Chapitre 6

La fonction exponentielle

6.1 Définition et propriétés

Théorème 6.1 Il existe une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = 1$ et $f' = f$.

Proposition 6.2 Une telle fonction ne s'annulle pas.

Démonstration. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x)f(-x)$.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x)f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) \text{ et } \varphi(0) = f(0)f(-0) = 1.\\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x)\\ &= 0\end{aligned}$$

φ est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, c'est une fonction constante, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x)f(-x) = \varphi(x) = 1$.

En conséquence $f(x) \neq 0$. ■

Proposition 6.3 Une telle fonction est unique.

Démonstration. Prenons deux fonctions f et g vérifiant le théorème 6.1. On définit la fonction ψ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \text{ et } \psi(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1.\\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g^2(x)}\\ &= 0\end{aligned}$$

ψ est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, c'est une fonction constante, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \psi(x) = 1$ et $f(x) = g(x)$. ■

Définition 6.1 — notation 1. On note « exp » l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Définition 6.2 — nombre d'Euler. On note $e = \exp(1) \approx 2.71828183$.

Propriétés 6.4 Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

(i) $\exp(0) = 1$

(ii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

(iii) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

En particulier $\exp(x+1) = e\exp(x)$

(iv) $\exp(nx) = \big(\exp(x)\big)^n$.

En particulier $\exp(2x) = (\exp(x))^2$.

(v) $\exp(x) > 0$, et $\sqrt{\exp(x)} = \exp\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Démonstration.

(i) par définition

(ii) vu dans la démonstration de la proposition 6.3

(iii) Pour y fixé, on définit la fonction γ sur $\mathbb{R}$ par $\gamma(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$.

$\gamma'(x) = \gamma(x)$ et $\gamma(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = 1$.

γ vérifie aussi les conditions du théorème 6.1.

Par unicité on a $\gamma = \exp$.

(iv) conséquence directe de (iii)

(v) $\exp(x) = \exp\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right) = \exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\exp\left(\dfrac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2$. ∎

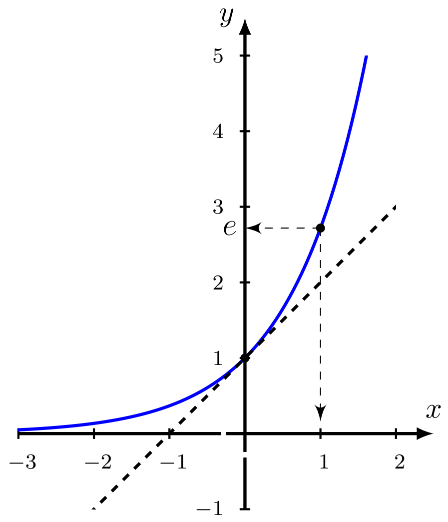
Définition 6.3 — notation 2. On note pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.

Cette notation est cohérente avec le fait que la fonction exponentielle hérite des propriétés connues des puissances :

- $\mathrm{e}^0 = 1$; $\quad e = \mathrm{e}^1$ et $\sqrt{e} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$; $\quad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y \quad$ et $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$ pour $n \in \mathbb{N}$

R Pour un exposant $n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathrm{e}^n = e \times e \ldots e$ et $\mathrm{e}^{-n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$

R La suite $\big(\mathrm{e}^{nx}\big) = \big(\exp(nx)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.



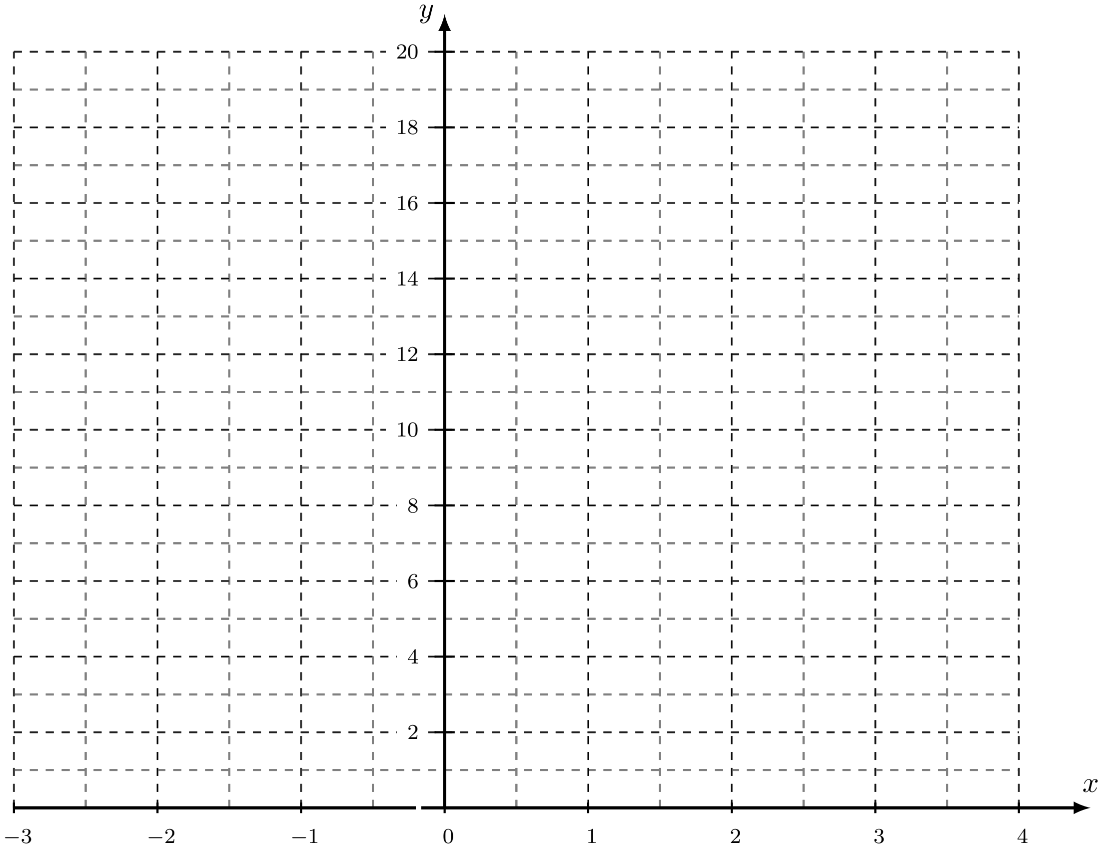
Théorème 6.5 La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Sa dérivée étant elle-même et elle est positive ! ∎

Théorème 6.6 La fonction $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax+b}$.

