Chapitre

Puissances 11

11.1 Puissances à exposants entiers

Pour tout nombre positif ou négatif a :

$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$

$a^4 = a \times a \times a \times a$

$a^3 = a \times a \times a$

$a^2 = a \times a$

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

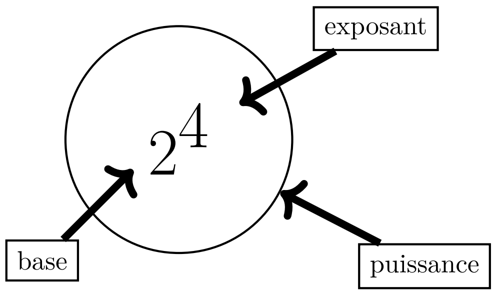


Figure 11.1 – « 2 à la puissance 4 »
« 2 élevée à la puissance 4 »
« 2 puissance 4 »
« 2 exposant 4 »

Pour tout nombre a non nul, a^{-1} désigne l' « inverse de a ».

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad \frac{1}{a^{-1}} = a$$

Pour tout entier n négatif.

a^{-n} désigne l' « inverse de a^n » ou encore « (inverse de a) à la puissance n ».

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

■ **Exemple 11.1** Pour tout nombre non nul a :

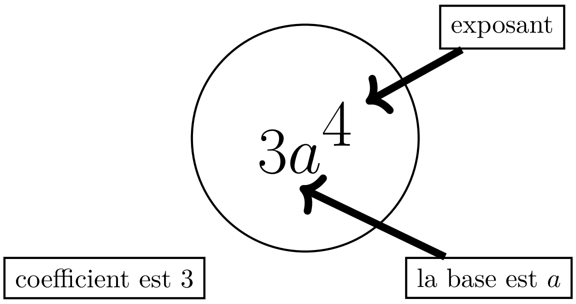
$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a \times a} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a \times a \times a} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^3$$

$$a^{-4} = \frac{1}{a^4} = \left(\frac{1}{a}\right)^4$$

11.1.1 Exercices : termes semblables et puissances

> Le coefficient est le nombre qui multiplie la variable. Un coefficient peut être une fraction, ou un nombre négatif



signifie $3 \times a \times a \times a \times a$

Dans $3a$, le coefficient est 3.
Dans $-4b^2$, le coefficient est -4.
Dans c^4, le coefficient est 1.

> Des termes sont similaire, s'ils ont la même base, et le même exposant. Les coefficients peuvent être différents.

■ **Exemple 11.2** $4p^3$ et $-3p^3$ sont semblables. y^4 et $2y^4$ sont semblables.

■ **Exemple 11.3** Simplifier :

$b^3 + b^3 =$ $\quad$ $7y^2 - 3y^2 = 4y^2$ $\quad$ $-3a^2 - a^2 = -4a^2$

Exercice 1 Entoure les paires de termes semblables

a) $2a$ et $3a$
b) a^2 et $2a$
c) a^3 et $4a^3$
d) $6a^3$ et $6a^2$
e) $3a$ et $-5a$
f) a^2 et b^2
g) a^2 et $3a^2$
h) $6a^3$ et a^3
i) $-3a$ et $2a$
j) b^{10} et $10b$
k) $6b$ et $5b^1$
l) 9 et $9a$

Exercice 2 Entoure 3 termes semblables dans la liste ci-dessous :

a) $3x^2$ | b) $3x$ | c) $-x^3$ | d) $-3x$ | e) x^3 | f) $3x^3$

Exercice 3 Simplifie lorsque c'est possible.

a) $y^2 + y^2 =$
b) $5y^2 + y^2 =$
c) $y^3 + y^3 =$
d) $7y^2 - 2y^2 =$
e) $3y^3 + 2y^3 =$
f) $8y^2 - 2y^2 =$
g) $2y^2 - 8y^2 =$
h) $x^4 + x^4 + x^4 =$
i) $-3y^2 - 2y^2 =$
j) $y^3 - y^3 =$
k) $p^4 + a^4 =$
l) $2p^6 + 2p^5 =$
m) $7b - 3b^1 =$
n) $-4x^2 + 4x^2 =$
o) $10y^2 - 11y^2 =$

11.1.2 Exercices : multiplier des puissances

Règle Si les bases sont les mêmes, je multiplie deux puissances en ajoutant les exposants.

