac{25}{100}$

$G = \dfrac{25}{125}$

$H = \dfrac{20}{100}$

$I = \dfrac{10}{100}$

$J = \dfrac{-9}{9 \times 9}$

$K = \dfrac{7}{7^2}$

$L = \dfrac{7^2}{3 \times 7^2}$

$M = \dfrac{a}{4a}$

$N = \dfrac{b}{3b}$

$O = \dfrac{b}{3b^2}$

$P = \dfrac{3b}{12b}$

> Défi. Simplifier $\dfrac{5a}{10a^2b}$ en une fraction de l'unité.

Exercice 3 En utilisant les critères de divisibilité indiquer si l'on peut simplifier chaque fraction par 2, 3, 4, 5, 9 ou 10 :

	2	3	4	5	9	10
1/ $\frac{45}{30}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2/ $\frac{54}{81}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3/ $\frac{1557}{1341}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐

	2	3	4	5	9	10
4/ $\frac{4962}{11334}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5/ $\frac{2034}{6066}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐
6/ $\frac{1460}{2180}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐

■ **Exemple 4.17** Simplifier au maximum les fractions suivantes. Présenter le résultat sous la frome de fraction d'entiers, avec un dénominateur positif. Montrer les étapes.

$\frac{90}{120} = \frac{90 \div \ldots}{120 \div \ldots}$ $\qquad$ $\frac{11}{-15} =$ $\qquad$ $\frac{-12}{-15} =$

$=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $=$

Exercice 4 — fractions irréductibles. Mêmes consignes.

$A = \frac{12}{24}$	$C = \frac{28}{35}$	$E = \frac{-18}{-39}$	$G = \frac{48}{66}$	$I = -\frac{25}{40}$	$K = \frac{-105}{245}$
$B = -\frac{15}{21}$	$D = \frac{23}{115}$	$F = \frac{42}{63}$	$H = \frac{20}{64}$	$J = \frac{70}{92}$	$L = \frac{64}{80}$

> Sam simplifie $\frac{105}{120}$ en divisant par 15 par ce que c'est le plus grand facteurs commun à 105 et 120. À votre avis, peut-on simplifier cette fraction plus facilement ? Explique ta réponse.

Exercice 5

Simplifier les ratios suivants sous la forme d'un ratio de nombres entiers.

a) 10: 16	c) 8: 10	e) 4,5: 5	g) 64: 96	i) 84: 96: 20
b) 16: 10	d) 4: 5	f) 32: 48	h) 60: 80: 100	j) 128: 96: 40

Exercice 6 Rendre les égalités vraies en complétant les pointillés par des entiers ou des fraction de numérateur unité.

a) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \ldots\ldots$	g) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \ldots\ldots$	m) $\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \ldots\ldots$
b) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = \ldots\ldots$	h) $\frac{1}{1} \times \frac{1}{8} = \ldots\ldots$	n) $\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \ldots\ldots$
c) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \ldots\ldots$	i) $\frac{1}{3} \times \ldots\ldots = \frac{1}{12}$	o) $\left(\frac{1}{\ldots\ldots}\right)^2 = \frac{1}{25}$
d) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \ldots\ldots$	j) $\frac{1}{6} \times \ldots\ldots = \frac{1}{12}$	p) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \ldots$
e) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \ldots\ldots$	k) $\frac{1}{3} \times \ldots\ldots = \frac{1}{6}$	q) $\frac{1}{3} \times \ldots\ldots \times \frac{1}{5} = \frac{1}{90}$
f) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \ldots\ldots$	l) $\ldots\ldots \times \ldots\ldots = \frac{1}{9}$	r) $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \ldots\ldots$

> Vrai ou faux ? $\left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{2}{a}$. Si faux proposer une correction.

■ **Exemple 4.18** Exprimer les expressions suivants comme fractions d'entiers :

$A = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{8}$ $\qquad$ $B = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{10}$ $\qquad$ $B = \dfrac{-2}{3} \times \dfrac{-5}{-6}$

Exercice 7 — Simplifier avant de multiplier.

