Chapitre

Arithmétique. Nombres entiers

1

1.1 Arithmétique sur les nombres relatifs

Entrainement http://mathsmentales.net/

— addition de relatifs http://bref.jeduque.net/hd71fr

— soustraction de relatifs http://bref.jeduque.net/dnpufe

— multiplication de relatifs http://bref.jeduque.net/fhxet7, 3 relatifs http://bref.jeduque.net/jbk1tp

— quotient de relatifs http://bref.jeduque.net/7rcvbu

1.2 Facteurs, multiples et division euclidienne

Définition 1.1 — Multiples. Soit deux entiers n et m.

m est un multiple de n **si et seulement si** il existe un entier k tel que $m = k \times n$.

Les multiples de n tous les nombres de la forme kn, où k est un entier.

■ **Exemple 1.1**

a) 45 est un multiple de 9 et de 5 car $45 = 5 \times 9$.
b) Enumérer tous les diviseurs de 45.

R Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $0 = 0 \times m$. Donc 0 **est un multiple de tout entier, et tout entier divise** 0. Néanmoins, l'usage est souvent d'ignorer 0 comme multiple.

Définition 1.2 — Division entière. Soit les entiers n et d ($d \neq 0$).

On appelle quotient de n par d l'entier q tel que :

$$qd \leqslant n < qd + d$$

Le reste de la division de n par d est l'entier définit par :

$$n = qd + r \qquad 0 \leqslant r < d$$

n est un multiple de d s.s.i. le reste de la division de n par d est nul.

$$\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \cline{2-2} -\ 15 & 3 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \cline{2-2} -\ 20 & 4 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Figure 1.1 – $17 = 3 \times 5 + 2$ et $20 = 4 \times 5$

■ **Exemple 1.2**

a) $3 \times 5 \leqslant 17 < 4 \times 5$ et $17 = 3 \times 5 + 2$.
b) $4 \times 5 \leqslant 20 < 5 \times 5$ et $20 = 4 \times 5 + 0$.

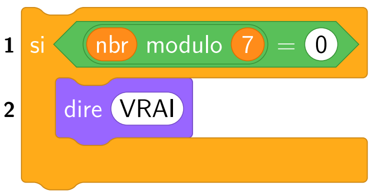


Figure 1.2 – Un script pour tester si nbr est divisible par 7

R Dans `Scratch`, l'instruction n modulo d permet de calculer le reste de la division de n par d.
Par exemple 12 modulo 5 =2.

R La touche $\boxed{\text{F}}$ permet de calculer le quotient et le reste d'une division euclidienne.

1.2.1 Exercices

Exercice 1

a) Le plus grand reste possible dans une division euclidienne par 54 est $\boxed{}$.

b) On a $92\ 947 = 9 \times 10\ 327 + 4$

Écrire le quotient et le reste de la division euclidienne de 92 947 par 9.

c) Les trois divisions euclidiennes suivantes sont exactes :

$4\ 545 = 102 \times 44 + 57$ $\qquad$ $4\ 545 = 100 \times 45 + 45$ $\qquad$ $4\ 545 = 101 \times 45 + 0$

Sans calculer, dire si les nombres 102; 100; 101 sont des diviseurs de 4 545. Justifier.

d) Avec la calculatrice, compléter chaque phrase avec « est un diviseur de » ou « est un multiple de » ou « n'est ni un diviseur ni un multiple de » :

229		1 832	2 391		797
689		539	41		164
455		179	687		229

Exercice 2 — sommes de contrôle.

Le numéro de série horizontal sur le dos d'un billet de monnaie authentique vérifie la propriété suivante « la somme du nombre de lettres, du rang de chaque lettre dans l'alphabet et des chiffres est divisible par 9 ».

a) Vérifier que les numéros de série suivants semblent correct : U13056999935, VA7599836405.

b) Sur un billet authentique, figure le numéro S0216644810-. Le dernier chiffre est illisible, retrouvez-le.

c) Sur un autre billet authentique, on lit -16122340242. La lettre est effacée. Quelles sont les lettres possibles ?

Exercice 3

En utilisant les critères de divisibilité indiquer si l'on peut simplifier chaque fraction par 2, 3, 4, 5, 9 ou 10 :

	2	3	4	5	9	10
1/ $\frac{45}{30}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2/ $\frac{54}{81}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3/ $\frac{1557}{1341}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐

	2	3	4	5	9	10
4/ $\frac{4962}{11334}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐
5/ $\frac{2034}{6066}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐
6/ $\frac{1460}{2180}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Exercice 4

Léa a travaillé pendant les vacances scolaires et a touché son premier salaire. Deviner son salaire sachant que c'est un nombre entier entre 500 et 700 euros, multiple de 9 et de 10 et divisible par 4. Expliquer la réponse.

