Chapitre 8

Suites (2) Suites arithmétiques et géométriques

Table 8.1 – Objectifs. À fin de ce chapitre 8...

	Pour m'entraîner ✍		
Je dois **connaître.../savoir faire...**	🪨	💎	💍
Suites arithmétiques			
reconnaitre et justifier qu'une suite est arithmétique	8.1, 8.2, 8.3	8.4	
identifier et déterminer le terme général, sens de variation	8.9, 8.10	8.5, 8.6	
modéliser par une suite arithmétique	8.7, 8.8		
Suites géométriques			
reconnaitre et justifier qu'une suite est géométrique	8.11 8.12	8.13	
identifier et déterminer le terme général		8.14, 8.17	
sens de variation et limites		8.15, 8.16	
modéliser des intérêts composés	8.18		
Problèmes			
problèmes simples		8.19 à 8.28	
démontrer		8.29 à 8.29	
suites auxiliaires : cas arithmético-géométrique		8.35, 8.36, 8.37,	8.38, 8.39 8.43
suites auxiliaires : cas homographique		8.40, 8.41	8.42

8.1 Suites arithmétiques

Définition 8.1

Une suite (u_n) est *arithmétique* de raison r si on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant à chaque fois r [a].

Une suite (u_n) arithmétique est définie par la donnée de son premier terme u_p (typiquement u_0 ou u_1) et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \geqslant p \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

[a] suite Arithmétique, "A" pour addition

■ **Exemple 8.1**

1. La suite arithmétique (u_n) de raison 4 et de premier terme $u_0 = 5$ vérifie la relation de récurrence: pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + 4$.

$$u_0 = 5;\ u_1 = 9;\ u_2 = 13;\ u_3 = 17;\ u_4 = 21;\ u_5 = 25\ldots$$

2. La suite (v_n) de premiers termes : $v_1 = 10$; $v_2 = 6$; $v_3 = 2$; $v_4 = -2$; $v_5 = -6$ semble être une suite arithmétique de raison $r = -4$.

Proposition 8.1 — sens de variation et limites.

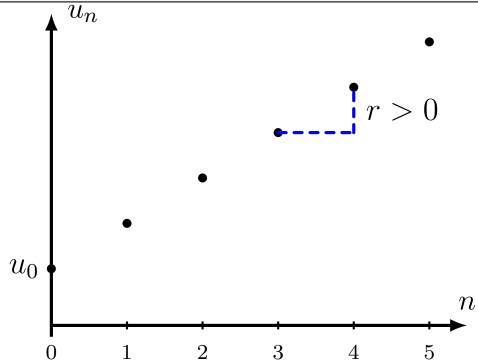
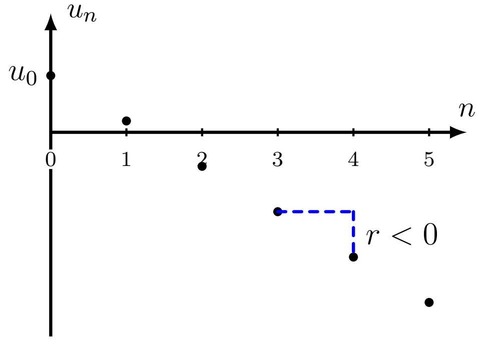
(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

(i) Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

(ii) Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

(iii) Si $r = 0$ alors (u_n) est stationnaire.

Table 8.2 – Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont des points alignés.

<table>
<tr><td colspan="2">Suite (u_n) arithmétique de raison r et de premier terme u_0</td></tr>
<tr><td>raison $r > 0$</td><td>raison $r < 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(u_n) est strictement croissante
$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$</td><td>$(u_n)$ est strictement décroissante
$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = -\infty$</td></tr>
</table>

Propriété 8.2 Pour une suite arithmétique (u_n) de raison r.

$$\text{pour tout } n \text{ et } p \in \mathbb{N}, \qquad u_n - u_p = (n-p)r$$

Démonstration.

Pour calculer u_{p+1} à partir u_p, il faut ajouter 1 fois r : $u_{p+1} = u_p + r$

Pour calculer u_{p+2} à partir u_p, il faut ajouter 2 fois r : $u_{p+2} = u_p + 2r$

Pour calculer u_n à partir u_p, il faut ajouter $n-p$ fois r : $u_n = u_p + (n-p)r$. ■

Corollaire 8.3 — Terme général d'une suite arithmétique.

Pour une suite de premier terme u_0 et de raison r,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 + nr$$

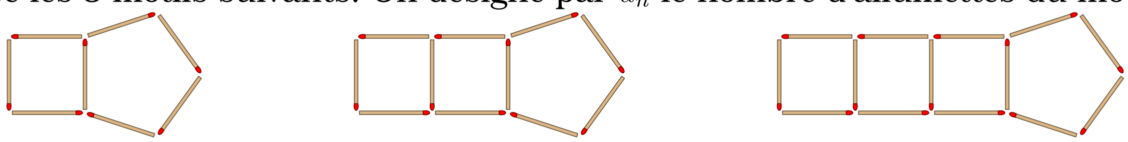
Pour une suite de premier terme u_1 et de raison r,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_1 + (n-1)r$$

R On retiendra : $u_n =$ (premier terme) $+$ (nombre de termes avant u_n) $\times$ (raison).

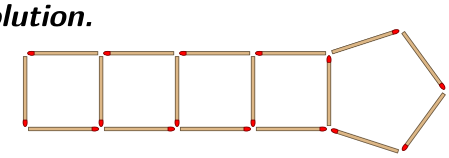
■ **Exemple 8.2**

On réalise les 3 motifs suivants. On désigne par u_n le nombre d'allumettes du motif n:



1. Tracer le 4^{e} motif.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. Déterminer le terme général de la suite.
4. En déduire le nombre d'allumettes nécessaires pour réaliser le 47^{e} motif.

solution.

1. 
2. On rajoute à chaque étape 3 allumettes : pour tout $n \geqslant 1$ on a $u_{n+1} = u_n + 3$.

   (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$.
3. $u_1 = 8$ donc pour tout $n \geqslant 1$ on a $u_n = u_1 + (n-1) \times 3 = 3n + 5$.