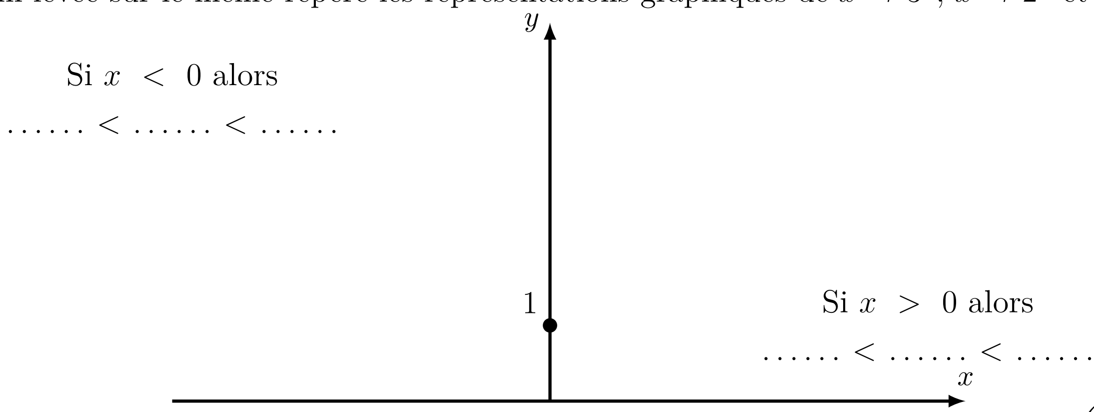
6.1.1 TP n° 1 : introduction aux fonctions exponentielles

Compléter le tableau de valeur à l'aide de votre calculatrice et tracer la représentation graphique de la fonction $f\colon x \mapsto 2^x$.

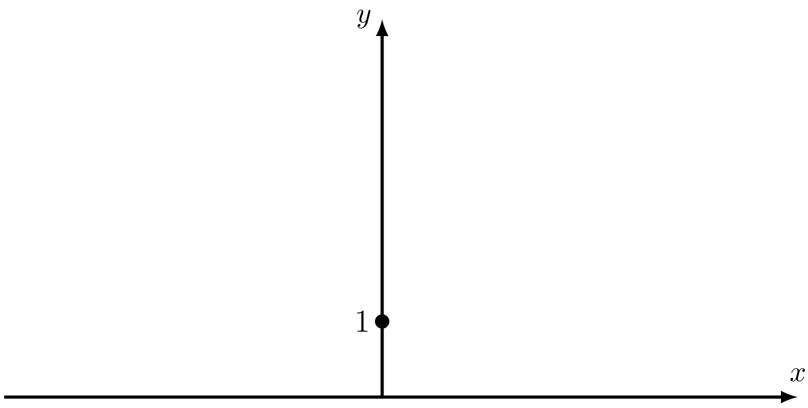


x	$f(x) = 2^x$
-3	
-2	
-1	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
4	

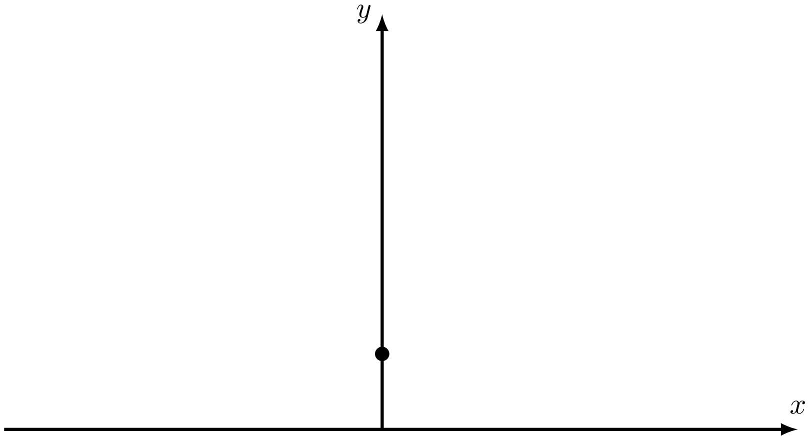
Tracer à main levée sur le même repère les représentations graphiques de $x \mapsto 3^x$, $x \mapsto 2^x$ et $x \mapsto 1.5^x$:



Tracer à main levée sur le même repère les représentations graphiques de $f\colon x \mapsto 2^x$ et $g\colon x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0.5^x$:



Tracer à main levée sur le même repère la représentation graphique de $f\colon x \mapsto 2^{x+3}$:



Bilan : Compléter

$b > 0$, le domaine de la fonction $f\colon x \mapsto b^x$ est ....

Les représentations graphiques des fonctions $f\colon x \mapsto 3^x$ et $g\colon x \mapsto \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ sont ....

Associer les fonctions dont les représentations graphiques sont images par symétrie le long de l'axe des y :

$$A\colon x \mapsto 4x \qquad B\colon x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x \qquad C\colon x \mapsto 1.5^x \qquad D\colon x \mapsto 0.5^x \qquad E\colon x \mapsto 0.25^x$$

De manière générale les représentations graphiques des fonctions ....

sont images par symétrie le long de l'axe des y.

Pour $b > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a 2^x ...... 0.

Si $b > 1$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = b^x$ est strictement ....

Si $0 < b < 1$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = b^x$ est strictement ....

L'équation $2^x = 3$ inconnue x admet .... solutions.

L'équation $2^x = -5$ inconnue x admet .... solutions.

$b^4 b^3 =$ .... $b^3 b^{-5} =$ ....

$\dfrac{1}{b^3} = b^{\cdots}$ .... $b^5 b =$ ....

$(b^2)^3 =$ .... $b^x b^3 = b^{\cdots}$, ...

$b^{-2x+1} b^{5x} =$ .... $b^{2x} b^{x-30} =$ ....

$\dfrac{b^{2x+3}}{b^{x+1}} =$ .... $\dfrac{1}{3^{2x+1}} =$ ....

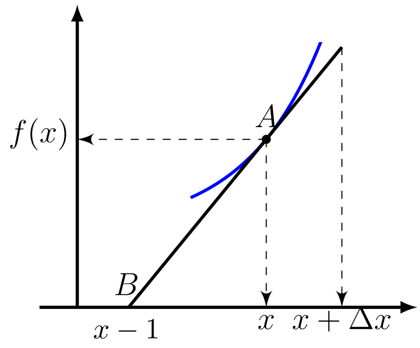
$\dfrac{1{,}15^{x+5}}{1{,}15^{3x+2}} =$ .... $0{,}85^{2x-1} 0{,}85^{-x+3} =$ ....

6.1.2 TP n° 2 : Représentation de la fonction exponentielle par la méthode d'euler

Soit f_* vérifiant $f_*' = f_*$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

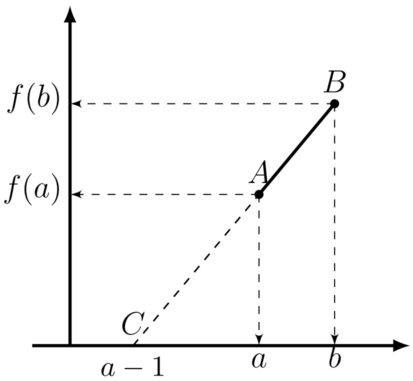
> Pour tracer la tangente à la $\mathscr{C}$ en un point $A(x\ ;\ y) \in \mathscr{C}$ il suffit de tracer la droite (AB) ou $B(x-1\ ;\ 0)$.

