# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**Année 2025-2026**

# Mathématiques

## Devoir surveillé №1 - Mercredi 1 octobre 2025

Durée de l'épreuve : **3 heures**

*L'usage de la calculatrice avec ou sans mode examen est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

**Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.**

**Le candidat doit traiter les 3 exercices proposés.**

**Le candidat bénéficiant d'un tiers temps ne traitera pas les questions marquées par le repère** $\boxed{\text{TT}}$

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.*

## Exercice 1 : Un peu de dénombrement

6 points

*Les trois parties sont indépendantes.*

### Coloriages

Pour créer le logo de sa compagnie de céréales, on propose d'écrire le mot KELOG et d'en colorer les lettres. On dispose de 7 couleurs différentes.

(1,5) **1.** Combien de coloriages différents est-il possible de réaliser :

- **a)** TT si les couleurs des lettres sont toutes différentes 2 à 2.
- **b)** si des lettres peuvent avoir une même couleur.
- **c)** si l'on autorise des lettres à avoir une même couleur mais deux lettres adjacentes sont de différentes couleurs.

(1) **2.** On souhaite également ajouter un fond coloré derrière le logo. La couleur de ce fond ne peut alors pas être utilisée pour les lettres.
Combien de coloriages différents est-il possible de réaliser :

- **a)** si les couleurs des lettres sont toutes différentes 2 à 2.
- **b)** TT si des lettres peuvent avoir une même couleur.

### Anagrammes

On appelle anagramme d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres mais dans un ordre quelconque. Par exemple, le mot « mscoionibna » est une anagramme du mot « combinaison ».

(2) **3.** Combien y-a-t-il d'anagrammes :

- **a)** du mot « MAISON » ?
- **b)** du mot « RADAR » ?
- **c)** du mot « DROITE » commençant et finissant par une consonne ?
- **d)** TT du mot « ETALON » qui commencent par la lettre $E$ ?

### Nombres à 4 chiffres

(1,5) **4.** Soit $A$ l'ensemble des nombres à quatre chiffres (non nécessairement distincts) choisis parmi 0, 1, 2 , 3, 4 et 5.
*Le chiffre 0 peut être utilisé en $1^{ère}$ position.*

- **a)** Quel est le nombre d'éléments de $A$ ?
- **b)** Quel est le nombre d'éléments de $A$ ayant au moins une fois le chiffre 1 ?
- **c)** TT Quel est le nombre d'éléments de $A$ divisibles par 5 et ayant des chiffres distincts ?

## Exercice 2 : Des questions très classiques ! **6 points**

*Les trois questions sont indépendantes.*

(1,5) **1.** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = -0{,}6u_n + 2{,}4$$

Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par :

$$v_n = u_n - 1{,}5$$

Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(2) **2.** $\boxed{\text{TT}}$ Soit la suite $(a_n)$ définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par

$$a_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = 3a_n + n$$

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$a_n = \frac{1}{4}\left(3^{n+2} - 2n - 1\right)$$

(2,5) **3.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

*Une autre écriture possible* : $1 \times 3 + 2 \times 4 + \ldots + n \times (n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

## Exercice 3 : Une suite homographique

**8 points**

On considère la suite $(u_n)$ telle que $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 5}{14 - 2u_n}$$

On admet que $u_n$ est défini pour tout entier naturel $n$.

On note $f$ la fonction définie sur $[0;5]$ par $f(x) = \dfrac{3x+5}{14-2x}$.

Ainsi pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

*Les trois parties sont indépendantes.*

### Partie A

La fonction $f$ est représentée sur l'**annexe à rendre avec la copie**.

(0,25) **1.** Tracer la droite d'équation $y = x$ sur l'**annexe à rendre avec la copie**.

(0,5) **2.** Représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite $(u_n)$.

(0,25) **3.** Conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite $(u_n)$.

### Partie B

(0,5) **4.** Déterminer les valeurs exactes de $u_1$ et $u_2$.

**5.** On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $[0;5]$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

(0,5) **a)** Exprimer $f'(x)$ pour $x \in [0;5]$. *On citera avec précision la ou les formules utilisées.*

(0,25) **b)** En déduire, en justifiant, que la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0;5]$.

