Chapitre

Figures semblables 6

6.1 Triangles semblables

Définition 6.1 Deux triangles sont **semblables** lorsqu'ils ont leurs angles égaux deux à deux et leurs côtés **proportionnels**.

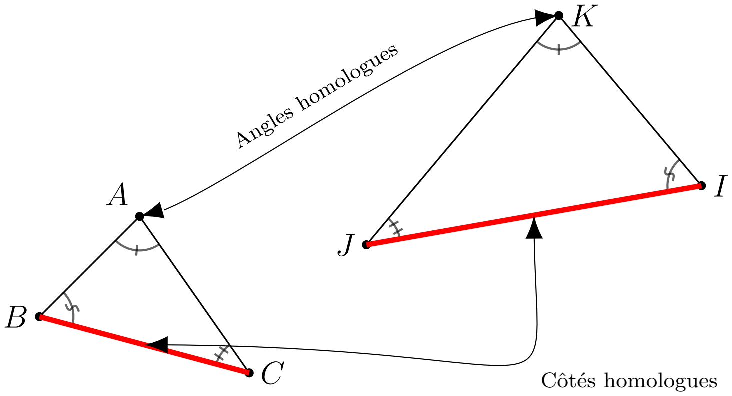


Figure 6.1 – les trianges ABC et IJK sont semblables.

1. Les **angles homologues** sont égaux :

$$\widehat{A} = \widehat{K} \qquad \widehat{B} = \widehat{J} \qquad \widehat{C} = \widehat{I}$$

2. Les **côtés correspondants** sont proportionnels :

$\times k$

Côtés du triangle ABC	AB	BC	AC
Côtés du triangle IJK	JK	IJ	IK

Table 6.1 – Si $k > 1$, le triangle IJK est un *agrandissement* de ABC. Si $k < 1$, le triangle IJK est une *réduction* de ABC.

$$\frac{JK}{AB} = \frac{IJ}{BC} = \frac{IK}{AC} = k$$

6.2 Homothéties

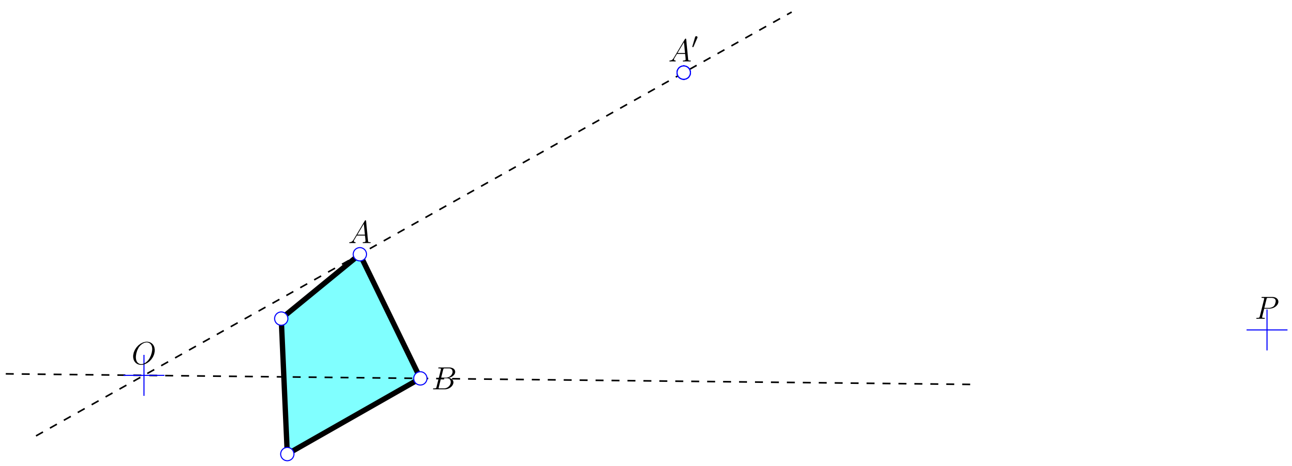
L'homothétie de centre O et rapport k est une transformation qui permet d'agrandir ou de réduire une figure. L'image produite est **semblable** à la figure de départ.

> **cas rapport positif :** $k > 0$
>
> Pour construire l'image M' d'un point M par rapport à l'homothétie de centre O et de rapport $k > 0$ il faut :
>
> ① tracer la droite (OM)
>
> ② mesurer la distance OM puis calculer $OM' = k \times OM$
>
> ③ reporter la longueur OM' en plaçant M' du **même côté** que M par rapport à O.

■ **Exemple 6.1** Sur le dessin, A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2,5.

a) Dessine l'image de B puis celle du quadrilatère par cette homothétie.

b) Dessine l'image de la figure obtenue par l'homothétie de centre P et de rapport 0,4



cas rapport négatif : $k < 0$

Pour construire l'image M' d'un point M par rapport à l'homothétie de centre O et de rapport k il faut :

① tracer la droite (OM)

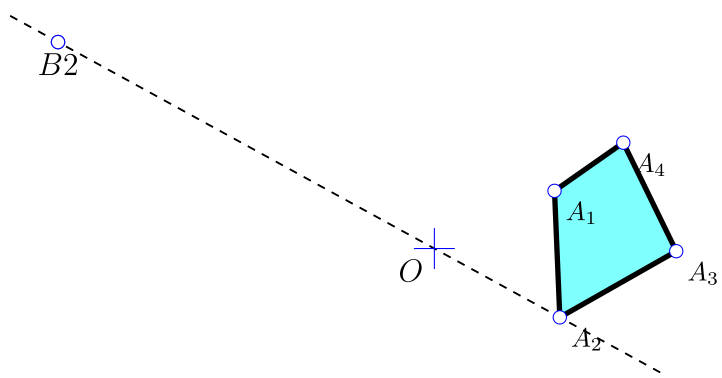
② mesurer la distace OM puis calculer $OM' = -k \times OM$

③ reporter le point M' est du **côté opposé** que M par rapport à O.