Écrire les expressions suivantres sous forme de fractions irréductibles.

$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{10} = \ldots\ldots$

$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{5} = \ldots\ldots$

$\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} = \ldots\ldots$

$\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{3} = \ldots\ldots$

$\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \ldots\ldots$

$\dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \ldots\ldots$

$\dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{10} = \ldots\ldots$

$\dfrac{4}{3} \times \dfrac{10}{10} = \ldots\ldots$

$\dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{2} = \ldots\ldots$

$\dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{1} = \ldots\ldots$

$\dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{1} = \ldots\ldots$

$\dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{4} = \ldots\ldots$

Exercice 8 — Multiplier des fractions. Guider le coureur de mine à travers le labyrinthe. Il ne peut traverser des cellules que si le calcul est juste. Les déplacements en diagonale ne sont pas autorisés.

		Départ		
$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$	$\frac{2}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{14}$	$\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{7}{8}$	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$
$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$	$\frac{5}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$	$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{17}{28}$	$\frac{2}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{21}$	$\frac{5}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{5}{16}$
$\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{11}{21}$	$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$	$\frac{6}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{14}$	$\frac{4}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{9}{10}$	$\frac{7}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{7}{10}$
$\frac{7}{8} \times \frac{5}{6} = \frac{35}{48}$	$\frac{5}{7} \times \frac{7}{10} = \frac{1}{2}$	$\frac{7}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$	$\frac{5}{8} \times \frac{10}{11} = \frac{25}{44}$	$\frac{7}{12} \times \frac{5}{9} = \frac{35}{108}$
$\frac{7}{9} \times \frac{7}{11} = \frac{49}{99}$	$\frac{6}{7} \times \frac{7}{8} = \frac{23}{28}$	$\frac{6}{13} \times \frac{5}{7} = \frac{31}{91}$	$\frac{5}{8} \times \frac{5}{13} = \frac{27}{104}$	$\frac{9}{11} \times \frac{5}{7} = \frac{47}{77}$
		Arrivée		

Exercice 9 — pensez aux signes. Écrire les expressions suivantres sous forme d'une fraction irréductible à dénominateur positif.

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \ldots\ldots$	$\frac{2}{-3} \times \frac{5}{7} = \ldots\ldots$	$\frac{2}{-3} \times \frac{100}{-3} = \ldots\ldots$	$\frac{-2}{-7} \times \frac{35}{100} = \ldots\ldots$
$\frac{0}{5} \times \frac{3}{4} = \ldots\ldots$	$\frac{-2}{3} \times \frac{-3}{100} = \ldots\ldots$	$\frac{2}{7} \times \frac{-7}{-100} = \ldots\ldots$	$\frac{2}{-7} \times \frac{-37}{-100} = \ldots\ldots$

Exercice 10 Compléter les pointillés par des entiers pour rendre vraies les égalités.

$\frac{2}{3} \times \frac{5}{\ldots} = \frac{10}{12}$	$\frac{2}{-3} \times \frac{5}{\ldots} = \frac{10}{12}$	$\frac{2}{3} \times \ldots\ldots = \frac{5}{6}$	$\frac{2}{\ldots\ldots} \times \frac{5}{\ldots\ldots} = -\frac{2}{6}$

Exercice 11 Éva a 21 €. Elle dépense $\frac{4}{7}$ de son argent pour un cadeau. Combien coûte le cadeau ?

Exercice 12 Les sept vingt-cinquièmes de 15000 participants à un sondage sont mineures. Combien de mineurs ont participé ?

Exercice 13 Donner la durée en minutes des expressions suivantes. Montrer les simplifications.

a) $\frac{7}{10}$ d'une heure	b) $\frac{5}{6}$ d'une heure	c) $\frac{2}{5}$ d'une heure	d) $\frac{4}{15}$ d'une heure

Exercice 14

Un collège compte 660 garçons et 840 filles. La probabilité qu'un garçon choisi au hasard fasse partie du club de théatre est de $\frac{2}{5}$. La probabilité qu'une fille choisie au hasard fasse partie du club de théatre est de $\frac{3}{7}$.

a) Donner le nombre de filles et de garcons qui font partie du club de théatre.
b) Quelle est la probabilité qu'un élève (garçon ou fille) choisi au hasard fasse du théatre ?