Exemple 11.4

$a^2 \times a^3 = a \times a \times a \times a \times a = a^5$

$5a^2 \times 7a^3 = 5aa \times 7aaa = 5 \times 7 \times aaaaa = 35a^5$

$2x^3 \times 4x^7 =$

$(-3a^5) \times (6a) =$

Si les bases ne sont pas les mêmes, je ne multiplie pas les deux puissances en ajoutant les exposants !

Exercice 4 Préciser si on ajoute les exposants. Je vous interrogerai à l'oral.

$7^3 \times 7^2$	oui / non	$a^4 \times a^{10}$	oui / non
$7^3 + 7^2$	oui / non	$a^5 \times a^2$	oui / non
$7^3 + 6^2$	oui / non	$a^0 \times a^2$	oui / non
$7^3 \times 6^2$	oui / non	$a \times a \times a^2$	oui / non
$6^3 \times 6^2$	oui / non	$a^7 + a^2$	oui / non

Exercice 5 Simplifie lorsque c'est possible.

a) $4y \times 2y^2 =$
b) $3b^3 \times b^5 =$
c) $3a \times 2b =$
d) $5a \times a^4 \times a^2 =$
e) $6 \times ab \times 2b^4 =$
f) $10ab^2 \times 3b =$

Exercice 6 Complète les pointillés

a) $7y^2 \times$ .... $= 14y^2$
b) $a^3 \times$ .... $= a^7$
c) $4b^3 \times$ .... $= 8b^9$
d) $9m^3 \times$ .... $= 9m^5$
e) $ab \times$ .... $= a^2b$
f) $p^4 \times$ .... $= 7p^5$

Exercice 7 Simplifie :

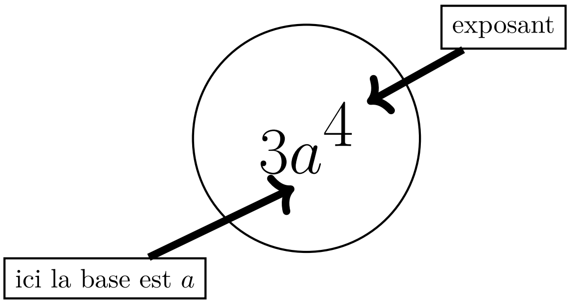
a) $a^2 \times b \times a^3 =$
b) $a^2b \times a =$
c) $ab^3 \times b^2 =$
d) $ab^4 \times a^2b =$
e) $abc \times b^0 =$
f) $a^2b^4b^2 =$

Défis

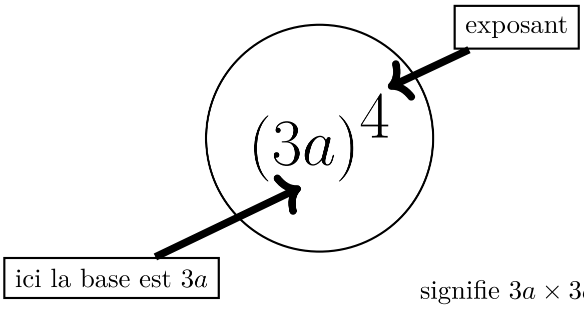
- $(-xy^3)(-3xy)(8xy) =$
- $(3b^4)(7ab)(6a^2b) =$
- $(5a^2b^3)(-3a^2b)(8ab) =$

11.1.3 Exercices : puissances de produits

> Il faut toujours mettre entre parenthèses pour clarifier les termes à multiplier. Ceci s'applique aux fractions et au nombres négatifs



signifie $3 \times a \times a \times a \times a$



signifie $3a \times 3a \times 3a \times 3a$

■ **Exemple 11.5** Simplifie :