■ **Exemple 6.2**

Sur la figure, le point B_2 est l'image de A_2 par l'homothétie de centre O et de rapport -3.

Dessine l'image de la figure bleue par les homothéties de centre O et de rapports -3 et -1.



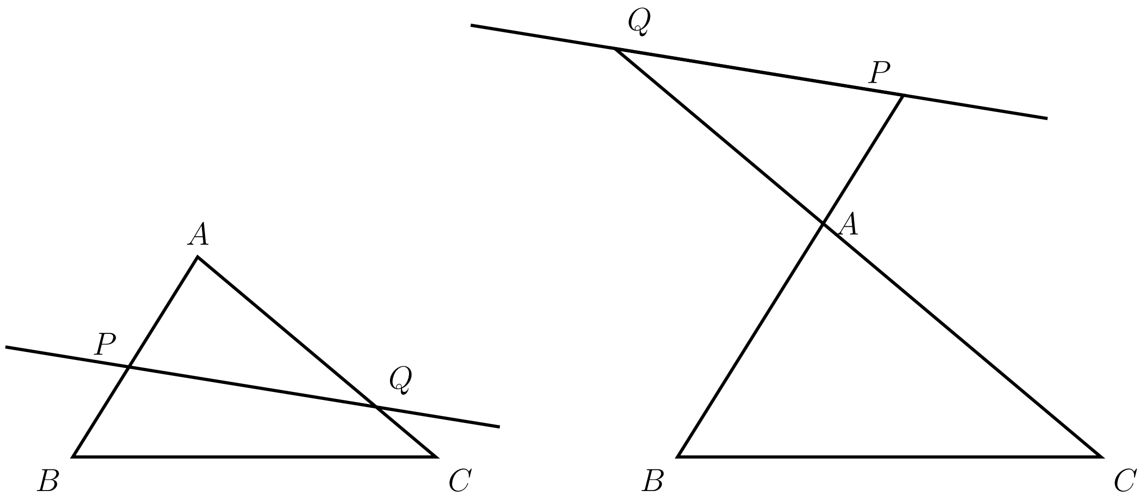
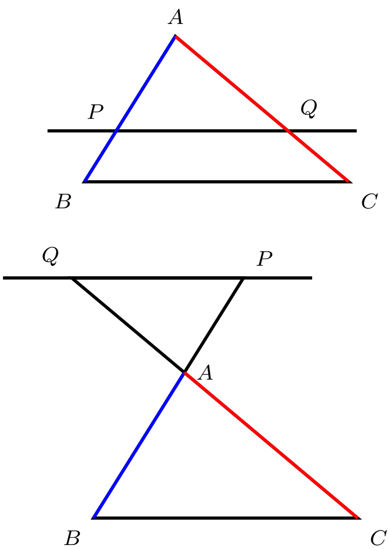


Figure 6.2 – Exemple de triangles emboités ABC et APQ (à gauche) et en papillon (à droite)

6.3 Théorème de Thalès, la contraposée et sa réciproque

Le théorème de Thalès est un cas particulier du critère de similitude AA qui s'applique à une situation ou les 2 triangles sont soit emboités soit opposés par un des sommets (en papillon).



Théorème 6.3 — Théorème de Thalès. Pour la configuration de triangles emboités ou papillon.ABC et APQ ci-contre.

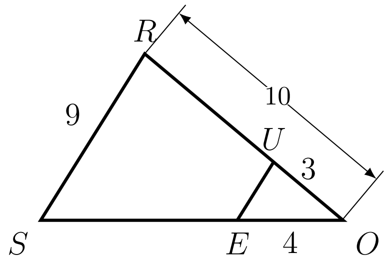
Si les droites (PQ) et (BC) sont parallèles alors les 3 longueurs des côtés des triangles ABC et APQ sont respectivement proportionnelles.

Si les droites $(BC)//(PQ)$ alors $$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} = k$$

Pour écrire les rapports de Thalès :

a) au numérateur figurent les côtés d'un **même triangle**.
b) chaque rapport est entre deux segments **parallèles**.

R Si on choisit d'écrire les rapports des longueurs $\frac{\text{« petit »}}{\text{« grand »}}$ on obtient un **coefficient de réduction** $k < 1$.
Si on choisit d'écrire $\frac{\text{« grand »}}{\text{« petit »}}$ on obtient un **coefficient d'agrandissement** $k > 1$.



■ **Exemple 6.4 — Exemple rédigé : Calculer d'une longueur.** Sur la figure ci-contre, U appartient au segment $[RO]$ et E à $[SO]$. Les triangles RSO et OUE sont emboités.

On suppose que les droites (RS) et (UE) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{OU}{} = \frac{OE}{} = \frac{UE}{} \qquad \frac{\text{« petit »}}{\text{« grand »}}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{4}{OS} = \frac{UE}{9} \qquad = k$$

Le triangle OUE est une réduction du triangle RSO de facteur : $k = 0,3$.