En effet la droite (AB) avec $B(x-1\ ;\ 0)$ a pour pente $m = f_0(x)$. Comme $f_*' = f$, la pente de (AB) est $f_*'(x)$. C'est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.



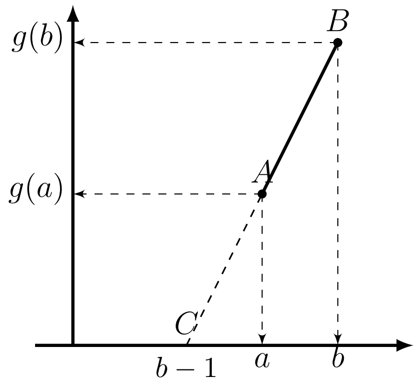
Objectif Construire la représentation graphique d'une approximation de f_* par une fonction **affine par morceaux** f tel que sur chaque intervalle ou elle est affine elle vérifiera $f'(x) \approx f(x)$ et $f(0) = 1$.

Partie A Approche graphique Observer les graphiques ci-dessous :



f est une fonction affine sur $[a;b]$. Elle est dérivable sur $]a;b[$
Pour $a < x < b$:

$$f'(x) = f(a)$$



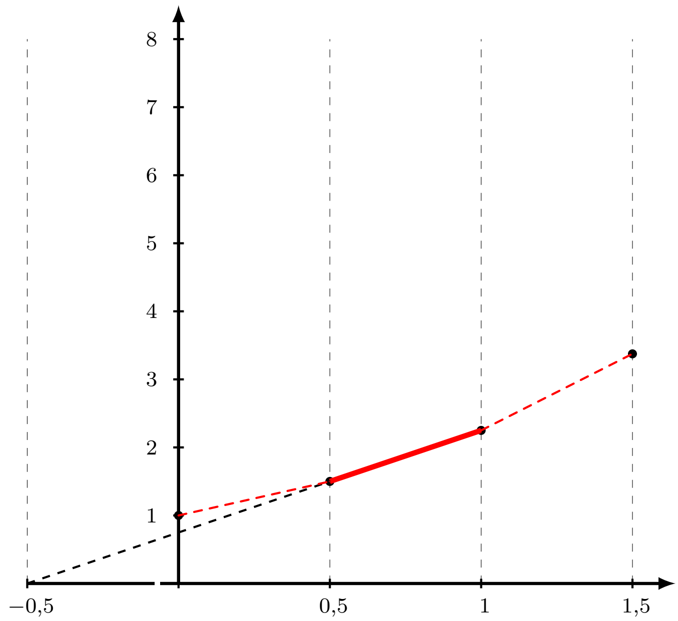
g est une fonction affine sur $[a;b]$. Elle est dérivable sur $]a;b[$
Pour $a < x < b$:

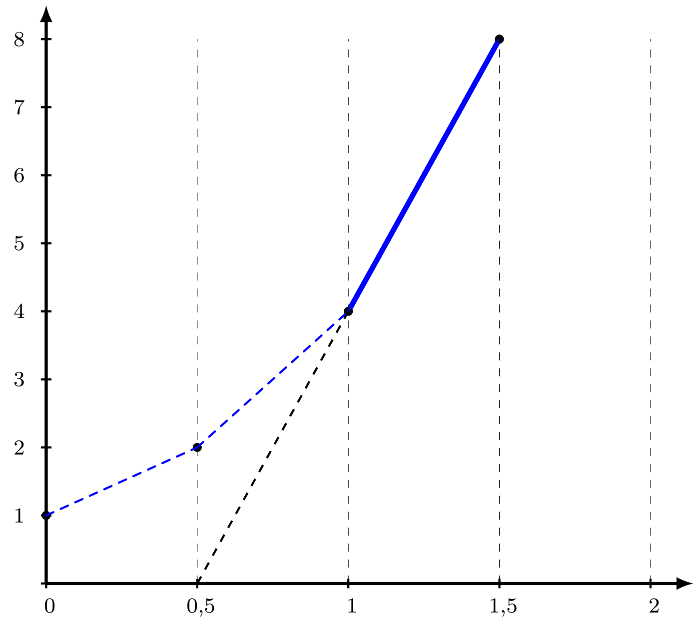
$$g'(x) = g(b)$$

Dans les deux cas, si l'intervalle $[a;b]$ est assez petit, on a pour tout $x \in\ ]a;b[$: $f'(x) = f(a)$ ou $f(b) \approx f(x)$

On commence en prenant des intervalles de largeur $\frac{1}{2}$: $[0;0.5]$, $[0.5;1]$, $[1;1.5]$, $[1.5;2]$...

1) Compléter sur **le même repère** de la feuille millimétrée les graphiques ci-dessous.
2) Refaire un dessin plus précis avec un pas de 0,2.
3) Expliquer pourquoi la représentation de f_* cherchée est entre les deux graphiques tracés.
4) Donner une valeur approchée de $e = f(1)$. Que peut-on faire pour avoir un encadrement plus précis ?





Partie B Approche algébrique On considère un pas de $\dfrac{1}{n}$. On va caculer explicitement les valeurs prises par les fonctions affines par morceaux construites dans la partie A aux points $f(\frac{k}{n})$.

$$\text{pour } \frac{k}{n} < x < \frac{k+1}{n} \qquad f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}f'(x) = \frac{1}{n}f(x)$$