■ **Exemple 1.3** Écrire la liste de tous les diviseurs de 36 et 60. On teste la divisibilité par 1, puis 2, puis 3, puis 4 , etc.

$$\begin{aligned} 36 &= 1 \times 36 \\ &= 2 \times 18 \\ &= 3 \times 12 \\ &= 6 \times 6 \\ &= 12 \times 3 \\ &= 18 \times 2 \\ &= 36 \times 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 60 &= 1 \times 60 \\ 60 &= \\ 60 &= \\ 60 &= \\ 60 &= \\ 60 &= \\ 60 &= \sqrt{60} \times \sqrt{60} \end{aligned}$$

$\text{Diviseurs}(36) = \{1; 2; 3; 6; 12; 18; 36\}$

Exercice 5

a) Écrire la liste de tous les diviseurs de 92, 56, 12 et 30.

b) Quel est le plus grand diviseur commun à 92 et 56 ? Même question pour 12 et 30.

c) Écrire les fractions $\frac{92}{56}$ et $\frac{12}{30}$ sous forme irréductible.

Exercice 6 — un classique.

On souhaite repartir 42 filles et 90 garçons en des équipes qui contiennent le même nombre de filles et le même nombre de garçons.

a) Peut-on les repartir sur 5 équipes ? Justifier.

b) Écrire la liste des diviseurs de 42 et 90.

c) Quel est le plus grand nombre d'équipes réalisable ?

Exercice 7

Un fleuriste dispose de 126 iris et 210 roses. Il veut en utilisant toutes ses fleurs, réaliser des bouquets contenant tous le même nombre d'iris et le même nombre de roses.

a) Le fleuriste peut-il réaliser 15 bouquets ?

b) Peut-il réaliser 14 bouquets ?

c) Quel nombre maximal de bouquets peut-il réaliser ?

d) Donner la composition de chacun d'eux ?

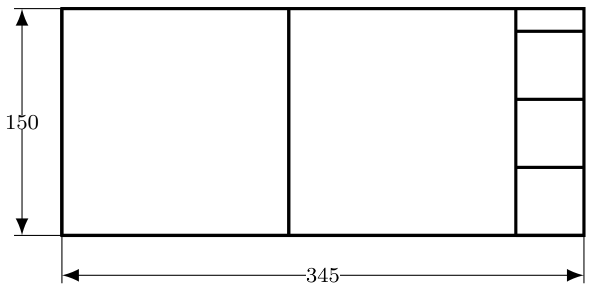
Exercice 8

Carole souhaite réaliser une mosaïque sur un mur de sa maison. La surface à paver est un rectangle de dimensions 108 cm et 225 cm et doit être entièrement recouverte par des carreaux de faïence carrés de même dimension sans découpe.

a) Carole peut-elle utiliser des carreaux de 3 cm de côté ? De 6 cm de côté ?

b) Quelle est la dimension maximale des carreaux que Carole peut poser ?
Combien de carreaux utilisera-t-elle ?

■ Exemple 1.4 — Illustration géométrique de l'algorithme d'Euclide https://www.geogebra.org/m/qjd4ngam.



À chaque étape, on remplit le rectangle restant par des carrés de côté égal à la longueur du plus petit côté.

$345 = 150 \times 2 + 45$;

$150 = 45 \times 3 + 15$;

$45 = 15 \times 3$;

Exercice 9 — https://link.dgpad.net/d9zJ.

```
1 mettre a à ( )
2 mettre b à ( )
3 mettre r à (a) modulo (b)
4 répéter jusqu'à ce que <(r) = (0)>
5     mettre a à (b)
6     mettre b à (r)
7     mettre r à (a) modulo (b)
8 dire (b) pendant (5) secondes
```

On saisit les valeur a $= 42588$ et b $= 276822$.

a) Faire tourner à la main le script ci-contre et remplir le tableau ci-dessous. Quel est le nombre de répétition de la boucle ?

	a	b	r
avant la ligne 4			
après 1 boucle			
après 2 boucles			
après 3 boucles			
après 4 boucles			
après 5 boucles			

b) Rendre irréductible la fraction $\dfrac{42588}{276822}$.

c) Préciser ce qu'affiche le programme pour a $= 23$ et b $= 42$. Que peut-on en déduire de la fraction $\dfrac{23}{42}$?