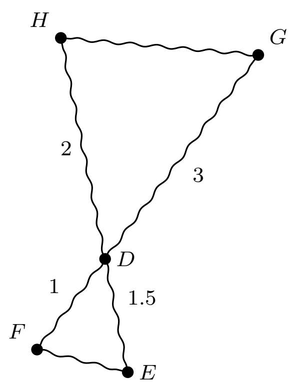
a) Calculer OS :

$$\frac{3}{10} = \frac{4}{OS}$$
$$3OS = 4 \times 10$$
$$OS = \frac{40}{3}$$

b) Calculer UE :

$$\frac{3}{10} = \frac{UE}{9}$$

Théorème 6.5 — La contraposée du théorème de Thalès. Si dans une configuration de triangles emboités ou papillon, les longueurs des côtés ABC et APQ **ne sont pas proportionnelles**, alors les droites (BC) et (PQ) **ne sont pas parallèles**. Et les triangles ont des angles différents.



■ **Exemple 6.6 — Exemple rédigé : montrer que deux droites ne sont pas parallèles.** Pour les triangles en configuration papillon. DFE et DGH on a :

$$\frac{DF}{DG} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{DE}{DH} = \frac{1,5}{1,5+1,5} = \frac{1}{2}$$

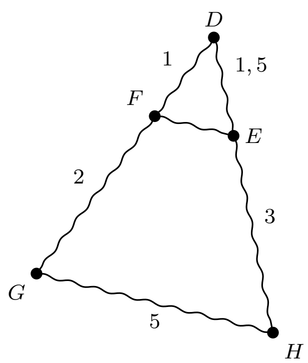
Donc $\dfrac{DF}{DG} \neq \dfrac{DE}{DH}$.

D'après (la contraposée) le théorème de Thalès, les droites (FE) et (GH) ne sont pas parallèles.

Théorème 6.7 — La réciproque du théorème de Thalès. Pour les configurations de triangles emboités ou papillon ABC et APQ ci-contre.

$$\text{Si} \quad \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \quad \text{alors} \quad (BC)//(PQ)$$

R Pour déduire de la réciproque du théorème de Thalès, que les droites sont parallèles, il suffit de vérifier que les 2 rapports des longueurs issues du sommet commun à ABC et APQ sont égaux.
Une fois que nous avons établi que $(BC)//(PQ)$, on conclut à l'égalité des 3 rapports $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$.



■ **Exemple 6.8 — Exemple rédigé.**

1. Montrer que (EF) et (GH) sont parallèles.
2. En déduire la longueur (EF).

Solution.

1. Pour les triangles emboités DFE et DGH on a :

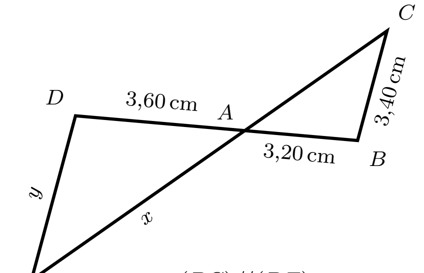
$$\frac{DF}{DG} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{DE}{DH} = \frac{1,5}{1,5+3} = \frac{1}{3}$$

   Donc $\frac{DF}{DG} = \frac{DE}{DH}$, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (FE) et (GH) sont parallèles.

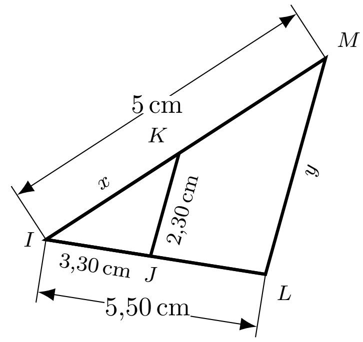
2. Les triangles DEF et DGH sont emboités.
   Les droites (FE) et (GH) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès on a $\frac{DF}{DG} = \frac{DE}{DH} = \frac{FE}{GH} = \frac{1}{3}$ ■

6.3.1 Exercices théorème de Thalès et sa réciproque

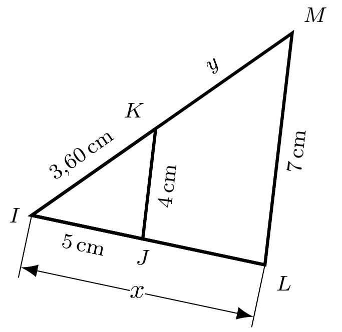
Exercice 1 À l'aide du théorème de Thalès, écrire l'égalité des quotients puis calculer les longueurs demandées.



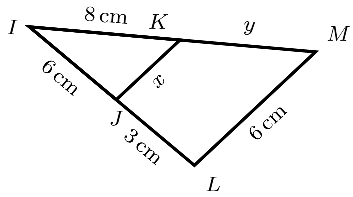
$(BC)//(DE)$



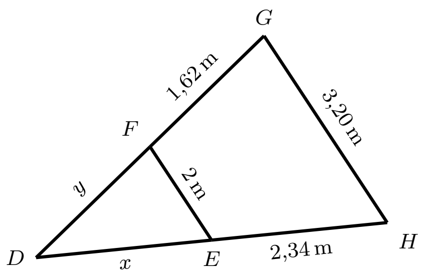
$(JK)//(LM)$



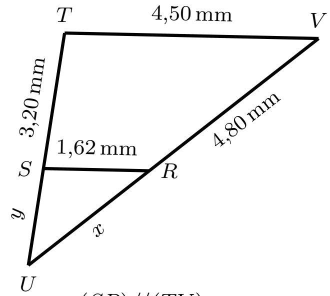
$(JK)//(LM)$



$(JK)//(LM)$



$(FE)//(GH)$



$(SR)//(TV)$

Exercice 2 — Brevet, 2017.

