Chapitre

Equations du second degré 3

3.1 Notion d'équations quadratiques

Soit une fonction quadratique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0, b, c \in \mathbb{R})$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est dite **forme standard** d'une équation quadratiques d'inconnue x. Les équations équivalentes sont dites quadratiques.

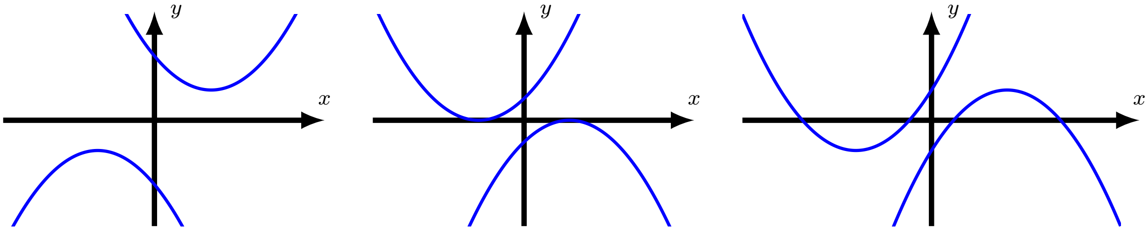

Figure 3.1 – Les 3 différents cas: (1) f ne s'annule pas et ne change pas de signe, (2) f s'annule mais ne change pas de signe, (3) change de signe 2 fois

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, inconnue x avec $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ peuvent être :

- aucune solution
- 1 solution, la racine double de f
- 2 solutions les racines de f.

L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$, inconnue x avec $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ peut avoir comme ensemble de solution :

- $\mathscr{S} = \emptyset$
- $\mathscr{S} = \mathbb{R}$
- $\mathscr{S} =]r_1; r_2[$
- $\mathscr{S} =]-\infty; r_1[\cup]r_2; \infty[$

3.1.1 Exercices : notion d'équation quadratique, rappels de 2ndes

> $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$ est une forme standard d'une équation quadratique d'inconnue x.

Exercice 1 Entourez les équations quadratiques à une inconnue.

(E_1) $3(x+1)^2 = 2(x+1)$

(E_2) $x^2 + 2x = x^2 - 1$

(E_3) $\dfrac{1}{x^2} - 1 = 0$

(E_4) $2x^2 = -3x$

(E_5) $3x^2(x-3) = x$

(E_6) $x^2 = 9$

Exercice 2 Complétez les espaces.

1) Une forme standard de l'équation $5x^2 = 6x - 8$ est $\ldots\ldots x^2 + \ldots\ldots x + \ldots\ldots = 0$.
2) Si 3 est solution de l'équation $\frac{4}{3}x^2 - 2a + 1 = 0$, inconnue x. Alors $2a = \ldots\ldots$.
3) Si $a - b + c = 0$ et $a \neq 0$, alors une des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x est $x = \ldots\ldots$.
4) Si l'équation $mx^2 + 3x - 4 = 0$ est quadratique d'inconnue x, alors $m \neq \ldots\ldots$.
5) Si $k \ldots\ldots$ alors l'équation $(k-3)x^2 + 2x - 1 = 0$ d'inconnue x est une équation quadratique.
6) La forme standard de l'équation $3x^2 = x$ est ....
7) La forme standard de l'équation $x(x+3) = 2x - 5$ est ....
8) Si $a \ldots\ldots$ alors l'équation $(a^2 - 1)x^3 - (a+1)x^2 + 4 = 0$ est quadratique d'inconnue x.

Exercice 3 Cochez parmi les valeurs proposées celles qui sont solutions de l'équation inconnue x.

