Chapitre 7

Fonctions

Table 7.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 7...

	Pour m'entraîner ✍️		
Je dois **connaître**.../**savoir faire**...	🪨	💎	💍
fonctions définies numériquement			
déterminer le domaine, une image et les antécédents	7.1, 7.2		
fonction donnée par sa représentation graphique			
déterminer à partir de la représentation le domaine, images, antécédents	7.3, à 7.7		
dresser un tableau de signe		7.8, 7.9	
fonction donnée par une expression			
déterminer une image	7.10	7.11, 7.12	7.13 à 7.15
déterminer les antécédents et les zéros d'une équations, résoudre $f(x) = k$		7.16, 7.17	
déterminer le domaine de définition d'une expression		7.18	
représentation graphique à partir d'une expression	7.19	7.20, 7.21	
parité de fonctions			
identifier graphiquement la parité	7.26		
justifier la parité à partir de l'expression	7.27	7.28, 7.29, 7.30	7.31
résolution graphique			
résolution d'(in)équations par lecture graphique		7.32 à 7.35	
sens de variation d'une fonction			
vocabulaire et définitions	7.36, 7.37		
exploiter et produire des tableaux de variations	7.38, 7.39	7.40 à 7.44	7.45

7.1 Notion de fonction

Définition 7.1

Une *relation* est un *ensemble de couples* (x, y), x est une abscisse, y est une ordonnée. Pour un couple (x, y) donné, on dira que x et y sont associés.

Une *fonction* f à valeur réelles est un *ensemble de couples* de réels (x, y), tel qu'il n'y ait pas 2 ordonnées différentes associées à une même abscisse x :

$$\text{si } (x, y_1) \in f \quad \text{et } (x; y_2) \in f \quad \text{alors} \quad y_1 = y_2$$

L'ensemble D des abscisses de f est le *domaine* de f.

Pour tout abscisse $x \in \mathbb{R}$ on a 2 possibilités :

— L'abscisse $x \in D$ est *associée* avec *exactement* une ordonnée y.

On dit que « y est *l'image* de x » et on écrit :

$y = f(x)$ à lire « y est égal à f de x »

$f : x \mapsto y$ à lire « f qui à x associe y »

On dit également que x est *un antécédent* de y.

— L'abscisse $x \notin D$: aucune ordonnée y n'est associée à x. L'abscisse x n'a pas d'image.

■ **Exemple 7.1**

La relation f entre l'heure x et la température y en degrés est donnée par les couples :

$$\{(1\ ;\ 9°),\ (2\ ;\ 13°),\ (3\ ;\ 15°),\ (4\ ;\ 15°),\ (5\ ;\ 12°),\ (6\ ;\ 10°)\}$$

f est une fonction car aucun temps en abscisse n'est associé à deux valeurs de températures différentes en ordonnée.

Les valeurs des abscisses sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6	Domaine $D = \ldots\ldots\ldots\ldots$	
L'abscisse 2 est associée à l'ordonnée 13	$f(\ldots) = \ldots$	L'image de $\ldots\ldots$ est $\ldots$.
L'ordonnée 15 est associée aux abscisses 3 et 4	$f(\ldots) = \ldots$ $f(\ldots) = \ldots$	Les antécédents de $\ldots\ldots$ sont $\ldots$ et $\ldots$
L'abscisse 9 n'est pas dans le domaine : $9 \notin D$	$\cancel{f(9)}$	9 n'a pas d'image par f

■ **Exemple 7.2** — **non exemple.**

La relation g est donnée par l'ensemble des couples :

$$\{(1\ ;\ 3),\ (3\ ;\ 2),\ (1\ ;\ 7),\ (-1\ ;\ 4)\}$$

g n'est pas une fonction car l'abscsise 1 est associée aux ordonnées 3 et 4.

Figure 7.1 – Représentations *numériques* d'une fonction f

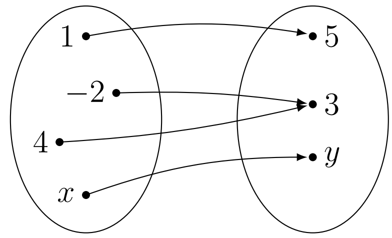
(a) Ensemble de couples

$$\{(1\ ;\ 5), (-2\ ;\ 3), (4\ ;\ 3)\}$$

(b) Tableau de valeurs (entrée-sortie)

x	y
1	5
-2	3
4	3

(c) Diagramme saggital



domaine de f

Figure 7.2 – Représentations *verbales* par une phrase ou un programme de calcul

(a) Par une phrase

pour calculer l'image prendre le carré de la différence avec 5*.*

(b) Programme de calcul

```
Choisir un nombre x
Lui soustraire 5
Élever au carré le résultat
```

Figure 7.3 – Représentations *algébriques* d'une fonction f pour calculer $y = f(x)$ connaissant la valeur de x

(a) Par une expression algébrique

$$f(x) = \frac{1+3x}{5}$$

(b) Équation en y et en x

$$y = \frac{1+3x}{5}$$

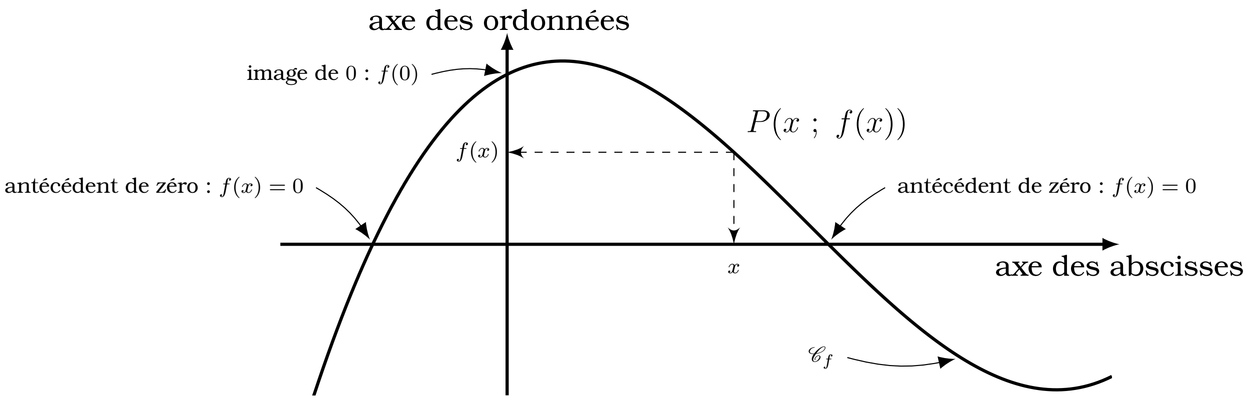
Définition 7.2 — Représentation graphique.

Le *graphe* d'une fonction f est l'ensemble de *tous les couples de la forme* $(x\ ;\ f(x))$ où x est un élément du domaine de définition.

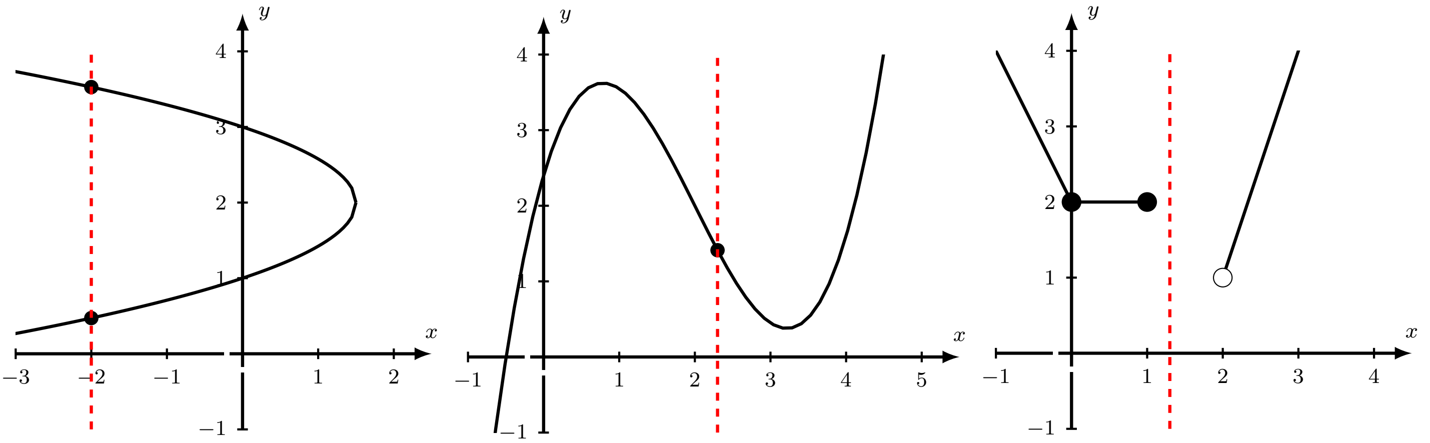
La *représentation graphique* d'une fonction f dans le plan muni d'un repère Oxy, en traçant l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont de la forme $(x\ ;\ f(x))$.

On dit que la représentation graphique de f est la *courbe d'équation* $\mathscr{C}_f : y = f(x)$.

Figure 7.4 – Représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction.



Propriété 7.1 — Test de la droite verticale. Une droite verticale balayant le plan de gauche à droite doit croiser la représentation graphique d'une fonction $\mathscr{C}_f$ au plus une fois.



pas une fonction — fonction sur $\mathbb{R}$ — fonction sur $]-\infty;1]\cup]2;+\infty[$

Figure 7.5 – La représentation graphique d'une fonction $\mathscr{C}_f : y = f(x)$ vérifie le test de la *droite verticale* : $\mathscr{C}_f$ ne peut pas avoir deux points ayant même abscisse et des ordonnées différentes.

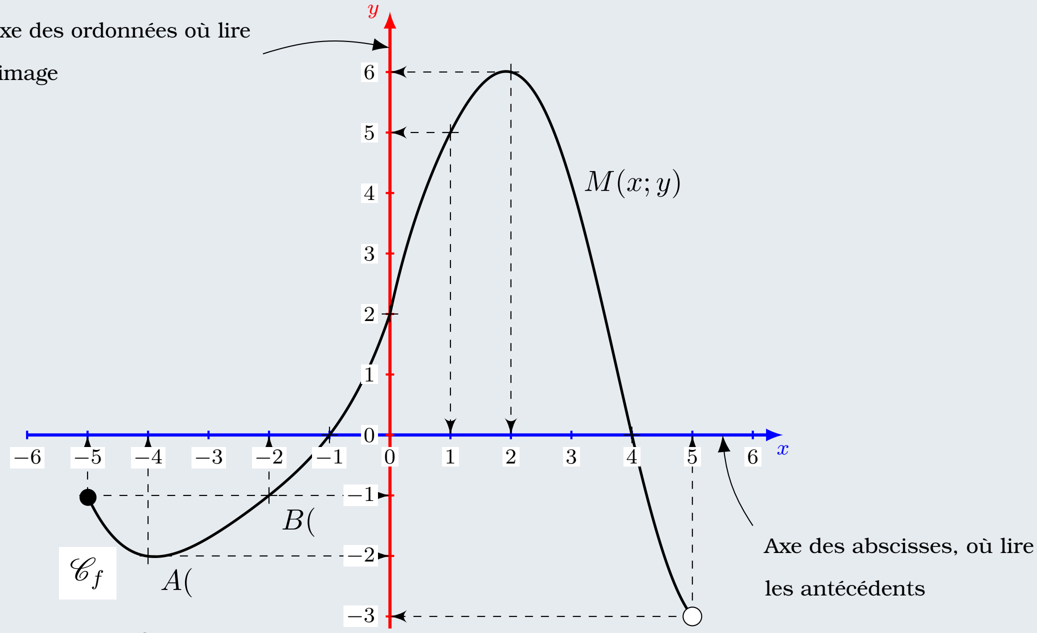
Étudier une fonction ou d'une famille de fonctions requiert les savoir-faire suivants :

1. Déterminer *par lecture graphique ou algébriquement* l'image $f(x)$ ou l'ordonnée y pour une abscisse donnée.
2. Déterminer *par lecture graphique ou algébriquement* le(s) antécédent(s) d'une valeur k :
   a) Identifier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
   b) Résoudre une équation de la forme $f(x) = k$ inconnue x.

   En particulier déterminer les *zéros* de la fonction, solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Résoudre *par lecture graphique ou algébriquement* une inéquation de la forme $f(x) \geqslant k$.
   En particulier déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
4. Déterminer le sens de variation de la fonction f est dresser son tableau de variation.
5. Tracer à partir de l'expression algébrique, la représentation graphique $\mathscr{C}_f : y = f(x)$ et en connaitre les propriétés (intersection avec les axes du repère, forme).
6. Retrouver à partir de la représentation graphique, une expression algébrique (*problèmes inverses*)

7.2 Exploiter une représentation graphique

■ **Exemple 7.3 — déterminer par lecture graphique le domaine et les images.**



1. Le domaine de la fonction est $D_f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $f(-4) = \ldots$ $\quad\ldots$ est l'image de $\ldots$ $\quad$ car le point $A(\ldots\ ;\ \ldots) \in \mathscr{C}_f$
3. $f(-2) = \ldots$ $\quad\ldots$ est l'image de $\ldots$ $\quad$ car le point $B(\ldots\ ;\ \ldots) \in \mathscr{C}_f$
4. $f(1) = \ldots$ $\quad\ldots$ est l'image de $\ldots$ $\quad$ car le point $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $f(\ldots) = -1$ et $f(\ldots) = -1$ $\quad\ldots$ et $\ldots$ sont des antécédents de $\ldots$
6. Le nombre d'antécédents de -1 est $\ldots$ $\quad$ le nombre d'antécédents de -4 est $\ldots$
7. (image de 0) $\quad f(0) = \ldots$ $\quad\ldots$ est l'*ordonnée à l'origine* de f.
8. (antécédents de 0) $\quad f(\ldots) = 0$ et $f(\ldots) = 0$ $\quad\ldots$ et $\ldots$ sont les zéros de f.

En plus de d'identifier le domaine et les zéros de la fonction, la représentation graphique permet de connaître le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x. On peut rassembler ces informations dans un *tableau de signes*.

■ **Exemple 7.4 — identifier les zéros et dresser le tableau de signes.**

Le signe de la fonction f de l'exemple 7.3 est décrit dans le tableau :

x	-5	$-5 < x < -1$	-1	$-1 < x < 4$	4	$4 < x < 5$	5
signe de $f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Il est d'usage de synthétiser les informations dans un *tableau de signe* :

x	-5		-1		4		5
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖

7.3 Tracer une représentation graphique

Exemple 7.5

Tracer la représentation graphique des fonctions :

1. $f(x) = x^2$ | **2.** $g(x) = x^3$ | **3.** $h(x) = \sqrt{x}$ (sur $D = [0; +\infty[$)

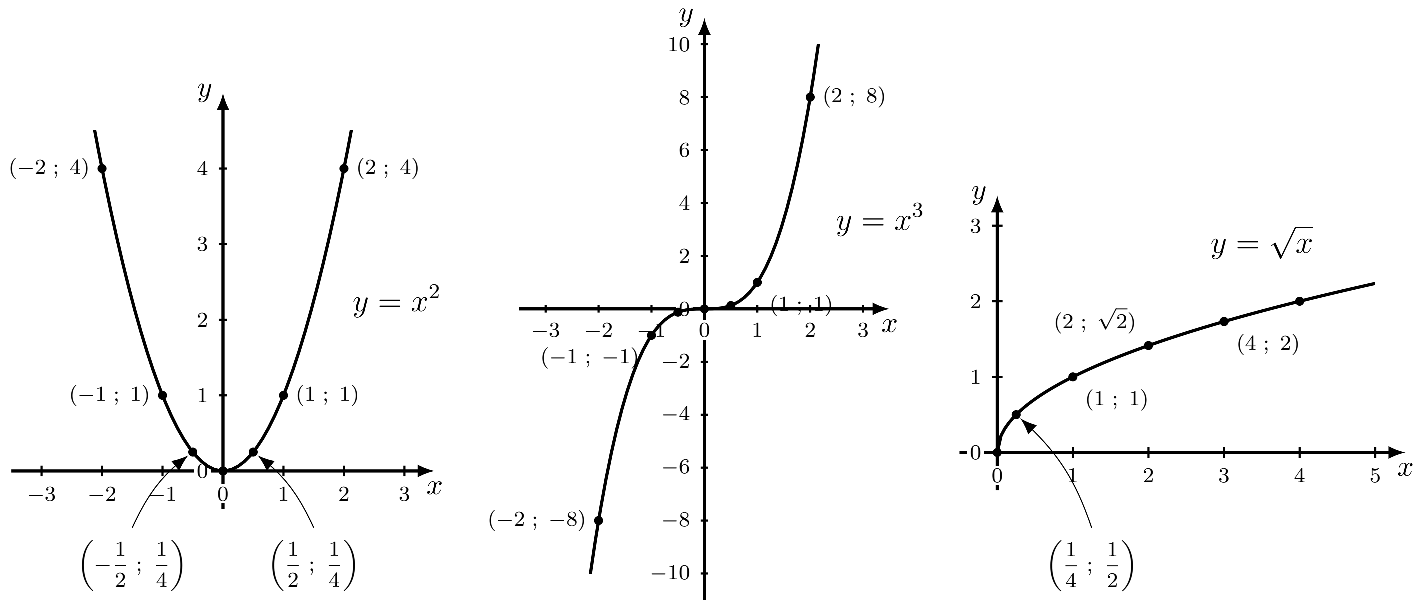
solution.

