Chapitre

Systèmes d'équations 12

Définition 12.1 — Systèmes de 2 équations linéaires à 2 inconnues. On appelle un système de deux équations linéaires à deux inconnues un système de la forme

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \qquad \text{d'inconnue } (x, y)$$

Les paramètre a, b, c et d sont des réels. L'accolade signifie *et*. L'inconnue doit vérifier les deux équations simultanément.

■ **Exemple 12.1** $(x = 4\ ;\ y = -11)$ n'est pas un couple solution du système $\begin{cases} x - 6y = 70 \\ 6x - y = 70 \end{cases}$

Le couple $(x = 10\ ;\ y = -10)$ est solution du système.

■ **Exemple 12.2 — système non linéaire.**

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} .$$

Postulat 12.3 — admis. On ne change pas les solutions d'un système linéaire si :

a) échanger deux lignes, $L_1 \leftrightarrow L_2$
b) multiplier une ligne par un réel non nul, $L_1 \leftarrow aL_2$
c) ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne $L_1 \leftarrow L_1 + bL_2$

Définition 12.2 On appelle déterminant du système précédent le nombre défini par : $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$

Théorème 12.4 Si le déterminant d'un système linéaire n'est pas nul, alors le système admet un unique couple solution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Démonstration.

$$\begin{cases} ax + by = c & \times d \\ dx + ey = f & \times a \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = c & \times e \\ dx + ey = f & \times b \end{cases}$$

$$\begin{cases} adx + bdy = cd \\ adx + eay = af \end{cases} \qquad \begin{cases} aex + bey = ce \\ bdx + bey = fb \end{cases}$$

$$(ae - bd)y = af - cd \qquad (ae - bd)x = ce - fb$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd} \qquad x = \frac{cd - fb}{ae - bd}$$

■

12.1 Exercices

Exemple 12.5 Soit x et $y \in \mathbb{R}$. Compléter les expressions suivantes.

1) Pour $3x = 24 - 4y$.
   a) Si $x = 0$ alors $y = \dots$
   b) Si $y = 0$ alors $x = \dots$
   c) Si $x = -4$ alors $y = \dots$
2) Pour $3\left(x - \frac{2}{3}y\right) = 6$.
   a) Si $x = 0$ alors $y = \dots$
   b) Si $y = 0$ alors $x = \dots$
   c) Si $y = -6$ alors $x = \dots$

Exercice 1 Soit x et $y \in \mathbb{R}$. Compléter les expressions suivantes.

1) Pour $2x - 3y = 12$.
   a) Si $y = 0$ alors $x = \dots$
   b) Si $x = 0$ alors $y = \dots$
   c) Si $y = 2$ alors $x = \dots$
2) Pour $4x + 6y = 60$.
   a) Si $y = 0$ alors $x = \dots$
   b) Si $x = 0$ alors $y = \dots$
   c) Si $y = 5$ alors $x = \dots$
3) Pour $8x - 12y = 72$.
   a) Si $y = 0$ alors $x = \dots$
   b) Si $x = 0$ alors $y = \dots$
   c) Si $y = 2$ alors $x = \dots$
4) Pour $12y = 18x - 36$.
   a) Si $x = 0$ alors $y = \dots$
   b) Si $y = 0$ alors $x = \dots$
   c) Si $x = -2$ alors $y = \dots$

> Résoudre en x une équation signifie la réarranger afin d'exprimer x à l'aide des autres variables réelles y, a, b.

Exemple 12.6 Pour chacune des relations suivantes, exprimer x en fonction de y :

a) $y = 5x + 3$
b) $2y - 3x = 1$
c) $3y + 4x = 3$
d) $y = \frac{2}{3}x - 2$

Exercice 2 Mêmes consignes avec les équations suivantes.

a) $y = -3x + 1$
b) $y = 2x - 3$
c) $y = -\frac{x}{a} + c$
d) $y = -\frac{3}{5}x + 5$
e) $3x - 2y = 12$
f) $5x + 7y = 1$
g) $3x - 5xy = y + 1$
h) $12 - 2yx + 5x = 0$

■ **Exemple 12.7 — 🌵.** Pour $y = \dfrac{3x+2}{x-3}$, exprimer x à l'aide de y.

Exercice 3 — 🌵.

a) $y = \dfrac{x+4}{2x-5}$ | b) $y = \dfrac{5x+2}{x-3}$ | c) $y = \dfrac{5x+1}{4x+2}$ | d) $y = \dfrac{5x-2}{3x-3}$

Exercice 4 Traduire chacun des énoncés suivants en un système de deux équations à deux inconnues. Précisez le sens des inconnues x et y

a) Benjamin et Jim ont tout les deux acheté une banane et une pomme. Benjamin a acheté une banane en plus. Benjamin a dépensé 5 € et Jim a dépensé 3 €.
On pose $x =$ .... et $y =$ ....

b) Benjamin a acheté 3 briques de soupe et une baguette de pain. Jim a acheté 2 baguettes et 3 briques de soupe. Jim a dépensé 8 € et Benjamin 7 €
On pose $x =$ .... et $y =$ ....

c) Jim dépense 9 € pour un paquet de biscuits et 3 paquets de chips. Benjamin dépense 7 € pour 2 paquets de chips et un paquet de biscuits.
On pose $x =$ .... et $y =$ ....

d) Jim et Benjamin on acheté une chemise et 2 cravates chacun. Jim est retourné acheté 4 chemises de plus. Benjamin a dépensé 90 € et Jim a dépensé 210 €
On pose $x =$ .... et $y =$ ....

e) En travaillant un total de 45 jours dans deux entreprises différentes, Jim a gagné 3847 €. Dans la première il gagnait 134 € par jour. Dans la seconde il gagnait 75 € par jour.
On pose $x =$ .... et $y =$ ....