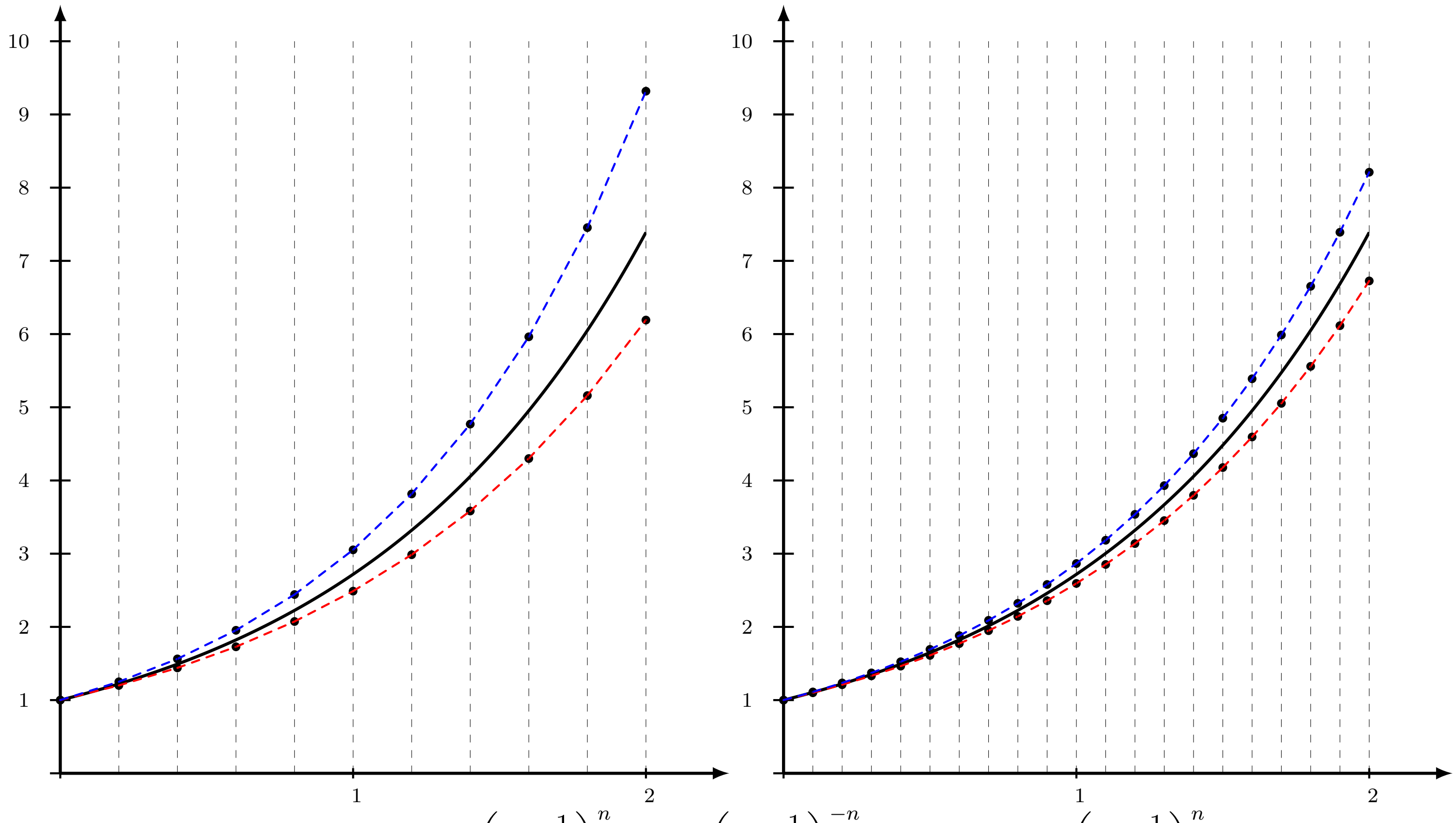
$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \approx \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \approx \frac{1}{n}g\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Pour un pas $\frac{1}{n}$ $(n > 2)$, on encadre la fonction f_* par deux fonctions f_n et g_n affines par morceaux tel que :

$$f(0) = 1 \qquad g(0) = 1$$

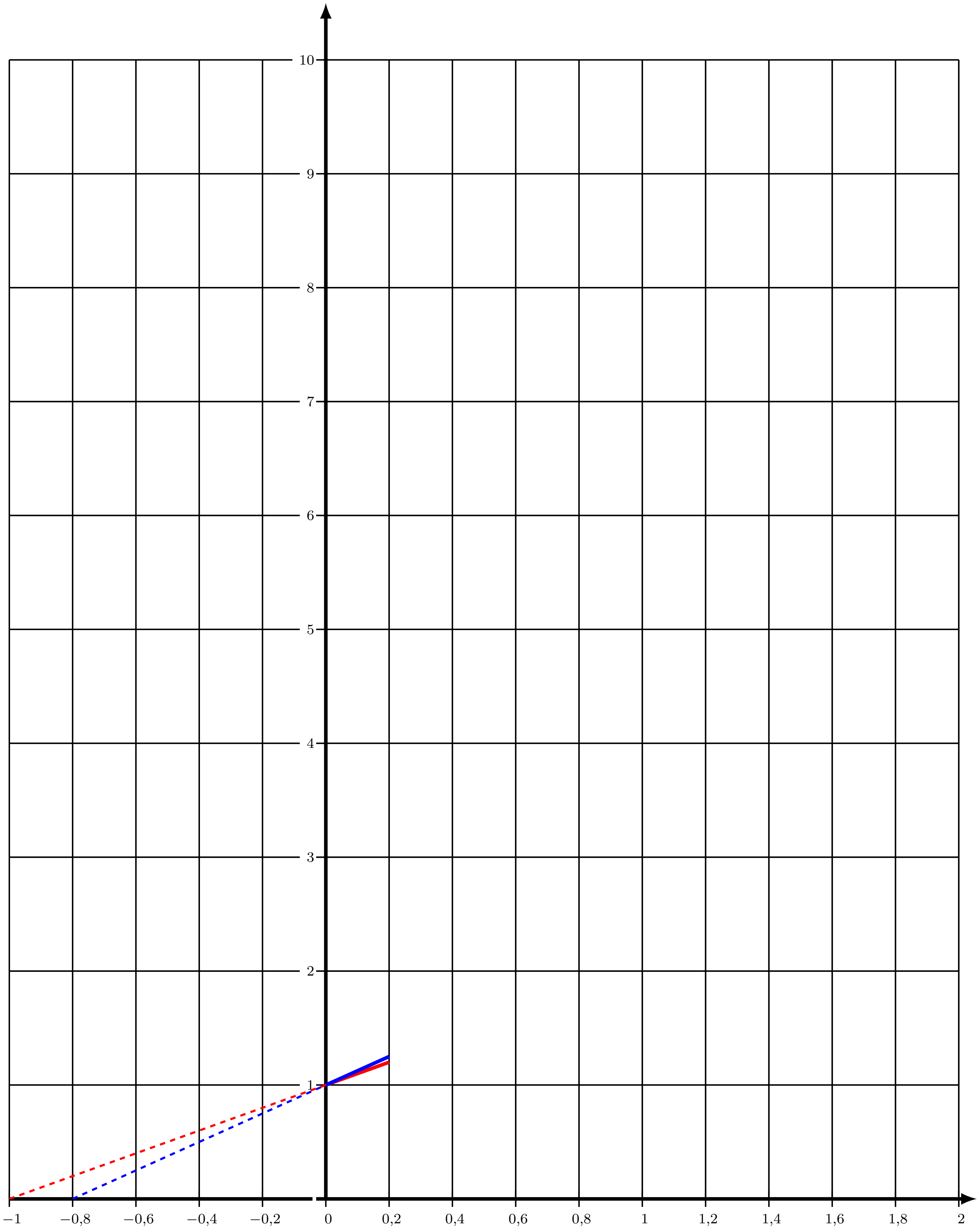
$$\text{pour } k \in \mathbb{Z} \quad f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k f(0) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \qquad \text{pour } k \in \mathbb{Z} \quad g\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k} g(0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k}$$

