BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Année 2025-2026

Mathématiques

Bac Blanc №1 - Mardi 9 décembre 2025

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec ou sans mode examen est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat doit traiter les 4 exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 : Des affirmations à justifier

5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Dans le cas d'une affirmation fausse, la démonstration peut consister à fournir un contre exemple.

Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Les questions sont indépendantes.

(1) **1. Affirmation №1 :** Si pour tout $n \geqslant 1$,

$$-1 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

alors la suite (u_n) converge.

(1) **2.** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Affirmation №2 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

(1) **3.** Soit les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \qquad v_n = \frac{u_n + 6}{u_n - 1}$$

Affirmation №3 : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

(1) **4.** Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sqrt{n^2 + 10n} - n$$

Affirmation №4 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$.

(1) **5.** Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = \frac{1 + 5^n}{2 + 3^n}$$

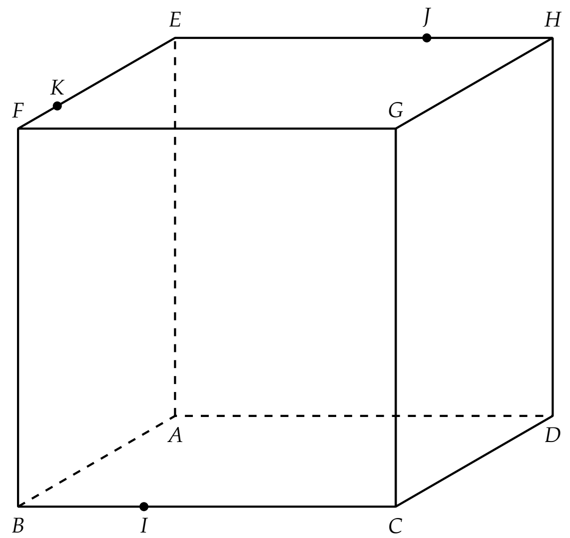
Affirmation №5 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{5}{3}$.

Exercice 2 : Dans un cube

4 points

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

On considère les points $I\left(1 ; \dfrac{1}{3} ; 0\right)$, $J\left(0 ; \dfrac{2}{3} ; 1\right)$, $K\left(\dfrac{3}{4} ; 0 ; 1\right)$ et $L(a ; 1 ; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

(0,5) **1.** Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (FG).

(0,5) **2.** En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (BCF).

Partie B

(0,5) **3.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

(0,75) **4.** Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ y & = & t' \\ z & = & 1 - t' \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$$

(1) **5.** Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{4}$.

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \dfrac{1}{4}$. Le point L a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4} ; 1 ; 0\right)$.

(0,75) **6.** Montrer que le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.

Exercice 3 : Un exercice sans fin

5 points

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Tout au long de l'année, les lutins du Père Noël doivent préparer les paquets des cadeaux pour les enfants sages. Afin de les aider à tenir le coup, le Père Noël leur cuisine des petits cookies. À la fin du mois de novembre, la réserve de cookies était de 40 kg. Le Père Noël, bien aidé par ses usines délocalisées au Pôle Sud, produit 5 kg de cookies par jour. Mais, d'autre part, chaque jour les lutins engloutissent 20 % des gâteaux de la réserve !

On note (u_n) la suite donnant la masse de cookies restant dans la réserve, en kilos, après n jours. Ainsi, au 30 novembre on a $u_0 = 40$.

(0,25) **1. a)** Justifier que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 5$.

(0,5) **b)** Montrer que, le premier décembre on avait $u_1 = 37$, puis déterminer la masse de cookies restant le 2 décembre (arrondir au gramme près).

(0,25) **c)** Montrer que (u_n) n'est pas une suite géométrique.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $v_n = u_n - 25$.

(1) **a)** Montrer que la suite (v_n) est géométrique, de raison $q = 0{,}8$, et préciser son premier terme v_0.

(0,25) **b)** Exprimer v_n en fonction de n.

(0,25) **c)** En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

(0,75) **3.** Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

L'usine de cookies délocalisée essaye de faire des économies sur le dos des lutins. Chaque année, le nombre de pépites de chocolat utilisés pour fabriquer les cookies baisse de 10 %. En 2018, un lutin pouvait manger 120 *centaines* de pépites.