   Le 47^{e} motif a $u_{47} = 3 \times 47 + 5 = 146$ allumettes.

■

8.2 Suites géométriques

Définition 8.2

Une suite (u_n) est ***géométrique*** de raison q si on passe d'un terme au terme suivant en multipliant à chaque fois par q.

Une suite (u_n) géométrique est définie par la donnée de son premier terme u_p (typiquement u_0 ou u_1) et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \geqslant p \qquad u_{n+1} = qu_n$$

R La raison q est le *quotient* de deux termes consécutifs $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Propriété 8.4 Pour une suite géométrique (u_n) de raison r.

$$\text{pour tout } n \text{ et } p \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_p \times q^{(n-p)}$$

Démonstration.

Pour calculer u_{p+1} à partir u_p, il faut multiplier 1 fois q : $u_{p+1} = u_p \times r$

Pour calculer u_{p+2} à partir u_p, il faut multiplier 2 fois q : $u_{p+2} = u_p \times r^2$

Pour calculer u_n à partir u_p, il faut multiplier $n-p$ fois q : $u_n = u_p \times r^{n-p}$. ■

Corollaire 8.5 — Terme général d'une suite géométrique.

Pour une suite de premier terme u_0 et de raison q,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 \times q^n$$

Pour une suite de premier terme u_1 et de raison r,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$$

R On retiendra : $u_n = (\text{premier terme}) \times (\text{raison})^{\text{nombre de termes avant } u_n}$.

Proposition 8.6 — sens de variation et limites de suites géométriques. Pour une suite géométrique (u_n)

	1^{ier} terme > 0	1^{ier} terme < 0
Si $q < 0$	(u_n) n'est pas monotone	
Si $q = 0$	u_n stationnaire	
Si $0 < q < 1$	$u_n \searrow 0$	$u_n \nearrow 0$
Si $q = 1$	u_n stationnaire	
Si $1 < q$	$u_n \nearrow +\infty$	$u_n \searrow -\infty$

Démonstration.

La suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 a pour terme général : $u_n = u_0 q^n$.

$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0(q-1)q^n$

On pourra raisonner par disjonction des cas en revenant à la définition du sens de variation. ∎

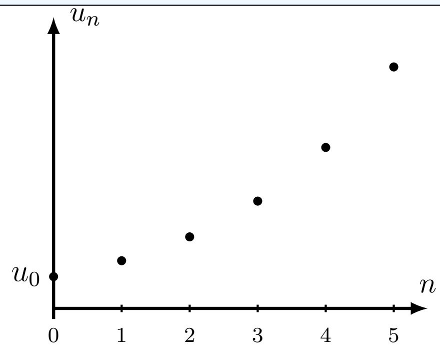
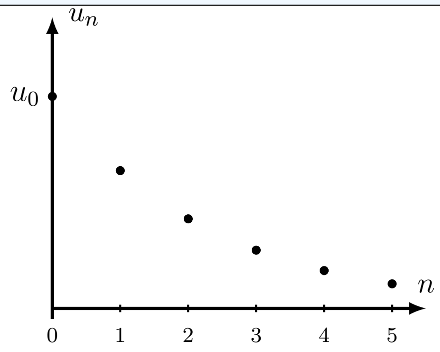
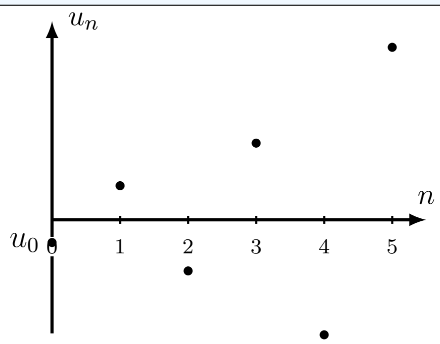
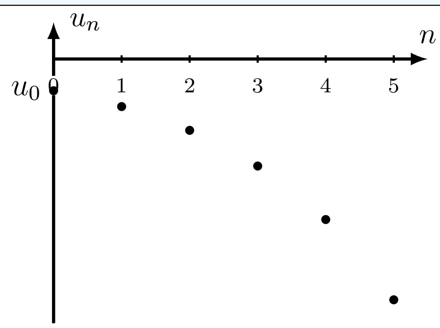
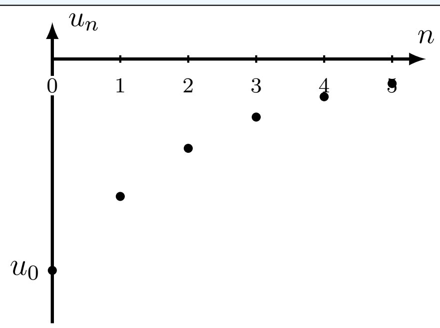
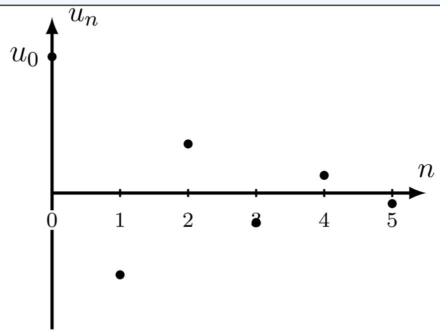
Proposition 8.7 — admis.

— Si $q \leqslant -1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas

— Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

— Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Table 8.3 – Représentation de suites géométriques (u_n) non stationnaires.

Suite (u_n) géométrique de raison q et de premier terme u_0 : pour tout $n \geqslant 0$ on a $u_n = u_0 q^n$		
$q > 1$ et $u_0 > 0$	$0 < q < 1$ et $u_0 > 0$	$q < -1$
		
(u_n) est strictement croissante $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$	(u_n) est strictement décroissante $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$	(u_n) n'est pas monotone pas de limite
$q > 1$ et $u_0 < 0$	$0 < q < 1$ et $u_0 < 0$	$-1 < q < 0$
		
(u_n) est strictement décroissante $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$	(u_n) est strictement croissante $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$	(u_n) n'est pas monotone $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

8.3 Exercices

8.3.1 Exercices : suites arithmétiques

Exercice 8.1 Voir la solution

Pour les suites arithmétiques (u_n) données par le premier terme et leur raison r, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et déterminer les 4 premiers termes de la suite.