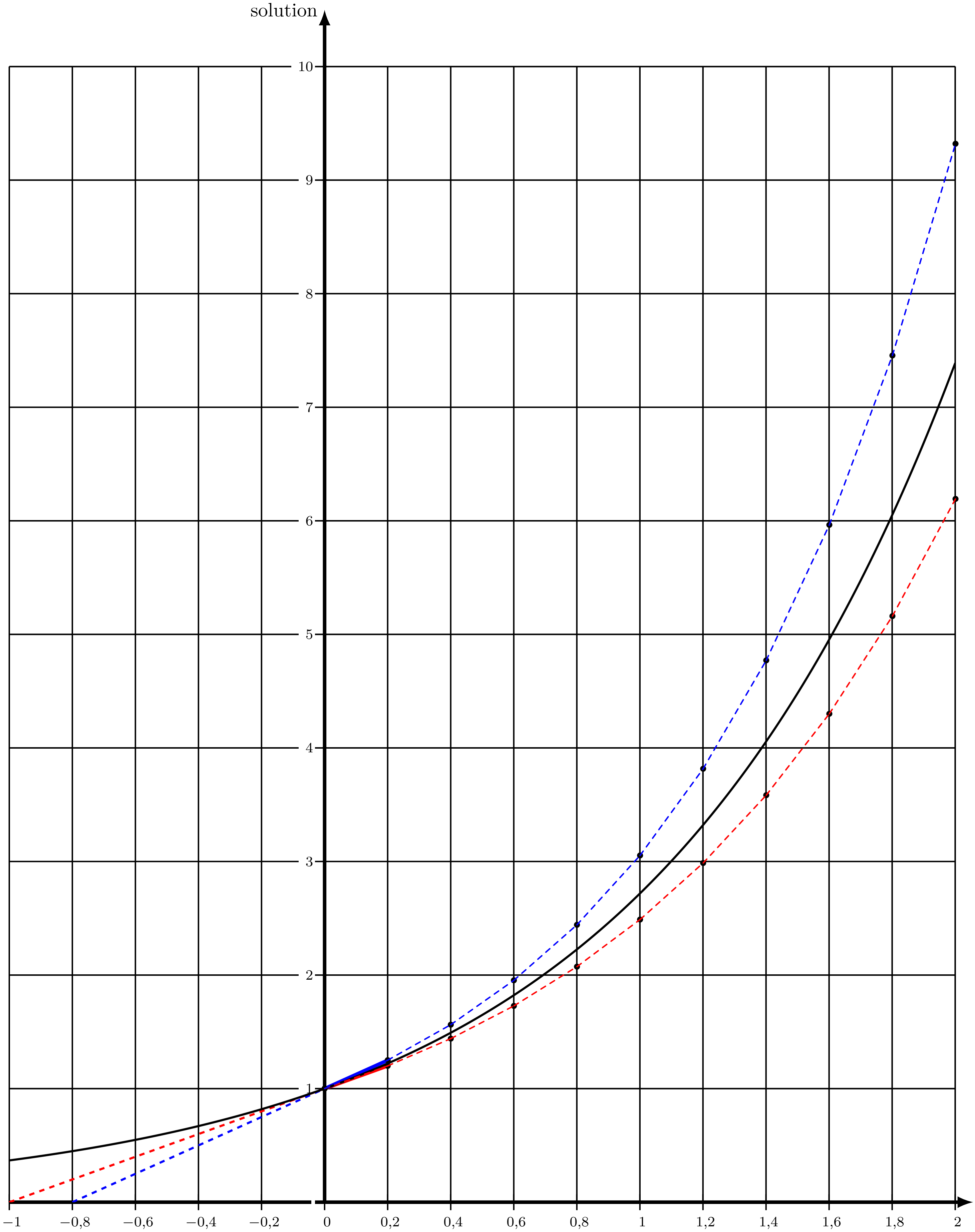
Ci dessous les représentations graphiques pour un pas $= 0{,}2$ et un pas $= 0{,}1$.



En prenant $k = n$, on peut écrire $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$. D'où $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.


16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−0,5
0
0,5
1
1,5
2


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−0,8
−0,6
−0,4
−0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2


solution
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−0,8
−0,6
−0,4
−0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2

Partie C Algorithme Python Le programme ci-dessous donne une courbe approchant la représentation graphique de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0; 1]$.

1) Où apparaît le nombre de subdivisions régulières ?
2) Expliquer dans les lignes 8 et 9 le calcul des coordonnées du point suivant de la courbe.

```
1  n = 10                # nombre de points à placer
2  X = []                # liste des abscisses
3  Y = []                # liste des ordonnées
4  xk , yk = 0 , 1       # (x0 = 0 ; y0 = 1) est le premier point de la Cf
5  for k in range(1, n + 1):
6      X.append(xk)      # abscisse/ordonnée sont ajoutées aux listes X et Y
7      Y.append(yk)
8      xk = xk + 1/n     # l'abscisse suivante est x_{n+1} =
9      yk = yk + 1/n*yk  # l'ordonnée suivante est f((k+1)/n) ≈
10 import matplotlib.pyplot as plt
11 plt.plot(X, Y, marker='o', linestyle='-') # Affichage des points dans repère
12 plt.show()
```

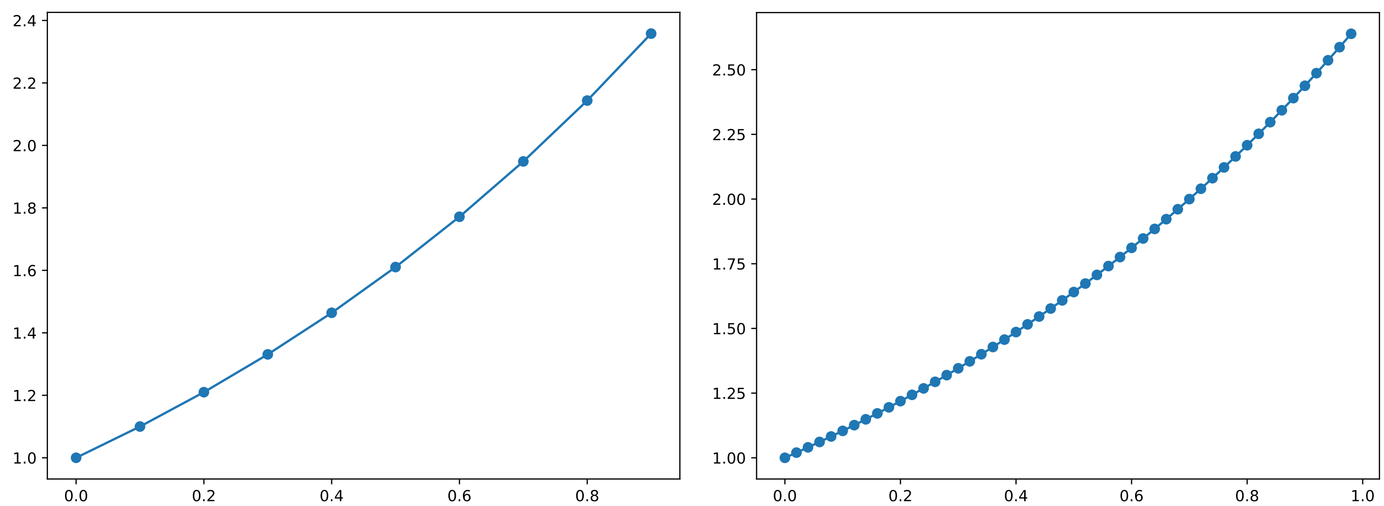


Figure 6.1 – Représentations obtenues par méthodes d'Euler de la fonction exponentielle pour 10 et 100 subdivisions de l'intervalle $[0; 1]$. Lien `https://my.numworks.com/python/niz-moussatat/methode_euler` pour script numworks

6.2 Équations et inéquations

Propriété 6.7 Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \iff x = y$

Propriété 6.8 Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \iff x < y$

Démonstration. La fonction exp est **strictement** croissante. ∎

■ **Exemple 6.1** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{3x+5} = \mathrm{e}^{2x+4}$, inconnue x.