- $(a^{10})^4 = a^{10} \times a^{10} \times a^{10} \times a^{10} =$
- $(3x^7)^2 = 3x^7 \times 3x^7 =$
- $(a^3b^2)^3 = a^3b^2 \times a^3b^2 \times a^3b^2 =$

Exercice 8 Complète le tableau

Expression	Écriture développée	Écriture simplifiée
$(b^7)^3$	$b^7 \times b^7 \times b^7$	b^{21}
$(y^5)^2$		
$(4y)^2$		
$(5b^4)^3$		
$(a^3b)^2$		
$(2a)^3$		
$(4b^{12})^2$		
	$7y^3 \times 7y^3$	
	$ab \times ab \times ab$	

Exercice 9 — Vrai ou Faux ?.

	Vrai	Faux
1/ $8 \times y \times y = (8y)^2$	☐	☐
2/ $2a \times 2a \times 2a = (2a)^3$	☐	☐
3/ $7b \times 7b \times 7b = 7b^3$	☐	☐

	Vrai	Faux
1/ $(xy)^2 = x^2y^2$	☐	☐
2/ $(9a^3)^2 = 9a^5$	☐	☐
3/ $(9a^3)^2 = 18a^6$	☐	☐

11.1.4 Exercices : puissances à exposants positifs ou négatifs

■ **Exemple 11.6** Examine puis complète le tableau suivant.

exposant n	3	2	1	0	-1	-2	-3
puissance 3^n	27	9	3				

■ **Exemple 11.7** Simplifie les puissances suivantes sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles.

$4^0 =$ $\qquad (-2)^0 =$ $\qquad \left(\dfrac{1}{5}\right)^0 =$ $\qquad 4^2 = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$ $\qquad \dfrac{1}{5^{-2}} = 5^2 = 25$

Exercice 10 — . Mêmes consignes

a) $5^{-2} =$

b) $6^0 =$

c) $(-3)^{-4} =$

d) $-3^{-4} =$

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 =$

f) $\dfrac{1}{7^{-2}} =$

g) $-4^{-2} =$

h) $(-4)^{-2} =$

i) $\left(\dfrac{3}{8}\right)^{-1} =$

j) $\dfrac{1}{6^{-2}} =$

k) $(-2)^{-3} =$

l) $2^{-3} =$

Défi -5^0 est-il égal à $(-5)^0$? Justifie.

■ **Exemple 11.8** Simplifie

- $(a^3)^{-2} = \dfrac{1}{(a^3)^2} = \dfrac{1}{a^3 \times a^3} = \dfrac{1}{a^6} = a^{-6}$
- $(y^{-2})^3 = \left(\dfrac{1}{y^2}\right)^3 =$
- $(3b^2)^{-1} =$
- $(5b)^{-2} =$
- $2b^5 \times 5b^{-6} =$

Exercice 11 Simplifie :

a) $(2^5)^0 =$

b) $(2^5)^{-1} =$

c) $(2^{-5})^{-1} =$

d) $(3^{-5})^{-1} =$

e) $(a^5)^{-1} =$

f) $(a^{-3})^5 =$

g) $(5a^3)^{-1} =$

h) $(-3a^2)^{-3} =$

i) $b^{-5} \times b^2 =$

11.2 Puissances de 10

$$
\begin{aligned}
10^6 &= 1\ 000\ 000\\
10^3 &= 1\ 000\\
10^2 &= 100\\
10^1 &= 10\\
10^0 &= 1\\
10^{-1} &= \tfrac{1}{10} = 0{,}1\\
10^{-2} &= \tfrac{1}{10^2} = \left(\tfrac{1}{10}\right)^2 = 0{,}01\\
10^{-3} &= \tfrac{1}{10^3} = \left(\tfrac{1}{10}\right)^3 = 0{,}001\\
10^{-4} &= \tfrac{1}{10^4} = \left(\tfrac{1}{10}\right)^4 = 0{,}000\ 1\\
10^{-9} &= \tfrac{1}{10^9} = \left(\tfrac{1}{10}\right)^9 = 0{,}000\ 000\ 001
\end{aligned}
$$