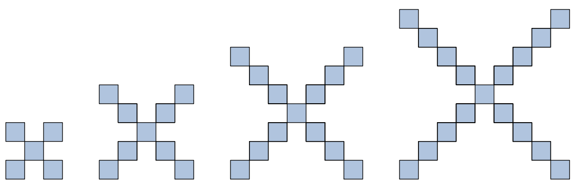
1. $u_1 = 2$ et $r = -2$.
2. $u_0 = 1$ et $r = 3$
3. $u_0 = -\dfrac{4}{3}$ et $r = \dfrac{2}{3}$
4. $u_1 = 1$ et $r = -0{,}3$

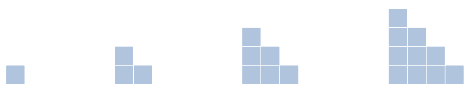
Exercice 8.2 Voir la solution

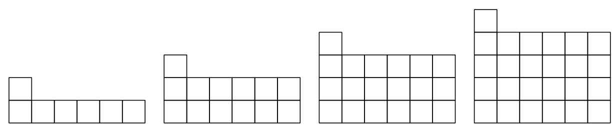
1. Parmi les suites suivantes, entourez celles qui semblent arithmétiques.
   - (A) $10;\ 8;\ 6;\ 4;\ 2;\ \dots$
   - (B) $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 10;\ \dots$
   - (C) $3;\ \frac{5}{2};\ 2;\ \frac{3}{2};\ 1;\ \dots$
   - (D) $5{,}3;\ 5{,}7;\ 6{,}1;\ 6{,}5;\ 6{,}9;\ \dots$
   - (E) $4;\ 7;\ 10;\ 13;\ 16;\ \dots$
   - (F) $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ 5^2;\ \dots$
2. Les suites suivantes sont arithmétiques. Déterminer le 5ᵉ terme :
   - (A) $3;\ 6;\ 9;\ 12;\ \dots$
   - (B) $45;\ 40;\ 35;\ 30;\ \dots$
   - (C) $5;\ 9;\ 13;\ 17;\ \dots$
   - (D) $17;\ 14;\ 11;\ 8;\ \dots$
   - (E) $20;\ 14;\ 8;\ 2;\ \dots$
   - (F) $8;\ 5{,}5;\ 3;\ 0{,}5;\ \dots$
3. Pour les suites arithmétiques suivantes, donner la raison et déterminer le 5ᵉ terme :
   - (A) $17b;\ 10b;\ 3b;\ -4b;\ \dots$
   - (B) $a;\ a+b;\ a+2b;\ a+3b;\ \dots$
   - (C) $m+n;\ 2m+3n;\ 3m+5n;\ 4m+7n;\ \dots$
   - (D) $p+r;\ p;\ p-r;\ p-2r;\ \dots$
   - (E) $2c+d;\ 2d;\ -2c+3d;\ -4c+4d;\ \dots$
   - (F) $3x+2y;\ x+5y;\ 8y-x;\ 11y-3x;\ \dots$

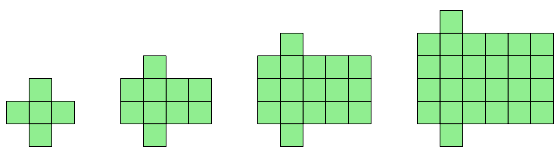
Exercice 8.3 Voir la solution

1. Pour chaque suites de motifs, réaliser le 5ᵉ motif.

a) 

b) 

c) 

d) 

2. On désigne par u_n le nombre de carrés du motif de l'étape n.

   Exprimer pour $n \geqslant 1$, u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Pour quel(s) motif(s), la suite (u_n) est arithmétique ?

■ **Exemple 8.3 — justifier qu'une suite est arithmétique.**

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques en précisant la raison.

1. (u_n) définie par $n \geqslant 1$ par $u_n = 5 - 2(n+1)$
2. (v_n) définie par $n \geqslant 0$ par $u_n = (-1)^n$

solution.

1. *(montrer qu'il existe r tel que la différence de termes consécutifs est TOUJOURS égale à r)*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \big(5 - 2(n+1+1)\big) - \big(5 - 2(n+1)\big). \\ &= 5 - 2n - 4 - 5 + 2n + 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$\therefore (u_n)$ est une suite arithmétique de raison -2.

2. *(vérification que la suite n'est pas arithmétique en calculant les premiers termes)*

$v_0 = 1,\ v_1 = -1,\ v_2 = 1,\ v_3 = -1 : v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$

$\therefore (v_n)$ n'est pas une suite arithmétique. ■

Exercice 8.4 Voir la solution

1. Déterminer si les suites définies pour $n \geqslant 0$ par leur terme général sont arithmétiques.

a) $u_n = 5 + 3n$

b) $u_n = 100 - 3n$

c) $u_n = 3 - 4(n-2)$

d) $u_n = \dfrac{3n-5}{7}$

e) $u_n = n2^n$

f) $u_n = \dfrac{3(-1)^n}{n}$

2. Même question pour les suites définies par récurrence.

a) $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 3(u_n + 1)$

b) $u_1 = 3$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n - 5$

c) $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + n + 5$

d) $u_1 = 0{,}5$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 1 - u_n$

■ **Exemple 8.4 — donner et exploiter le terme général d'une suite arithmétique.**

Soit la suite arithmétique (u_n) de raison 3 avec $u_5 = 2$.

1. Pour $n \geqslant 0$, exprimer u_n en fonction de n.
2. Déterminer u_0 et u_{10}.
3. Déterminer le rang n pour lequel $u_n = 101$.

solution.

1. Pour tout $n \geqslant 0$: $u_n = u_5 + 3(n-5) = 3n - 15 + 2 = 3n - 13$.
2. $u_0 = 3(0) - 13 = -13$ et $u_{10} = 3(10) - 13 = 17$
3. On cherche n tel que $u_n = 101$, $\iff 3n - 13 = 101$. $\therefore n = 38$.

■

Exercice 8.5

Voir la solution

Déterminer le terme général de la suite (u_n) et déduire le terme de rang p.