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{3x+5} = \mathrm{e}^{2x+4} \\ \iff & 3x+5 = 2x+4 \\ \iff & x = -1 \end{aligned}$$

■ **Exemple 6.2** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{x^2} > \mathrm{e}^{4x-4}$, inconnue x.[1]

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{x^2} > \mathrm{e}^{4x-4} \\ \iff & x^2 > 4x-4 \\ \iff & x^2 - 4x + 4 > 0 \\ \iff & (x-2)^2 > 0 \qquad S = \mathbb{R} \setminus \{2\} \end{aligned}$$

[1] Afin d'éviter toute ambiguité, $b^{x^2} = b^{(x^2)}$. On notera en effet $2^{(3^2)} \neq (2^3)^2$.

Propriété 6.9 Soit l'équation $\mathrm{e}^x = y$ d'inconnune x :

(i) Si $y \leqslant 0$ alors pas de solutions.
y n'admet pas d'antécédents par la fonction exp.[2]

(ii) Si $y > 0$ alors la solution est unique.
y admet un unique antécédent par la fonction exp :

$$\mathrm{e}^x = y \iff x = \ln(y) = \log_e(y)$$

[2] 😊 $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$

■ **Exemple 6.3**

1) $\mathrm{e}^x = 1 \iff x = \ln(1) = 0$.
2) $\mathrm{e}^x = 2 \iff x = \ln(2) \approx 0.69314718$
3) $\mathrm{e}^x = -4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

R Pour $b > 0$, et $x \in \mathbb{R}$ on définit $b^x = \left(\mathrm{e}^{\ln(b)}\right)^x = \mathrm{e}^{ln(b)x}$.
Par conséquent, la fonction $f\colon x \mapsto b^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = ln(b)b^x$.

R Si $b < 0$ on ne peut pas définir b^x pour x non entier. Les fonctions $x \mapsto (-2)^x$ ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$.

6.3 Exercices : propriétés de l'exponentielle

Exercice 1 Simplifier les expressions suivantes :

$\mathrm{e}^3\mathrm{e}^4 = \dots\dots\dots$

$\dfrac{\mathrm{e}^{-5}}{\mathrm{e}^2} = \dots\dots\dots$

$\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}} = \dots\dots\dots$

$\dfrac{1}{\sqrt{e}-1} = \dots\dots\dots$

$\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-4} = \dots\dots\dots$

$\dfrac{\left(\mathrm{e}^{-5}\right)^2}{\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-6}} = \dots\dots\dots$

$e\mathrm{e}^5 + 5(\mathrm{e}^2)^3 = \dots\dots\dots$

$\left(\mathrm{e}^3\right)^{-2}\mathrm{e}^5 = \dots\dots\dots$

Exercice 2 Simplifier les expressions suivantes :

$E_1(x) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}$

$E_2(x) = \left(\mathrm{e}^{3x+2}\right)^2$

$E_3(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x+1}}{\mathrm{e}^{3x-4}}$

$E_4(x) = \mathrm{e}^{2x+1}\mathrm{e}^{-3x+5}$

$E_5(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x-1}}{\mathrm{e}^{-x+2}}$

$E_6(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x-7}}{\mathrm{e}^{2x}}\dfrac{\mathrm{e}^{3x+5}}{\mathrm{e}^{-2x+1}}$

$E_7(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{5x+7}\mathrm{e}^{-x-3}}{\mathrm{e}^{2x+3}}$

$E_8(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{-2x}}$

Exercice 3 Développer simplifier réduire les expressions suivantes :

$E_1(x) = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 5)$

$E_2(x) = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - 2)$

$E_3(x) = \mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$

$E_4(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 3)$

$E_5(x) = (\mathrm{e}^{-x} + 1)(-\mathrm{e}^x + 2)$

$E_6(x) = (\mathrm{e}^{3x} - 2)^2$

$E_7(x) = (\mathrm{e}^x + 1)^2$

$E_8(x) = (\mathrm{e}^x - 3)(\mathrm{e}^x + 3)$

$E_9(x) = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2$

Exercice 4 Compléter pour factoriser les expressions :

$\mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\Big(\qquad\qquad \Big)$

$\mathrm{e}^{2x} - 1 = \Big(\qquad \Big)^2 - \Big(\qquad \Big)^2 = \dots\dots\dots$

$\mathrm{e}^{-4x} - 25 = \dots\dots\dots$

$\mathrm{e}^{6x} + 4\mathrm{e}^{3x} + 4 = \Big(\qquad \Big)^2 + 4\Big(\qquad \Big) + 4 = \Big(\qquad\qquad \Big)^2$

$9\mathrm{e}^{-2x} - 6 + \mathrm{e}^{2x} = \Big(\qquad \Big)^2 - 2\Big(\qquad \Big)\Big(\qquad \Big) + \Big(\qquad \Big)^2 = \Big(\qquad\qquad \Big)^2$

Exercice 5 Montrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{e + \mathrm{e}^{x+1}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

$1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

$\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$

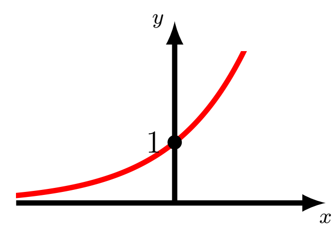
$\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$

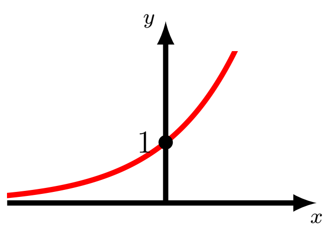
$\dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = 2$

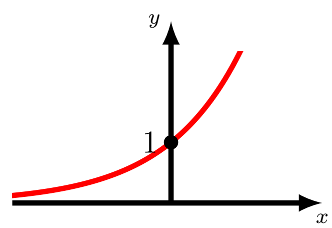
$\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$

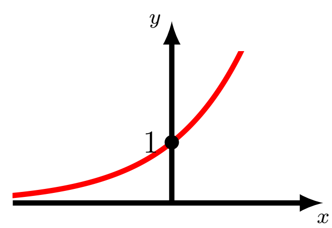
■ **Exemple 6.4 — Utiliser le sens de variation et le signe de la fonction exponentielle.** En s'aidant éventuellement de la représentation graphique de la fonction exponentielle encadrer au mieux e^a dans les cas suivants :