Exercice 15

Une balle est lachée d'une hauteur de 15 m. La hauteur du premier rebond est a, et celle du second rebond est b. a est trois quart de la hauteur de départ.

a) Tom pense que b vaut les trois quarts de a. Calculer la valeur de b comme fraction.
b) En réalité, b vaut les deux tiers de a. Comparer la valeur réelle avec celle obtenue à la question précédente.

Exercice 16 Écrire les expressions suivantes sous forme d'entiers. Montrer les simplifications.

a) $\frac{1}{20}$ de 60	c) $\frac{3}{100}$ de 80	e) $\frac{300}{100}$ de 8	g) 1% de 5% de 40	i) $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{2}$ de $\frac{1}{10}$
b) $\frac{3}{4}$ de 40	d) $\frac{30}{100}$ de 8	f) 8% de 300	h) $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{4}$ de 48	j) $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ de 54

solution de l'exercice 4.

$A = \dfrac{1}{2}$	$C = -\dfrac{4}{5}$	$E = \dfrac{6}{13}$	$G = \dfrac{8}{11}$	$I = -\dfrac{5}{8}$	$K = -\dfrac{3}{7}$
$B = -\dfrac{5}{7}$	$D = \dfrac{1}{5}$	$F = \dfrac{2}{3}$	$H = -\dfrac{5}{16}$	$J = \dfrac{35}{46}$	$L = \dfrac{4}{5}$

■

$$\begin{tikzcd} \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \arrow[r, bend left, "\times b"] & a \arrow[l, bend left, "\div b"] \end{tikzcd}$$

Figure 4.2 – Le quotient de a par b est le nombre $\frac{a}{b}$ qui multiplié par b donne a.

4.4 Quotient et écritures fractionnaires

Définition 4.3 — Quotient. Pour a et b non nuls.
$\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a.

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

$\frac{a}{b}$ est égal au quotient (division) de a par b :

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

« diviser c'est multiplier par l'inverse »

■ **Exemple 4.19**

$$3 \div 7 = \frac{3}{7}$$

$$5 \div \frac{9}{13} = \frac{5}{\left(\frac{9}{13}\right)} = 5 \times \frac{13}{9} = \frac{65}{9}$$

$$3 \div \frac{1}{7} = 3 \times 7 = 21$$

$$\frac{-1}{7} \div \frac{-5}{3} = \frac{-1}{7} \times \frac{3}{-5} = \frac{3}{7 \times 5}$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{-5}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{-5} = \frac{3}{4} \times \frac{2 \times 4}{-5} = -\frac{3 \times 2}{5} = -\frac{6}{5}$$

4.4.1 Exercices inverses et quotients

■ **Exemple 4.20** Écrire l'inverse des nombres suivants sous forme d'une fractions irréductible.

$1{,}7 = \dfrac{17}{10}$	$2{,}1 =$	$0{,}22 =$	$0{,}42 =$
$=$	$=$	$=$	$=$
$=$	$=$	$=$	$=$
$\dfrac{1}{1{,}7} =$	$\dfrac{1}{2{,}1} =$	$\dfrac{1}{0{,}22} =$	$\dfrac{1}{0{,}42} =$

Exercice 1 Mêmes consignes. Montrer les étapes.