1. a) (u_n) est arithmétique de raison 3, $u_1 = 1$ et $p = 10$.
   b) (u_n) est arithmétique de raison 4, $u_5 = 15$ et $p = 25$.
   c) (u_n) est arithmétique de raison -8, $u_2 = 100$ et $p = 12$.
   d) (u_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{2}{3}$, $u_{10} = 0$ et $p = 15$.
2. a) (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 6$, $u_1 = 72$ et $p = 100$.
   b) (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 10$ et $u_2 = 200$ et $p = 10$.
   c) (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{8}$ et $u_1 = \dfrac{5}{8}$ et $p = 10$.
   d) (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 0{,}25$ et $u_1 = 0{,}375$ et $p = 100$.

Exercice 8.6 — reconnaitre le terme général d'une suite arithmétique.

Voir la solution

1. Parmi les suites définies pour $n \geqslant 0$ par leur terme général, déterminer les suites arithmétiques et préciser leur raison.

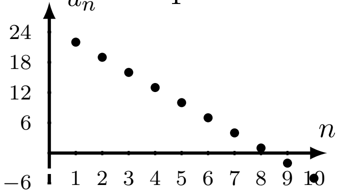
   (A) $u_n = 3n - 2$ | (B) $u_n = 5 - 2n$ | (C) $u_n = n^2 - n$ | (D) $u_n = 3 - n$

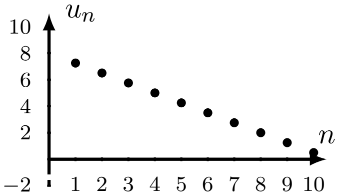
2. Donner la raison et le sens de variation des suites arithmétiques définies pour $n \geqslant 0$ par leur terme général :

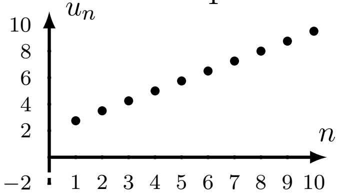
   (A) $a_n = 15 - \dfrac{3}{2}n$ | (B) $b_n = 0{,}2n + 3$ | (C) $c_n = -5 + 2n$ | (D) $d_n = -0{,}3n + 8$

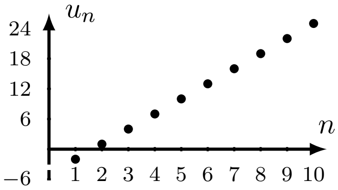
3. Associer chaque suite définie par son terme général avec sa représentation graphique.

   (A) $a_n = -\dfrac{3}{4}n + 8$ | (B) $b_n = 3n - 5$ | (C) $c_n = 2 + \dfrac{3}{4}n$ | (D) $d_n = 25 - 3n$





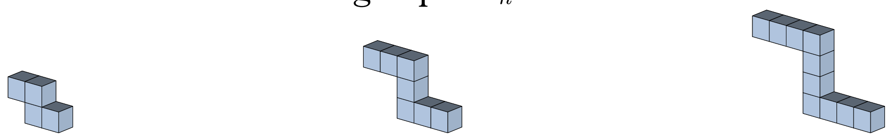




Exercice 8.7

Voir la solution

On réalise les 3 motifs suivants. On désigne par u_n le nombre de cubes du motif n :

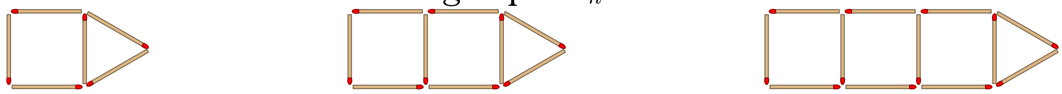


1. Tracer le 4^{e} motif.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. Déterminer le terme général de la suite.
4. En déduire le nombre de cubes nécessaires pour réaliser le 47^{e} motif.

Exercice 8.8

Voir la solution

On réalise les 3 motifs suivants. On désigne par u_n le nombre d'allumettes du motif n :



1. Tracer le 4ᵉ motif.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. Déterminer le terme général de la suite.
4. En déduire le nombre d'allumettes nécessaires pour réaliser le 47ᵉ motif.

Exemple 8.5 — exploiter la relation $u_n - u_p = r(n-p)$.

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison r tel que $u_5 = 2$ et $u_{13} = 58$.

Déterminer la raison r et en déduire l'expression pour $n \geqslant 1$, de u_n en fonction de n.

solution.

r vérifie $u_{13} - u_5 = r(13-5)$, donc $r = \dfrac{u_{13} - u_5}{13-5} = \dfrac{58-2}{13-5} = \dfrac{56}{8} = 7$.

pour tout $n \geqslant 0$: $u_n = 7(n-5) + 2 = 7n - 33$ ■

Exemple 8.6 — exploiter la relation $u_n - u_p = r(n-p)$.

Combien d'éléments y-t-il dans la progression arithmétique : $5, 11, 17, 23$ ...851.

solution.

Il s'agit d'une progression arithmétique de raison $r = 6$.

On pose $u_n = 851$ et $u_p = 5$ alors $u_n - u_p = r(n-p)$, $n - p = \dfrac{851-5}{6} = 141$

$\therefore$ le nombre éléments entre: u_p et u_n inclus est $n - p + 1 = 142$ nombres. ■

Exercice 8.9

Voir la solution

Pour les suites *arithmétiques* suivantes, déterminer la raison et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

1. $u_0 = 3$ et $u_1 = 7$.
2. $u_0 = 3$ et $u_2 = 7$.
3. $u_1 = -4$ et $u_{10} = 38$.
4. $u_1 = 5$ et $u_{100} = -45$.
5. $u_2 = 4$ et $u_8 = -6$.
6. $u_5 = 27$ et $u_{10} = 33$.