Table 11.1 – Les préfixes des unités

Puissance	écriture décimale	Nom	Préfixe	Symbole
10^9	1 000 000 000	milliard	giga	G
10^6	1 000 000	million	méga	M
10^3	1 000	mille	kilo	k
10^2	100	cent	hecto	h
10^1	10	dix	déca	da
10^0	1	un		
10^{-1}	0,1	dixième	déci	d
10^{-2}	0,01	centième	centi	c
10^{-3}	0,001	millième	milli	m
10^{-6}	0,000 001	millionnième	micro	µ
10^{-9}	0,000 000 000 1	milliardième	nano	n

R Attention pour les unités d'aire et de volumes. $1\,\text{m} = 10^2$ cm mais $1\,\text{m}^2 = 10^4$ cm^2 et $1\,\text{m}^3 = 10^6$ cm^3.

Théorème 11.9 — Écriture scientifique d'un décimal. Tout nombre décimal s'écrit sous la forme « $a \times 10^n$ ».

a est un nombre décimal (positif ou négatif) ayant **exactement un chiffre non nul à gauche** de la virgule.

n est un entier relatif (positif ou négatif).

L'**ordre de grandeur** de ce nombre est le produit de l'entier le plus proche du décimal de l'écriture scientifique par la puissance de 10 de cette écriture scientifique.

11.2.1 Exercices : puissances de 10 et écriture scientifique

Puissance	écriture décimale	Nom	Préfixe	Symbole
10^{12}	1 000 000 000 000		tera	T
10^{9}	1 000 000 000	milliard	giga	G
10^{6}	1 000 000	million	méga	M
10^{3}	1 000	mille	kilo	k
10^{2}	100	cent	hecto	h
10^{1}	10	dix	déca	da
10^{0}	1	un		
10^{-1}	0,1	dixième	déci	d
10^{-2}	0,01	centième	centi	c
10^{-3}	0,001	millième	milli	m
10^{-6}	0,000 001	millionnième	micro	µ
10^{-9}	0,000 000 000 1	milliardième	nano	n
10^{-12}	0,000 000 000 000 1		pico	p

Table 11.2 – Les puissances de 10, et les préfixes associés

à retenir Si n est un entier positif : $10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zéros}}$ $10^{-n} = \underbrace{0{,}00\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$

Exercice 1 Encadrer les nombres suivants entre 2 puissances de 10 consécutives.

a) 845 : $100 < 845 < 1000$. 845 est compris entre 10^2 et 10^3.

b) 5 482,2 : ....

c) 62 : ....

d) 0,08 : ....

e) 0,000 4 : ....

f) 12 065,8 : ....

g) 0,003 85 : ....

Exercice 2 Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

a) $6{,}54 \times 10^1 =$ ....

b) $5{,}32 \times 10^{-1} =$ ....

c) $67{,}4 \times 10^{-1} =$ ....

d) $-87{,}5 \times 10^3 =$ ....

e) $-87{,}5 \times 10^{-3} =$ ....

f) $-9{,}65 \times 10^2 =$ ....

g) $-9{,}65 \times 10^{-2} =$ ....

h) $6{,}08 \times 10^5 =$ ....

i) $0{,}008\ 75 \times 10^{-7} =$ ....

j) $120 \times 10^{-5} =$ ....

L'écriture scientifique d'un nombre est une écriture sous la forme $a \times 10^n$.
- a est un nombre décimal, avec $1 \leqslant a < 10$
- n est un entier (positif ou négatif)

■ **Exemple 11.10 — écriture scientifique de grand nombres décimaux.** 1) Placer le séparateur décimal juste après le premier chiffre non nul
2) Ecrire les chiffres, en ignorant les zéros qui ne sont pas entre chiffres non nuls.
3) compter le nombre de déplacements du séparateur décimal et en déduire l'exposant de 10.