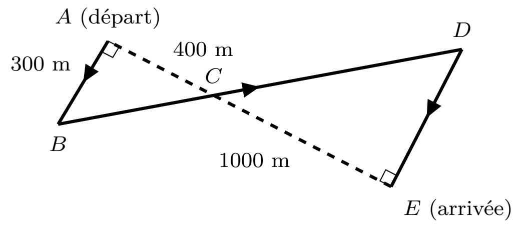
Un plan est remis aux élèves participant à une course. Les élèves doivent partir du point A et se rendre au point E en passant par les points B, C et D. C est le point d'intersection des droites (AE) et (BD). La figure ci-dessous résume le plan, elle n'est pas à l'échelle.

On donne AC = 400 m, EC = 1000 m et AB = 300 m.

a) Calculer BC.

b) Montrer que ED = 750m.

c) Déterminer la longueur réelle du parcours ABCDE.



Exercice 3 — Amérique du Nord, 2018.

La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur. On donne les informations suivantes :

— Le triangle ADE a pour dimensions : $AD = 7\,\text{cm}$, $AE = 4{,}20\,\text{cm}$ et $DE = 5{,}60\,\text{cm}$.

— B est le point de $[AD)$ et C est le point de $[AE)$ tels que : $AB = AC = 9\,\text{cm}$.

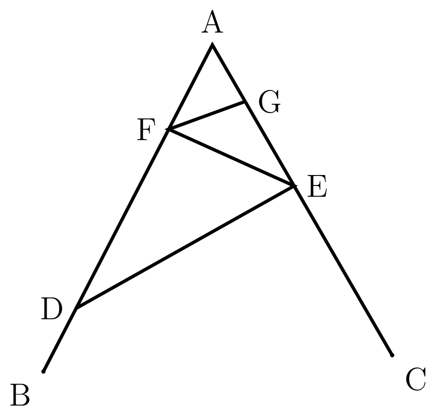
— F est le point de $[AD]$ tel que $AF = 2{,}50\,\text{cm}$.

— La droite (FG) est parallèle à la droite (DE).

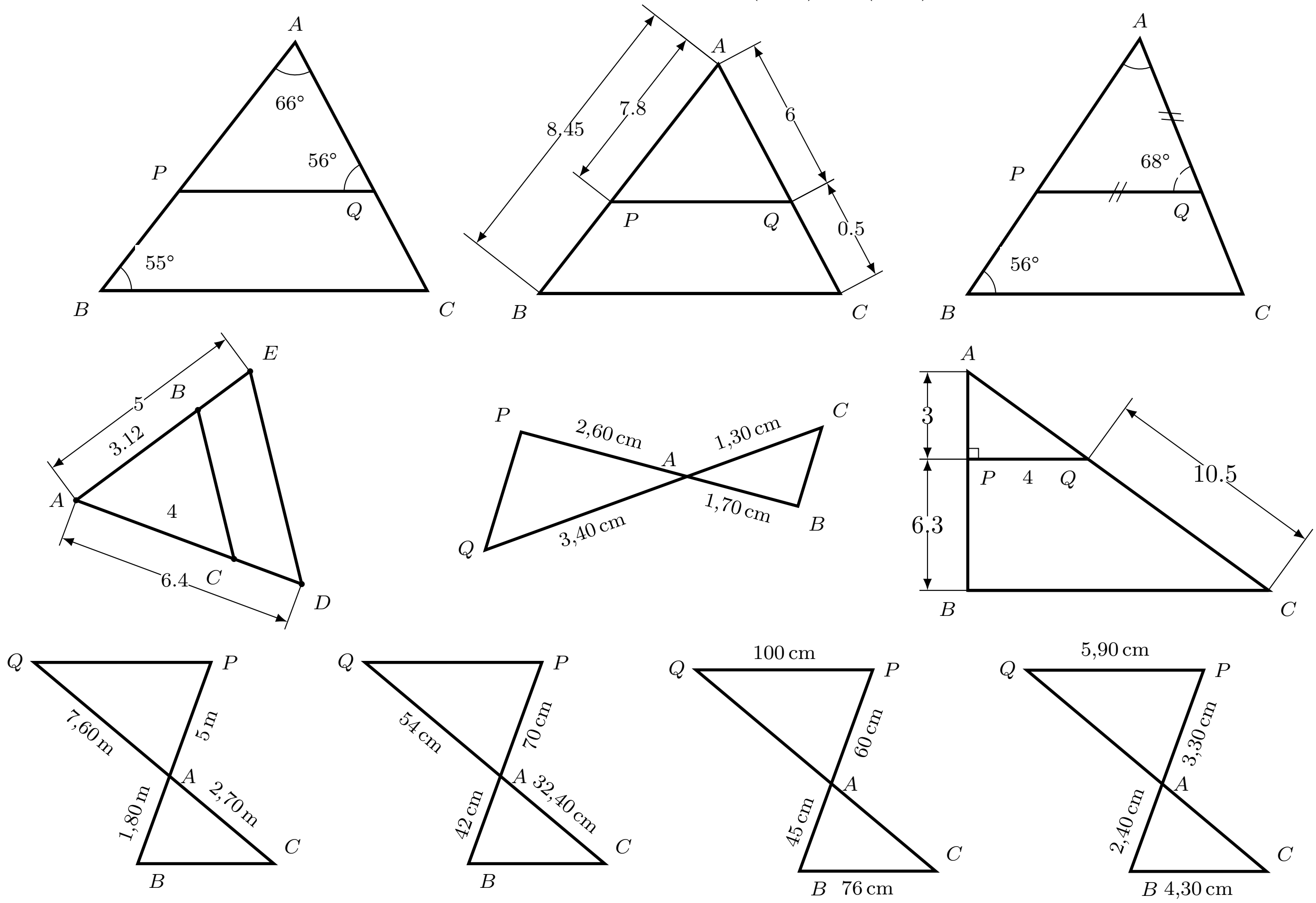
a) Réaliser une figure en vraie grandeur.