Exercice 8.10

Voir la solution

Déterminer le nombre de termes dans les progressions arithmétiques suivantes :

1. $1\,;\,3\,;\,5\,;\,7\,;\,\ldots\,;\,99$
2. $2\,;\,8\,;\,14\,;\,20\,;\,\ldots\,;\,488$
3. $0{,}5\,;\,0{,}9\,;\,1{,}3\,;\,1{,}7\,;\,\ldots\,;\,5{,}3$
4. $35\,;\,30\,;\,25\,;\,20\,;\,\ldots\,;\,-25$
5. $a-12\,;\,a-15\,;\,a-18\,;\,a-21\,;\,\ldots\,;\,a-75$
6. $a\,;\,a-2b\,;\,a-4b\,;\,a-6n\,;\,\ldots\,;\,a-32b$ (a et $b \in \mathbb{R}$)

8.3.2 Exercices : suites géométriques

Exercice 8.11 Voir la solution

Pour les suites géométriques (u_n) données par le premier terme et leur raison r, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et déterminer les 4 premiers termes de la suite.

1. $u_1 = 1$ et $q = 2$.
2. $u_0 = 2$ et $q = -2$
3. $u_0 = \frac{5}{7}$ et $q = -1$
4. $u_0 = -1$ et $q = \frac{1}{4}$

■ **Exemple 8.7 — reconnaître une suite géométrique.**

Quelle semble être la nature des suites suivantes ?

1. $u_0 = 12$; $u_1 = 36$; $u_2 = 108$; $u_3 = 324$; ...
2. $v_0 = -\frac{1}{3}$; $v_1 = \frac{1}{9}$; $v_2 = -\frac{1}{27}$; $v_3 = \frac{1}{81}$; ...

solution. *calculer les quotients de termes consécutifs*

1. $\frac{u_1}{u_0} = \frac{36}{12} = 3$; $\frac{u_2}{u_1} = \frac{108}{36} = 3$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{324}{108} = 3$;
   $\therefore$ La suite semble être géométrique de raison $q = 3$.
2. $\frac{v_1}{v_0} = \frac{1/9}{-1/3} = -\frac{1}{3}$; $\frac{v_2}{v_1} = \frac{-1/27}{1/9} = -\frac{1}{3}$; $\frac{v_3}{v_2} = \frac{1/81}{-1/27} = -\frac{1}{3}$;
   $\therefore$ La suite semble être géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$. ■

Exercice 8.12 Voir la solution

1. Parmi les suites suivantes, entourez celles qui semblent géométriques.
   - (A) $3; 12; 21; 30; \dots$
   - (B) $3; 12; 48; 192; \dots$
   - (C) $1; -2; 4; -8; \dots$
   - (D) $40; 20; 10, 5; \dots$
   - (E) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$
   - (F) $27; -9; 3; -1; \dots$
2. Les suites suivantes sont géométriques. Déterminer le 5e terme :
   - (A) $5; 15; 45; 135; \dots$
   - (B) $9; -6; 4; -\frac{8}{3}; \dots$
   - (C) $432; -144; 48; -16; \dots$
   - (D) $1 ; 1{,}1 ; 1{,}21 ; 1{,}331 ; \dots$
   - (E) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \dots$
   - (F) $a^2; a^4; a^6; a^8; \dots$
3. Pour les suites géométriques suivantes, donner la raison et déterminer le 5e terme :
   - (A) $\sqrt{a}; 3\sqrt{a}; 9\sqrt{a}; 27\sqrt{a}; \dots$
   - (B) $1 ; \sqrt{2} ; 2 ; 2\sqrt{2} ; \dots$
   - (C) $5b^2; 10b^4; 20b^6; 40b^8; \dots$
   - (D) $5 ; 5^{c+1} ; 5^{2c+1} ; 5^{3c+1} ; \dots$
   - (E) $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{9}{8}; \frac{27}{16}; \dots$
   - (F) $t ; \frac{t^2}{2} ; \frac{t^3}{4} ; \frac{t^4}{8} ; \dots$

■ **Exemple 8.8 — justifier qu'une suite est géométrique.**

Déterminer si les suites suivantes sont géométriques en précisant la raison.

1. (u_n) définie par $n \geqslant 0$ par $u_n = 4(3)^{2n+1}$
2. (v_n) définie par $n \geqslant 1$ par $u_n = n(-1)^n$

solution.

1. *(montrer qu'il existe q tel que le quotient de termes consécutifs est TOUJOURS égale à q)*
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4 \times 3^{2(n+1)+1}}{4 \times 3^{2n+1}} = \dfrac{4(3)^{2n+3}}{4(3)^{2n+1}} = 3^{2n+3-2n-1} = 3^2.$
$\therefore (u_n)$ est une suite géométrique de raison $3^2 = 9$.
2. *(vérification que la suite n'est pas géométrique en calculant les premiers termes)*
$v_1 = -1,\ v_2 = 2,\ v_3 = -3,\ v_4 = 4.$: $\dfrac{v_1}{v_0} \neq \dfrac{v_2}{v_1}$
$\therefore (v_n)$ n'est pas une suite géométrique. ■

Exercice 8.13 Voir la solution

1. Déterminer si les suites définies pour $n \geqslant 0$ par leur terme général sont géométriques.
   a) $u_n = 2(10)^n$
   b) $u_n = 2^n - 1$
   c) $u_n = 0{,}75 \times 3^{n+1}$
   d) $u_n = 5^{2n-1}$
   e) $u_n = n2^n$
   f) $u_n = 2 \times \left(\dfrac{-5}{3}\right)^{2n}$
2. Même question pour les suites définies par récurrence.
   a) $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 4u_n + 7$
   b) $u_1 = 1{,}5$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = -5u_n$
   c) $u_1 = 3$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 7nu_n$
   d) $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3}$

■ **Exemple 8.9 — donner et exploiter le terme général d'une suite géométrique.**

Soit la suite géométrique (u_n) de raison $1{,}05$ avec $u_5 = 20$

Pour $n \geqslant 0$, exprimer u_n en fonction de n et en déduire u_0 et u_{15} à 10^{-2} près.

solution.

Pour tout $n \geqslant 0$: $u_n = u_5 q^{n-5}$, donc $u_n = 20 \times 1{,}05^{n-5}$ (ou encore $20 \times 1{,}05^{-5} \times 1{,}05^n$).

