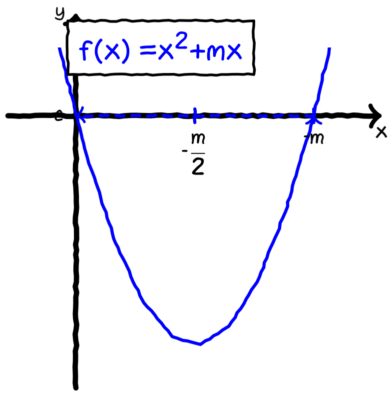
1.2 Complétion au carré et forme canonique

Théorème 1.2 — au programme. Pour tout x et $m \in \mathbb{R}$ on a l'identité :

$$x^2 + mx = x(x+m) = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

La fonction quadratique donnée par $f(x) = x^2 + mx$:

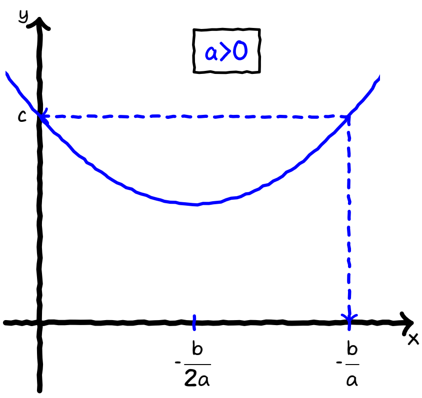
- admet pour racines $x = 0$ et $-m$.
- atteint son extremum en $x = -\dfrac{m}{2}$ d'après la forme canonique.

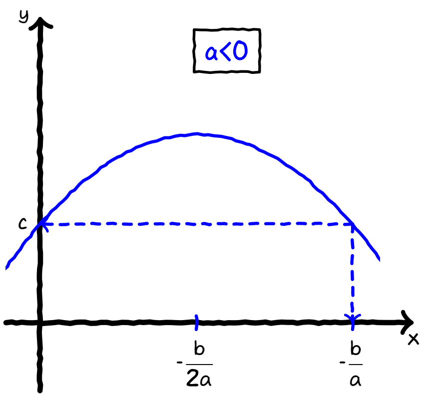


Conséquence La fonction quadratique de forme réduite

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x\right) + c$$

- $f(0) = f(-\frac{b}{a}) = c$
- atteint son extremum en $x = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$.
- l'extremum $\beta = f(\alpha)$ est un maximum si $a > 0$, et un minimum si $a < 0$.





Théorème 1.3 — forme canonique. [5] Pour tout fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

De plus $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

[5] non exigible

Exercices : Compléter au carré

La complétion au carré est une technique qui permet d'obtenir la forme canonique à partir de la forme réduite d'une fonction quadratique.

■ **Exemple 1.6 — complétion au carré cas $a = 1$.** (les $-$ sont parfois à transformer en $+$)

$f(x) = x^2 + 10$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 10x \\ &= x(x+10) \\ &= (x + \ldots - \ldots)(x+5+5) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x \\ &= x(x - \ldots) \\ &= (x - \ldots + \ldots)(x - \ldots - \ldots) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 5x \\ &= x(x - \ldots) \\ &= (x - \ldots - \ldots)(x - \ldots - \ldots) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x \\ &= x(x - \ldots) \\ &= (x - \ldots - \ldots)(x - \ldots - \ldots) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 7x + 5 \\ &= x(x - \ldots) + 5 \\ &= (x - \ldots - \ldots)(x - \ldots - \ldots) + 5 \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 12x - 2 \\ &= x(x - \ldots) - 2 \\ &= (x - \ldots - \ldots)(x - \ldots - \ldots) - 2 \\ &= \end{aligned}$$

Exercice 1 Retrouvez par complétion au carré la forme quadratique des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x^2 + 4x$ | $f_2(x) = x^2 - 10x$ | $f_3(x) = x^2 + 3x + 1$ | $f_4(x) = x^2 - 5x - 3$