$a = \dfrac{1}{0{,}15}$	$b = \dfrac{1}{0{,}35}$	$c = \dfrac{1}{2{,}05}$	$d = \dfrac{1}{3{,}45}$	$e = \dfrac{1}{0{,}02}$	$f = \dfrac{1}{4{,}08}$

■ **Exemple 4.21** Écrire sous forme d'une fraction. Simplifier au maximum.

$$A = \frac{\left(\dfrac{3}{4}\right)}{\left(\dfrac{5}{2}\right)} \qquad B = \frac{\left(\dfrac{14}{3}\right)}{7}$$

Exercice 2 — Fraction de fractions. Écrire sous forme d'une fraction (simplifiée au maximum) les expressions suivantes. Montrer les calculs.

$a = \dfrac{\left(\dfrac{26}{3}\right)}{52}$	$b = \dfrac{\left(\dfrac{7}{2}\right)}{\left(\dfrac{14}{5}\right)}$	$c = \dfrac{\left(\dfrac{-3}{8}\right)}{\left(\dfrac{9}{16}\right)}$	$d = \dfrac{\left(\dfrac{7}{-11}\right)}{\left(\dfrac{49}{44}\right)}$	$e = \dfrac{\left(\dfrac{-9}{14}\right)}{\left(\dfrac{-45}{98}\right)}$

Exercice 3 — Quotient. Écrire sous forme d'une fraction irréductible les expressions suivantes. Montrer les étapes.

$a = 2 \div \dfrac{1}{2}$	$c = \dfrac{5}{6} \div \dfrac{1}{6}$	$e = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{9}{16}$	$g = \dfrac{4}{5} \div \left(\dfrac{13}{20} \div \dfrac{8}{25}\right)$
$b = \dfrac{1}{2} \div \dfrac{1}{4}$	$d = \dfrac{13}{20} \div \dfrac{4}{5}$	$f = \dfrac{19}{4} \div \dfrac{12}{5}$	$h = \left(\dfrac{4}{5} \div \dfrac{13}{20}\right) \div \dfrac{8}{25}$

■ **Exemple 4.22** Écrire sous forme d'une fraction. Simplifier au maximum.

$5 \div 0{,}1 =$	$15 \div 3{,}2 =$	$7 \div 2{,}25 =$	$3{,}2 = \dfrac{32}{10}$	$2{,}25 = \dfrac{225}{100}$
$=$	$=$	$=$	$=$	$=$
$=$	$=$	$=$	$=$	$=$

Exercice 4

1. Convertir les nombres décimaux suivants en fractions d'entiers :

a) $0{,}25 = \dfrac{\dots}{4}$	c) $0{,}6 = \dfrac{\dots}{5}$	e) $1{,}25 = \dfrac{\dots}{4}$	g) $12{,}5 = \dfrac{\dots}{2}$
b) $0{,}2 = \dfrac{\dots}{5}$	d) $0{,}75 = \dfrac{\dots}{4}$	f) $2{,}5 = \dfrac{\dots}{2}$	h) $6{,}125 = \dfrac{\dots}{8}$

2. Donner l'écriture en fraction d'entiers irréductibles des expressions suivantes.

a) $2 \div 0{,}25$	c) $13 \div 0{,}6$	e) $5 \div 1{,}25$	g) $2{,}5 \div 12{,}5$
b) $7 \div -0{,}2$	d) $5 \div 0{,}75$	f) $15 \div 2{,}5$	h) $1{,}4 \div 6{,}125$

Exercice 5

1. En utilisant un seul chiffre (de 0 à 9) par case, complète l'expression suivante pour la rendre vraie. Peux-tu simplifier le résultat ?
2. Trouve des solutions en utilisant les chiffres de 0 à 9 pas plus qu'une fois. Combien de solutions différentes trouves-tu ?

$$\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square\square}{\square\square} \qquad \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square\square}{\square\square}$$

$$\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square\square}{\square\square} \qquad \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square\square}{\square\square}$$

$$\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square\square}{\square\square} \qquad \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square\square}{\square\square}$$

$$\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square\square}{\square\square} \qquad \frac{\square}{\square} \div \frac{\square}{\square} = \frac{\square\square}{\square\square}$$

indications. Il y a un grand nombre de solutions.