Démarche : Complèter les tableaux de valeurs puis placer les points déterminés de chaque courbe dans un repère et les relier *harmonieusement*.

x	$f(x) = x^2$	$P(x\ ;\ y)$
0	0	$(0\ ;\ 0)$
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\left(\pm\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$
± 1	1	$(\pm 1\ ;\ 1)$
± 2	4	$(\pm 2\ ;\ 4)$
± 3	9	$(\pm 3\ ;\ 9)$

x	$f(x) = x^3$	$P(x\ ;\ y)$
0	0	$(0\ ;\ 0)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{8}\right)$
1	1	$(1\ ;\ 1)$
2	8	$(2\ ;\ 4)$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\left(-\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{8}\right)$
-1	1	$(-1\ ;\ -1)$
-2	8	$(-2\ ;\ -4)$

x	$f(x) = \sqrt{x}$	$P(x\ ;\ y)$
0	0	$(0\ ;\ 0)$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$
1	1	$(1\ ;\ 1)$
2	$\sqrt{2}$	$\left(2\ ;\ \sqrt{2}\right)$
3	$\sqrt{3}$	$\left(3\ ;\ \sqrt{3}\right)$
4	2	$(4\ ;\ 2)$
5	$\sqrt{5}$	$\left(5\ ;\ \sqrt{5}\right)$



(a) $\mathscr{C}_f$ d'équation $y = x^2$ **(b)** $\mathscr{C}_g$ d'équation $y = x^3$ **(c)** $\mathscr{C}_h$ d'équation $y = \sqrt{x}$

Figure 7.6 – Rajouter des points peut être nécessaire pour un tracé plus précis

Théorème 7.2 — représentations de fonctions affines (admis).

Soit m et c deux réels. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + c$ est représentée par une *droite non verticale* d'équation $\mathscr{D}_f : y = mx + c$.

■ **Exemple 7.6**

Représenter les fonctions suivantes :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$
2. g définie sur $[-1;4]$ par $g(x) = x - 2$

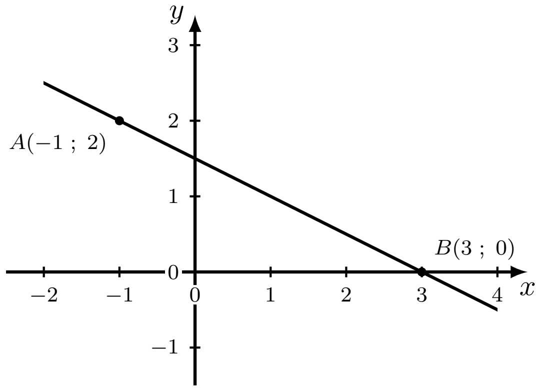
solution.

1. $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ on reconnait une expression affine avec $m = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{3}{2}$.

   La représentation de f est la droite .... d'équation ....

   On cherche 2 points A et $B \in D_f$ (de préférence à coordonnées entières)

x	$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$	$P(x\ ;\ y)$
0	$\frac{3}{2}$	$\left(0\ ;\ \frac{3}{2}\right)$
-1	2	$A\,(-1\ ;\ 2)$
3	0	$B\,(3\ ;\ 0)$

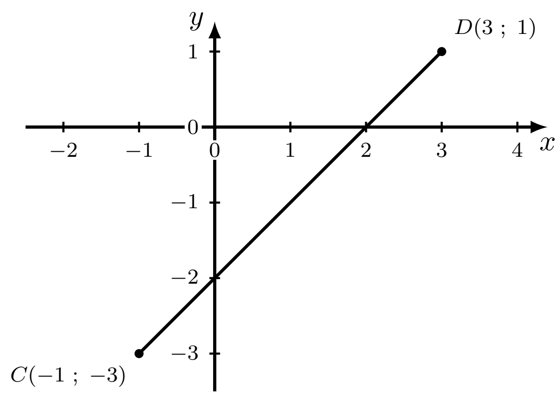


2. $g(x) = x - 2 = (1)x - 2$ on reconnait une expression affine avec $m = 1$ et $c = -2$.

   La représentation de f est un segment de la droite .... d'équation ....

   On calcule les images des extrémités du domaine $D = [-1;4]$

x	$g(x) = x - 2$	$P(x\ ;\ y)$
-1	2	$C\,(-1\ ;\ -3)$
3	0	$D\,(3\ ;\ 1)$



■

7.4 Parité de fonctions

Définition 7.3 Le domaine D_f d'une fonction f est *symétrique* par rapport à 0 si

$$\text{pour tout } x \in D \text{ on a } -x \in D$$

Pour une fonction dont le domaine est symétrique par rapport à 0 est *paire* si :

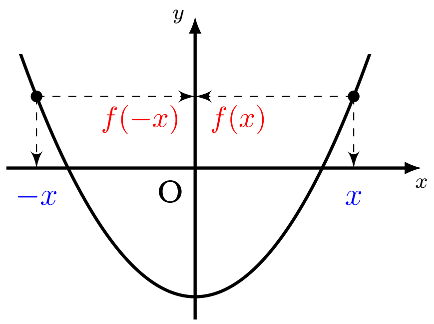
pour tout $x \in D$ $\quad f(-x) = f(x)$ $\quad$ l'axe des ordonnées est un *axe de symétrie* de $\mathscr{C}_f$

et *impaire* si :

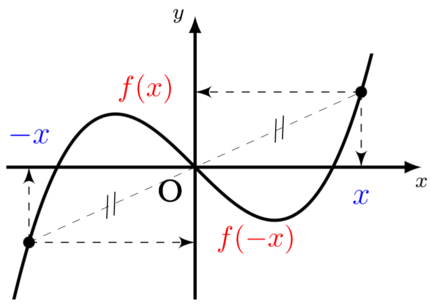
pour tout $x \in D$ $\quad f(-x) = -f(x)$ $\quad$ l'origine $O(0\ ;\ 0)$ est *centre de symétrie* de $\mathscr{C}_f$

■ **Exemple 7.7 — Domaines symétriques par rapport à** 0. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $[-5;5]$

Figure 7.7 – Représentation graphique et parité d'une fonction



(a) fonction paire : $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



(b) fonction impaire : $\mathscr{C}_f$ admet l'origine $O(0;0)$ comme centre de symétrie.

■ **Exemple 7.8 — utiliser l'expression pour déterminer la parité.**

$x \neq 0 \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$\therefore f$ est impaire.

$$g(x) = x^4 + x^2$$

$$g(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = g(x)$$

$\therefore g$ est paire.

$$h(x) = x^2 - 3x + 4$$

$$h(-x) = (-x^2) - 3(-x) + 4$$

$$h(-x) = x^2 + 3x + 4$$

ni paire ni impaire.

■ **Exemple 7.9 — démontrer.**

Montrer que la somme de deux fonctions impaires sur $\mathbb{R}$ est aussi une fonction impaire.

solution.

Soit h définie pour tout x par $h(x) = f(x) + g(x)$ avec f et g fonctions impaires :

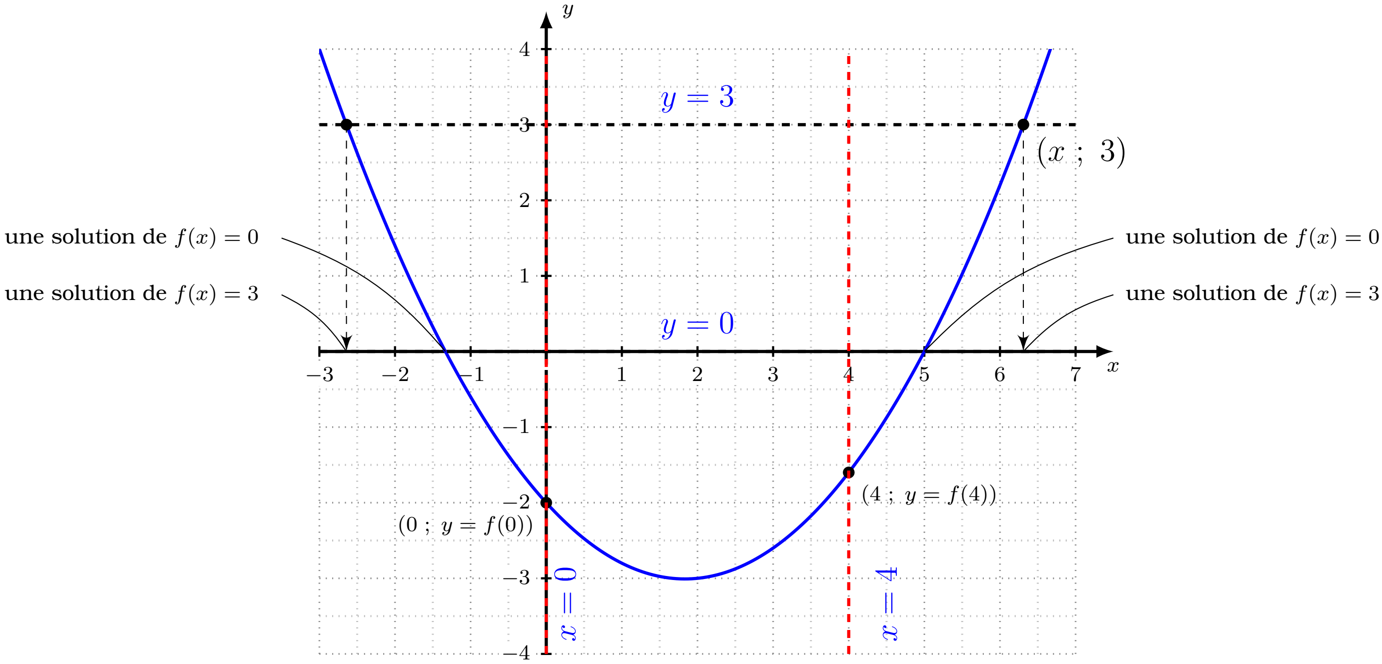
$h(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -h(x)$

$\therefore h$ est une fonction impaire. ■

7.5 Activité Sudomaths : maitriser le vocabulaire des fonctions

■ **Exemple 7.10**

Soit la fonction f définie par $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{10}(3x+4)(x-5)$ représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$ d'équation $y = \frac{1}{10}(3x+4)(x-5)$.



— $y = f(0)$ est l'*ordonnée* du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 (point d'intersection avec l'axe des ordonnées).

— Les *zéros* de f, sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Graphiquement, c'est les *abscisses* des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

<table>
<tr><td></td><td>approche algébrique</td><td>approche numérique</td></tr>
<tr><td colspan="3">questions se ramenant à une recherche d'image $(x\ ;\ y = f(x) = ?)$</td></tr>
<tr><td>déterminer l'image de 4 par la fonction f</td><td rowspan="4">L'abscisse $x = 4$,
évaluer l'image
$y = \frac{1}{10}(3x+4)(x-5)$</td><td rowspan="4">Lire l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ dont l'abscisse est $x = 4$</td></tr>
<tr><td>calculer $f(4)$</td></tr>
<tr><td>déterminer l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 4</td></tr>
<tr><td>le point $A(4\ ;\ -1)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$?</td></tr>
<tr><td colspan="3">questions se ramenant à une recherche d'antécédent $(x = ?\ ;\ y = f(x))$</td></tr>
<tr><td>déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par f</td><td rowspan="3">L'ordonnée $y = 3$,
résoudre l'équation
$3 = \frac{1}{10}(3x+4)(x-5)$</td><td rowspan="3">Lire l'abscisse de(s) point(s) de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est $y = 3$.</td></tr>
<tr><td>résoudre l'équatiion $f(x) = 3$</td></tr>
<tr><td>déterminer l'abscisse de(s) point(s) de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée 3</td></tr>
</table>

Confusions et difficultées rencontrées

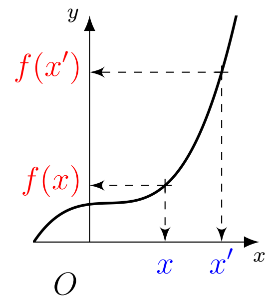
1. Le fait d'écrire « $f(x) = 3$ »ne signifie que « pour tout x on a $f(x) = 3$ ». La partie « pour tout x »est importante.

   Dans la question 1.c) On propose de résoudre l'équation $f(x) = 3$ d'inconnue x. Donc de trouver les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 3$. Ici, la fonction f est toujours définie par « pour tout x on a $f(x) = x - 3$ » du début de la question 1.
2. Bien comprendre comment déterminer graphiquement le domaine dans la question 2.a).
3. Faire lire les questions (nombre de solutions vs solution de)
4. Dans la question 3., ne pas mélanger les lectures d'images et d'antécédent dans le cas d'une fonction définie numériquement.

Figure 7.8 – Carte mentale

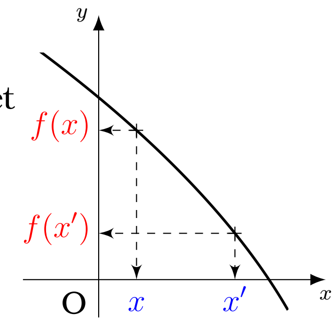
7.6 Sens de variation et extremums

Définition 7.4



f est *strictement croissante* sur un intervalle $[a;b]$ si pour tout x et $x' \in [a;b]$ les réels $f(x)$ et $f(x')$ sont *dans le même ordre* de x et x' :

$$\text{si } x < x' \quad \text{alors} \quad f(x) < f(x')$$



f est *strictement décroissante* sur un intervalle $[a;b]$ si pour tout x et $x' \in [a;b]$ les réels $f(x)$ et $f(x')$ sont *dans l'ordre contraire* de x et x' :

$$\text{si } x < x' \quad \text{alors} \quad f(x) > f(x')$$

f est *monotone* sur un intervalle I si elle ne change pas de sens de variation : elle est soit croissante sur I soit décroissante sur I.

Définition 7.5 — extremums.

Soit une fonction f définie sur un *intervalle* $I = [a;b]$.