$35\ 200 =$	La virgule a été déplacée de ...places
$3\ 590\ 000 =$	La virgule a été déplacée de ...places
$170\ 400 =$	La virgule a été déplacée de ...places

Exercice 3 Donner les écritures scientifiques des nombres décimaux suivants.

a) 35 200
b) 186 000 000
c) 24 050
d) 16 720
e) 2 071 300
f) 4 810
g) 900 010
h) 71 005 000
i) 5 142 000
j) 1 100
k) 700 120 000
l) 89 150 000

Jadzia écrit le nombre 23 500 en notation scientifique $23{,}5 \times 10^3$. A-t-elle raison ?

■ **Exemple 11.11 — écriture scientifique de nombres décimaux très proches de zéro.**

$0{,}345 =$	La virgule a été déplacée de ...places
$0{,}056\ 4 =$	La virgule a été déplacée de ...places
$0{,}000\ 042\ 1 =$	La virgule a été déplacée de ...places

Exercice 4 Donner les écritures scientifiques des nombres décimaux suivants.

a) 0,706
b) 0,042
c) 0,009 85
d) 0,000 35
e) 0,000 002 64
f) 0,000 003 28

Exercice 5 — Scales of the Universe. Video link

1. How do you read 10^6 ? ....
2. What is the size of Venice's city center ? ① 10^3 cm ② 10^3 m ③ 10^3 km
3. What estimate of the diameter of Earth can you make?
   ① 10^6 m ② 10^7 m ③ 10^8 m ③ 10^6 km ④ 10^7 km ⑤ 10^8 km
4. The sun is 150 million km from Earth. Find two consecutive powers of 10 such that :

   $$10^{\cdots\cdots}\text{ m} < \text{distance Sun from Earth in meters} < 10^{\cdots\cdots}\text{ m}$$

5. Give an approximation of the size of our solar system.

6. One light year is roughly 10^{16}m. What does this distance represent ?
   One light year is ....

   Use among (a beam = un faisceau) (a bean = un haricot) (a length) (a distance) (empty = vide) (a vaccum= le vide) (to travel= voyager, parcourir)
7. What is the distance to the nearest neighbour star ?
   The .... is light years.

8. Do you think we can observe the nucleus of a cell with a microscope (micro means 10^{-6})?
   The size of the nucleus of a cell is around .... We (can / can't) ....

9. Give an approximation of the size of a carbon atom.
   The radius of a carbon atom is about ....

10. Are atoms the smallest particles ? Explain.

    (protons/neutrons) (to be made of)
11. Did you recognise the narrator's voice ? Look for movies he acted in,
    .... is an american actor.
    ....
    ....
    (to be known for) (a deep voice) (a narrator)

Challenge Light travels at 300 000 km/s in vaccum. Find out the travel distance in 1 nano second.

11.3 Puissances et opérations

Règle Pour tous entiers m, n (positifs ou négatifs), et tous nombres a, b non nuls :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Règle Pour tout nombre a non nul et entiers p et q :

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Démonstration. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^p \times \dfrac{1}{a^q} = a^p \times a^{-q} = a^{p-q}$ ■

Règle Pour tout nombre a, et entiers p, q (positifs ou négatifs) on a $(a^p)^q = a^{p \times q} = a^{pq}$.

■ **Exemple 11.12**

$$a^2 \div a^3 = a^2 \times \frac{1}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1} \quad a^2 \div a^{-3} = a^{2-(-3)} = a^5$$

11.3.1 Exercices : puissances et opérations

Exercice 1 — Calcul mental mathémagique.

On vous donne la table des puissances de 2 ci-dessous.

$2^1 = 2$	$2^{11} = 2\ 048$	$2^{21} = 2\ 097\ 152$
$2^2 = 4$	$2^{12} = 4\ 096$	$2^{22} = 4\ 195\ 304$
$2^3 = 8$	$2^{13} = 8\ 192$	$2^{23} = 8\ 388\ 608$
$2^4 = 16$	$2^{14} = 16\ 384$	$2^{24} = 16\ 777\ 216$
$2^5 = 32$	$2^{15} = 32\ 768$	$2^{25} = 33\ 554\ 432$
$2^6 = 64$	$2^{16} = 65\ 536$	$2^{26} = 67\ 108\ 864$
$2^7 = 128$	$2^{17} = 131\ 072$	$2^{27} = 134\ 217\ 728$
$2^8 = 256$	$2^{18} = 262\ 144$	$2^{28} = 268\ 435\ 456$
$2^9 = 512$	$2^{19} = 524\ 288$	$2^{29} = 536\ 870\ 912$
$2^{10} = 1\ 024$	$2^{20} = 1\ 048\ 576$	$2^{30} = 1\ 073\ 741\ 824$

À l'aide des règles de calcul des puissances, calculer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice.