Exercice 10

Un chocolatier a fabriqué 108 pralines et 135 chocolats. Il souhaite constituer les ballotains ainsi :

— le nombre de pralines est le même dans chaque ballotins ;

— le nombre de chocolats est le même dans chaque ballotins ;

— tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

a) Peut-il utiliser exactement 9 ballotins ? 12 ballontins ?

b) Quel nombre maximal de ballotins pourra-t-il réaliser ?

c) Combien y aura-t-il alors de chocolats et de pralines dans chaque ballotins ?

d) Une entreprise souhaite lui acheter ces boîtes. Compléter la facture ci-dessous :

Produit	Quantité	Prix unitaire HT	Montant HT	Montant TVA 5,5 %	Montant TTC
Ballotin Choco-praline	20	7.80 €			

Exercice 11 Analyser les deux scripts ci-dessous et décrire ce que représente la variable a pour 108 en fin de chaque script.

```
mettre a à 0
mettre b à 1
répéter 108 fois
    si b modulo 9 = 0 alors
        ajouter 1 à a
    mettre b à b + 1
```

```
mettre a à 0
mettre b à 1
répéter 108 fois
    si 108 modulo b = 0 alors
        ajouter 1 à a
    mettre b à b + 1
```

Exercice 12

Effectuer les calculs suivant et donner les résultats sous forme de fraction irréductible. Détailler les étapes pour ramener au même dénominateur.

$$a = 2 + \frac{7}{-30} \qquad b = 3 + \frac{-7}{5} \qquad c = \frac{1}{15} - \frac{4}{5} - 2$$

$$d = \frac{5}{7} - \frac{2}{7} \times \frac{4}{3} \qquad e = \frac{7}{12} - \frac{1}{8} \qquad f = \frac{7}{6} + \frac{7}{16}$$

$$g = \frac{3}{20} + \frac{4}{25} \qquad h = \frac{2}{7} + \frac{5}{21} \qquad i = \frac{7}{12} + \frac{5}{18} - \frac{3}{4}$$

Exercice 13

On fait rouler deux cercles de périmètre 42cm et 8cm le long d'une ligne horizontale. On marque les 2 cercles en un point A. Au début les deux marques sont en contact.

a) Après combien de tours pour chaque cercle, les marques sont à nouveau en contact ?

b) Même question pour des cercles de perimètre 12cm et 18cm.

Exercice 14

Deux ampoules clignotent. L'une s'allume toutes les 153 secondes et l'autre toutes les 187 secondes. À minuit, elles s'allument ensemble. Détermine l'heure à laquelle elles s'allumeront de nouveau ensemble.

1.3 Nombres premiers

Définition 1.3 Un nombre entier est **premiers** s'il admet **exactement** 2 diviseurs **différents** : 1 et lui même.

On classe les nombres entiers positifs en 3 catégories :
l'unité 1
les nombres premiers 2, 3, 5...
les nombres composés tout le reste.

Théorème 1.5 — Nombres premiers < 100. sont :
- 2, 3, 5 et 7.
- tous les nombres non divisibles par 2, 3, 5 et 7.

■ **Exemple 1.6** 11 , 31 et 97 sont des nombres premiers.

Théorème 1.7 — Test de primalité (admis). Si $n \in \mathbb{N}^*$ n'admet pour diviseur aucun des nombres (premiers) compris entre 2 et $\sqrt{n}$, alors n est premier.

■ **Exemple 1.8** Vérifier que les nombres 149 et 173 sont premiers.

Théorème 1.9 — théorème fondamental de l'arithmétique. Tout nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ se décompose de manière unique (à l'ordre près) en produit de facteurs premiers.

■ **Exemple 1.10** 31 est un nombre premier, sa décomposition en facteurs premiers est lui-même.
$1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7^1$. Le facteur 2 a pour multiplicité 4.
$25777 = 149 \times 173$.

R La combinaison SECONDE F de la CASIO permet d'écrire la décomposition en facteurs premier. Si le nombre est premier, l'affichage reste inchangé.

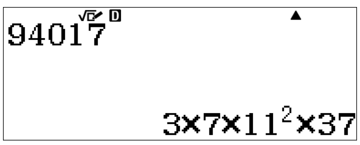
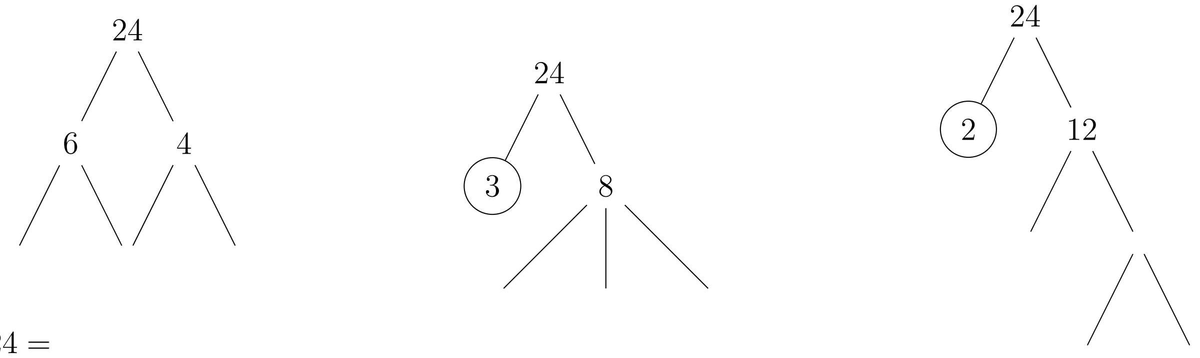


Figure 1.3 – Ne pas oublier d'appuyer sur EXE après le nombre.