$1 < a \leqslant 4$ $\qquad$ $-2 < a < 3$ $\qquad$ $\ln(2) < a < \ln(3)$ $\qquad$ $a < 3$









Exercice 6 Compléter :

Si $a < -1$ alors	.........e^a.........	Si ....alors $\mathrm{e}^a < 1$
Si $-2 < a \leqslant 0$ alors	.........e^a.........	Si ....alors $\mathrm{e}^a > e$
Si $1 \leqslant a < 3$ alors	.........e^a.........	Si ....alors $\mathrm{e}^a > 1$
Si $0 < a < 2$ alors	.........e^a.........	Si ....alors $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} < \mathrm{e}^a < 1$
Si $\ln(0.1) < a < \ln(2)$ alors	.........e^a.........	Si ....alors $0.5 < \mathrm{e}^a < 3$

$\ln(k)$ est l'antécédent de k par la fonction exponentielle $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^x$. Donc $f(k) = \mathrm{e}^{\ln(k)} = k$.

Exercice 7 — . Simplifier si possible les écritures suivantes :

$\ln(1) =$	$\ln(\mathrm{e}^2) =$	$\ln(\mathrm{e}^3) =$	$\ln(-1) =$ ....
$\ln(e) =$	$\ln\left(\frac{1}{e}\right) =$	$\ln(5) =$	$\ln(0) =$ ....

■ **Exemple 6.5 — ramener à la même base.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{2x-3} = 1 \\ \iff\ &\mathrm{e}^{2x-3} = \mathrm{e}^0 \\ \iff\ &2x-3 = 0 \\ &x = \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{x-3} = \mathrm{e}^{3x+1} \\ \iff\ &x-3 = 3x+1 \\ \iff\ &-4 = 2x \\ &x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{x^2} > \mathrm{e}^{4x-4} \\ \iff\ &x^2 > 4x-4 \\ \iff\ &x^2 - 4x + 4 > 0 \\ \iff\ &(x-2)^2 > 0 \qquad S = \mathbb{R} \setminus \{2\} \end{aligned}$$

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-4}$	(E_3) $\mathrm{e}^x + 4 = 0$	(E_5) $\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^{-2x+3}$	(E_7) $\mathrm{e}^{4x^2} = \mathrm{e}^{36}$
(E_2) $\mathrm{e}^{-x} = 1$	(E_4) $\mathrm{e}^{2x-1} = e$	(E_6) $\mathrm{e}^{x^2+5} = \left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2$	(E_8) $\mathrm{e}^{x^2+x} = 1$

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $(3x-5)(\mathrm{e}^x+2) = 0$	(E_2) $(2x+7)(\mathrm{e}^x-3) = 0$	(E_3) $4\mathrm{e}^{-x} + 7x\mathrm{e}^{-x} = 0$

■ **Exemple 6.6** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} &2\mathrm{e}^x + 5 = 3 \\ \iff\ &2\mathrm{e}^x = -2 \\ \iff\ &\mathrm{e}^x = -1 \\ &\text{Pas de solutions} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x + 4 = 0 \\ \iff\ &t^2 + 3t - 4 = 0 \quad \text{avec } t = \mathrm{e}^x \\ \iff\ &t = 1 \text{ ou } t = -4 \\ &\mathrm{e}^x = 1 \text{ ou } \mathrm{e}^x = -4 \qquad S = \{0\} \end{aligned}$$

Exercice 10 — un air de déjà vu.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^2 + 6t - 7 = 0$
2) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^x - 7 = 0$.

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(E_1) $\mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^x + 5 = 0$	(E_2) $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 6 = 0$	(E_3) $\mathrm{e}^x - 2 + \mathrm{e}^{-x} = 0$.

Exercice 12 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(I_1) $e^x < e$

(I_2) $e^{-x} \geqslant 1$

(I_3) $e^{-2x} > \frac{1}{e}$

(I_4) $e^x < 2$

(I_5) $e^{-2x+3} > 1$

(I_6) $e^{-3x} < e^2$

(I_7) $e^{-2x-1} \leqslant \sqrt{e}$

(I_8) $e^{2x-1} > e^x$

Exercice 13 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ en isolant e^x :

(I_1) $2e^x + 3 > 0$

(I_2) $5e^x - 7 \geqslant 1$

(I_3) $2e^x - 3 < 5$

(I_4) $2 - e^x > 0$

Exercice 14 — Compléter les tableaux de signes suivants :

x	
signe de $e^x - e$	

x	
signe de $e^x - 5$	

x	
signe de $e^x - e^2$	

x	
signe de $3e^x - 5$	

Exercice 15 —

1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-2e^{2x} + e^x + 1 = (2e^x + 1)(1 - e^x)$$

2) Compléter le tableau de signe ci-contre.

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de $2e^x + 1$	
signe de $1 - e^x$	
signe de $-2e^{2x} + e^x + 1$	

Exercice 16 —

Étudier le signe de l'expression $(2x + 5)e^{x^2+7x+3}$ à l'aide du tableau de signe :

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de e^{x^2+7x+3}	
signe de $2x + 5$	
signe $(2x + 5)e^{x^2+7x+3}$	

Exercice 17 — dérivation. Calculer les dérivées des fonctions suivantes toutes définies sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = 2e^x$

2) $f(x) = 2x + e^x$

3) $f(x) = e^{2x+1}$

4) $f(x) = (3x + 5)e^x$

5) $f(x) = (x^2 - 4x + 3)e^x$

6) $f(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 1}$

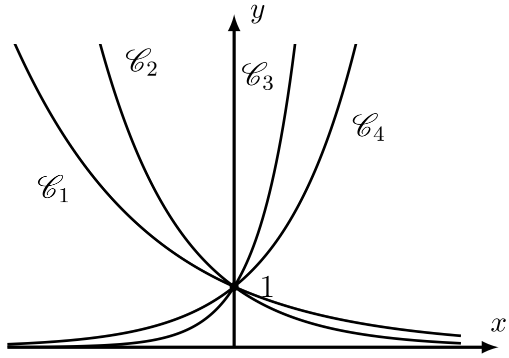
7) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$

8) $f(x) = 10e^{-1.15x+1}$

9) $f(x) = (2x - 3)e^{-0,8x}$

Exercice 18 — On a tracé les représentations graphiques de 4 fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

- $f(x) = \mathrm{e}^{-0.9x}$
- $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$
- $h(x) = \mathrm{e}^{x}$
- $i(x) = \mathrm{e}^{-0.55x}$



Associer chaque expression à une des courbes.
Justifier en utilisant des phrases parmi :

- L'ordonnée à l'orgine est ....
- La fonction est ....ante car sa dérivée .....
- L'image de .... par la fonction ..... est .....