$3x^2 - 2x - 1 = 0$ et $\left\{\sqrt{2};\ 1;\ -\dfrac{1}{3}\right\}$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ et $\left\{\dfrac{1}{2};\ 1;\ 2\right\}$

Exercice 4 Soit l'équation $kx^2 - k(x+2) = x(2x+3) + 1$ d'inconnue x.

a) Ecrire cette équation sous une forme standard $ax^2 + bx + c = 0$.
b) Pour quelles valeurs de k l'équation est-elle quadratique ?
c) Pour quelle(s) valeur(s) de k l'équation est affine ?
d) -1 est-elle une solution de cette équation ?
e) 0 est solution de l'équation. Trouvez k.

■ **Exemple 3.1 — vu en 2nde : résoudre une équation quadratique en prenant les racines carrées.**

$3x^2 - 6 = 21$ $\qquad 2x^2 + 8 = 0$ $\qquad 4(x+2)^2 - 8 = 0$ $\qquad 4(2x+2)^2 - 12 = 0$

Exercice 5 Résoudre les équations suivantes.

(E_1) $2x^2 - 18 = 0$

(E_2) $3x^2 - 5 = 0$

(E_3) $3x^2 + 5 = 0$

(E_4) $(2x+1)^2 - 32 = 0$

(E_5) $(x-1)^2 - 25 = 0$

(E_6) $(x+1)^2 - 5 = 0$

(E_7) $4(x-3)^2 - 5 = 0$

(E_8) $9(x+6)^2 + 2 = 0$

(E_9) $\sqrt{3}(x+6)^2 - 27\sqrt{3} = 0$

■ **Exemple 3.2** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations quadratiques d'inconnue x :

$x^2 - 12 = 0$ $\quad x^2 - 12x = 0$ $\quad x^2 - 12x - 12 = 0$ $\quad x^2 - 12x - 12 > 0$

$x^2 - 2x + 5 = 0$ $\quad x^2 + 4x = 10$ $\quad x^2 + 4x < 10$

À vous : $x^2 - 0.6x - 0.16 = 0$ $\quad 2x^2 + 3x = 7$

Exercice 6 — renforcement. Mêmes consignes.

(E_1) $x^2 - 8x + 13 = 0$
(E_2) $x^2 + x - 1 = 0$
(E_3) $x^2 - 4x + 1 = 0$
(E_4) $4x^2 + 3x + 1 = 0$
(E_5) $3x^2 - 12x + 5 = 0$
(E_6) $3x^2 - 10 = 6x$

Exercice 7 L'équation $(2x-1)^2 = a$ d'inconnue x admet deux solutions réelles différentes, $(2x-1)^2 = b$ admet une solution unique, et $(2x-1)^2 = c$ n'a pas de solutions. Comparer les valeurs de a, b et c.

Exercice 8 Complétez les espaces.

1) Si l'équation $(x-a)^2 + b = 0$ admet une solution unique alors b prend le(s) valeur(s) ....

2) Les deux racines de l'équation $(2x-c)^2 - 60$ sont positives alors $c \geqslant$ ....

solutions des exercices 5 . $S_1 = \{-3, 3\}$; $S_1 = \left\{-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right\}$; $S_1 = \{\}$; $S_1 = \left\{-\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right\}$; $S_1 = \{-4, 6\}$; $S_1 = \left\{-1 + \sqrt{5}, -\sqrt{5} - 1\right\}$; $S_1 = \left\{3 - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} + 3\right\}$; $S_1 = \{\}$; $S_1 = \left\{-6 - 3\sqrt{3}, -6 + 3\sqrt{3}\right\}$; ■

solutions de l'exercice 6. $S_1 = \left\{4 - \sqrt{3}, \sqrt{3} + 4\right\}$; $S_2 = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right\}$; $S_3 = \left\{2 - \frac{\sqrt{21}}{3}, \frac{\sqrt{21}}{3} + 2\right\}$; $S_4 = \{\}$; $S_5 = \left\{2 - \sqrt{3}, \sqrt{3} + 2\right\}$; $S_6 = \left\{1 - \frac{\sqrt{39}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{39}}{3}\right\}$; ■