■

4.5 AP Problèmes ratios, fractions, multiplications . . . .

Exercice 1

1) Trouver deux nombres dans le ratio $5:3$ dont la somme est 320,4.
2) Trouver deux nombres dans le ratio $7:5$ dont la différence est 320,4.

Solution **F** **P** **J**

Exercice 2

Jadzia, Naomi et Tasha se partagent de l'argent au ratio $2:3:7$.
Tasha a recu 80 € de plus que Jadzia. Combien ont reçu chacune d'elles ?

Solution **F** **P** **J**

Exercice 3

Dans un mélange de jetons rouges et bleus, le ratio de jetons rouges pour les bleus est de $12:18$.

1) Écrire le ratio sous forme la plus simplifiée possible.
2) On tire au hasard un jeton du panier. Quelle est la probabilité de tirer un jeton bleu ?

Solution **F** **P** **J**

Exercice 4

Le prix d'un paquet de chocolat est 9.60 €. Billy a 13 €.

Durant la semaine de Pâques, le magasin offre une remise de $\frac{1}{3}$ du prix normal sur tous les chocolats.

Pourra-t-il acheter deux boites de chocolats lors des offres spéciales ? Montre tes calculs.

Solution $\boxed{\mathbf{F}}$ $\boxed{\mathbf{P}}$ $\boxed{\mathbf{J}}$

Exercice 5

Jadzia achète 10 packs de 12 cannettes de boissons gazeuses. Chaque pack coute 5 €.

Jadzia vend $\frac{2}{3}$ des cannettes à 60 centimes pièce. Elle vend le reste à 30 centimes pièce.

Calcule le profit de Jadzia.

Solution $\boxed{\mathbf{F}}$ $\boxed{\mathbf{P}}$ $\boxed{\mathbf{J}}$

Exercice 6

Sarah veut faire 420 cookies : au chocolat, aux raisins secs, au caramel et aux amandes.
$\frac{2}{7}$ des cookies sont aux chocolat. 35% des cookies sont aux raisins secs.
Le ratio nombre de cookies au caramel pour le nombre de cookies aux amandes est de $4:5$.
Trouve le nombre de cookies au caramel.

Solution $\boxed{\textbf{F}}$ $\boxed{\textbf{P}}$ $\boxed{\textbf{J}}$

Exercice 7

Un avion transporte 500 passagers : hommes, femmes et des enfants.
40% des passagers sont des femmes. Le ratio nombre d'hommes pour nombre de femmes est de $7:8$.
Quel est le nombre d'enfants ?

Solution $\boxed{\textbf{F}}$ $\boxed{\textbf{P}}$ $\boxed{\textbf{J}}$

Exercice 8

Le public d'un cinéma est composé aux $\frac{3}{5}$ de mineurs.
Parmi les mineurs, le ratio nombre de filles pour nombre de garcons est de $2\colon 7$.
Il y a 170 filles dans ce cinémas. Trouver le nombre d'adultes.

Solution **F** **P** **J**

Exercice 9

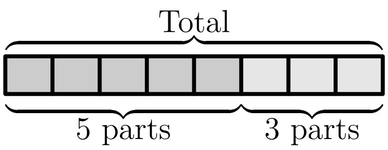
Pour le match de foot du village, $\frac{3}{7}$ du public est composé d'adultes.
Parmi les mineurs, le ratio nombre de supporters de l'équipe locale pour le nombre de supporters de l'équipe en déplacement est de $5\colon 3$.
Il y a 140 supporters de plus pour l'équipe locale qu'il n'y a de supporters pour l'équipe en déplacement.
Trouvez le nombre d'adultes.

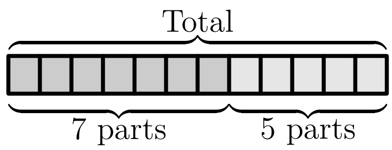
Solution **F** **P** **J**

AP Corrections

Exercice 1

1) Trouver deux nombres dans le ratio 5: 3 dont la somme est 325.
2) Trouver deux nombres dans le ratio 7: 5 dont la différence est 325.