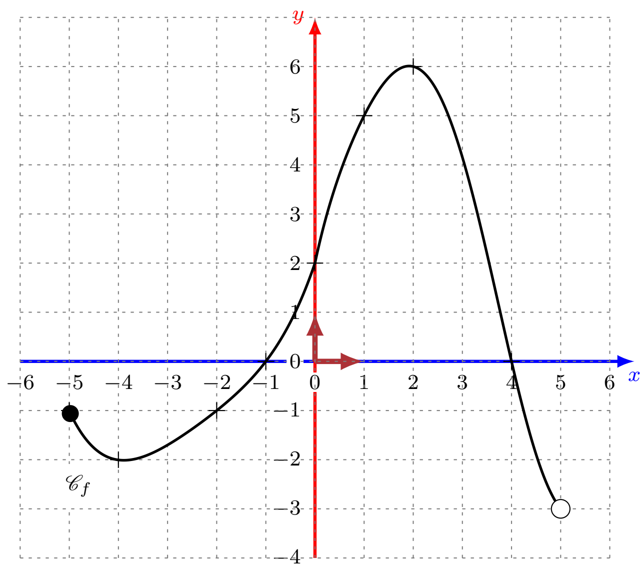
— m est le *minimum* de f sur I atteint en x_0 si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant m$ et $f(x_0) = m$.

— M est le *maximum* de f sur I atteint en x_0 si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$ et $f(x_0) = M$.

Figure 7.9 – Un tableau de variation synthétise les informations sur le domaine, les variations ainsi que les extremums locaux

— f est définie sur $D = [-5;5[$
— f est décroissante sur $[-5;-4]$
— f est croissante sur $[-4;2]$
— f décroissante sur l'intervalle $[2;5[$
— -2 est un mimimum local atteint en $x = -4$
— 6 est un maximum local atteint en $x = 2$

x	-5		-4		2		5
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	6	↘	-3 ‖



7.7 Exercices

7.7.1 Exercices : représentations numériques et graphiques

Exercice 7.1 Voir la solution

1. Entourez les ensembles de couples qui définissent une fonction.

   a) $\{(1\ ;\ 3),(2\ ;\ 4),(3\ ;\ 5),(4\ ;\ 6)\}$

   b) $\{(1;\ 3),(3\ ;\ 2),(1\ ;\ 7),(-1\ ;\ 4)\}$

   c) $\{(7;\ 6),(5\ ;\ 6),(3\ ;\ 6),(-4\ ;\ 6)\}$

   d) $\{(0;\ 0),(0\ ;\ -2),(0\ ;\ 2),(0\ ;\ 4)\}$

2. Entourez les fonctions dont le domaine est $D = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$

   a) $\{(0\ ;\ 1),(1\ ;\ -2),(2\ ;\ 0),(3\ ;\ 2)\}$

   b) $\{(0\ ;\ -1),(2\ ;\ 2),(1\ ;\ -2),(3\ ;\ 0),(1\ ;\ 1)\}$

   c) $\{(0\ ;\ 0),(1\ ;\ 0),(2\ ;\ 0),(3\ ;\ 0)\}$

   d) $\{(0\ ;\ 2),(3\ ;\ 0),(1\ ;\ 1)\}$

Exercice 7.2 Voir la solution

1. Déterminer les tableaux de valeurs représentant une fonction :

a)

x	6	-7	0	6	4
y	10	3	4	-4	5

b)

x	-1	0	2	3	4
y	0	-3	-3	0	5

c)

x	10	7	4	7	10
y	3	6	9	12	15

d)

x	0	3	9	12	15
y	3	3	3	3	3

2. Pour la fonction donnée par le tableau de valeur ci-dessous. Compléter :

x	19	-15	8	-3	9	0
$f(x)$	-15	-2	9	19	8	-3

L'image de -15 est ...... $f(......) = ...$

L'image de ...... est ...... $f(8) = ...$

L'image de ...... est ...... $f(......) = 8$

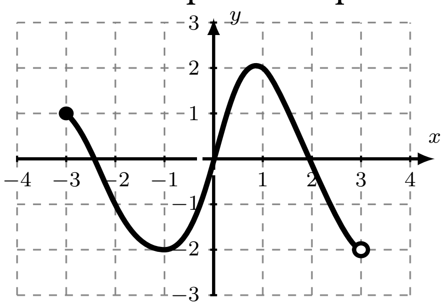
9 est un antécédent de ...... $f(...) = ...$

19 est l'image de ...... $f(......) = ...$

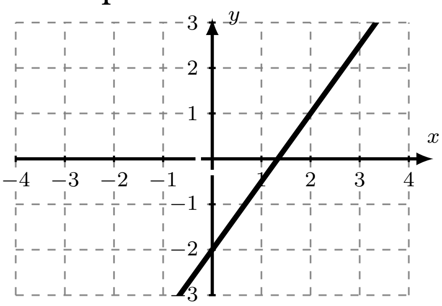
Le domaine est ....

Exercice 7.3 Voir la solution

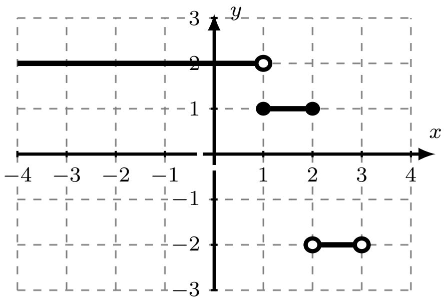
1. Déterminer pour chaque fonction représentée ci-dessous :



a) l'image de 2

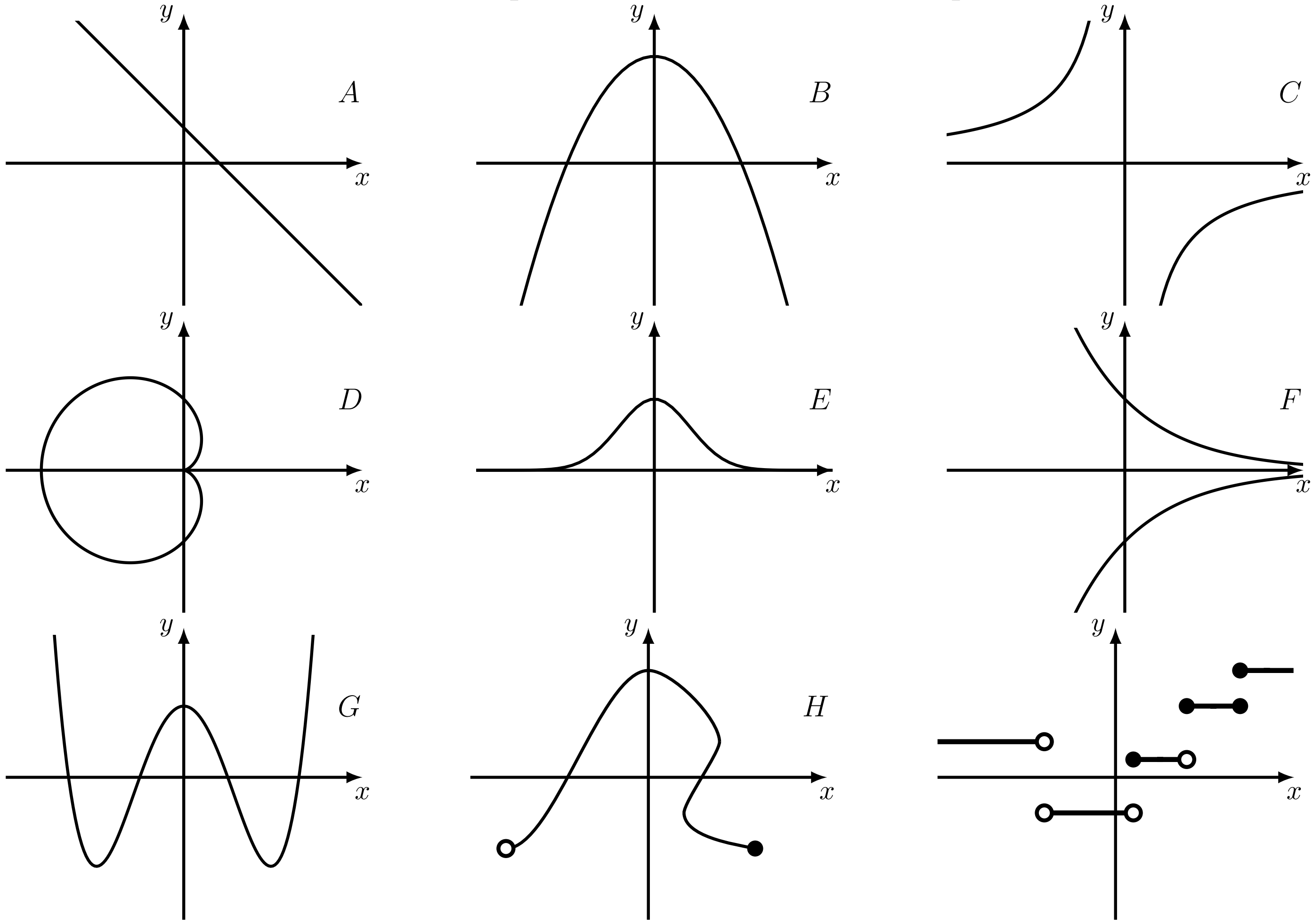


b) l'ordonnée à l'origine



c) le nombre d'antécédents de 1

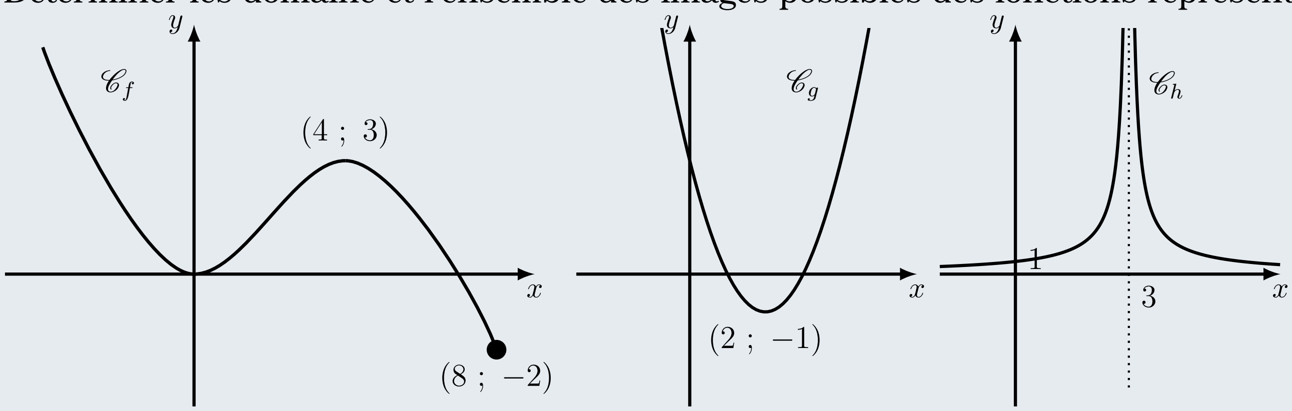
2. Utiliser le test de la droite verticale pour déterminer les courbes représentant une fonction :



3. Est-ce qu'une droite représente toujours une fonction ? Justifier votre réponse.

■ **Exemple 7.11 — identifier le domaine à partir d'une représentation.**

Déterminer les domaine et l'ensemble des images possibles des fonctions représentées :



solution. geogebra.org/m/aqtkjutt

$D_f =]-\infty; 8]$ et $\text{Im}(f) = [-2; +\infty[$

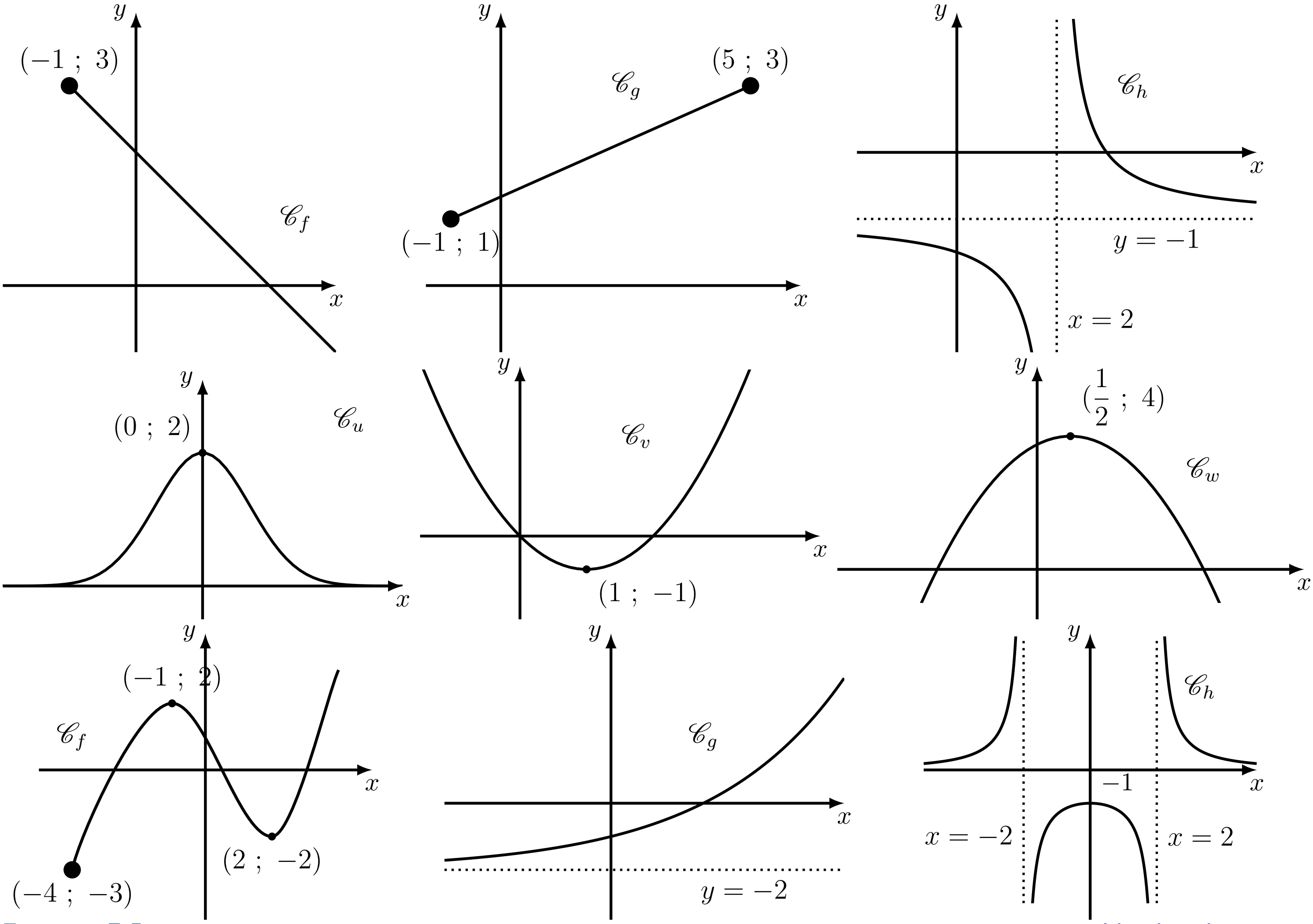
$D_g =]-\infty; +\infty[$ et $\text{Im}(g) = [-1; +\infty[$

$D_h =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ et $\text{Im}(h) =]0; +\infty[$, 0 n'a pas d'antécédents ■

Exercice 7.4

Voir la solution

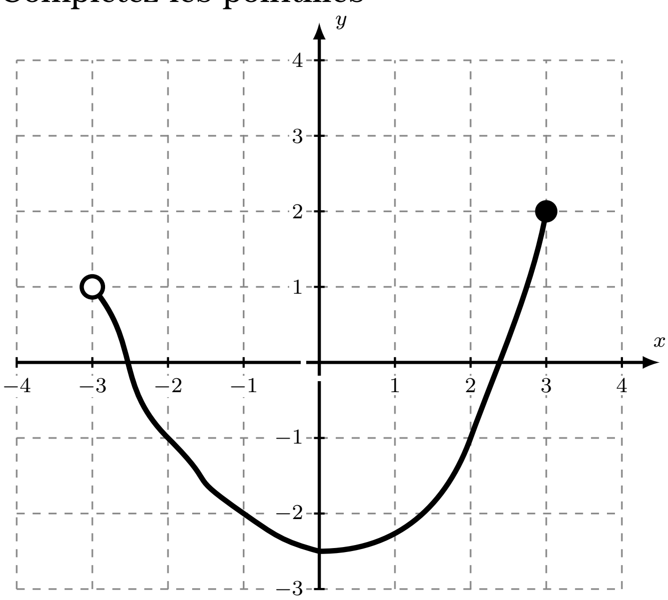
Déterminer le domaine et l'ensemble des images possibles des fonctions représentées :



Exercice 7.5

Voir la solution

Complétez les pointillés



Domaine : $D = \dots$

Image de -1 : $f(\dots) = \dots$

Image de 3: $f(\dots) = \dots$

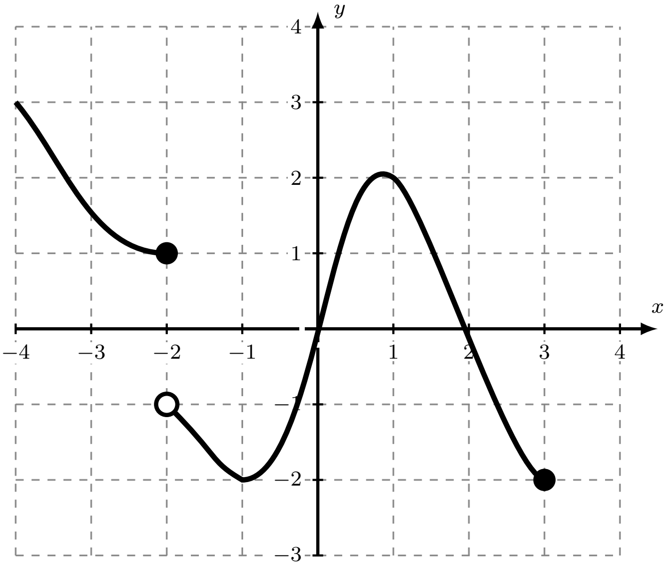
Antécédent(s) de 3: $f(\dots) = \dots$; $f(\dots) = \dots$

Antécédent(s) de 2: $f(\dots) = \dots$; $f(\dots) = \dots$

Antécédent(s) de -1: $f(\dots) = \dots$; $f(\dots) = \dots$

Image de 0 : $f(\dots) = \dots$

Antécédent(s) de 0 : $f(\dots) = \dots$; $f(\dots) = \dots$



Domaine : $D = \dots$

Image de -2 : $f(\dots) = \dots$

Image de $1{,}5$: $f(\dots) = \dots$

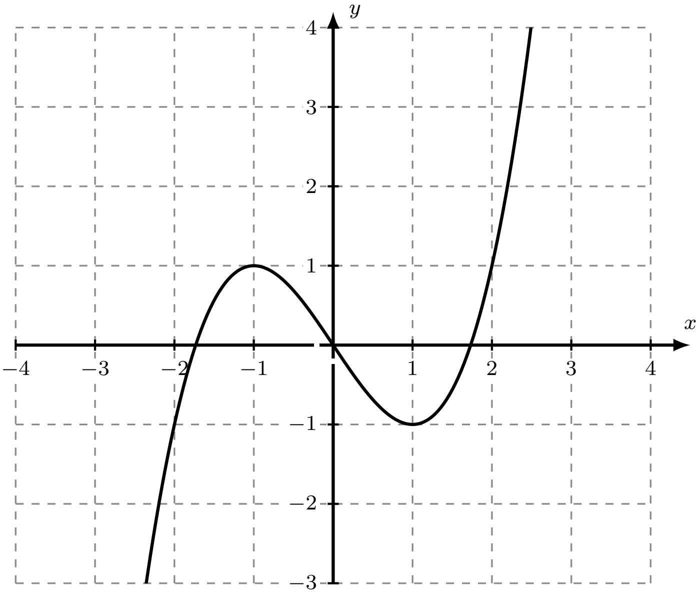
Antécédent(s) de 3: $f(\dots) = \dots$; $f(\dots) = \dots$

Antécédent(s) de 1: $f(\dots) = \dots$; $f(\dots) = \dots$

Antécédent(s) de -3: $f(\dots) = \dots$; $f(\dots) = \dots$

Image de 0 : $f(\dots) = \dots$

Antécédent(s) de 0 : $f(\dots) = \dots$; $f(\dots) = \dots$



Domaine $D = \dots$

L'image de 2 : $f(\dots) = \dots$.

L'image de 0 : $f(\dots) = \dots$.

Antécédent(s) de -1: $f(\dots) = \dots$; $f(\dots) = \dots$

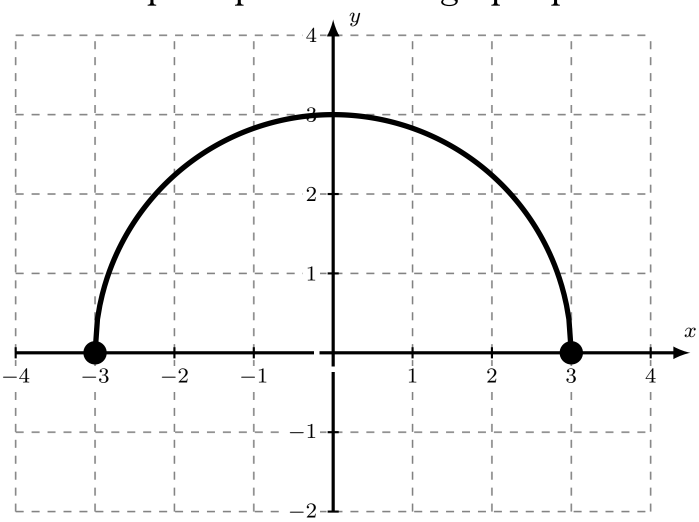
Le nombre d'antécédents de 0 est ....

Le nombre d'antécédents de -2 est ....

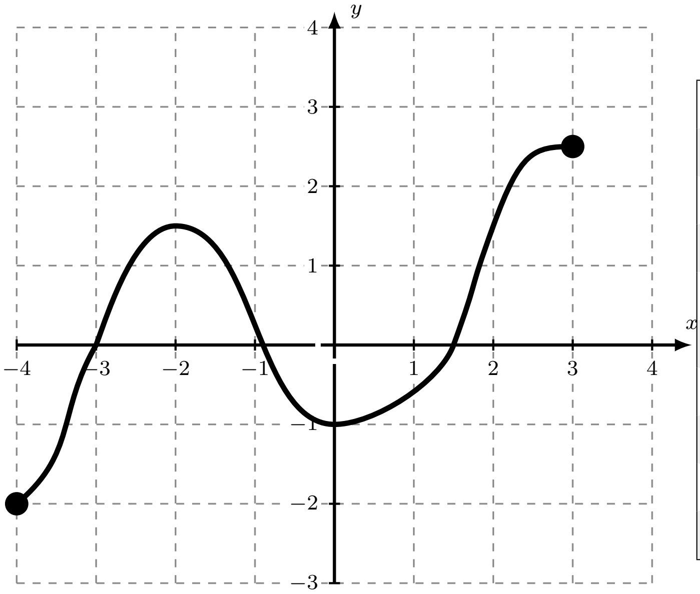
	Vrai	Faux
1/ $f(-2) = -f(2)$	☐	☐
2/ $f(-1) = f(1)$	☐	☐
3/ $f(2) = 2f(1)$	☐	☐
4/ $f(3) > 4$	☐	☐
5/ $f(-1) > 0$	☐	☐

Exercice 7.6 Voir la solution

Pour chaque représentation graphique cochez les bonnes réponses.



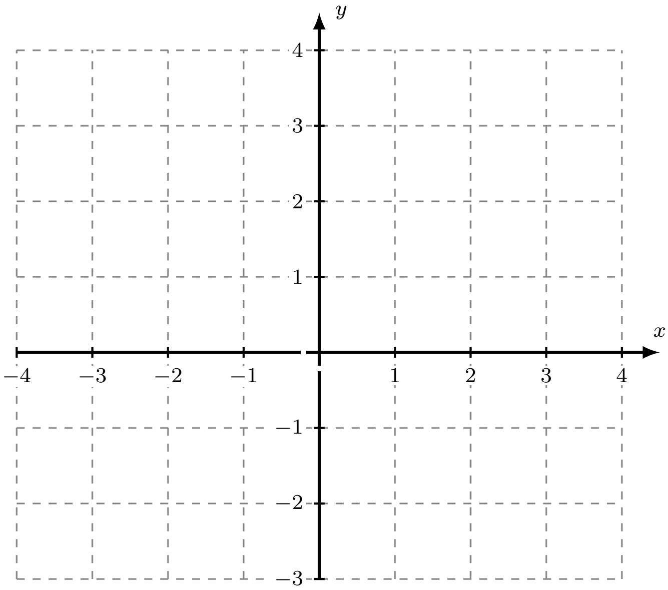
	Vrai	Faux
1/ Domaine est $[0; 3]$	☐	☐
2/ L'image de 0 est -3	☐	☐
3/ $f(3) = 0$	☐	☐
4/ $f(-2) = f(2)$	☐	☐
5/ $f(1+2) = 3$	☐	☐
6/ $f(1) > 2$	☐	☐
7/ 2 admet deux antécédents	☐	☐
8/ 3 admet deux antécédents	☐	☐
9/ -2 admet un antécédent	☐	☐



	Vrai	Faux
1/ Domaine est $[-3;3]$	☐	☐
2/ $f(1{,}5)=2$	☐	☐
3/ $f(0)=0$	☐	☐
4/ $f(-2)=f(2)$	☐	☐
5/ $f(1+2)=2{,}5$	☐	☐
6/ $f(1)>0$	☐	☐
7/ 1 admet deux antécédents	☐	☐
8/ -1 admet deux antécédents	☐	☐
9/ L'image de l'image de -3 est -1	☐	☐
10/ $f(f(2))=0$	☐	☐

Exercice 7.7 Voir la solution

Représenter dans le repère ci-contre une fonction f tel que :



- Domaine de f est $[-2;3]$
- L'image de -2 est 3
- $A(-1,1)$ est un point de $\mathscr{C}_f$.
- $f(0)<0$.
- Si $x\in[0;1]$ alors $f(x)>-1$.
- $B(2;1)$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$.
- $f(3)=-2$.

Exercice 7.8 Voir la solution

Sachant le tableau de signe de la fonction f ci-dessous, entourez la bonne réponse :

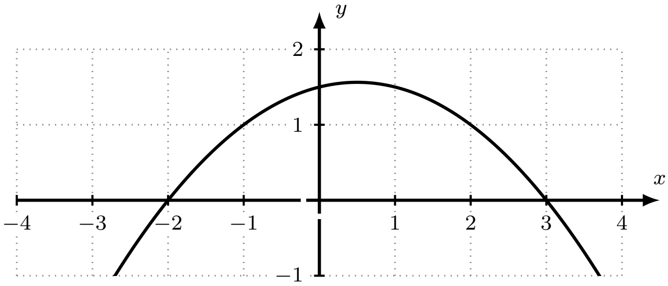
x	$-\infty$		-1		1		4		5	
signe de f		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$-$	||	

1. (A) $f(-3)<0$ (B) $f(-3)>0$ (C) $f(-3)=0$ (D) On ne peut pas savoir
2. (A) $f(-1)<0$ (B) $f(-1)>0$ (C) $f(-1)=0$ (D) $f(-1)$ n'est pas défini
3. (A) $f(1)<0$ (B) $f(1)>0$ (C) $f(1)=0$ (D) $f(1)$ n'est pas défini
4. (A) $f(4)<0$ (B) $f(4)>0$ (C) $f(4)=0$ (D) $f(4)$ n'est pas défini
5. (A) $f(3)<0$ (B) $f(3)>0$ (C) $f(3)=0$ (D) On ne peut pas savoir
6. (A) $f(0)<0$ (B) $f(0)>0$ (C) $f(0)=0$ (D) On ne peut pas savoir
7. (A) $f(6)<0$ (B) $f(6)>0$ (C) $f(6)=0$ (D) $f(6)$ n'est pas défini

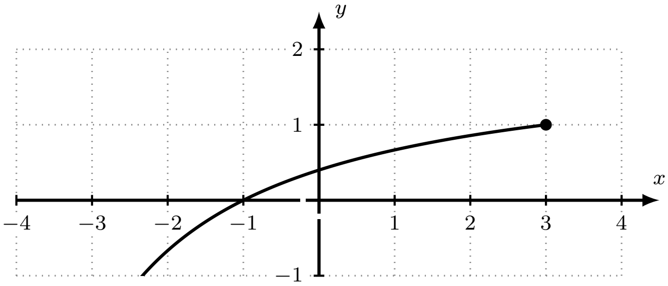
Exercice 7.9

Voir la solution

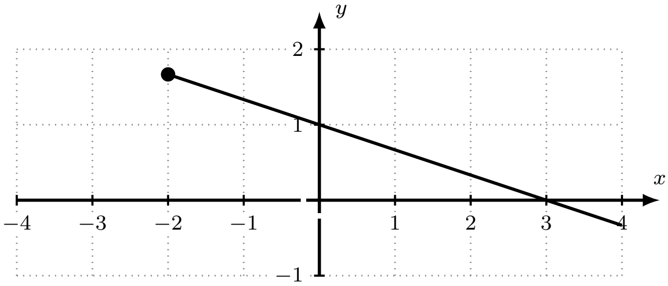
Compléter leur tableau de signe à l'aide de la représentation graphique.



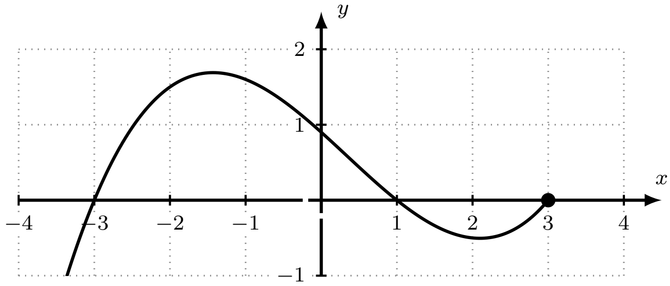
x	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$f(x)$				



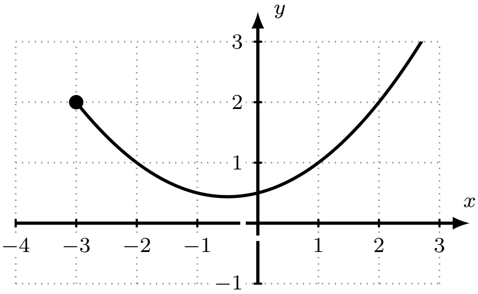
x	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$f(x)$			



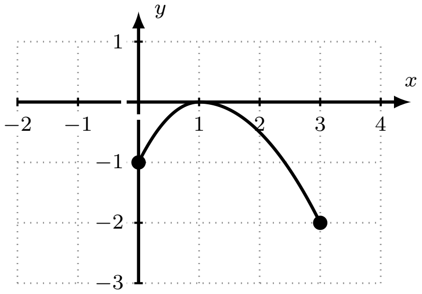
x	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$f(x)$			



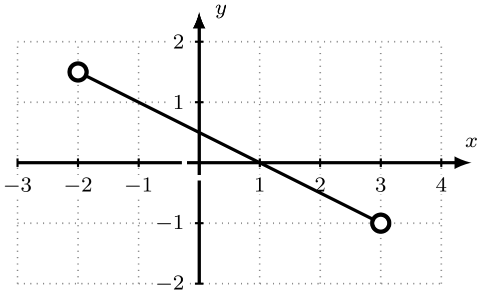
x	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$f(x)$				



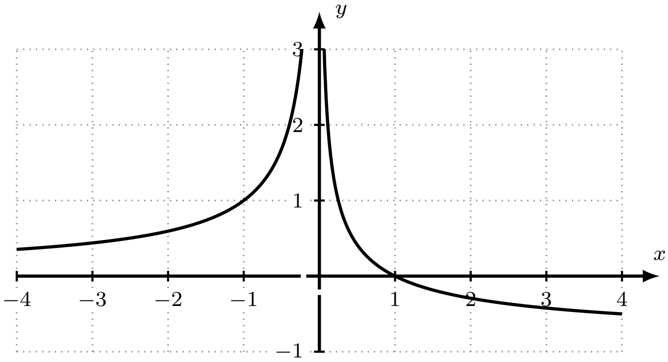
x	
$f(x)$	



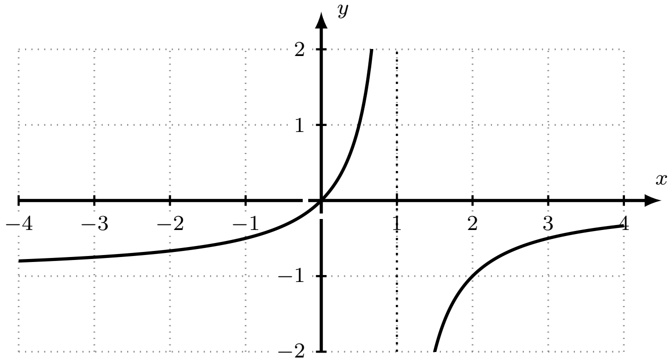
x	
$f(x)$	



x	
$f(x)$	



x	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$f(x)$				



x	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$f(x)$				

7.7.2 Exercices : fonctions et expressions algébriques

■ **Exemple 7.12** — **utiliser l'expression algébrique pour déterminer une image.**

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x$. Déterminer $f(5)$ et $f(-4)$.
2. Soit g définie sur $[0;4]$ par $g(x) = 2x + 3$. Déterminer l'ordonnée à l'origine et $g(-1)$

solution.