1.3.1 Exercices

■ Exemple 1.11 — Décomposer en facteurs premiers.



$24 =$

Exercice 1 — sans calculatrice. Décomposer les nombres suivants en facteurs premiers.

$a = 240$	$b = 18$	$c = 180$	$d = 90$	$e = 360$

Exercice 2

```
1 demander (saisir un entier) et attendre
2 mettre [N] à (réponse)
3 mettre [nbr] à (2)
4 répéter jusqu'à ce que <(N) = (1)>
5     si <((N) modulo (nbr)) = (0)>
6         dire (nbr) pendant (5) secondes
7         mettre [N] à ((N) / (nbr))
8     sinon
9         ajouter (1) à [nbr]
```

a) On saisit le nombre 150. Lancer le script à la main. Représenter le déroulement de l'algorithme en notant dans la colonne de droite les valeurs affichées par la ligne 6, et dans la colonne de gauche les valeurs successives de N à la ligne 7.

150	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	

24	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	

b) Même question si on saisit 24.

c) Quel est l'objet de cet algorithme ?

d) Représenter le déroulement de l'algorithme pour N=2450, 999, 1122 et 909 :

2 450	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	

1 122	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	

999	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	

909	.....
.....	.....
.....	.....
.....	

■ **Exemple 1.12**

	Vrai	Faux
1/ 7 est un facteur de $2 \times 3^5 \times 7^2$	☐	☐
2/ 6 est un diviseur de $2 \times 3^5 \times 7^2$	☐	☐
3/ 14 est un facteur de $2 \times 3^5 \times 7^2$	☐	☐
4/ 14 est un facteur premier de $2 \times 3^5 \times 7^2$	☐	☐
5/ 11 est un facteur premier de $2 \times 3^5 \times 7^2$	☐	☐
6/ 2×3^2 est un facteur de $2 \times 3^5 \times 7^2$	☐	☐
7/ $3^4 \times 7$ est un facteur de $2 \times 3^5 \times 7^2$	☐	☐
8/ $2 \times 3^5 \times 7^2$ est un multiple de $3^4 \times 7$	☐	☐
9/ $2^2 \times 3 \times 7$ est un multiple de $2 \times 3^5 \times 7^2$	☐	☐
10/ $2^6 \times 3^8 \times 11$ est un multiple de $2 \times 3^5 \times 7^2$	☐	☐

Exercice 3

a) À l'aide de la calculatrice donner la décomposition en facteurs premiers de 2520.

b) Entourer, sans calcul supplémentaire, les nombres qui divisent 2520 :

$13 \qquad 3 \times 5 \times 7 \qquad 2^2 \times 3^2 \times 5 \qquad 2^4 \times 3$

Exercice 4

a) À l'aide de la calculatrice donner la décomposition en facteurs premiers de 1125 et 450.

b) Entourer, sans calcul supplémentaire, les nombres qui sont des diviseurs communs à 1125 et 450 :

$3 \times 5 \qquad 3^2 \times 5^4 \qquad 3 \times 5^2 \qquad 2 \times 5^2 \qquad 3^2 \times 5 \qquad 3 \times 5 \times 11$

c) Quel est la décomposition en facteur premier du plus grand diviseurs commun à 1125 et 450 ?

Exercice 5

a) À l'aide de la calculatrice donner la décomposition en facteurs premiers de 360.

b) Entourer, sans calcul supplémentaire, les nombres qui sont des multiples de 360 :

$3^2 \times 5 \qquad 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \qquad 2^4 \times 5 \qquad 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$

Exercice 6

a) À l'aide de la calculatrice donner la décomposition en facteurs premiers de 42 et 70.

b) Entourer, sans calcul supplémentaire, les nombres qui sont des multiples communs à 42 et 70 :

$2 \times 3 \times 7 \qquad 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \qquad 2^2 \times 5^2 \qquad 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 \qquad 2^5 \times 3 \times 5^3 \qquad 2 \times 3 \times 5 \times 7^2$

c) Quel est la décomposition en facteurs premiers du plus petit multiple commun à 1125 et 450 ?

Exercice 7

Un groupe d'élèves participent à une course d'orientation. On peut répartir les élèves présents en des équipes de 6, ou par équipes de 15, ou encore par équipes de 18.

Quel est le nombre minimum d'élèves présents ?