b) Prouver que ADE est un triangle rectangle en E.

c) Calculer la longueur FG.



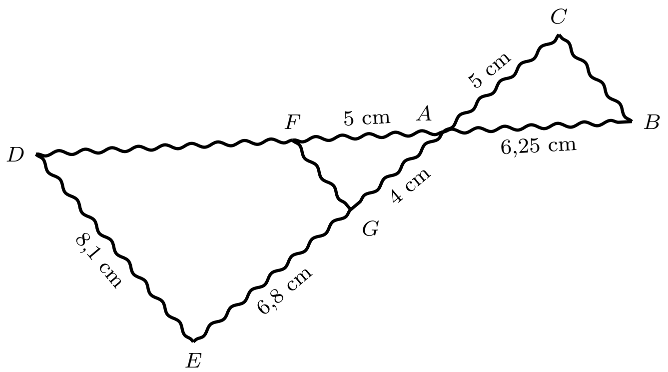
Exercice 4 Justifier sur les figures ci-dessous si les droites (BC) et (PQ) sont parallèles ou non.



Exercice 5 — Métropole 2017.

Pour illustrer l'exercice, la figure ci-dessous a été faite à main levée.

Les points D, F, A et B sont alignés, ainsi que les points E, G, A et C. De plus, les droites (DE) et (FG) sont parallèles.

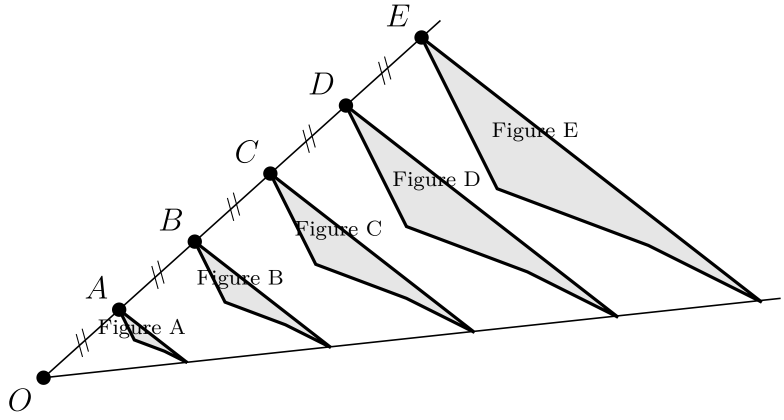


a) Montrer que le triangle AFG est un triangle rectangle.

b) Calculer la longueur du segment $[AD]$. En déduire la longueur du segment $[FD]$.

c) Les droites (FG) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

Exercice 6 — Brevet 2018. Avec un logiciel de géométrie dynamique, on a construit la figure A. En appliquant à la figure A des homothéties de centre O et de rapports différents, on a ensuite obtenu les autres figures.

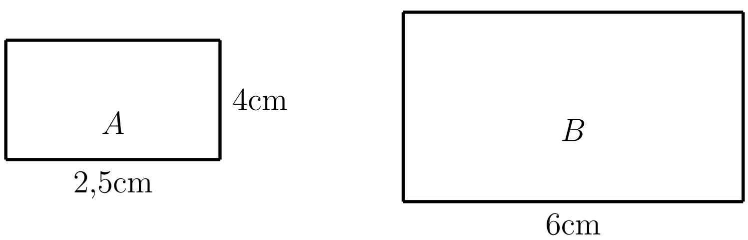


a) Quel est le rapport de l'homothétie de centre O qui permet d'obtenir la figure C à partir de la figure A ? *Aucune justification n'est attendue.*

b) On applique l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{5}$ à la figure E. Quelle figure obtient-on ? *Aucune justification n'est attendue.*

c) Quelle figure a une aire quatre fois plus grande que celle de la figure A ? Justifier.

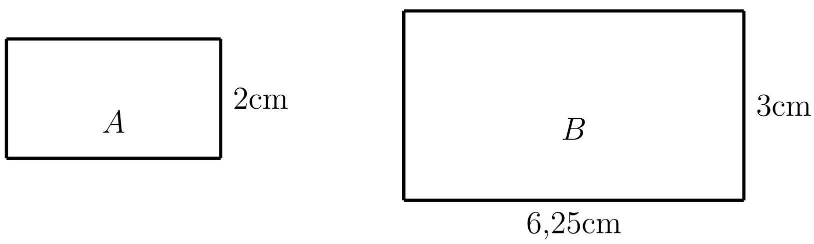
Exercice 7 Les deux rectangles A et B sont semblables.



a) Calculer l'aire du rectangle B.

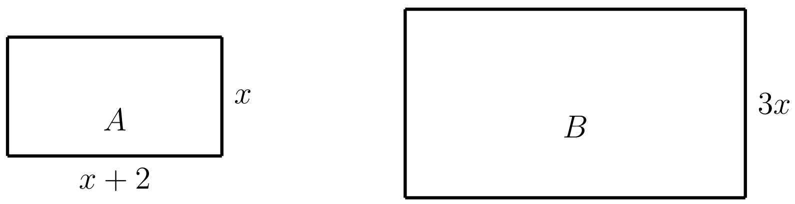
b) Quel rapport d'agrandissement du rectangle A donne le rectangle B ?

Exercice 8 Les deux rectangles A et B sont semblables.



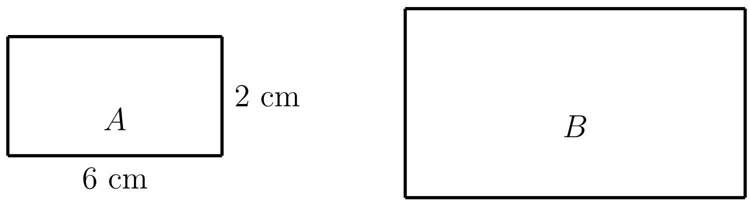
a) Calculer l'aire du rectangle B.

b) Quel rapport de réduction du rectangle B donne le rectangle A ?



Exercice 9 Les deux rectangles A et B sont semblables. L'aire du rectangle B est $35\,\text{cm}^2$. Calculer l'aire du rectangle A.

Exercice 10 Les deux rectangles A et B sont semblables. L'aire du rectangle B est $35\,\text{cm}^2$. Calculer



son périmètre.

Exercice 11 — d'après une question vue au Brevet. Mon rectangle est semblable à un rectangle de côtés 3cm et 2cm. Sont aire est $37{,}50\,\text{cm}^2$. Quel est son périmètre ?

6.4 Critères de similitude des triangles

Postulat 6.9 — Critère de similitude CCC. Si les longueurs des 3 côtés d'un triangle T_1 sont **proportionnelles** aux longueurs respectives des 3 côtés d'un triangle T_2, alors les deux triangles sont semblables.

Postulat 6.10 — Critère de similitude AA. Si 2 angles d'un triangle T_1 sont **respectivement égaux** à 2 angles d'un triangle T_2. Alors les deux triangles sont semblables.

Postulat 6.11 — Critère CAC-Semblable. Si deux triangles T_1 et T_2 ont un angle égal compris entre 2 côtés respectivement proportionnels, alors les deux triangles sont semblables.

6.4.1 Exercices

■ **Exemple 6.12 — Triangles semblables.**

Si possible, démontrer que les paires de triangles sont semblables.

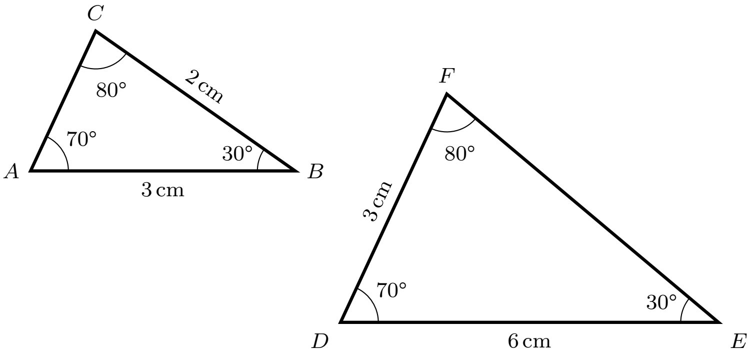
a) Préciser les angles de même mesure et les angles correspondants.

b) Écrire les rapports égaux.

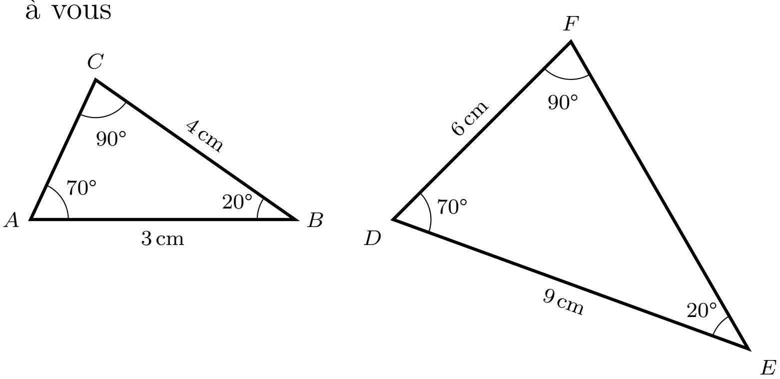
c) Donner alors un rapport de réduction, et d'agrandissement.

d) Calculer les longueurs manquantes.