Exercice 19 Dériver et étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1) f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$

2) f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{2\mathrm{e}^x + 1}$

3) f_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(x) = (x^2 - 2x)\mathrm{e}^x$

4) f_4 définie sur $]0;\infty[$ par $f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

5) f_5 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_5(x) = x^2 - 2(x-1)\mathrm{e}^x$

6) f_6 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_6(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$

Exercice 20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1) Donner l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2) On définit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x$. Étudier les variations de g.
3) En déduire l'**inégalité classique** : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.
4) Interpréter géométriquement l'inégalité précédente en terme de $\mathscr{C}_f$ et T.

Exercice 21 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

Indication : "chef j'ai vérifié sur la calculatrice" n'est pas une justification

Affirmation n° 1 « Le point $A(0\ ;\ 1) \in \mathscr{C}_f$. »
Affirmation n° 2 « Pour tout x on a $f'(x) = 2\mathrm{e}^x$. »
Affirmation n° 3 « La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1{,}5$ est horizontale. »
Affirmation n° 4 « La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$. »
Affirmation n° 5 « La fonction est positive sur $\mathbb{R}$. »

Exercice 22 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-8x+3)\mathrm{e}^{-2x}$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1) Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0.
3) Pour quelle abscisse x, la tangente au point d'abscisse x à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.

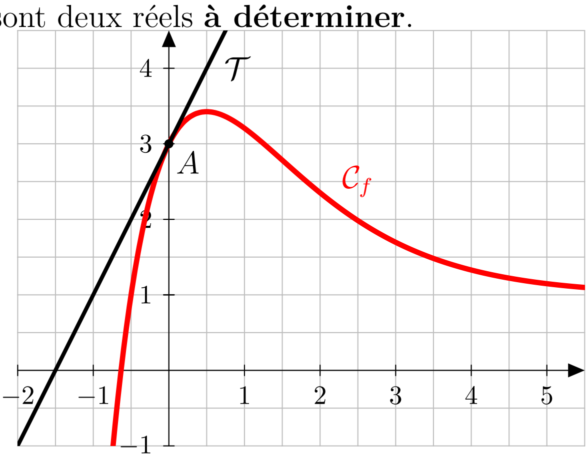
Exercice 23 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x - 3}{\mathrm{e}^x + 1}$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1) Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-3 < f(x) < 2$.
3) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 24 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$:

1) $A(-2\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_f$. En déduire a et b.
2) Déterminer les coordonnées du point critique $\mathscr{S}$. S'agit-il d'un extremum local ?

Exercice 25 — problème inverse. La courbe suivante est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de f. La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(0;3)$ passe par le point $B(1;5)$.
On admet que la fonction f est définie dans $\mathbb{R}$ par une expression de la forme: $f(x) = 1 + \dfrac{ax+b}{\mathrm{e}^x}$ où a et b sont deux réels **à déterminer**.



1) En utilisant les données et le graphique, préciser $f(0)$ et $f'(0)$.
2) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
3) a) Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, b et x.
   b) A l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout réel x: $f(x) = 1 + \dfrac{4x+2}{\mathrm{e}^x}$.

Exercice 26 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 4}{\mathrm{e}^x}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
1) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
2) Déterminer l'expression de $f'(x)$ et étudier les variations de f.
3) Soit d la droite d'équation $y = -x + 1$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_g$ et de d dans un repère.

Exercice 27 Donner la nature, la raison ainsi que le sens de variations des suites ci-dessous.

(u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^n$
(v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \mathrm{e}^{-4n}n$
(w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \mathrm{e}^{3n}$

(a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \mathrm{e}^2 n$
(b_n) définie par $b_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} : b_{n+1} = \mathrm{e}^{0,5} b_n$
(c_n) définie par $c_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : c_{n+1} = \mathrm{e}^{-2} + c_n$

6.3.1 exercices : solutions et éléments de réponse

solution de l'exercice 1. $E_1 = e^7$; $E_2 = e^{-7}$; $E_3 = e$; $E_4 = \dfrac{1}{-1+e^{\frac{1}{2}}}$; $E_5 = e^{-2}$; $E_6 = e^{-6}$; $E_7 = 6e^6$; $E_8 = e^{-1}$; ■

solution de l'exercice 2. $E_1(x) = 1$; $E_2(x) = e^{6x+4}$; $E_3(x) = e^{5-4x}$; $E_4(x) = e^{6-x}$; $E_5(x) = e^{2x-3}$; $E_6(x) = e^{4x-3}$; $E_7(x) = e^{2x+1}$; $E_8(x) = e^{-x}$; ■

solution de l'exercice 3. $E_1(x) = e^{2x} + 5e^x$; $E_2(x) = 1 - 2e^{-x}$; $E_3(x) = e^{3x} - e^x$; $E_4(x) = e^{2x} + 2e^x - 3$; $E_5(x) = -e^x + 1 + 2e^{-x}$; $E_6(x) = e^{6x} - 4e^{3x} + 4$; $E_7(x) = e^{2x} + 2e^x + 1$; $E_8(x) = e^{2x} - 9$; $E_9(x) = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$; ■

solution de l'exercice 8. $S_1 = \{-4\}$; $S_2 = \{0\}$; $S_3 = \emptyset$; $S_4 = \{1\}$; $S_5 = \left\{\dfrac{2}{5}\right\}$; $S_6 = \{1\}$; $S_7 = \{-3, 3\}$; $S_8 = \{-1, 0\}$; ■

solution de l'exercice 9. $S_1 = \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$; $S_2 = \left\{-\dfrac{7}{2}, \ln(3)\right\}$; $S_3 = \left\{-\dfrac{4}{7}\right\}$; ■

solution de l'exercice 11. $S_1 = \emptyset$; $S_2 = \{\ln(2), \ln(3)\}$; $S_3 = \{0\}$; ■

solution de l'exercice 12. $\mathscr{S}_1 = (-\infty, 1)$; $\mathscr{S}_2 = (-\infty, 0]$; $\mathscr{S}_3 = \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$; $\mathscr{S}_4 = (-\infty, \ln(2))$; $\mathscr{S}_5 = \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$; $\mathscr{S}_6 = \left(-\dfrac{2}{3}, \infty\right)$; $\mathscr{S}_7 = [-0.75, \infty)$; $\mathscr{S}_8 = (1, \infty)$; ■

solution de l'exercice 13. $\mathscr{S}_1 = \mathbb{R}$; $\mathscr{S}_2 = \left[\ln\left(\dfrac{8}{5}\right), \infty\right)$; $\mathscr{S}_3 = (-\infty, \ln(4))$; $\mathscr{S}_4 = (-\infty, 0)$; ■

solution de l'exercice 17. $f_1'(x) = 2e^x$; $f_2'(x) = e^x + 2$; $f_3'(x) = 2ee^{2x}$; $f_4'(x) = (3x+8)\,e^x$; $f_5'(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)e^x$; $f_6'(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$; $f_7'(x) = -\dfrac{(x-1)\,e^x}{(x-e^x)^2}$; $f_8'(x) = -11.5ee^{-1.15x}$; $f_9'(x) = -\dfrac{2\,(4x-11)\,e^{-\frac{4x}{5}}}{5}$; ■