Devoir surveillé 1 (Sujet A) **Terminale TB3**

Durée 1h10 — L'usage de la calculatrice est autorisé — 23 septembre 2025

Exercice 1 : Obtenir la forme explicite d'une suite de récurrence

3 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5 - 4u_n$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Exercice 2 : Une suite arithmético-géométrique

10 points

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

(3) **1.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 3$.

(0,5) **2.** Montrer que pour entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + 2$.

(1,25) **3.** Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est décroissante.

Partie B

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$.

(0,5) **1.** Calculer v_0.

(1,75) **2.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $q = \frac{1}{3}$.

(1) **3.** Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

(1) **4.** Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

(1) **5.** Exprimer en fonction de n la somme $\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

On rappelle que la suite u_n n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Exercice 3 : Un très grand classique

7 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{8u_n + 3}{2u_n + 3}$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

(0,5) **1.** Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

(0,75) **2.** On considère la fonction `terme()` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme(n) :
    u = ...
    for i in range(n) :
        u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n-1$.

Compléter le script ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme(n)` renvoie la valeur de u_n.

3. Soit la fonction f définie sur $[0;3]$ par $f(x) = \dfrac{8x+3}{2x+3}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;3]$ et on note f' sa fonction dérivée.

(1) **a)** Calculer $f'(x)$ pour $x \in [0;3]$.

On citera avec précision la ou les formules utilisées.

(0,5) **b)** En déduire, en justifiant, que la fonction f est strictement croissante sur $[0;3]$.

(3,5) **4. a)** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$1 \leqslant u_n < u_{n+1} < 3$$

b) En déduire :

(0,25) **i.** le sens de variation de la suite u_n.

(0,25) **ii.** un majorant M de (u_n).

(0,25) **iii.** un minorant m de (u_n).