BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Année 2025-2026

Mathématiques

Devoir surveillé №2 - Mercredi 26 novembre 2025

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec ou sans mode examen est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat doit traiter les 5 exercices proposés.

Le candidat bénéficiant d'un tiers temps ne traitera pas les questions marquées par le repère $\boxed{\text{TT}}$

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 : Un QCM de dénombrement

5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

(1) **1.** Une professeur enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 23 élèves de terminale. Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves.

Réponse A : 23^5

Réponse B : $23+22+21+20+19$

Réponse C : $23\times 22\times 21\times 20\times 19$

Réponse D : $\binom{23}{5}$

(1) **2.** $\boxed{\text{TT}}$ La professeur s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 23 élèves de son groupe :

- 10 élèves ont choisi la spécialité Physique-Chimie
- 7 élèves ont choisi la spécialité SES
- 6 élèves ont choisi la spécialité SVT.

Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe.

Réponse A : $\binom{7}{3}\times\binom{16}{2}$

Réponse B : $\binom{7}{3}+\binom{16}{2}$

Réponse C : $\binom{7}{3}$

Réponse D : $7^3\times 16^2$

(1) **3.** Une urne contient cinquante boules numérotées de 1 à 50. On tire successivement trois boules dans cette urne, *sans remise*. On appelle «tirage» la liste non ordonnée des numéros des trois boules tirées.

Quel est le nonmbre de tirages possibles, *sans tenir compte de l'ordre des numéros* ?

Réponse A : 50^3

Réponse B : $1\times 2\times 3$

Réponse C : $50\times 49\times 48$

Réponse D : $\dfrac{50\times 49\times 48}{1\times 2\times 3}$

(1) **4.** On lance dix lancers d'une pièce de monnaie. Le résultat d'un lancer est «pile» ou «face». On note la liste ordonnée des dix résultats.

Quel est le nombre de listes ordonnées possibles ?

Réponse A : 2×10

Réponse B : 2^{10}

Réponse C : $1\times 2\times 3\times\ldots\times 10$

Réponse D : $\dfrac{1\times 2\times 3\times\ldots\times 10}{1\times 2}$

(1) **5.** Parmi tous les entiers d'exactement cinq chiffres (ne commençant donc pas par 0), combien y en a-t-il qui ne contiennent que des chiffres pairs ?

Réponse A : 5^5

Réponse B : 4×5

Réponse C : 4×5^4

Réponse D : $5!$

Exercice 2 : Des affirmations à justifier

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Dans le cas d'une affirmation fausse, la démonstration peut consister à fournir un contre exemple.

Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

L'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k})$. Les questions sont indépendantes.

(1) **1.** On considère les points : :

$$A(2\,;\,1\,;\,-1),\qquad B(-1\,;\,2\,;\,1)\qquad C(5\,;\,0\,;\,-3)$$

On note δ la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -t+3 \\ y & = & t+2 \\ z & = & 2t+1 \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

Affirmation №1 : Les droites δ et (AB) se coupent en C.

(1) **2.** On considère les droites d et d' dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$d\quad\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 2+t \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.\qquad\qquad d'\quad\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 2t' \\ y & = & 4-t' \\ z & = & -1+2t' \end{array}\right.,\ t'\in\mathbb{R}.$$

Affirmation №2 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

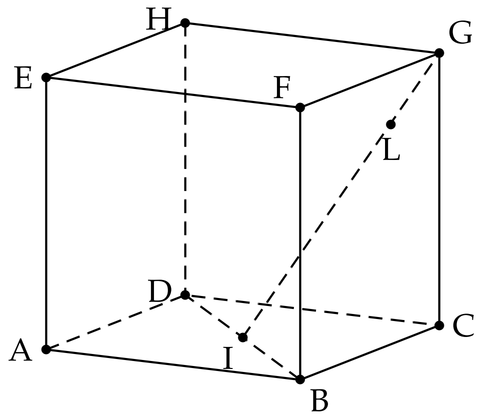
(1) **3.** Soit les points $A(4\,;\,-1\,;\,3)$, $B(-1\,;\,1\,;\,-2)$, $C(0\,;\,4\,;\,5)$, et $D(-3\,;\,-4\,;\,6)$.