$u_0 = 20 \times 1{,}05^{0-5} \approx 15.67$ et $u_{15} = 201{,}05^{15-5} \approx 32{,}577$ ■

Exercice 8.14 Voir la solution

Déterminer le terme général de la suite (u_n) et déduire le terme de rang p.

1. a) (u_n) est géométrique de raison 6, $u_4 = 1$ et $p = 10$.
   b) (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, $u_1 = 4$ et $p = 10$.
   c) (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{-1}{3}$, $u_1 = 6$ et $p = 12$.
   d) (u_n) est géométrique de raison $\sqrt{3}$, $u_1 = 1$ et $p = 8$.
2. a) (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 5u_n$ et $u_0 = 4$ et $p = 10$.
   b) (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = -2u_n$ et $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p = 5$.
   c) (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$ et $u_5 = 3$ et $p = 0$.
   d) (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 1{,}02u_n$ et $u_1 = 500$ et $p = 40$.

Exercice 8.15

Voir la solution

Donner le sens de variation et la limite des suites géométriques définies par récurrence :

1. (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 1{,}2u_n$
2. (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 1{,}35u_n$
3. (u_n) définie par $u_0 = -10$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = -1{,}1u_n$
4. (u_n) définie par $u_0 = -5$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0{,}95u_n$
5. (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0{,}25u_n$
6. (u_n) définie par $u_0 = -3$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = -0{,}84u_n$
7. (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3}$
8. (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{3}$

■ Exemple 8.10 — reformuler une expression sous la forme aq^n.

$$5(10)^{2n-3} = 5 \times \left(10^2\right)^n \times 10^{-3} = \frac{5}{10^3} \times (100)^n \qquad 2(1.25)^{1-n} = 2 \times \left(1.25^{-1}\right)^n \times 1.25^1 = \frac{5}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

Exercice 8.16 — reconnaitre le terme général d'une suite géométrique.

Voir la solution

1. Écrire le terme général des suites suivantes sous la forme $a \times q^n$:

(A) $a_n = -10(1{,}5)^{n-1}$ | (C) $c_n = -3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$ | (E) $e_n = 5\,(0{,}25)^{2n-1}$

(B) $b_n = 12(-0{,}4)^{-n}$ | (D) $d_n = 2 \times (0{,}2)^{2-n}$ | (F) $f_n = 5\,(-1{,}1)^{2n+1}$

2. Parmi les suites définies pour $n \geqslant 0$ par leur terme général, déterminer les suites géométriques et préciser leur raison.

(A) $u_n = 7 \times 0.5^n$ | (C) $u_n = 1{,}1n$ | (E) $u_n = 4^{n-5}$

(B) $u_n = n^4$ | (D) $u_n = \dfrac{2}{3^n}$ | (F) $u_n = 2^{3-n}$

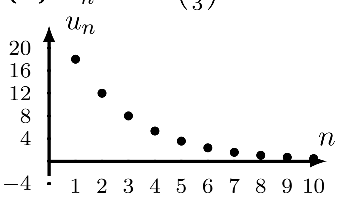
3. Donner la raison et le sens de variation des suites géométriques définies pour $n \geqslant 0$ par leur terme général :

(A) $a_n = 1{,}05^n$ | (C) $c_n = 5 \times 0{,}9^n$ | (E) $e_n = -0{,}95^n$

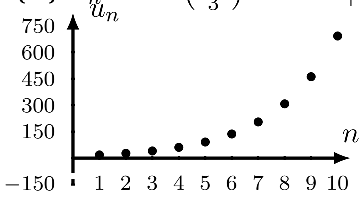
(B) $b_n = 2 \times 1{,}25^n$ | (D) $d_n = -2(1{,}3)^n$ | (F) $f_n = 12(-0{,}75)^n$

4. Associer chaque suite définie par son terme général avec sa représentation graphique.

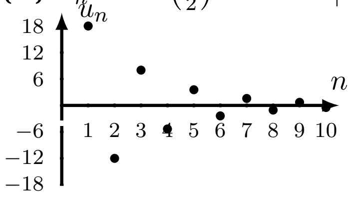
(A) $a_n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$



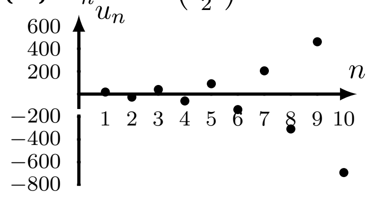
(B) $b_n = 18\left(\frac{-2}{3}\right)^{n-1}$



(C) $c_n = 18\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$



(D) $d_n = 18\left(\frac{-3}{2}\right)^{n-1}$



■ **Exemple 8.11 — utiliser la relation $u_n = u_p q^{(n-p)}$ pour déterminer la raison q.**

Déterminer le terme général u_n en fonction de n pour les suites suivantes :

1. pour $n \geqslant 0$, (u_n) est géométrique, $u_0 = \frac{1}{6}$ et $u_1 = \frac{1}{4}$.
2. pour $n \geqslant 1$, (u_n) est géométrique, $u_1 = 7$, $u_3 = 63$ et la suite est croissante.

solution.

1. $q = \dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1/4}{1/6} = \dfrac{3}{2}$. Pour $n \geqslant 0$, $u_n = u_0 q^n = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.
2. $q^2 = \dfrac{u_3}{u_1} = \dfrac{63}{7} = 9$. $q = -3$ où $q = 3$.
   La suite étant monotone, $q > 0$. Donc pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = u_1 q^{n-1} = 7(3)^{n-1}$ ■

Exercice 8.17 — déterminer le terme général d'une suite géométrique. Voir la solution

Déterminer la relation de récurrence et le terme général des suites *géométriques* suivantes :

1. a) $u_0 = 3$ et $u_1 = 12$.
   b) $u_0 = 6$, et $u_1 = 9$.
2. a) $u_0 = 1$, et $u_2 = 9$. (u_n) est croissante.
   b) $u_2 = 3$ et $u_4 = \dfrac{3}{64}$. (u_n) est décroissante.
   c) $u_1 = 4$ et $u_3 = 108$. (u_n) est non monotone.
   d) $u_8 = -\dfrac{2}{5}$, et $u_{10} = -\dfrac{5}{2}$. (u_n) est monotone.
3. a) $u_5 = 16$ et $u_8 = 128$.
   b) $u_7 = 16$ et $u_{10} = -\dfrac{27}{4}$

Dans un plan d'épargne, les intérêts sont dit *composés* lorsqu'ils sont calculés sur la base de la *somme totale accumulée à l'échéance précédente*.