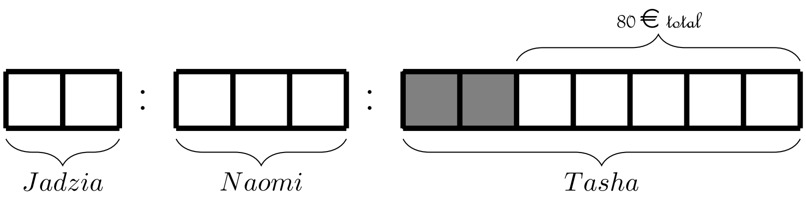
1) 1 part $320.4 \div 8 = 40.05$.
Les nombres sont $40.05 \times 5 = 200.25$ et $40.05 \times 3 = 120.15$
2) 1 part $320.4 \div 2 = 160, 2$.
Les nombres sont $160.2 \times 7 = 1121.4$ et $160.2 \times 5 = 801$

Exercice 2

Dans un mélange de jetons rouges et bleus, le ratio de jetons rouges pour les bleus est de 12: 18.

1) Écrire le ratio sous forme la plus simplifiée possible.
2) On tire au hasard un jeton du panier. Quelle est la probabilité de tirer un jeton bleu ?

Solution F P J



$\frac{80}{5} = 16 =$ une part.
Jadzia $= 2 \times 16 = 36$; Naomi $= 3 \times 16 = 48$ et Tasha $= 7 \times 16 = 112$.

Exercice 3

Le prix d'un paquet de chocolat est 9.60 €. Billy a 13 €.
Durant la semaine de Pâques, le magasin offre une remise de $\frac{1}{3}$ du prix normal sur tous les chocolats.
Pourra-t-il acheter deux boites de chocolats lors des offres spéciales ? Montre tes calculs.

Solution F P J

$\frac{1}{3}$ de 9.60 €=3.2 €.

9.60 €-3.20 €=6.40 € le prix d'un paquet de chocolat après la remise.
$2 \times$ 6.40 €=12.80 € , Billy a de quoi payer 2 paquets de chocolat.

Exercice 4

Dans un mélange de jetons rouges et bleus, le ratio de jetons rouges pour les bleus est de 12: 18.

1) Écrire le ratio sous forme la plus simplifiée possible.
2) On tire au hasard un jeton du panier. Quelle est la probabilité de tirer un jeton bleu ?

Solution F P J

1) $12\colon 18 = 6\colon 9 = 2\colon 3$

2) Les jetons bleus constituent $\frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$ du total de jetons.

La probabilité d'obtenir un jeton bleu est de $\frac{3}{5}$.

Exercice 5

Jadzia achète 10 packs de 12 cannettes de boissons gazeuses. Chaque pack coute 5 €.
Jadzia vend $\frac{2}{3}$ des cannettes à 60 centimes pièce. Elle vend le reste à 30 centimes pièce.
Calcule le profit de Jadzia.

Solution F P J

$10 \times 5 =$ 50 € de dépenses.

$10 \times 12 = 120$ cannettes au total.

$\frac{2}{3} \times 120 = 80$ cannetes sont vendues à 60 centimes. Les 40 restantes à 30 centimes.

Recette : $80 \times 0.6 + 40 \times 0.3 = 48 + 12 =$ 60 €.

Dépense : $5 \times 10 =$ 50 €
Profits : 60 € − 50 € = 10 €

Exercice 6

Sarah veut faire 420 cookies : au chocolat, aux raisins secs, au caramel et aux amandes.
$\frac{2}{7}$ des cookies sont aux chocolat. 35% des cookies sont aux raisins secs.
Le ratio nombre de cookies au caramel pour le nombre de cookies aux amandes est de $4\colon 5$.
Trouve le nombre de cookies au caramel.