1. $f(5) = 2(5)^2 - 3(5)$ (substituer x par (5)) $f(-4) = 2(-4)^2 - 3(-4)$ (substituer x par (-4))

$= 2 \times 25 - 15$ $= 2 \times 16 + 12$

$= 35$ $= 44$

2. L'ordonnée à l'origine de g est l'image de 0 : $g(0) = 2(0) + 3 = 3$.

$-1 \notin [0;4]$. -1 n'est pas dans le domaine. -1 n'a pas d'image. ■

Exercice 7.10 — 🖩. Voir la solution

Pour chaque fonction, simplifier les images demandées.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$

a) $f(0)$ b) $f(2)$ c) $f(-5)$ d) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x - x^2 + 2$

a) $g(0)$ b) $g(\sqrt{2})$ c) $g(-3)$ d) $g(-7)$

3. h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = x - \frac{4}{x}$

a) $h(1)$ b) $h(4)$ c) $h(-1)$ d) $h\left(-\frac{1}{2}\right)$

4. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ 2x+2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

a) $f(-1)$ b) $f(0)$ c) $f(2)$ d) $f\left(\sqrt{3} - 2\right)$

5. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 4 - 5x & \text{si } x \leqslant -2 \\ 0 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$.

a) $f(-3)$ b) $f(4)$ c) $f(-1)$ d) $f(3)$

Quelle est la différence de sens entre les écritures f et $f(x)$?

■ **Exemple 7.13**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - x - x^2$. Déterminer $f(-x)$ et $f(x+2)$.

solution.

$$\begin{aligned} f(-x) &= 5 - (-x) - (-x)^2 \quad \text{substituer } x \text{ par } (-x) \\ &= 5 + x - x^2 \\ f(x+2) &= 5 - (x+2) - (x+2)^2 \quad \text{substituer } x \text{ par } (x+2) \\ &= 5 - x - 2 - \left(x^2 + 4x + 4\right) \\ &= 3 - x - x^2 - 4x - 4 \\ &= -x^2 - 5x - 1 \end{aligned}$$

■

Exercice 7.11 Voir la solution

Pour chaque fonction, simplifier les images demandées.

1. f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 7 - 3x$

   a) $f(a)$ b) $f(-a)$ c) $f(a+2)$ d) $f(b-1)$

2. g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + 3x - 1$

   a) $g(x+1)$ b) $g(2-x)$ c) $g(-x)$ d) $g\left(x^2\right)$

3. h définie pour tout $x \neq 3$ par $h(x) = \dfrac{1}{x-3}$

   a) $h(x+4)$ b) $h(4) + h(x)$ c) $h(-x)$ d) $h(4x)$

Exercice 7.12 Voir la solution

Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + 3m - 2$. Sachant que $f(2) = 0$, déterminer m.

Exercice 7.13 Voir la solution

Soit la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Sachant que $f(2) = 1$ et $f(-3) = 11$, écrire un système d'équations vérifié par a et b et en déduire les valeurs de a et b.

Exercice 7.14 Voir la solution

Soit la fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$. Sachant que $f(1) = 1$ et $f(2) = 5$ déterminer les valeurs de a et b.

Exercice 7.15 Voir la solution

Soit la fonction T définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $T(x) = ax^2 + bx + c$. Sachant que $T(0) = -4$, $T(1) = -2$ et $T(2) = 6$ déterminer les valeurs de a, b et c.

■ **Exemple 7.14 — utiliser l'expression algébrique pour déterminer les antécédents.**

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5$. Déterminer s'ils existent les antécédents de 11.
2. Soit g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = (2x-3)(3x+1)$. Déterminer les zéros de g.

solution.

1. Les antécédents de 11 sont les solutions de l'équation
$$\begin{aligned} f(x) &= 11 \\ 2x^2 - 5 &= 11 \\ 2x^2 &= 16 \\ x^2 &= 8 \\ x &= \pm\sqrt{8} \end{aligned}$$
$\therefore$ les antécédents de 11 par f sont $+\sqrt{8}$ et $-\sqrt{8}$.
2. Les zéros de g sont les solutions de l'équation
$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ (2x-3)(3x+1) &= 0 \\ 2x - 3 = 0 \qquad 3x + 1 &= 0 \\ x = \frac{3}{2} \in D_g \qquad x &= \frac{-1}{3} \notin D_g \end{aligned}$$
$\therefore$ la fonction g admet un zéro unique $x = \dfrac{3}{2}$.

■

Exercice 7.16 Voir la solution

Déterminer le(s) antécédent(s) de -3 par les fonctions suivantes :

1. f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 7 - 3x$.
2. g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 5 - 2\sqrt{x}$.
3. h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $h(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$.
4. u définie sur $\mathbb{R}^*$ par $u(x) = \dfrac{5}{x} + 6$.

Exercice 7.17 Voir la solution

Déterminer les zéros des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 15 - 3x$.
2. g définie sur $[-2; 4]$ par $g(x) = 12 - x^2$.
3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+3)(x^2-5)$
4. u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $u(x) = \dfrac{2x-5}{x+3}$

Quelle est la différence de sens entre les écritures « pour tout x : $f(x) = 3$ » et « $f(x) = 3$ »?

■ **Exemple 7.15** — **déterminer le domaine de définition d'une expression.**

Si le domaine de la fonction n'est pas donné, il est possible de chercher le domaine le plus large possible pour lequel l'expression existe. On se souviendra qu'il est interdit de *diviser par zéro* et il est interdit de prendre *la racine carrée d'un terme négatif.*

$p(x) = x^2 - 3x + 5$	Pas de racines carrées, pas de dénominateurs... Le domaine $D = \mathbb{R}$.
$f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+3)}$	Valeurs interdites : $(x-1)(x+3) = 0$, d'où : $x = 1$ ou $x = -3$. Le domaine $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\ ;\ 1\}$.
$g(x) = \sqrt{3-5x} + x^2 + 1$	La racine carrée est définie que pour $3 - 5x \geqslant 0$, donc $x \leqslant \dfrac{3}{5}$. Le domaine $D = \left]-\infty; \dfrac{3}{5}\right]$.
$h(x) = \dfrac{\sqrt{x+6}}{(x-5)^2}$	Valeurs interdites : $(x-5)^2 = 0$, d'où : $x = 5$. Le numérateur est défini que pour $x + 6 \geqslant 0$, donc $x \geqslant -6$. Le domaine $D = [-6; 5[\cup]5; +\infty[$.

Exercice 7.18 Voir la solution

Déterminer le domaine de définition le plus large possible pour la fonction f donnée par son expression.

1. a) $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$ | b) $f(x) = 5\sqrt{x} + 5x^3$ | c) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
2. a) $f(x) = 2\sqrt{x-1}$ | b) $f(x) = \dfrac{4}{2-3x}$ | c) $f(x) = (x^2+1)\sqrt{1-5x}$
3. a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-5x}}{x^2+1}$ | b) $f(x) = \sqrt{x^2+3} + \dfrac{5}{x}$ | c) $f(x) = \dfrac{x-7}{x-10} + \dfrac{x+7}{3-2x}$

■ **Exemple 7.16**

Déterminer si les points $A(2\ ;\ 13)$ et $B(-1\ ;\ -3)$ appartiennent à $\mathscr{C}: y = 10x - 7$.

solution.

$(13) = 10(2) - 7$	Le couple $(2\ ;\ 13)$ est solution de $y = 10x - 7$	$A(2\ ;\ 13) \in \mathscr{C}$
$(-3) \neq 10(-1) - 7$	Le couple $(-1\ ;\ -3)$ n'est pas solution de $y = 10x - 7$	$B(-1\ ;\ -3) \notin \mathscr{C}$

■

Exercice 7.19 — **équation et courbe.** Voir la solution

Déterminer si les points A et B donnés appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$ décrite par son équation.

1. $\mathscr{C}_1: y = \sqrt{x+4}$ avec $A(0\ ;\ 2)$ et $B(5\ ;\ 3)$
2. $\mathscr{C}_2: y = x^2 - 3x + 2$ avec $A(2\ ;\ 0)$ et $B(-2\ ;\ 8)$
3. $\mathscr{C}_3: y = 4 - |x-2|$ avec $A(1\ ;\ 5)$ et $B(6\ ;\ 0)$
4. $\mathscr{C}_4: y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$ avec $A\left(2\ ;\ \frac{-16}{3}\right)$ et $B(-3\ ;\ 9)$

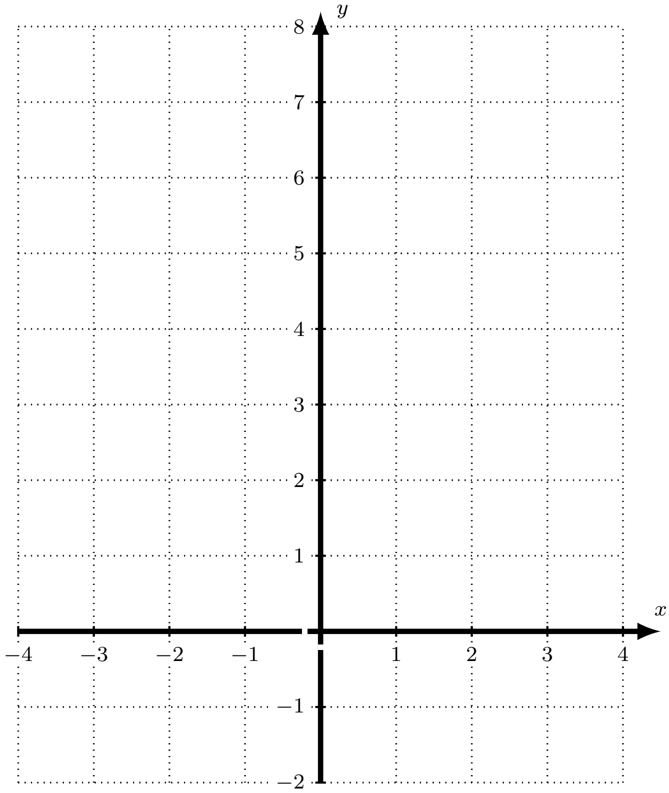
Exercice 7.20

Voir la solution

Dans chaque cas, compléter le tableau valeurs puis utiliser les points obtenus pour tracer la représentation graphique de la fonctions f.

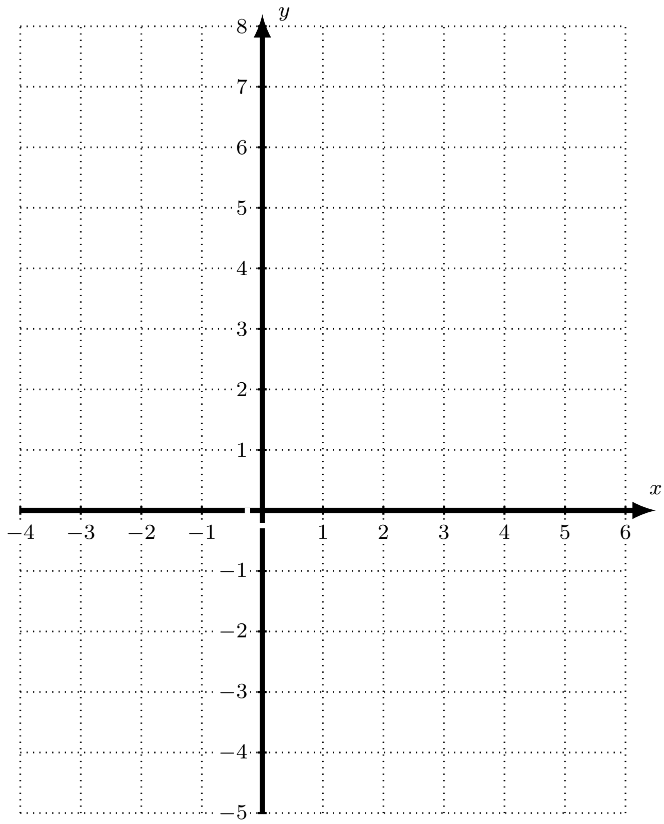
1. f définie sur $[-3; 2]$ par $f(x) = x^2 - 2$

x	$f(x) = x^2 - 2$	$P(x\ ;\ y)$
-3		
-2		
-1		
$-\dfrac{1}{2}$		
0		
$+\dfrac{1}{2}$		
1		
2		
3		



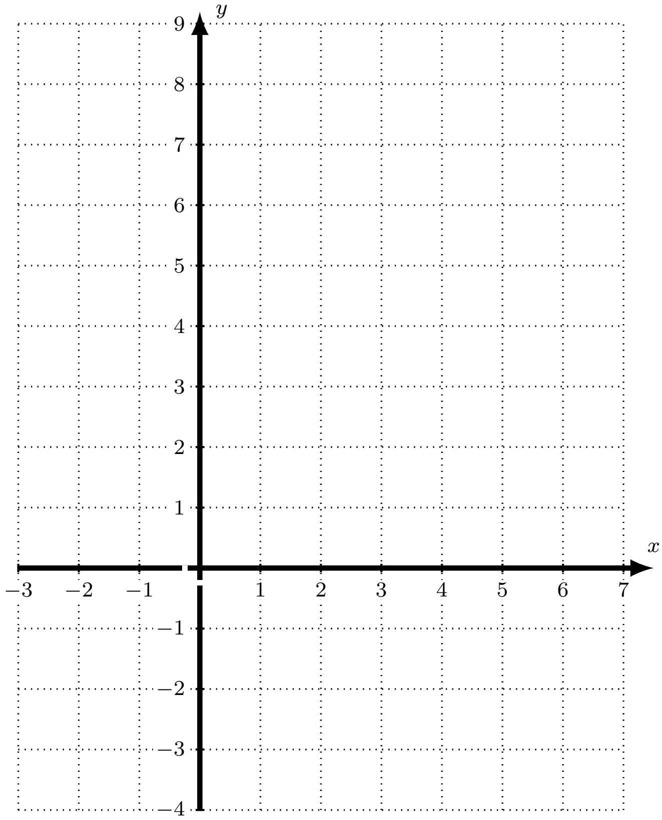
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+2)(6-x)$

x	$f(x) = \dfrac{1}{2}(x+2)(6-x)$	$P(x\ ;\ y)$
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
$+1$		
2		
3		
4		
5		
6		