■ **Exemple 12.8 — résolution d'un système linéaire par substitution.** Utile si l'une des équations permet d'obtenir facilement une variable en fonction de l'autre.

1. $\begin{cases} 3x + y &= 1 \\ 4x - 3y &= 10 \end{cases}$ | 2. $\begin{cases} 4x + 28y &= 44 \\ x - 16y &= 34 \end{cases}$ | 3. $\begin{cases} 3x + y &= 15 \\ 5x - 4y &= 8 \end{cases}$ | 4. $\begin{cases} -x + 5y &= 75 \\ 10x + 3y &= -8 \end{cases}$

> Vérifier que le couple obtenu est bien solution du système.

Exercice 5 Résoudre les systèmes suivants d'inconnue (x, y) par substitution.

$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -4x + 2y = 22 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ -4x + 2y = 22 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 3y &= -1 \\ 50x - y &= 10 \end{cases}$

■ **Exemple 12.9 — résolution d'un système linéaire par combinaison.**

Éliminer une des inconnues dans les systèmes suivants puis résoudre le système.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ -4x+2y=22 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=-3 \\ -4x-2y=22 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x+2y=-18 \\ -4x+4y=-30 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+y=-18 \\ -4x+2y=-30 \end{cases}$$

Exercice 6 Éliminer une des inconnues dans les systèmes suivants puis résoudre le système.

1. $\begin{cases} 5x+4y=23 \\ 5x+2y=19 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -6x+4y=23 \\ 6x+2y=19 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5x+8y=31 \\ 5x+2y=19 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 6x+8y=31 \\ -6x+2y=19 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 4x+2y=18 \\ 4x+6y=30 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x+2y=18 \\ -2x+6y=30 \end{cases}$

■ **Exemple 12.10 — Eliminer une inconnue par combinaison.** Pour résoudre un système par la méthode de combinaison, vous multiplierez les équations par le nombre indiqué, puis additionner ou soustraire pour éliminer l'une des deux inconnues, et enfin trouver x ou y

éliminer l'inconnue x — éliminer l'inconnue y

Système A $\begin{cases} 2x+3y=5 & L_1\times 5 \\ 5x-2y=3 & L_2\times 2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2x+3y=5 & L_1\times 2 \\ 5x-2y=3 & L_2\times 3 \end{cases}$

(à vous) Système B $\begin{cases} 2x+3y=4 & L_1\times \dots \\ 5x-y=7 & L_2\times \dots \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2x+3y=4 & L_1\times \dots \\ 5x-y=7 & L_2\times \dots \end{cases}$

Exercice 7

Résoudre ces systèmes d'inconnue $(x;y)$ par combinaison :

① Vérifier que le système admet bien une solution unique

② Si tu es coté fenêtre : éliminer x et trouver y. Sinon éliminer y et trouver x.

③ Substituer la valeur trouvée dans une des équations et donner la solution du système.

1. $\begin{cases} x-5y=2 \\ 2x+y=3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x+4y=9 \\ 5x+6y=14 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x+3y=-11 \\ 3x-5y=12 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 6x-5y=2 \\ -7x+3y=1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 5x-2y=-16 \\ 3x-4y=-18 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x-7y=11 \\ -5x+13y=-17 \end{cases}$

Exercice 8

Un assembleur commande deux types de composants électroniques.

— Le composant A est vendu par lots de 30 au prix de 2550 € le lot.

— Le composant B est vendu par lots de 40 au prix de 1400 € le lot.

L'assembleur a commandé au total 720 composants pour un montant global de 37200 €, déterminer le nombre de lots de chacun des composants

Exercice 9

Un capital de 10000 € a perdu 6% de sa valeur au bout d'un an.

Ce capital avait été placé de la manière suivante :

— une partie x a été placée sur un compte d'épargne qui rapporte 5% d'intérêts par an;

— le reste du capital noté y a été placé en bourse. Un an plus tard, le portefeuille boursier a perdu 20% de savaleur.

Calculer le montant en euros de chacune des deux sommes x et y.

Exercice 10

On se donne une fonction affine d'expression $f(x) = ax + b$ tel que $f(2) = 1$ et $f(-3) = 11$.

a) Donner deux équations vérifiées par le couple (a, b).

b) Résoudre le système et déterminer l'expression algébrique de la fonction f.

Exercice 11

On se donne une fonction affine d'expression $f(x) = ax + b$ tel que $f(10) = -6$ et $f(20) = -34$.

a) Donner deux équations vérifiées par le couple (a, b).

b) Résoudre le système et déterminer l'expression algébrique de la fonction f.

Exercice 12

On se donne une fonction d'expression $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ tel que $f(1) = 1$ et $f(2) = 5$.

a) Donner deux équations vérifiées par le couple (a, b).

b) Résoudre le système et déterminer l'expression algébrique de la fonction f.

Exercice 13

On se donne une fonction d'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $f(-2) = 7$, $f(0) = 1$ et $f(2) = -1$.

a) Donner trois équations vérifiées par les inconnues a, b et c.

b) Déterminer la valeur de c. Et donner un système de deux équations d'inconnues a et c.

c) Résoudre le système et donner l'expresssion de la fonction f.

Exercice 14

On sait que si le prix proposé d'un article est de 5 €, alors on vend 420 unités en une semaine. Et si on propose l'article à 10 €, alors on en vend 310 unités par semaine.

La fonction d'expression $f(x) = 500 - ax + \frac{b}{x}$, modélise le nombre d'articles vendus par semaine en fonction du prix unitaire x proposé. Trouvez a et b.