On note u_0 le placement de départ, et u_n le placement après n échéances. La suite (u_n) est une suite *géométrique* $u_{n+1} = CM \times u_n = (1 + TE)u_n$

■ **Exemple 8.12**

Un placement 200 € en intérêts *composés* de 3% est multiplié par 1.03 chaque année.

Le capital accumulé vérifie : $u_0 = 200$ et pour tout $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = 1{,}03u_n$.

(u_n) est une suite *géométrique* de raison $1{,}03$, après n échéances $u_n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 8.18 Voir la solution

Dans chaque cas u_n désigne le montant d'un placement après n échéances. Préciser la relation de récurrence ainsi que la forme explicite.

1. intérêts composés 5%, $u_0 = 2000$€
2. intérêts composés 2%, $u_0 = 4000$€
3. intérêts composés 1%, $u_0 = 10000$€
4. intérêts composés 10%, $u_1 = 400$€
5. dépréciation composée de 7%, $u_0 = 500$€
6. dépréciation composée de 12%, $u_0 = 100$€
7. dépréciation composée de 9%, $u_0 = 300$€
8. dépréciation composés de 3%, $u_2 = 200$€

8.3.3 Exercices : problèmes simples

Exercice 8.19 Voir la solution

Les premiers 3 termes de la suite (u_n) sont $u_1 = 5$, $u_2 = x$ et $u_3 = 11$.

Sachant que la suite (u_n) est arithmétique, déterminer x.

Exercice 8.20 Voir la solution

Les premiers 3 termes de la suite (u_n) sont $u_1 = x$, $u_2 = 2x + 1$ et $u_3 = x^2 + 4$.

Sachant que la suite (u_n) est arithmétique, déterminer x.

Exercice 8.21 Voir la solution

Les premiers 4 termes de la suite (u_n) sont $u_1 = 6$, $u_2 = x$ et $u_3 = y$ et $u_4 = 18$. Sachant que la suite (u_n) est arithmétique, déterminer x et y. En déduire la valeur de u_{100}

Exercice 8.22 Voir la solution

Les premiers 3 termes de la suite (u_n) sont $u_1 = x$, $u_2 = 3x - 5$ et $u_3 = x^2 - 6$.

Sachant que la suite (u_n) est arithmétique, déterminer x et les valeurs possibles du 4$^{\text{e}}$ terme.

Exercice 8.23 Voir la solution

k est un réel, (u_n) est une suite arithmétique tel uqe $u_1 = k + 4$, $u_2 = 4k - 2$ et $u_3 = k^2 - 2$.

1. Montrer que $k^2 - 7k + 6 = 0$
2. Déterminer les valeurs possibles de k et la raison r de la suite dans chaque cas.
3. Sachant que (u_n) est décroissante, exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 8.24 Voir la solution

Les premiers 3 termes de la suite (u_n) sont $u_1 = x$, $u_2 = 2x$ et $u_3 = x + 9$.

Sachant que la suite (u_n) est géométrique, déterminer x.

Exercice 8.25 Voir la solution

Les premiers 3 termes de la suite (u_n) sont $u_1 = \sqrt{x} - 1$, $u_2 = 1$ et $u_3 = \sqrt{x} + 1$.

Sachant que la suite (u_n) est géométrique et monotone, déterminer x et la valeur de u_5.

Exercice 8.26 Voir la solution

Soit la suite géométrique (u_n) définie pour $n \geqslant 1$, de raison q avec $u_1 = 64$.

1. Exprimer u_2 et u_3 à l'aide de q.
2. Sachant que $u_3 - u_2 = 20$, montrer que q vérifie $16q^2 - 16q - 5 = 0$.
3. Sachant que la suite (u_n) converge vers 0, déterminer q. Justifiez votre choix.
4. Déterminer u_4.

Exercice 8.27 Voir la solution

La suite (u_n) vérifie $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

On suppose que la suite (u_n) est géométrique de raison q et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

1. Exprimer u_{n+2} et u_{n+1} à l'aide de q et u_n et déterminer une équation vérifiée par q.
2. En déduire la valeur admissible de q.
3. Exprimer pour tout $n \geqslant 0$, u_n en fonction de n.

Exercice 8.28 Voir la solution

La suite (u_n) vérifie $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$ la relation de récurrence $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

On suppose que (u_n) est une suite géométrique décroissante de raison q.

Déterminer q et exprimer pour tout $n \geqslant 0$, u_n en fonction de n.

8.3.4 Exercice : maitriser les définitions pour démontrer

Exercice 8.29 Voir la solution

Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$.

Exercice 8.30 Voir la solution

Soit une suite géométrique (u_n) de raison $q > 0$ avec $u_0 > 0$.

Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{u_{n+1}u_{n-1}}$.

Exercice 8.31 Voir la solution

Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r, et soit suite (v_n) définie pour $n \geqslant 0$ par $v_n = 5u_n + 3$.

Démontrer que (v_n) est aussi arithmétique et préciser sa raison.

Exercice 8.32 Voir la solution

Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r, et une suite arithmétique (v_n) de raison r'.

Soit la suite (w_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $w_n = u_n + v_n$.

Démontrer que (w_n) est aussi arithmétique et préciser sa raison.

Exercice 8.33 Voir la solution

Soit une suite géométrique (u_n) de raison q et la suite (v_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $v_n = (u_n)^2$.

Démontrer que (v_n) est aussi arithmétique et préciser sa raison.

Exercice 8.34 Voir la solution

Soit une suite géométrique (u_n) de raison q, et une suite géométrique (v_n) de raison q'.

Soit la suite (w_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $w_n = u_n v_n$.

Démontrer que (w_n) est aussi géométrique et préciser sa raison.

8.3.5 Exercices : suites auxiliaires

■ **Exemple 8.13 — les suites arithmético-géométriques.**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = 5 - \dfrac{2}{3}u_n$.