1) 32×16
2) $4 \times 64 \times 1024$
3) $4 \times 16 \times 32 \times 64$
4) $1024 \div 64$
5) $1\ 048\ 576 \div 32\ 768$
6) $1\ 073\ 741\ 824 \div 64$
7) 128^2
8) $1\ 024^3$

■ **Exemple 11.13 — Vrai ou Faux.**

$10^3 \times 10^2 = 10^{16}$	vrai / faux	$10^9 \times 10 = 10^{10}$	vrai / faux
$10^8 \times 10^2 = 10^8$	vrai / faux	$10^9 \times 10^{-2} = 10^{-11}$	vrai / faux
$10^9 \times 10^2 = 10^{11}$	vrai / faux	$10^9 \times 10^{-2} = 10^7$	vrai / faux
$10^9 \times 10^9 = 10^{81}$	vrai / faux	$10^{-9} \times 10^2 = 10^{-7}$	vrai / faux
$10^9 \times 10 = 10^9$	vrai / faux	$10^{-9} \times 10^{-2} = 10^{-7}$	vrai / faux

Exercice 2 Mettre sous forme d'une puissance de 10 :

$10^6 \times 10^2 =$ $\qquad$ $10^{-6} \times 10^3 =$ $\qquad$ $10^6 \times 10 =$

$10^6 \times 10^{-2} =$ $\qquad$ $10^{-6} \times 10^{-3} =$ $\qquad$ $10^6 \times 10^{-6} =$

Exercice 3 Simplifie les expressions suivantes :

a) $\dfrac{10^5}{10^3}$ b) $\dfrac{10^4}{10^{-5}}$ c) $\dfrac{10^{-7}}{10^2}$ d) $\dfrac{10^0}{10^{-10}}$ e) $\dfrac{10^{13}}{10^{12}}$ f) $\dfrac{10^{-20}}{10^{25}}$

Exercice 4

Mettre sous la forme d'une puisssance de 10 :

$A = \dfrac{10^3 \times 10^{-5}}{10^2}$

$B = \dfrac{10^{-2} \times 10^{-9}}{(10^3)^4}$

$C = \dfrac{(10^{-2})^5}{10^7 \times 10^{-8}}$

$D = \dfrac{10^2 \times 10^{-9}}{10^{-7}}$

$E = \dfrac{10^7 \times 10^5}{10^{-3} \times 10^{-1}}$

$F = \dfrac{(10^4)^3}{10^8 \times 10^{-2}}$

Exercice 5

Donner l'écriture scientifique :

a) 6300×10^4
b) $0{,}012\ 500 \times 10^{-14}$
c) 450×10^6
d) $81\ 500\ 000 \times 10^{23}$
e) $0{,}012\ 500 \times 10^{-12}$
f) $81\ 500\ 000 \times 10^{13}$
g) $0{,}000\ 67 \times 10^{-5}$
h) $0{,}012\ 500 \times 10^{15}$
i) $6\ 300 \times 10^{15}$

Exercice 6

La matière est formée d'atomes très petits. En chimie, pour simplifier les calculs, on les regroupe souvent par paquets de $6,022 \times 10^{23}$, les chimistes appellent cela une mole. Sachant qu'un atome de carbone a une masse d'environ 2.04×10^{-26} grammes, quelle est la masse d'une mole de carbone ?

Exercice 7

Le corps humain contient 25×10^{12} globules rouges. Suite à une maladie un individu perd 12% de ses globules rouges. Combien de globules rouges lui reste-t-il ? Donner le résultat en notation scientifique.