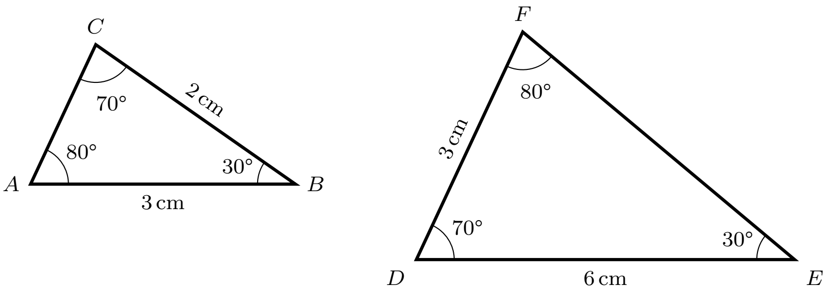
(A)



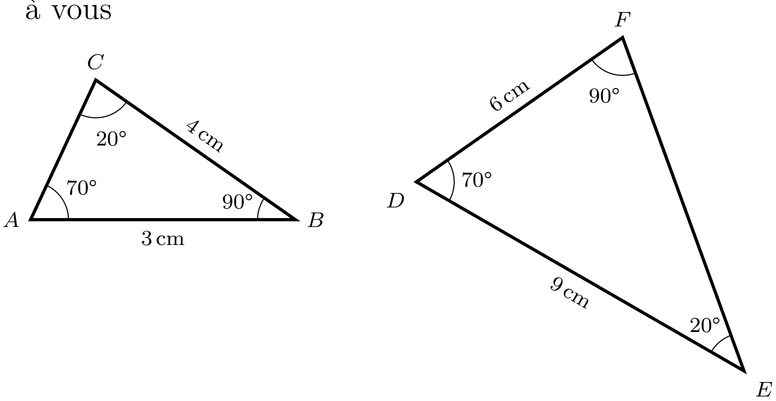
à vous



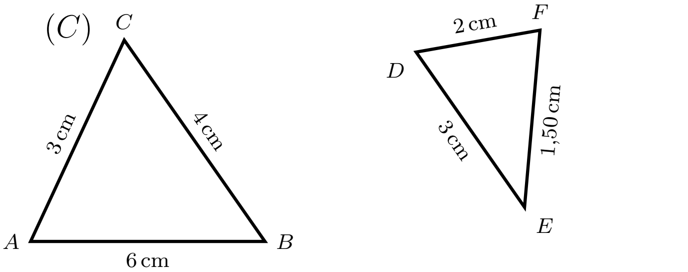
(B)



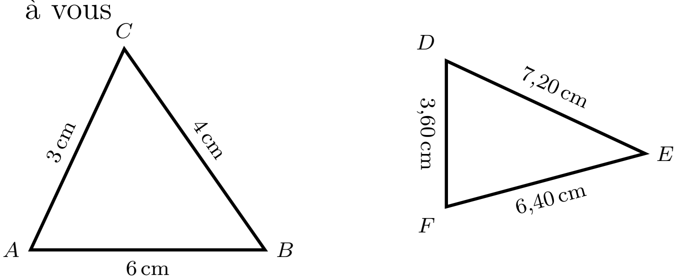
à vous



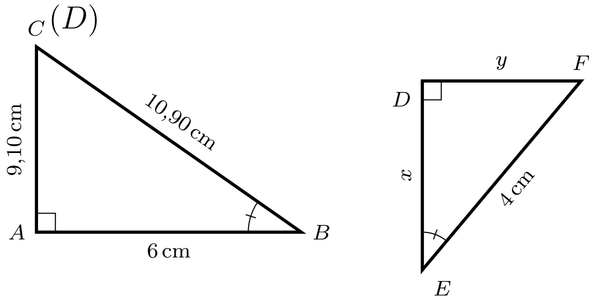
(C)



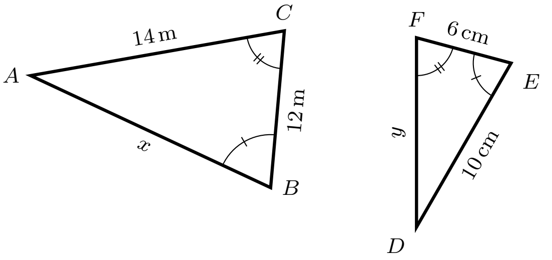
à vous



(D)

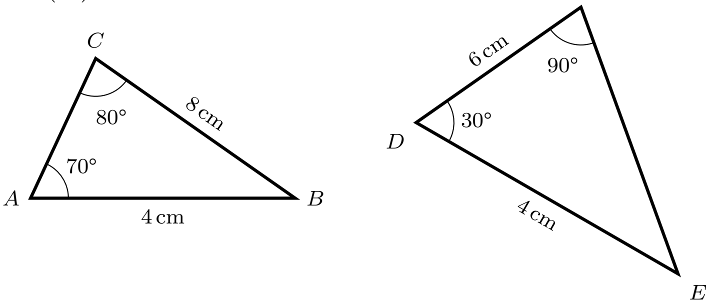


à vous

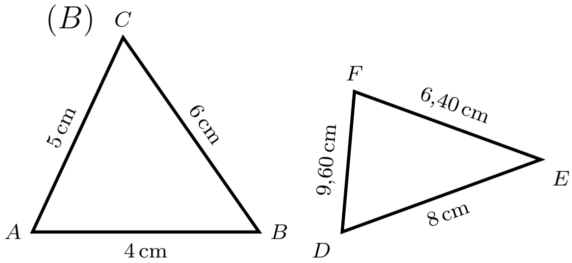


Exercice 1 — mêmes consignes.