3. f définie sur $[-2;+\infty[$ par $f(x) = 2|x-1|-3$

x	$f(x) = 2\lvert x-1\rvert - 3$	$P(x\ ;\ y)$
-3		
-2		
-1		
0		
$+1$		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

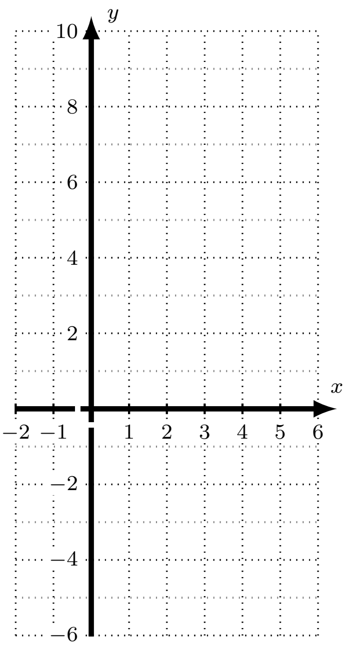
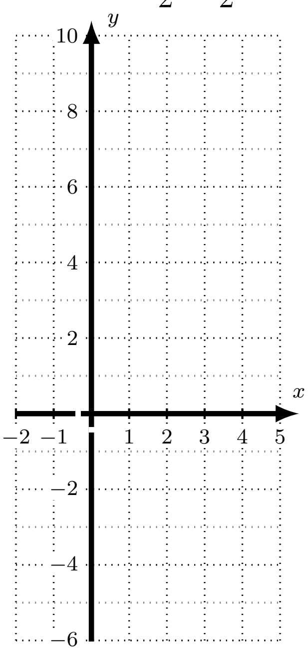
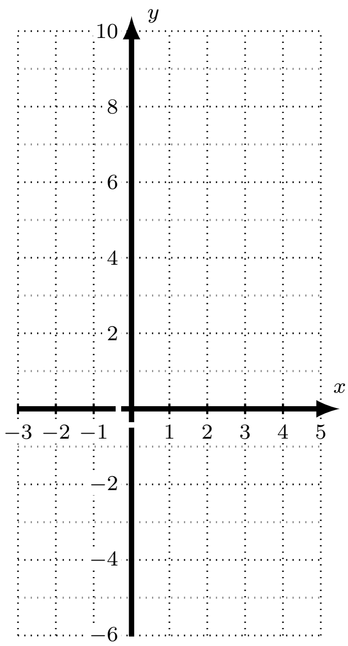
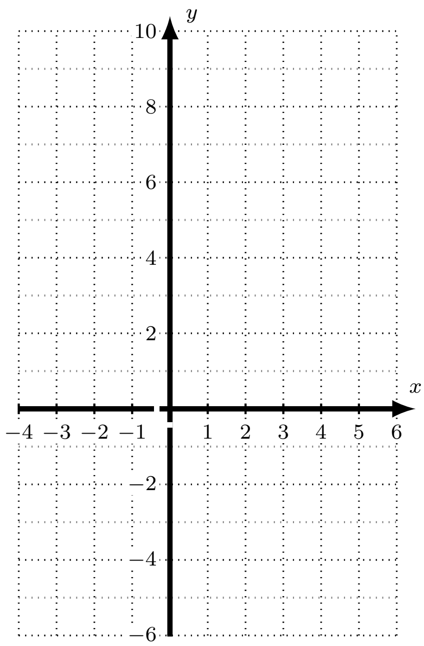


Exercice 7.21

Voir la solution

Représenter les fonctions suivantes en plaçant un minimum de point.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x+5$
2. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x-2$
3. g définie sur $]-2;4]$ par $f(x) = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{4}{3}$
4. u définie sur $]-3;5]$ par $u(x) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}x$

Pour une fonction f donnée par son expression, une bonne représentation graphique permet de mieux l'appréhender. La recherche du domaine, de l'ordonnée à l'origine, des zéros de f, et du tableau de signes nous sera le plus souvent suffisante.

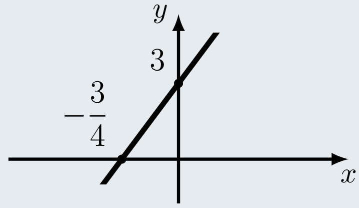
■ **Exemple 7.17 — Représenter une fonction à main levée.**

Soit la fonction f définie par $f(x) = 4x + 3$

1. Le domaine de f est $\mathbb{R}$.
2. L'ordonnée à l'origine est $f(0) = 4(0) + 3 = 3$.

   $\therefore$ Le point $A(0\ ;\ 1)$ est l'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'*axe des ordonnées*
3. Les zéros de f sont solution de $f(x) = 0 \iff 4x + 3 = 0 \iff x = -\dfrac{3}{4}$.

   $\therefore$ Le point $P\left(-\dfrac{3}{4}\ ;\ 0\right)$ est l'intersections de $\mathscr{C}_f$ avec l'*axe des abscisses.*
4. f est une fonction affine, sa représentation est une droite non verticale :



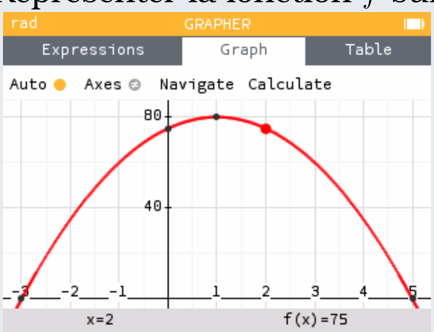
■ **Exemple 7.18 — Représenter une fonction à main levée.**

Soit la fonction f définie par $f(x) = 5(5 - x)(x + 3)$.

1. Le domaine de f est $D_f = \mathbb{R}$.
2. L'ordonnée à l'origine est $f(0) = 5(5 - (0))((0) + 3) = 75$.

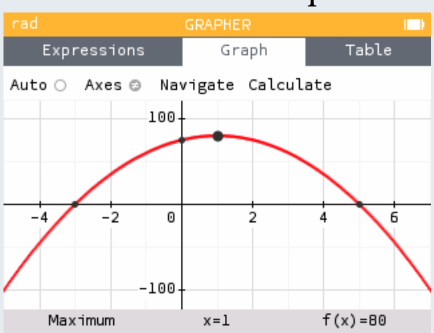
   $\therefore$ Le point $A(0\ ;\ 75)$ est l'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'*axe des ordonnées*
3. Les zéros de f sont les solutions de $f(x) = 0 \iff 5(5 - x)(x + 3) = 0 \iff x = 5$ ou -3.

   $\therefore$ Les points $P(-3\ ;\ 0)$ et $Q(5\ ;\ 0)$ sont les intersections de $\mathscr{C}_f$ avec l'*axe des abscisses.*
4. Représenter la fonction f sur la calculatrice et adapter la fenêtre du repère :



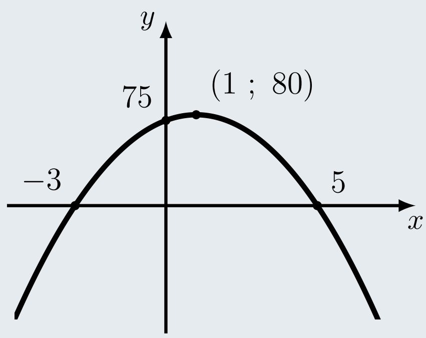
$[-3.36; 5.35] \times [-14.5; 87]$

Fenêtre par défaut.



$[-5; 7] \times [-150; 120]$

Maximum en $x = 1$.



Exercice 7.22 Voir la solution

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 6$ et sa représentation $\mathscr{C}_f$.

1. Déterminer l'ordonnée à l'origine de f et interpréter graphiquement la valeur obtenue.
2. Déterminer algébriquement le zéro de f et interpéter graphiquement la valeur obtenue.
3. Quelle est la nature de la représentation $\mathscr{C}_f$? Justifier.
4. Tracer $\mathscr{C}_f$ à main levée. Indiquer les intersection avec les axes du repère.
5. Le point $A(-103\ ;\ -509)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$? Justifier.

Exercice 7.23 Voir la solution

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3 - (x-1)^2$ et sa représentation $\mathscr{C}_f$.

1. Déterminer l'ordonnée à l'origine de f et interpréter graphiquement la valeur obtenue.
2. Déterminer algébriquement les zéros de f et en donner une interprétation graphique.
3. Aider vous de la calculatrice pour tracer $\mathscr{C}_f$ à main levée. Indiquer les coordonnées des points d'intersection avec les axes du repère ainsi que le maximum.
4. Déduire de la question précédente le tableau de signe de f.
5. Le point $A(100\ ;\ -10000)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$? Justifier.

Exercice 7.24 Voir la solution

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{x+4} - 1$ et sa représentation $\mathscr{C}_f$.

1. Déterminer le domaine D_f de f.
2. Déterminer $f(-4)$ et l'ordonnée à l'origine de f.
3. Déterminer algébriquement le zéro de f et en donner une interprétation graphique.
4. Aider vous de la calculatrice pour tracer $\mathscr{C}_f$ à main levée. Indiquer les coordonnées des points d'intersection avec les axes du repère.
5. Justifier si le point $A(100\ ;\ 20)$ est sur, en dessous ou au dessus de $\mathscr{C}_f$.
6. Dresser le tableau de signe de la fonction f.

Exercice 7.25 Voir la solution

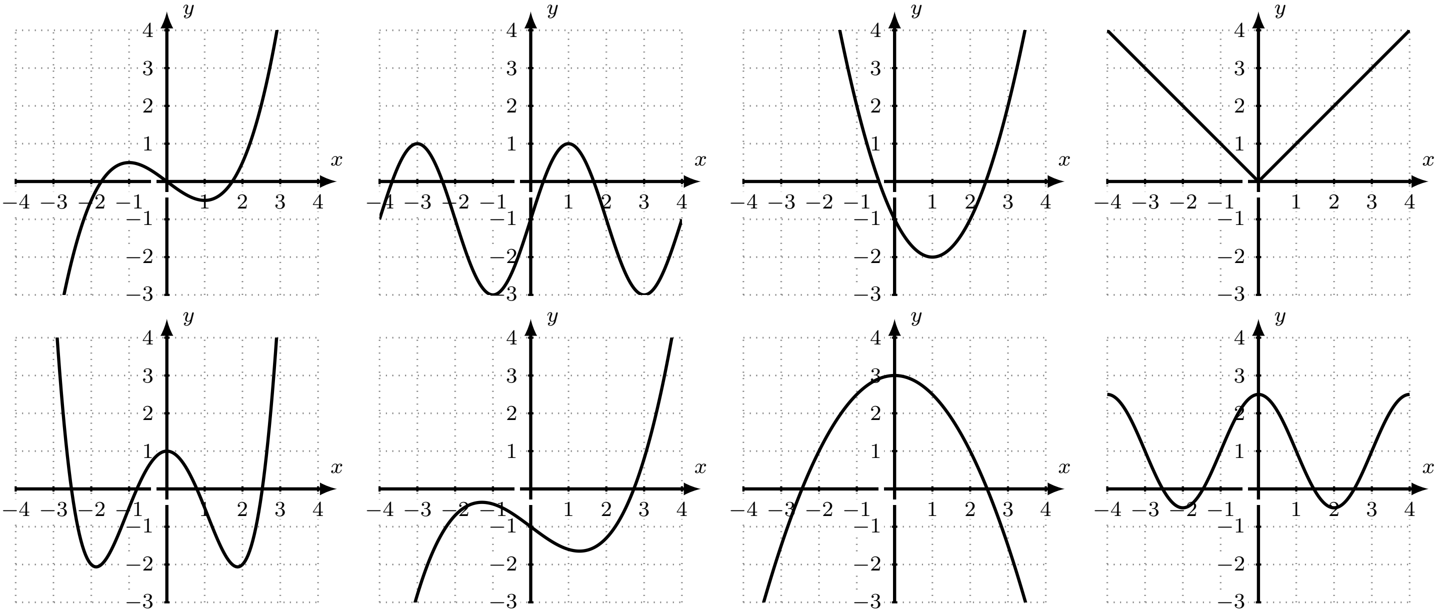
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}|x+1| - 3$

1. Déterminer l'ordonnée à l'origine de f et interpréter graphiquement la valeur obtenue.
2. Déterminer algébriquement le(s) zéros de f et en donner une interprétation graphique.
3. Aider vous de la calculatrice pour tracer $\mathscr{C}_f$ à main levée. Indiquer les coordonnées des points d'intersection avec les axes du repère ainsi que le minimum.
4. Dresser le tableau de signe de la fonction f.

7.7.3 Exercices : parité de fonctions

Exercice 7.26 — **parité de fonctions et représentation graphique.** Voir la solution

Déterminer la parité des fonctions représentées.



Exercice 7.27 Voir la solution

1. Justifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2$ est paire.
2. Justifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$ est impaire.

Exercice 7.28 Voir la solution

Déterminer si les fonctions données par leur expression sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre. Vous vérifierez que le domaine est symétrique par rapport à 0.

1. $f(x) = 5x$
2. $f(x) = 2x^3 - \dfrac{5}{x}$
3. $f(x) = -4x + 3$
4. $f(x) = x^2 + \dfrac{7}{x^2} - 3$
5. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$
6. $f(x) = \sqrt{x}$

Exercice 7.29 Voir la solution

1. Sachant que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + c$ est impaire, montrer que $c = 0$.
2. Sachant que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ax^2 + bx + c$ est paire, montrer que $b = 0$.

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ peut-elle être paire et impaire à la fois ? Justifier.

Exercice 7.30 Voir la solution

1. Déterminer a pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+3)(x+a)$ soit paire.
2. Déterminer b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = (x+1)\left(\dfrac{1}{x} + b\right)$ soit impaire.

Exercice 7.31 Voir la solution

1. Justifier que la somme de deux fonctions paires est une fonction paire.
2. Justifier que le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.

7.7.4 Exercices : résolution graphique d'équations et inéquations

Définition 7.6

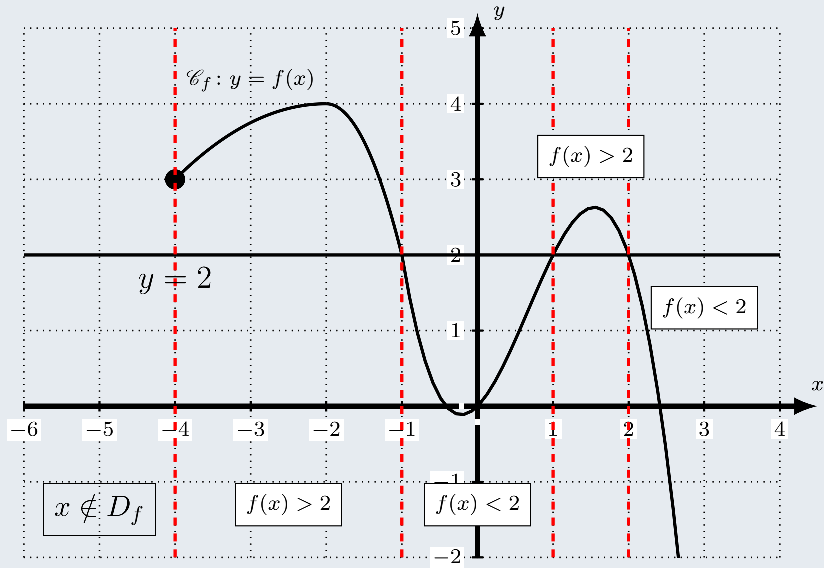
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x » c'est trouver les abscisses (dans D_f) des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est égale à k.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \leqslant k$ d'inconnue x » c'est trouver les abscisses (dans D_f) des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est inférieure à k

■ Exemple 7.19 — résoudre graphiquement une équation $f(x) = k$ ou inéquation de la forme $f(x) \geqslant k$.