■ **Exemple 1.7** (les $-$ sont parfois à transformer en $+$)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 3x - 5 \\ &= 2\left[x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{5}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 12x - 2 \\ &= -\left[x^2 \ldots 12x \ldots 2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 10x - 25 \\ &= -\left[x^2 \ldots 10x \ldots 25\right] \end{aligned}$$

Exercice 2 Retrouvez par complétion au carré la forme quadratique des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 3x^2 + 9x + 5$ | $f_2(x) = -2x^2 + 2x + 2$ | $f_3(x) = -x^2 - 8x + 7$ | $f_4(x) = -x^2 + 2x - 3$

Exercice 3 Pour chaque fonction quadratique :

a) Déterminez la forme canonique par complétion au carré.

b) Complétez le tableau de variation.

c) Justifiez le sens de variation sur l'intervalle $[1;2]$.

d) Donner selon les valeurs de k le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ d'inconnue x.

$f_1(x) = x^2 - \dfrac{4}{3}x$	$f_2(x) = -x^2+5x+2$	$f_3(x) = 2x^2+9x+11$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1(x)$		

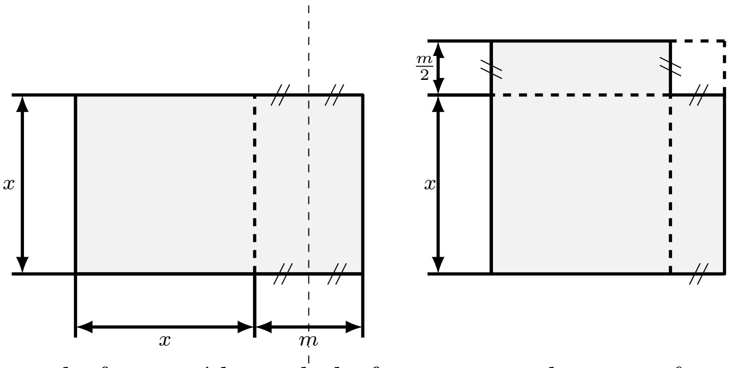
x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1(x)$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1(x)$		

Exercice 4

a) Complétez pour retrouver l'identité illustrée par la figure ci-contre.

$$x^2 + \ldots\ldots = \left(\ldots \quad \ldots\right)^2 - \left(\ldots\ldots\right)^2$$



b) Démontrer algébriquement cette identité.

c) Retrouver la forme canonique de ax^2+bx.

Exercice 5 Suivre la démarche proposée pour trouver la forme réduite de la fonction quadratique f dont la représentation graphique est une parabole de sommet $S(-2;3)$ et passant par $A(5,8)$.

a) On pose $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ la forme canonique de f.
Préciser les valeurs de α et β.

b) Donner une équation vérifiée par a et la résoudre.

c) Développer la forme canonique et conclure.

Problème 1

Dans le repère orthonormé $(O;I,J)$, soit la droite $d\colon y=2x+3$ et $M(x;y)\in d$.

a) Démontrer que $OM^2 = 5x^2+12x+9$. ([1])

b) Déterminer la forme canonique par une complétion au carré.

c) Quelle est la distance minimale qui sépare la droite d de l'origine du repère ?

solution de l'exercice 1 . $f_1(x)=(x+2)^2-4$; $f_2(x)=(x-5)^2-25$; $f_3(x)=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$; $f_4(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{37}{4}$; ■

solution de l'exercice 2 . $f_1(x)=3\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$; $f_2(x)=\frac{5}{2}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; $f_3(x)=23-(x+4)^2$; $f_4(x)=-(x-1)^2-2$; ■

solution partielle de l'exercice 3 . $f_1(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}$; $f_2(x)=(x-7)^2-58$; $f_3(x)=\frac{33}{4}-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$; ■

1. On rappelle que dans un repère orthonormé $AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2$.