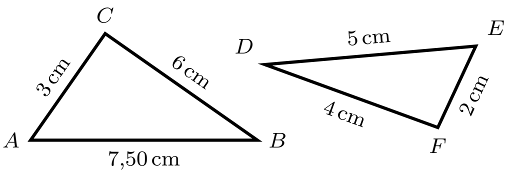
(A)



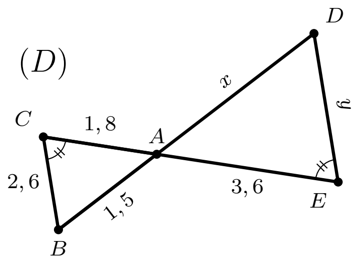
(B)



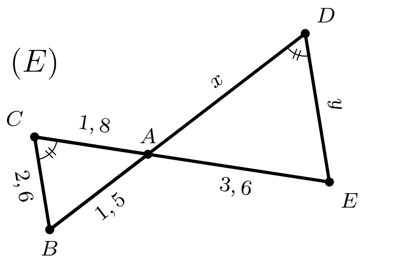
(C)



(D)



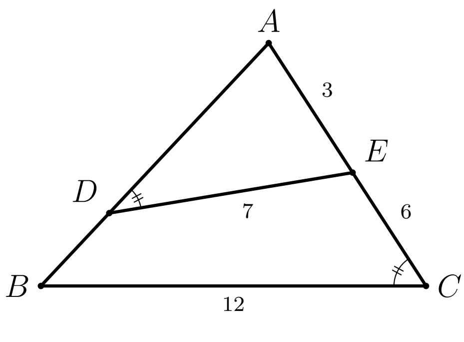
(E)



Exercice 2

Dans le triangle ABC, le point D est sur le côté $[AB]$ tel que $\widehat{ADE} = \widehat{C}$. La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle.

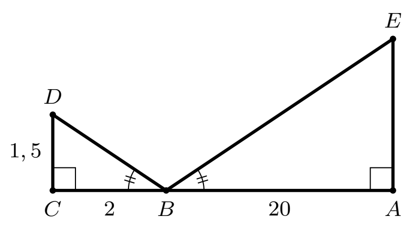
a) Montrer que les triangles ADE et ABC sont semblables.
b) Identifier les cotés correspondants (utiliser même couleur).
c) Écrire les rapports égaux.
d) En déduire la longueur AB.



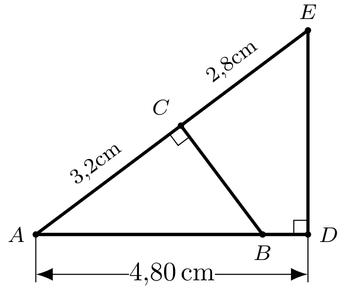
Exercice 3

Dans la figure ci-dessous les points A, B et C sont alignés et $\widehat{DBC} = \widehat{EBA}$. La figure n'est pas à l'échelle.

a) Montrer que les triangles ABE et BCD sont semblables.
b) Identifier les cotés correspondants.
c) Écrire les rapports égaux.
d) En déduire la longueur EA.

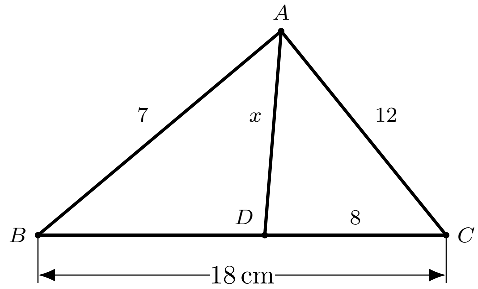


Exercice 4



a) Montrer que les triangles ACB et ADE sont semblables.
b) Identifier les cotés correspondants et écrire les rapports égaux.
c) Calculer AB.

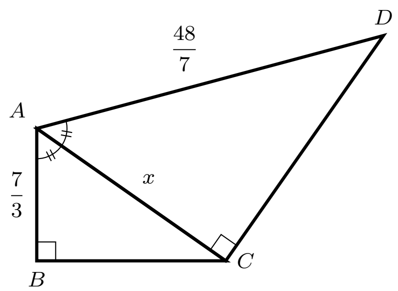
Exercice 5



a) Montrer que les triangles ACD et ABC sont semblables.
b) Identifier les cotés correspondants.
c) Écrire les rapports égaux.
d) En déduire la longueur AD.

Exercice 6

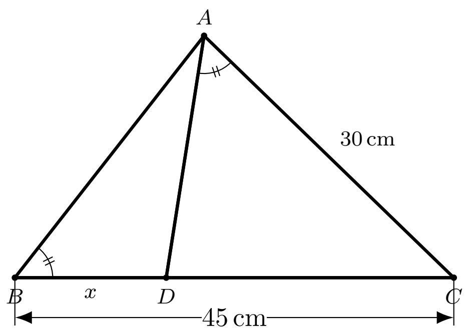
La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle. On a $\widehat{CAD} = \widehat{BAC}$.



a) Montrer que les triangles ACD et ABC sont semblables
b) Déterminer les côtés correspondants.
c) Écrire l'égalité des rapports entre les côtés correspondants. Trouver x.

Exercice 7

La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle. On a $\widehat{DAC} = \widehat{ABC}$.



a) Démontrer que les triangles ACH et ABH sont semblables.
b) Identifier les cotés correspondants (utiliser même couleur).
c) Écrire les rapports égaux.
d) Calculer x.