Solution F P J

Cookies au chocolat $= \dfrac{2}{7} \times 420 = 20 \times \dfrac{42}{7} = 20 \times 6 = 120$

Cookies aux raisins $= \dfrac{35}{100} \times 420 = 147$

Cookies au caramel et cookies aux amandes : $420 - 120 - 147 = 153$

caramel : amandes $= 4\colon 5$, total de 153 en 9 parts.

1 part $= \dfrac{153}{9} = 17$, Cookies au caramel $= 4$ parts, donc $4 \times 17 = 68$.

Exercice 7

Un avion transporte 500 passagers : hommes, femmes et des enfants.

40% des passagers sont des femmes. Le ratio nombre d'hommes pour nombre de femmes est de 7: 8.

Quel est le nombre d'enfants ?

Solution $\boxed{\mathbf{F}}$ $\boxed{\mathbf{P}}$ $\boxed{\mathbf{J}}$

$40\% \times 500 = \frac{40}{100} \times 500 = 200$ *est le nombre de femmes.*

hommes : *femmes* $= 7 : 8$.

$1_{part} = 200 \div 8 = 25$.

hommes $= 7_{parts} = 7 \times 25 = 175$.

total des enfants est $500 - 175 - 200 = 125$.

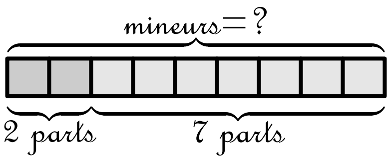
Exercice 8

Le public d'un cinéma est composé aux $\dfrac{3}{5}$ de mineurs.

Parmi les mineurs, le ratio nombre de filles pour nombre de garcons est de 2: 7.

Il y a 170 filles dans ce cinémas. Trouver le nombre d'adultes.

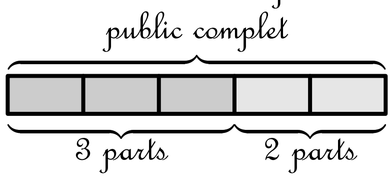
Solution $\boxed{\mathbf{F}}$ $\boxed{\mathbf{P}}$ $\boxed{\mathbf{J}}$



filles : *garcons* $= 2 : 7$, *total de* 9 *parts.*

$1_{part} = \dfrac{170}{2} = 85$.

Total de mineurs : $9_{parts} = 9 \times 85 = 765$.



$\dfrac{3}{5}$ *de l'ensemble du public sont des mineurs.* $\dfrac{2}{5}$ *sont des adultes.*

Le ratio mineurs : *adultes* $= 3 : 2$.

Total adultes $= 2 \times (765 \div 3) = 510$.

Exercice 9

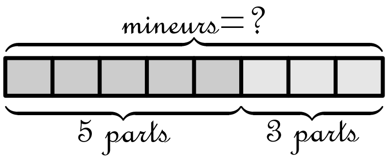
Pour le match de foot du village, $\dfrac{3}{7}$ du public est composé d'adultes.

Parmi les mineurs, le ratio nombre de supporters de l'équipe locale pour le nombre de supporters de l'équipe en déplacement est de 5: 3.

Il y a 140 supporters de plus pour l'équipe locale qu'il n'y a de supporters pour l'équipe en déplacement.

Trouvez le nombre d'adultes.

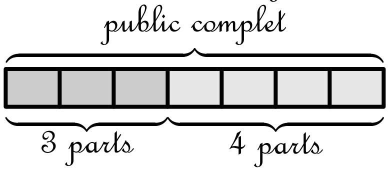
Solution $\boxed{\mathbf{F}}$ $\boxed{\mathbf{P}}$ $\boxed{\mathbf{J}}$



supporter locaux : supporters en déplacement $= 5\colon 3$, total de 9 parts, et 2 parts de différence.

$1_{part} = \dfrac{140}{2} = 70.$

Total de mineurs : $8_{parts} = 8 \times 70 = 560.$



$\dfrac{3}{7}$ de l'ensemble du public sont des mineurs. $\dfrac{4}{7}$ sont des adultes. Le ratio mineurs : adultes $= 3\colon 4.$

Adultes $= 3 \times (560 \div 4) = 420.$