Soit la fonction f de domaine $D_f = [-4; +\infty[$ ci-dessous. La résolution se fait dans D_f :

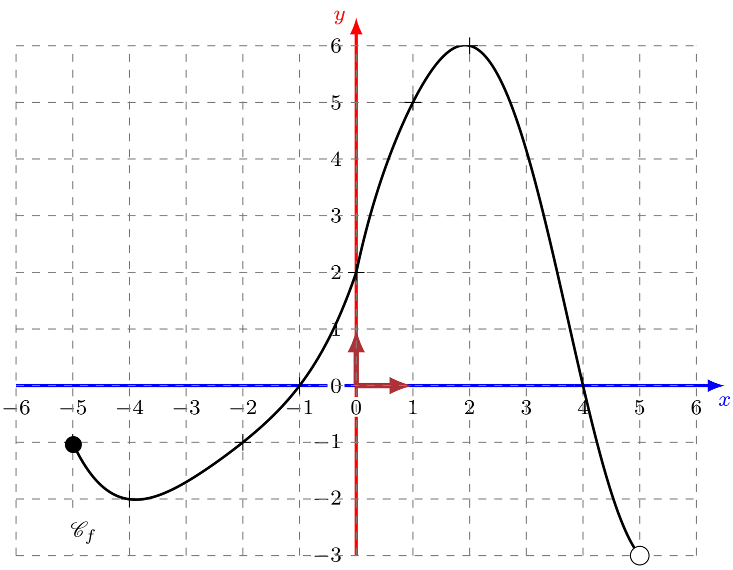
1. Résolution graphique de $f(x) = 2$:
   $\mathscr{S} = \{-1\ ;\ 1\ ;\ 2\}$
2. Résolution graphique de $f(x) > 2$:
   $\mathscr{S} = [-4; -1[\cup]1; 2[$
3. Résolution graphique de $f(x) \geqslant 2$:
   $\mathscr{S} = [-4; -1] \cup [1; 2]$
4. Résolution graphique de $f(x) < 2$:
   $\mathscr{S} =]-1; 1[\cup]2; +\infty[$
5. Résolution graphique de $f(x) \leqslant 2$:
   $\mathscr{S} = [-1; 1] \cup [2; +\infty[$

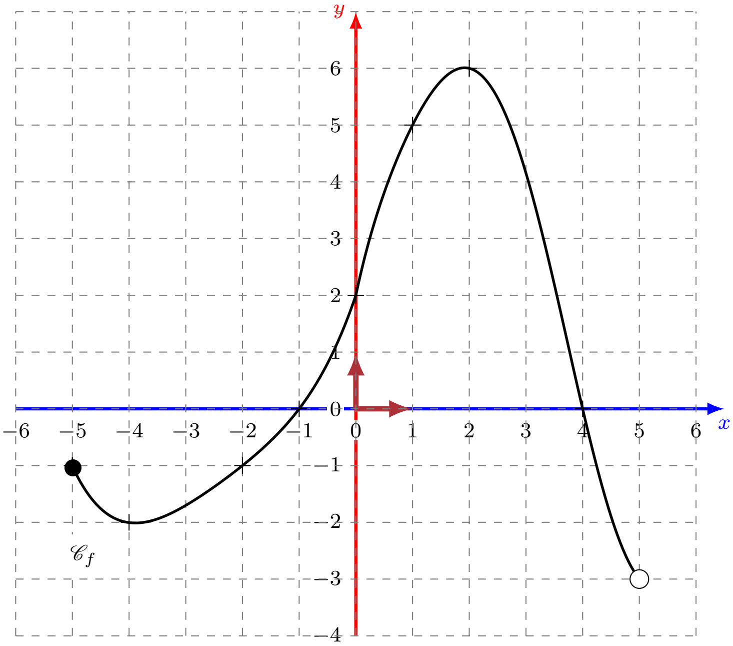


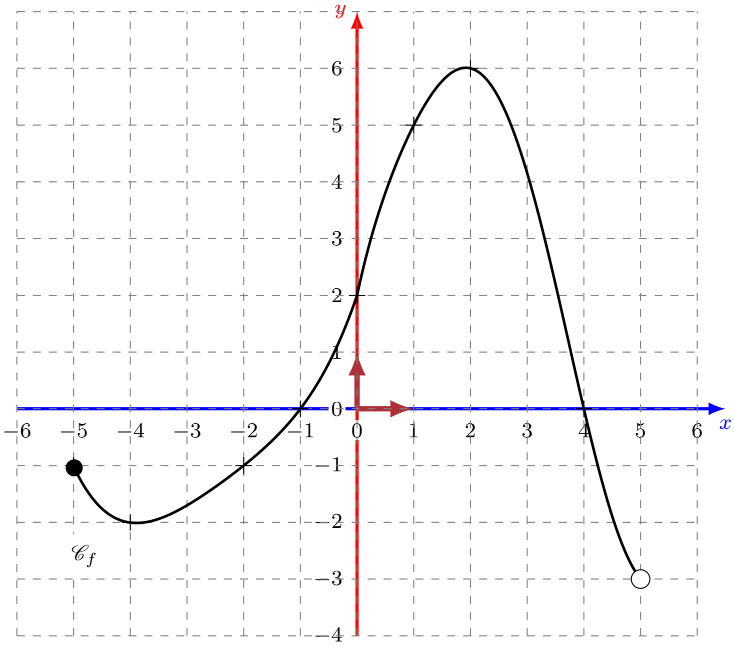
Exercice 7.32 Voir la solution

Pour la fonction f représentée ci-dessous, résoudre graphiquement avec la précision permise par le graphique les équations et inéquations suivantes.

1. Tracer $D_5 : y = 5$.
   (E_1) $f(x) = 5$: $\mathscr{S} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
   (I_1) $f(x) > 5$: $\mathscr{S} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
   (I_2) $f(x) \geqslant 5$: $\mathscr{S} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
   (I_3) $f(x) \leqslant 5$: $\mathscr{S} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
2. Tracer $D_2 : y = 2$.
   (E_1) $f(x) = 2$: $\mathscr{S} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
   (I_1) $f(x) \geqslant 2$: $\mathscr{S} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
   (I_2) $f(x) > 2$: $\mathscr{S} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$







3. Tracer D_{-1} : $y = -1$.

   (E_1) $f(x) = -1$: $\mathscr{S} =$ ....

   (I_1) $f(x) \leqslant -1$: $\mathscr{S} =$ ....

   (I_2) $f(x) < -1$: $\mathscr{S} =$ ....

   (I_3) $f(x) \geqslant -1$: $\mathscr{S} =$ ....

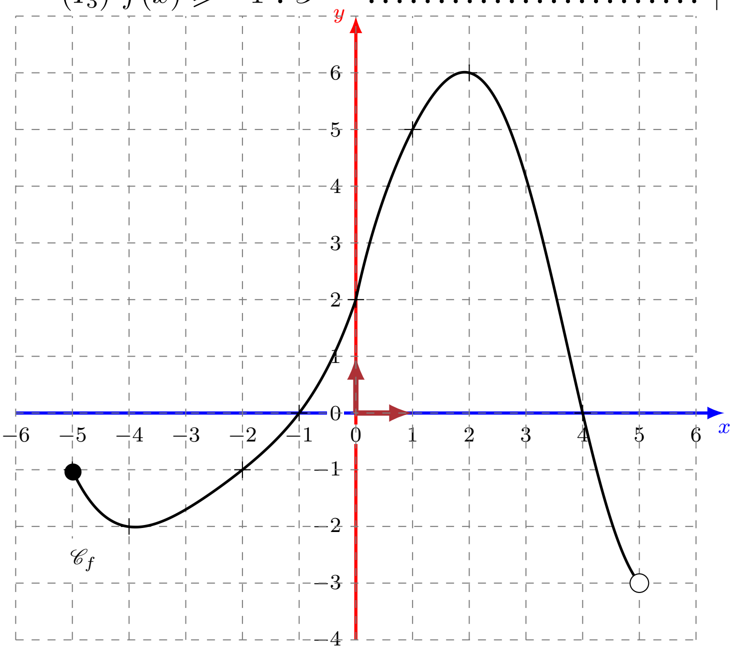
4. Tracer D_{-2} : $y = -2$.

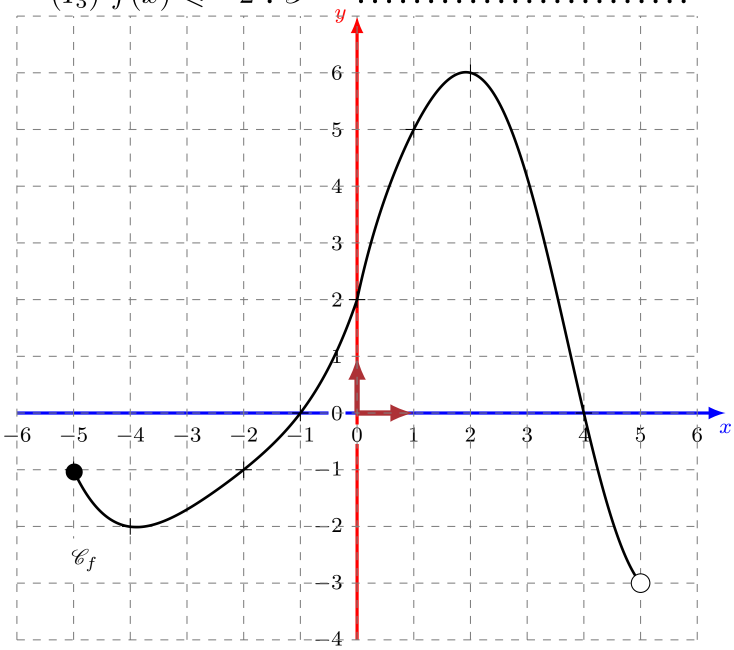
   (E_1) $f(x) = -2$: $\mathscr{S} =$ ....

   (I_1) $f(x) \geqslant -2$: $\mathscr{S} =$ ....

   (I_2) $f(x) > -2$: $\mathscr{S} =$ ....

   (I_3) $f(x) \leqslant -2$: $\mathscr{S} =$ ....





5. (E_1) $f(x) = 0$: $\mathscr{S} =$ ....

   (I_1) $f(x) \geqslant 0$: $\mathscr{S} =$ ....

   (I_2) $f(x) < 0$: $\mathscr{S} =$ ....

6. (E_1) $f(x) = 6$: $\mathscr{S} =$ ....

   (I_1) $f(x) \leqslant 6$: $\mathscr{S} =$ ....

   (I_2) $f(x) > 6$: $\mathscr{S} =$ ....

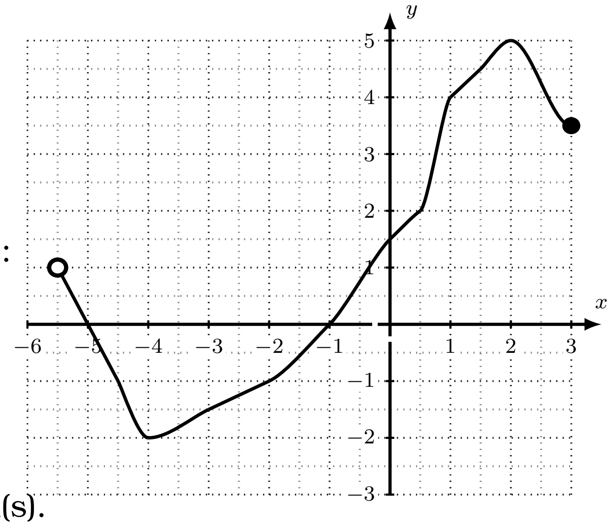
6. a) Si $0 < k < 5$, l'équation $f(x) = k$ admet ... solution(s).

   b) Si $-2 < k < -1$, l'équation $f(x) = k$ admet ... solution(s).

Exercice 7.33

Voir la solution

La fonction f est représentée ci-contre :



1. Donner le domaine D_f de la fonction f.
2. Résoudre graphiquement les équations suivantes :

   a) $f(x) = -2$ b) $f(x) = 4$ c) $f(x) = 0$

3. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

   a) $f(x) \geqslant 2$ b) $f(x) > 1{,}5$ c) $f(x) \geqslant 0$

4. Compléter :

   Si $k < -2$, l'équation $f(x) = k$ admet … solution(s).

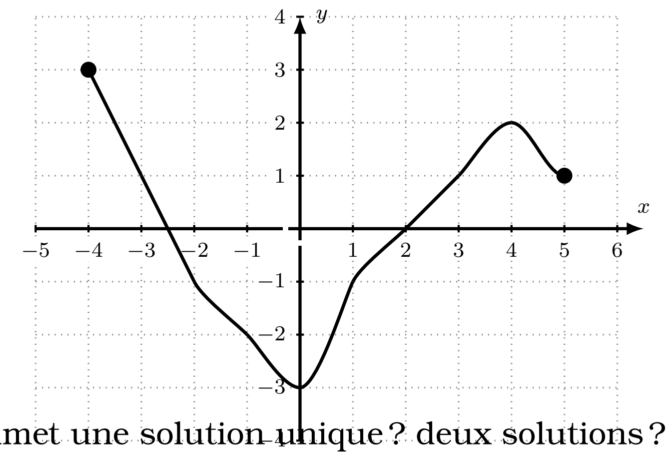
   Si $-2 < k < 1$, l'équation $f(x) = k$ admet … solution(s).

   Pour $k = 1$, l'équation $f(x) = k$ admet … solution(s).

Exercice 7.34

Voir la solution

La fonction f est représentée ci-contre.



1. Donner le domaine D_f de la fonction f.
2. Résoudre graphiquement les équations :

   a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 4$ c) $f(x) = 2$

3. Résoudre graphiquement les inéquations :

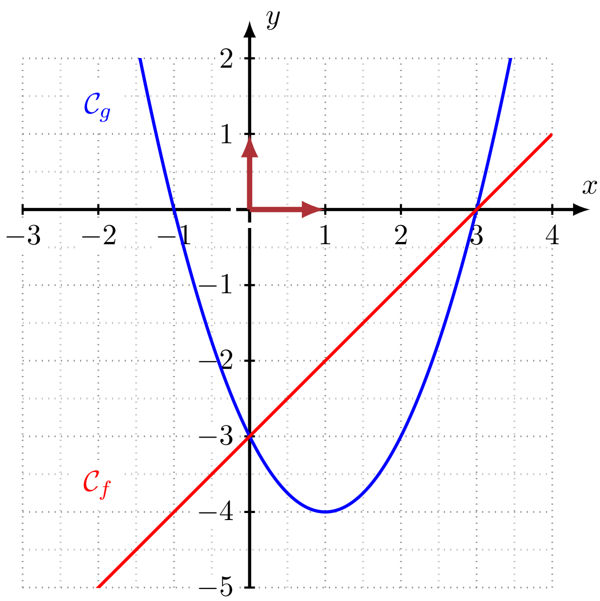
   a) $f(x) \geqslant 0$ b) $f(x) < 1$ c) $f(x) \geqslant 2$

4. Pour quelles valeurs de k l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique ? deux solutions ?

Exercice 7.35

Voir la solution

Les fonctions f et g sont représentées ci-contre.