On note (w_n) le nombre de centaines de pépites mangées par un lutin sur l'année $2018 + n$.

(0,75) **4.** Justifier que w_n est une suite géométrique puis exprimer w_n en fonction de n.

On définit la suite $s_n = \sum_{i=0}^{n} w_n = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n$.

(0,25) **5.** Justifier le sens de variation de la suite s_n.

(0,5) **6.** Montrer que $s_n = 1200\left(1 - 0{,}9^{n+1}\right)$.

(0,25) **7.** Quel est le nombre de pépites mangées par un lutin de 2018 à 2030 ?

Exercice 4 : Gestion des stocks et quotas de pêche

6 points

Nous nous intéressons à l'évolution de la biomasse, exprimée en milliers de tonnes, d'une population de poissons dans une zone maritime déterminée, et soumise à un ***quota de pêche annuel*** $\mathbf{P}$ *constant (en millier de tonnes) et indépendant de l'état du stock.*

En l'absence de pêche, l'évolution de la population dépend de deux paramètres biologiques :

- ***La biomasse maximale*** $\mathbf{M}$ ***imposée par l'environnement :*** *la quantité de nutriments disponible ne permet pas de soutenir durablement une population de biomasse supérieure à M.*
- ***Le taux de reproduction intrinsèque*** $\mathbf{r}$ ***:*** *une valeur élevée de r signifie que la population se régénère rapidement lorsque les ressources sont abondantes et que la pression des prédateurs est faible.*

Une étude de la zone a permis d'établir que $M = 20\,000$ *tonnes et* $r = 0{,}4$.

On note u_n la biomasse de poissons (exprimée en milliers de tonnes) dans la zone au début de l'année $2024 + n$.

La biomasse totale en 2024 est estimée à 9 000 t. Ainsi $u_0 = 9$.

Selon le modèle adopté, la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence suivante.

$$u_{n+1} = u_n + 0{,}4u_n\left(1 - \frac{u_n}{20}\right) - P$$

La pêche s'arrête lorsque $u_n < 0$.

Soit la fonction f définie sur $[0;20]$ par :

$$f(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}4x - P$$

Ainsi pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A : le prélèvement durable maximal

(0,5) **1.** Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}$, la fonction f est strictement croissante sur $[0;20]$.

Un prélèvement P est durable si la suite (u_n) *converge vers une limite* $u_{eq} > 0$.

Dans ce cas, la biomasse à l'équilibre u_{eq} *est solution de l'équation* $x = f(x)$.

Cela signifie que le prélèvement par la pêche P maintient la biomasse totale u_{eq} *inchangée d'une année à l'année suivante.*

(0,25) **2.** Montrer que pour un prélèvement P durable, la biomasse à l'équilibre u_{eq} est solution de :

$$0{,}02x^2 - 0{,}4x + P = 0$$

(0,25) **3.** Justifier que l'équation a au moins une solution réelle si, et seulement si, $P \leqslant 2$.

Partie B : cas $\mathbf{P} < 2$

Dans cette partie, le quota de pêche est fixé à 720 t, d'où $P = 0{,}72$. On rappelle que $u_0 = 9$.

(1) **4.** Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$ on a $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

(0,5) **5.** En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.

6. On rappelle que la limite ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$.

(0,75) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

(0,25) Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C : cas $\mathrm{P} = 2$

Dans cette partie, le quota de pêche est fixé à 2 000 t, d'où $P = 2$ (prélèvement durable maximal).

(0,25) **7.** Quel est, dans ce cas, la valeur attendue de la biomasse à l'équilibre u_{eq} ?

(0,5) **8.** Montrer que pour tout $n \geqslant 0$ on a $u_{n+1} - u_n = -0{,}02(u_n - 10)^2$.

(0,25) **9.** En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

(0,5) **10.** À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) diverge vers $-\infty$.

(0,25) **11.** En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

(0,25) Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

(0,5) **12.** Déterminer et interpréter la valeur affichée par le script ci-dessous.

```python
p = 0
u = 9
while u>0 :
    u = -0.02*u**2+1.4*u-2
    p = p+1
print(p)
```

Annexe à rendre avec la copie

Numéro d'anonymat :...............