(1,5) **6. a)** Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$ :

$$0 < u_{n+1} < u_n \leqslant 4$$

**b)** En déduire en justifiant :

(0,25) **i.** le sens de variation de la suite $u_n$.

(0,25) **ii.** un minorant $m$ de $(u_n)$.

### Partie C

Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 5}$

(0,25) **7. a)** Déterminer $v_0$.

(0,5) **b)** Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

(0,5) **c)** Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{4}{13}$.

(0,25) **d)** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

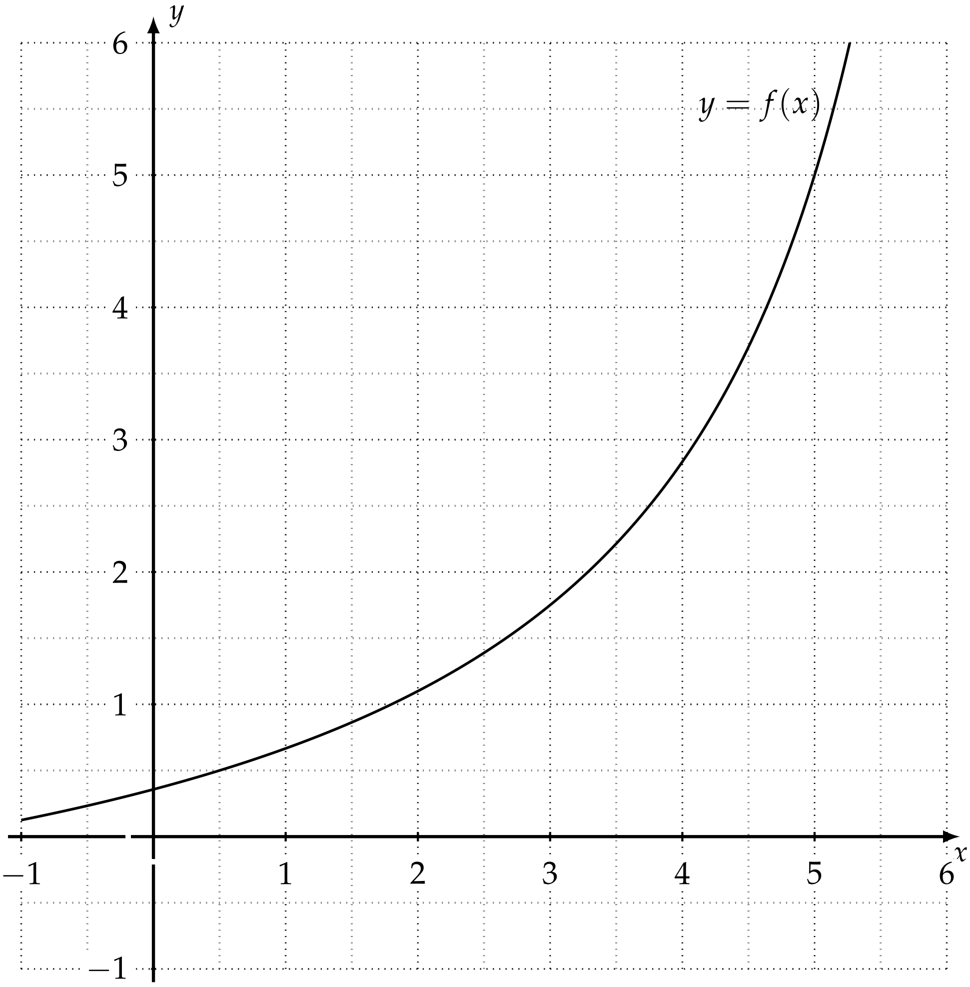
(0,5) **8.** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_n = \dfrac{1 - 5v_n}{2 - v_n}$.

(0,5) **9.** Déterminer la limite de la suite $(v_n)$ et en déduire, en justifiant que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

(0,75) **10.** Compléter les lignes 1, 3 et 4 du script sur l'**annexe à rendre avec la copie** afin qu'il affiche le premier rang $p$ à partir duquel $u_n < 0{,}51$.

(0,5) **11.** Déterminer par la méthode de votre choix la valeur affichée par le script.

## Annexe à rendre avec la copie




Script de la question 10 de l'exercice 3.

```
u =  ...
p =  0
while  ...   :
    u =  ...
    p =  p + 1
print( p )
```