Affirmation №3 : Le point D appartient au plan (ABC).

(1) **4.** $\boxed{\text{TT}}$ On considère les points $A(1\,;\,2\,;\,-1)$, $B(2\,;\,-1\,;\,3)$, $C(2\,;\,-1\,;\,1)$, et $D(3\,;\,-1\,;\,1)$.

Affirmation №4 : $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace.

(1) **5.** On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment $[BD]$. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Affirmation №5 : Le point L a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{8}\,;\,\dfrac{7}{8}\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$

Exercice 3 : Des limites

3 points

Calculer dans chaque cas les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$, lorsque c'est possible.
Chaque résultat sera justifié avec soin.

(0,5) **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n - \sqrt{n}$.

(0,5) **2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{e}^{-n} + 6n$.

(0,5) **3.** $\boxed{\text{TT}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{1}{n} - 1\right)\left(1 - \sqrt{n}\right)$.

(0,5) **4.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2n^3 - 1}{2n^2 + 5n^3}$

(0,5) **5.** $\boxed{\text{TT}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - 5\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$

(0,5) **6.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} - 3}$

Exercice 4 : Limite à l'aide d'une suite auxilliaire

2 points

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3n$.

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 6n + 12$.

(1) **1.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et préciser son premier terme v_0.

(0,5) **2.** Exprimer v_n en fonction de n et montrer que pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_n = 6n - 12 + \frac{3}{2^{n-2}}$$

(0,5) **3.** En déduire que la suite (u_n) est divergente et déterminer sa limite.

Exercice 5 : Un modèle de dynamique des population

5 points

Dans une réserve marine protégée, une équipe scientifique étudie la réintroduction d'une espèce de poisson de récif.

Le modèle d'évolution choisi par les biologistes repose sur les deux observations suivantes :

- **La mortalité des adultes :** On estime que 50 % de la population adulte survit d'une année sur l'autre (mortalité due à la pêche, aux prédateurs ou à la vieillesse).
- **Le recrutement de nouveaux adultes et contrainte des habitats :** La survie des juvéniles est conditionnée par la présence d'abris pour échapper aux prédateurs.
  Lorsque l'effectif de la population d'adultes est bas, les caches sont abondantes et le nombre de juvéniles survivants pour l'année suivante est proportionnel à la population adulte. En revanche, en présence d'un nombre élevé de juvéniles, les caches deviennent rares et les jeunes sans abri sont dévorés.
  Une étude du récif a permis de recenser précisément **800 caches** adaptées.

Le suivi débute en 2024. On note u_n la quantité de poissons (exprimée en milliers d'individus) présente dans la zone au début de l'année $2024+n$.

La population adulte en 2024 est estimée à 200 individus. Ainsi $u_0 = 0{,}2$.

Selon le modèle adopté, la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + \frac{0{,}8u_n}{1+u_n}$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

L'objectif de cet exercice est de montrer que malgré un taux de survie peu élevé, le recrutement de nouveaux adultes peut être suffisant pour préserver l'espèce.

(0,5) **1.** Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus adultes au début de l'année 2025 puis au début de l'année 2026.

On considère la fonction f associée à la suite, définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 0{,}5x + \frac{0{,}8x}{1+x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

(0,5) **2. a)** Montrer que pour $x \in [0;+\infty[$, $f'(x) = 0{,}5 + \dfrac{0{,}8}{(1+x)^2}$.

(0,5) **b)** En déduire, en justifiant, que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) **3.** Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$0 < u_n < u_{n+1} \leqslant 1$$

(0,5) **4.** En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.

On ne cherchera pas à déterminer la limite.

5. On admet que la limite ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$.

(0,75) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

(0,25) Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

(0,5) **6.** Compléter les lignes 1, 3 et 4 du script ci-dessous afin qu'il affiche le premier rang p à partir duquel $u_n > 0{,}55$.

```
1 u = ...
2 p = 0
3 while ... :
4     u = ...
5     p = p + 1
6 print( p )
```

(0,25) **7.** Déterminer par la méthode de votre choix la valeur affichée par le script.

(0,25) Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.