1. a) Quelles sont les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   b) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

2. a) Identifier les points de la courbe $\mathscr{C}_g$ au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

   b) Résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant f(x)$.

   c) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

7.7.5 Exercices : sens de variation d'une fonction

Exercice 7.36 **— je vérifie ma compréhension.** Voir la solution

Compléter avec le meilleur encadrement possible :

1. $-3 < x < 1$; $f(\dots)\dots f(x)\dots f(\dots)$ — *f strictement croissante sur* $[-3;5]$

   $3 < x < 5$; $g(\dots)\dots g(x)\dots g(\dots)$ — *g strictement décroissante sur* $[1;6]$

   $-1 < x < 3$; $h(3) < h(x) < h(-1)$ — *h sur* $[-1;3]$

   $0 < x < 2$; $u(\dots)\dots u(x)\dots u(\dots)$ — *u strictement décroissante sur* $[0;2]$

2. $2 \leqslant a \leqslant b \leqslant 4$; $v(\dots)\dots v(a)\dots v(b)\dots v(\dots)$ — *v décroissante sur* $[2;4]$

   $-1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$; $w(\dots)\dots w(a)\dots w(b)\dots w(\dots)$ — *w croissante sur* $[-1;1]$

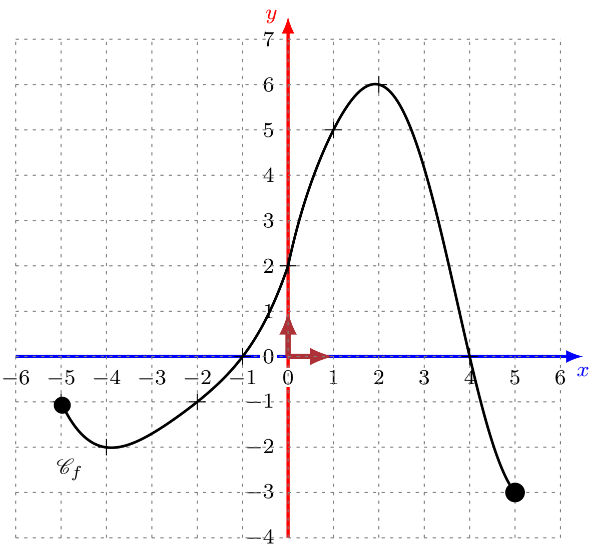
3. a) $2 < x < 3$; $\dots f(x)\dots 0$ — *f est strictement croissante sur* $[2;5]$ *et* $f(3)=0$

   b) $3 < x < 4$; $\dots f(x)\dots 0$ — *f est strictement décroissante sur* $[1;4]$ *et* $f(3)=0$

   c) $1 < x < 2$; $f(x)\dots 3$ — *f est strictement décroissante sur* $[0;5]$ *et* $f(2)=3$

Exercice 7.37 **— je vérifie ma compréhension.** Voir la solution

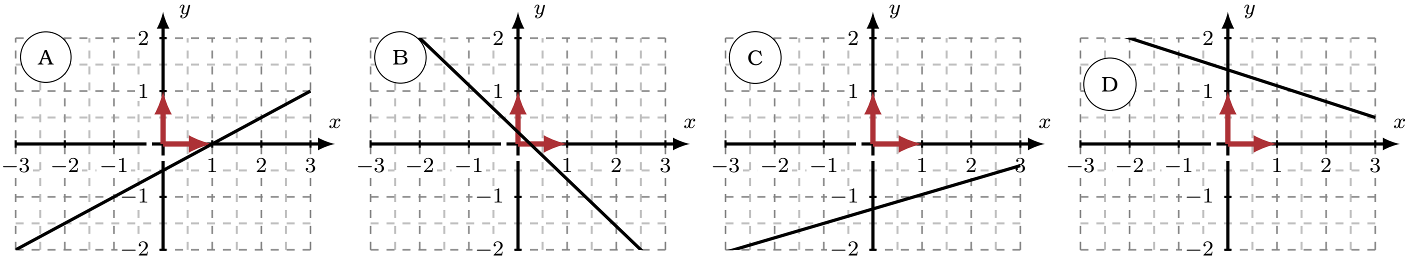
	Vrai	Faux
1/ f est strictement croissante sur $[-1;1]$	☐	☐
2/ f est strictement décroissante sur $[4;5]$	☐	☐
3/ f est décroissante sur $[-5;-4]$	☐	☐
4/ f est monotone sur $[3;5]$	☐	☐
5/ f est monotone sur $[1;3]$	☐	☐
6/ Le maximum de f est atteint en 6	☐	☐
7/ Le minimum de f est atteint en -4	☐	☐



Exercice 7.38

Voir la solution

Associer chaque courbe au tableau de variation qui lui correspond.



x	-2		3
$f(x)$	2	↘	$0{,}5$

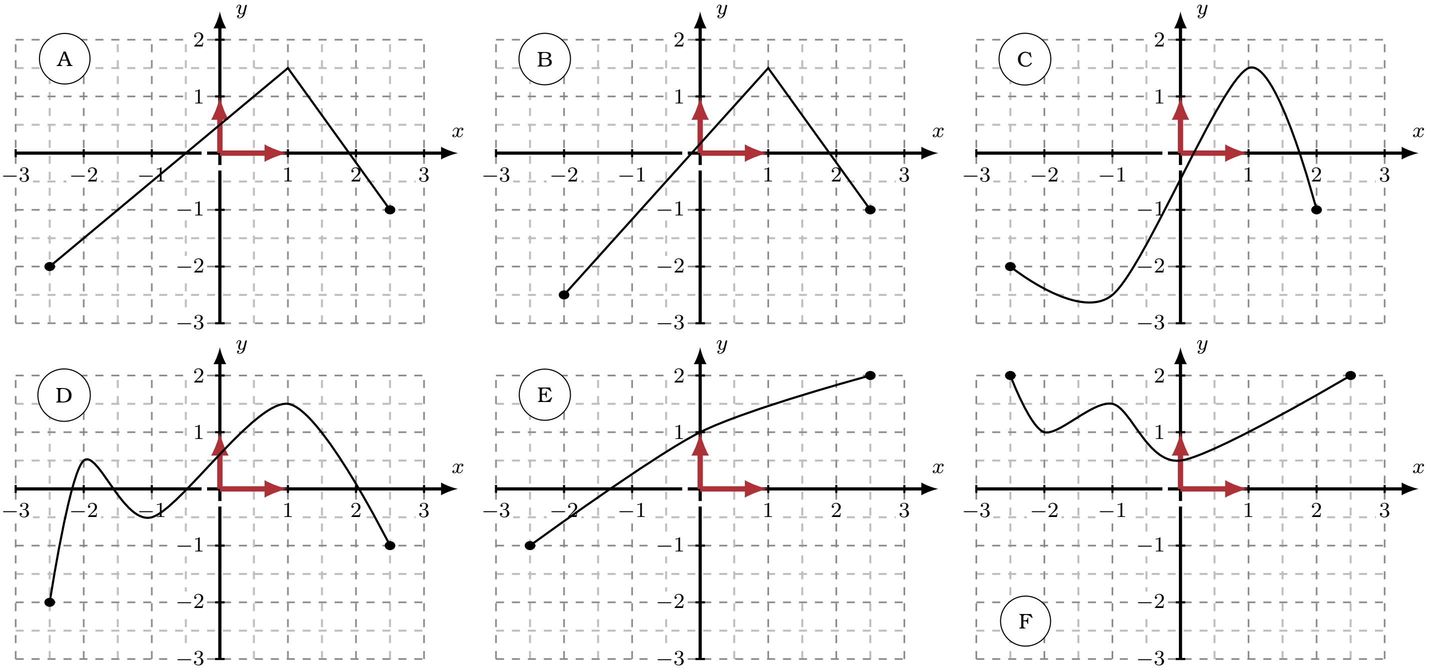
x	-3		3
$g(x)$	-2	↗	$-0{,}5$

x	-3		3
$h(x)$	-2	↗	1

x	-2		$2{,}5$
$i(x)$	2	↘	-2

Exercice 7.39

Voir la solution



1. Quelle représentation graphique correspond à la fonction f dont le tableau de variation est donné ci-dessous ?
2. Complétez les tableaux de variations des fonctions restantes.

x	-2		1		$2{,}5$
$f(x)$	$-2{,}5$	↗	$1{,}5$	↘	-1

x	
$\dots$	

x	
$\dots$	

x	
$\dots$	

x	
$\dots$	

x	
$\dots$	

Exercice 7.40

Voir la solution

Soit le tableau de variation d'une fonction f.

x	-5		-3		-1		2		4
$f(x)$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\nearrow$	4

1. Préciser le domaine de définition de f
2. Compléter les pointillés : $f(\dots) = 2$; $f(2) = \dots$
3. Décrire le sens de variation de la fonction f en précisant les intervalles ou f est monotone.
4. Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [-5; -1]$.
5. Même question pour $x \in [2; 4]$.
6. Comparer les valeurs proposées ou préciser si le tableau de variation ne permet pas de conclure.
   a) $f(-4) \dots f(-2)$
   b) $f(-4) \dots -2$
   c) $f(0) \dots 2$
   d) $f(-2) \dots 2$
   e) $f(0) \dots f(-2)$
   f) $f(-4) \dots f(1)$
7. Quel est le minimum de la fonction f sur $[-5; 4]$? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
8. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$? Donner un encadrement le plus précis possible de chaque solution. [1]

Exercice 7.41

Voir la solution

Soit le tableau de variation d'une fonction f.

x	-4		-1		1		3		$3{,}5$
$f(x)$	-4	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1

1. Préciser le domaine de définition de f
2. Décrire le sens de variation de la fonction f en précisant les intervalles ou f est monotone.
3. Sur chaque intervalle ou f est monotone, donner un encadrement de $f(x)$.
4. Comparer les valeurs. Préciser si le tableau de variation ne permet pas de conclure.
   a) $f(-3) \dots f(-2)$
   b) $f(3) \dots f(3{,}25)$
   c) $f(0) \dots f(0{,}2)$
   d) $f(2) \dots f(1{,}8)$
   e) $f(0) \dots f(2)$
   f) $f(-3) \dots f(0)$
   g) $f(0) \dots f(3{,}25)$
   h) $f(-3) \dots f(2)$
5. Quel est le maximum de la fonction f sur $[-4; 3{,}5]$?
6. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -4$ et un encadrement le plus précis possible de chacune.

[1] Il est sous-entendu en seconde, qu'en l'absence d'indications supplémentaires, les fonctions sont strictement monotones et continues. Par exemple, si x varie de -3 à -1, alors $f(x)$ prend toutes les valeurs entre -2 et 2 (une seule fois). Plus de détails seront abordés en classe de terminale.

Exercice 7.42

Voir la solution

Soit le tableau de variation d'une fonction f.

x	-3		-1		0		2		4		5
$f(x)$	-2	↗	1	↘	0	↘	-3	↗	1	↗	3

1. Préciser le domaine de définition de f
2. Décrire le sens de variation de la fonction f en précisant les intervalles ou f est monotone.
3. Comparer les valeurs. Préciser si le tableau de variation ne permet pas de conclure.
   a) $f(-2)\dots 1$ | b) $f(1)\dots 0$ | c) $f(3)\dots 0$ | d) $f(-2)\dots f(4{,}5)$
4. Quel est le nombre de solution de l'équation $f(x)=0$? Donner un encadrement le plus précis possible pour chacune.

Exercice 7.43

Voir la solution

Soit le tableau de variation d'une fonction f.

x	-2		1		3		$3{,}5$		4		6
$f(x)$	-7	↗	0	↘	-5	↗	0	↗	2	↘	-1

1. Donner le domaine de la fonction.
2. Comparer les valeurs. Préciser si le tableau de variation ne permet pas de conclure.
   a) $f(4{,}5)\dots f(5{,}5)$ | b) $f(-1)\dots f(0)$
3. Quel est le nombre de solution de l'équation $f(x)=-1$? Donner un encadrement le plus précis possible pour chacune.
4. Dresser le tableau de signe de la fonction f.

Exercice 7.44

Voir la solution

Soit le tableau de variation d'une fonction f.

x	-10		-5		1		3		5		10
$f(x)$	-3	↘	-5	↗	0	↗	2	↘	0	↘	-1

1. Donner le domaine de la fonction.
2. Comparer les valeurs suivantes. Préciser si l'on ne peut pas conclure.

a) $f(-1) \dots f\left(-\frac{2}{3}\right)$ | b) $f(2) \dots f(4)$ | c) $f(-1) \dots f(4)$

3. Quel est le nombre de solution de l'équation $f(x) = -0{,}5$? Donner un encadrement le plus précis possible pour chacune.
4. Dresser le tableau de signe de la fonction f.

Exercice 7.45

Voir la solution

Construire le tableau de variations de la fonction f sachant que :

f est définie sur $[-1; 6]$

l'image de 3 par f est 1

2 est un antécédent de -1

$f(-1) = 3$

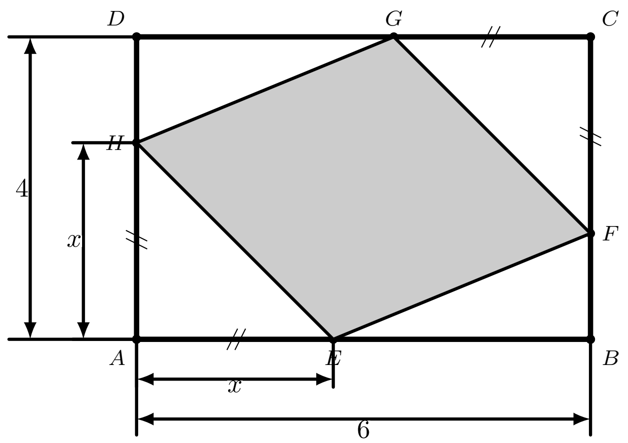
6 est un antécédent de 5

f est décroissante sur $[-1; 2]$

f est croissante sur $[2; 6]$

x	
$f(x)$	

Exercice 7.46



Les points E, F, G et H sont placés respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$ et $[AD]$ de façon à ce que $AE = AH = CF = CG = x$. On désigne par $A(x)$ l'aire du parallélogramme $EFGH$.

1. À quel intervalle appartient x ? En déduire le domaine de A.
2. Justifier que $A(x) = 10x - 2x^2$.
3. Compléter le tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice. Donner les résultats à 10^{-2} près.

x	0	0.5	1	1,5	2	2,5	3	3.5	4
$A(x)$									

4. Représenter la fonction A sur votre calculatrice pour répondre aux questions suivantes :
   a) Pour quelle valeur de x l'aire est elle maximale ?
   b) Déterminer la valeur de x pour laquelle aire est égale à 4 cm^2.
   c) Résoudre l'équation $A(x) = 8$.
   d) Résoudre graphiquement l'inéquation $A(x) \geqslant 12$.
   e) Pour quelles valeurs de x, l'aire est elle inférieure à 4 cm^2.

7.9 Les maths sont belles

Exercice 7.47 — de Pâques. Voici 12 fonctions et leurs domaines de définitions.

№	fonctions	Ensemble de définition
1	$f(x) = x$	$[0; 1]$
2	$g(x) = 0{,}5x$	$[2; 8]$
3	$h(x) = 0{,}25x$	$[2; 9]$
4	$i(x) = 1$	$[0; 1]$
5	$j(x) = 0{,}5x - 6$	$[0; 6]$
6	$k(x) = -x - 1$	$[2; 8]$
7	$l(x) = 2{,}5x - 18$	$[4; 6]$
8	$m(x) = -0{,}5x - 6$	$[0; 4]$
9	$n(x) = 0{,}25x^2 - 4$	$[0; 4]$
10	$p(x) = -0{,}5x^2 + 8$	$[0; 4]$
11	$q(x) = x^2 - 2x$	$[0; 2]$
12	$r(x) = -3x^2 + 10x + 8$	$[0; 4]$

1. Pour les fonctions non affines, à l'aide de la calculatrice, établir un tableau de valeurs sur l'ensemble de définition donné.
2. Sur la feuille de papier milimétrée A4 dans le sens portrait, tracer les représentations graphiques des douzes fonctions sur leurs ensembles de définitions.
   — Les courbes et le repère seront tracés au crayon 2H
   — le repère d'unité graphique 1 cm devra permettre de voir tous les tracés.
   — Ne notez pas le nom des fonctions sur ce graphique.
3. Tracer le cercle de centre $B(1{,}5\ ;\ 3{,}5)$ et de rayon 1.
4. Tracer les symétriques de ces courbes par rapport à l'axe des ordonnées.
5. Rendre le travail en classe.