Soit la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 0$ par $v_n = u_n - 3$.

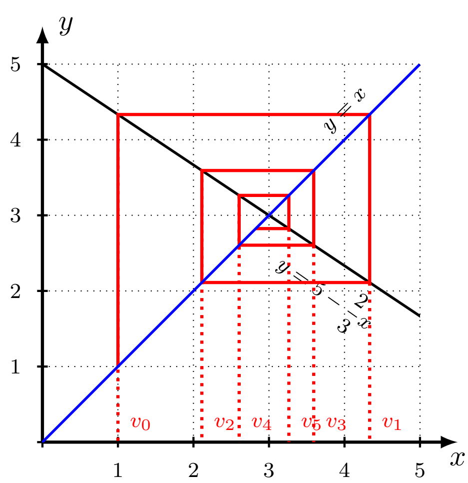
1. Exprimer u_n en fonction de v_n.
2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 3 - 2 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$.
4. Justifier la limite de la suite (u_n).

Démonstration.

1. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = v_n + 3$.
2. $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 && \textit{utiliser la relation de récurrence} \\ &= 5 - \frac{2}{3}u_n - 3 && \textit{exprimer en fonction de } v_n \\ &= 5 - \frac{2}{3}(v_n + 3) - 3 \\ &= 5 - \frac{2}{3}v_n - 2 - 3 \\ &= -\frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$
   $\therefore$ (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -2$.
3. Pour tout $n \geqslant 0$, $v_n = v_0 q^n = -2 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = v_n + 3 = 3 - 2 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$.
4. $-1 < q = -\dfrac{2}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

■

Figure 8.1 – Dans le chapitre 5, une représentations en escalier nous a permis d'identifier que la suite (u_n) n'est pas monotone, et elle semble converger vers la solution de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.



Soit une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$.

— Si $a = 1$, $u_{n+1} = u_n + b$, la suite (u_n) est arithmétique de raison b.

— Si $b \neq 0$, $u_{n+1} = au_n$, la suite (u_n) est géométrique de raison a.

— Si $b \neq 0$ et $a \neq 1$ la suite est dite *arithmético-géométrique*. Elle n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Exercice 8.35 Voir la solution

la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \geqslant 0$ la relation $u_{n+1} = 1{,}25u_n + 5$.

1. Calculer les valeurs exactes u_1 et u_2.
2. Déterminer la solution ℓ solution de l'équation $\ell = 1{,}25\ell + 5$.
3. On définit la suite (v_n) sur $n \geqslant 0$ par $v_n = u_n - \ell$.
   a) Déterminer v_0.
   b) Exprimer u_n en fonction de v_n.
   c) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n.
   d) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
4. En déduire que tout $n \geqslant 0$, $u_n = 23(1{,}25)^n - 20$.
5. Donner en justifiant la limite de la suite (u_n).
6. Justifier que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 8.36 Voir la solution

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 250$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0{,}72u_n + 420$.

1. Calculer les valeurs exactes u_1 et u_2.
2. Résoudre l'équation $\ell = 0{,}72\ell + 420$.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \geqslant 0$, par $v_n = u_n - \ell$.
   a) Calculer v_0.
   b) Exprimer u_n en fonction de v_n.
   c) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n.
   d) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
   e) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire que pout tout $n \geqslant 0$: $u_n = 1500 - 1250 \times 0{,}72^n$.
5. Donner en justifiant la limite de la suite (u_n).
6. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 8.37 — entrainement. Voir la solution

Soit la suite u définie par $u_0 = 15$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 0.75u_n + 3$.

1. a) Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
   b) Compléter le script ci-contre afin qu'en fin d'exécution, la variable `u` prend la valeur de u_{10}.

```python
u = ...
n = 0
for i in range(...) :
    u = ...
    n = n + 1
```

2. Résoudre l'équation $\ell = 0{,}75\ell + 3$.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \geqslant 0$, par $v_n = u_n - \ell$.
   a) Calculer v_0.
   b) Exprimer u_n en fonction de v_n.
   c) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n.
   d) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
   e) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire que pout tout $n \geqslant 0$: $u_n = 13(0{,}75)^n + 12$.
5. Donner en justifiant la limite de la suite (u_n).
6. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 8.38 — un roman-problème type bac. Voir la solution

Un parc d'attraction propose à ses visiteurs des pass annuels donnant accès illimité à l'ensemble du site.

En 2019, 5000 visiteurs achètent le pass. Chaque année, le directeur de parc prévoit que 90% de ces visiteurs renouvelleront leur pass et 800 nouveaux visiteurs en achèteront un.

On note u_n le nombre de visiteurs ayant un pass annuel en $2019 + n$.

1. Déterminer la valeur de u_0 et u_1.
2. Justifier que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 800$.
3. Résoudre l'équation $\ell = 0,9\ell + 800$.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \ell$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
   b) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
   c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5. Combien peut-on prévoir qu'il y aura de visiteurs détenteur du pass annuel en 2040 ?
6. Justifier la limite de la suit (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Exercice 8.39 — un grand classique : suites et probabilités. Voir la solution

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

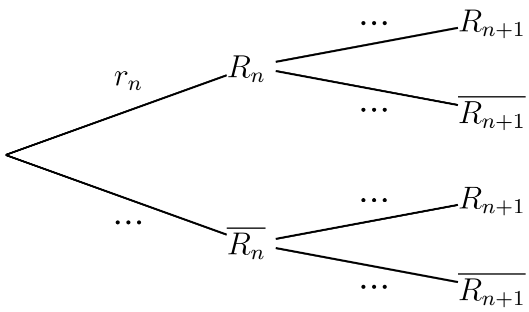
— à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9

— si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95

— si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine » et $r_n = \mathrm{P}(R_n)$.

1. Compléter l'arbre des probabilités modélisant la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième semaines.



2. Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, $r_{n+1} = 0{,}75 r_n - 0{,}8$.
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $v_n = r_n - 0{,}8$.
   a) Déterminer v_1.
   b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}75$.
   c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $r_n = 0{,}8 + \dfrac{4}{30} \times 0{,}75^n$
5. Quelle est la limite de la suite (r_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice