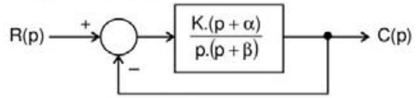
SOLUTIONNAIRE
EXAMEN D'AUTOMATIQUE
2018-2019

PROBLÈMES *(Faire les calculs avec 4 chiffres après la virgule)* :

Exercice 1 *(6 points)* :

On considère le système automatique illustré ci-dessous :



Ce système doit être conçu pour satisfaire les spécifications suivantes :

i) Erreur de traînage $\varepsilon_T = 0.1$;

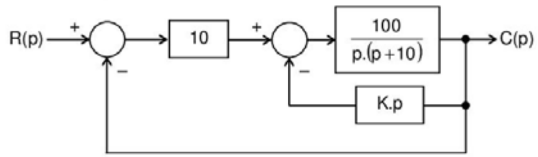
ii) Les pôles du système en boucle fermée sont : $p_{12} = -1 \pm j$.

a) Déterminer les valeurs de α, β et K pour satisfaire à ces spécifications ;

b) Pour K= 2, α= 3 et β= 0.1, calculer la marge de phase (M_Φ) de ce système.

Exercice 2 *(8 points)* :

On considère le système automatique illustré ci-dessous :



a) Déterminer la condition sur **K** qui assure la stabilité de ce système ;

b) Calculer les erreurs de position (ε_{pos}) et de traînage (ε_T) en fonction de **K** ;

c) Calculer la valeur de **K** qui assure au système une erreur de traînage égale à 0.1 ;

d) Calculer la valeur de **K** qui assure au système un temps de stabilisation à 2% ($t_{2\%}$) égal à 0.5 secondes ;

e) Calculer la valeur de **K** pour que le système ait pour pôles : $p_{1,2} = -6 \pm j31.0483$. Donner le coefficient d'amortissement du système dans ce cas ;

f) Calculer la pulsation (ω_R) et le pic de résonance (Q) dans les conditions de la question « d ».

Bon courage.

Exercice 1 :

a) $G(p) = \dfrac{K(p+\alpha)}{p(p+\beta)}$

$H(p) = 1$

$\varepsilon_{\pi} = \dfrac{1}{K_v}$ avec $K_v = \lim\limits_{p\to 0} p\,G(p)H(p) = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{K(p+\alpha)}{p+\beta} = \dfrac{K\alpha}{\beta}$

$\varepsilon_{\pi} = \dfrac{1}{K_v} = \dfrac{\beta}{K.\alpha} = 0,1$ (1)

$$F(p) = \frac{\dfrac{K(p+\alpha)}{p(p+\beta)}}{1+\dfrac{K(p+\alpha)}{p(p+\beta)}} = \frac{K(p+\alpha)}{p^2+p(\beta+K)+K\alpha}$$

$$= \left(\frac{p+\alpha}{\alpha}\right) * \frac{K\alpha}{p^2+p(\beta+K)+K\alpha}$$

pôles de la F.T. de 2^{e} ordre (pôles du système)

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -1 \pm j\,1$$

$\xi\omega_n = 1$ avec $\begin{cases} \omega_n^2 = K\alpha \Rightarrow \omega_n = \sqrt{K\alpha} \\ 2\xi\omega_n = \beta+K \end{cases}$

$\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 1 \Rightarrow \omega_n^2(1-\xi^2) = 1$

$$\begin{cases} \omega_n = \dfrac{1}{\xi} \\ \dfrac{1-\xi^2}{\xi^2} = 1 \Rightarrow 1-\xi^2 = \xi^2 \Rightarrow 1 = 2\xi^2 \Rightarrow \boxed{\xi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}} \end{cases}$$

$\boxed{\omega_n = \sqrt{2} \text{ rad/s}}$

Donc : $K\alpha = 2$ (2)

$\beta + K = 2$ (3)

(1) $\Rightarrow K\alpha = 10\beta \Rightarrow \beta = \dfrac{K\alpha}{10} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

remplaçons dans (3) : $\dfrac{2}{10} + K = 2$

$\dfrac{1}{5} + K = 2 \Rightarrow K = 2 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{9}{5}$

$\boxed{K = 1,8}$

$\boxed{\alpha = \dfrac{2}{K} = 1,11}$

$\boxed{\beta = 0,2}$

b) Pour $K = 2$, $\alpha = 3$ et $\beta = 0{,}1$:

La FTBO du système est : $\dfrac{2.(p+3)}{p^2+0{,}1p}$ $\quad (H = 1)$

$$G(j\omega) = 2 \cdot \frac{3+j\omega}{-\omega^2+j(0{,}1\omega)}$$

- On sait que : $M_\Phi = 180° + \underline{|G(j\omega_{cg})}$

on doit donc chercher ω_{cg}.

or à ω_{cg} nous avons $|G(j\omega_{cg})| = 1$

$$\Rightarrow |G(j\omega_{cg})| = 2 \cdot \frac{\sqrt{9+\omega_{cg}^2}}{\sqrt{\omega_{cg}^4+0{,}01\omega_{cg}^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(9+\omega_{cg}^2\right) = \omega_{cg}^4 + 0{,}01\,\omega_{cg}^2$$

$$36 + 4\omega_{cg}^2 = \omega_{cg}^4 + 0{,}01\,\omega_{cg}^2$$

$$\emptyset = \omega_{cg}^4 - 3{,}99\,\omega_{cg}^2 - 36$$

Posons : $\omega_{cg}^2 = X \implies \emptyset = X^2 - 3{,}99X - 36$

$$\Delta = (-3{,}99)^2 - 4*1*(-36) = 159{,}9201$$

$X_1 = \dfrac{3{,}99 - \sqrt{159{,}9201}}{2} = -4{,}3280 \leftarrow$ À rejeter car ω_{cg}^2 est positive

$X_2 = \dfrac{3{,}99 + \sqrt{159{,}9201}}{2} = 8{,}3180$ à retenir

or $X_2 = \omega_{cg}^2 \implies \omega_{cg} = \begin{cases} -2{,}8841 \text{ rad/s} \leftarrow \text{À rejeter car } \omega_{cg} \text{ est positive} \\ 2{,}8841 \text{ rad/s} \leftarrow \text{À retenir} \end{cases}$

Donc : $\boxed{\omega_{cg} = 2{,}8841 \text{ rad/s}}$

Calculons $\underline{|G(j\omega_{cg})}$: On a : $G(j\omega) = 2 \cdot \dfrac{3+j\omega}{j\omega.(j\omega+0{,}1)}$

$$\underline{|G(j\omega)} = \underline{|2} + \underline{|3+j\omega} - \underline{|j\omega} - \underline{|0{,}1+j\omega}$$

$$= 0° + \operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{3}\right) - 90° - \operatorname{atan}\left(\frac{\omega}{0{,}1}\right)$$

pour $\omega = \omega_{cg} = 2{,}8841$ rad/s

$$\underline{|G(j\omega_{cg})} = \operatorname{atan}(0{,}9614) - 90° - \operatorname{atan}(28{,}841)$$

$$= 43{,}8716° - 90° - 88{,}0142°$$

$$= -134{,}1426°$$

Donc : $M_\Phi = 180° + \underline{|G(j\omega_{cg})}$

$$= 180° - 134{,}1426°$$

$$\boxed{M_\Phi = 45{,}8574°}$$

Autre méthode :

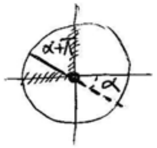
$$\underline{|G(j\omega_{cg})} = \underline{\left|\frac{3+j\omega_{cg}}{-\omega_{cg}^2+j\,0{,}1\omega_{cg}}\right.} = \underline{\left|\frac{3+j\,2{,}8841}{-8{,}3180+j\,0{,}28841}\right.}$$

$$= \operatorname{atan}\left(\frac{2{,}8841}{3}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{0{,}28841}{-8{,}3180}\right)$$

$\leftarrow \sin > 0$

$\leftarrow \cos < 0$

$$= 43{,}8716^\circ - \left\{ \underbrace{\operatorname{atan}\left(\frac{-0{,}28841}{8{,}3180}\right)}_{\alpha} + 180^\circ \right\}$$



$$= 43{,}8716^\circ - 178{,}0142$$

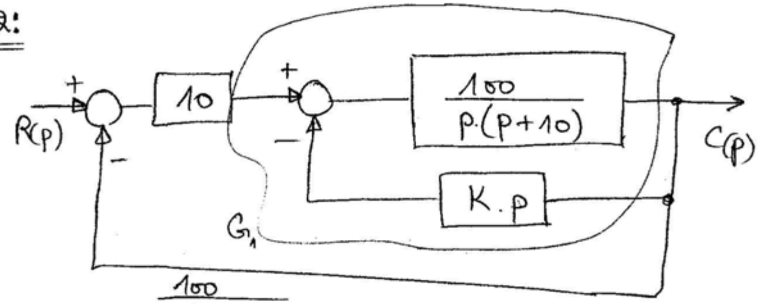
$$\underline{/G(j\omega_{cg})} = -134{,}1426^\circ$$

Par conséquent

$$M\Phi = 180^\circ + \underline{/G(j\omega_{cg})} = 180^\circ - 134{,}1426^\circ$$

$$\boxed{M\Phi = 45{,}8574^\circ}$$

Exercice 2 :



$$G_1 = \frac{\dfrac{100}{p(p+10)}}{1 + \dfrac{100Kp}{p(p+10)}} = \frac{100}{p^2 + (10+100K)\,p}$$

$$G(p) = \frac{\dfrac{1000}{p^2 + (10+100K)p}}{1 + \dfrac{1000}{p^2 + (10+100K)\,p}} = \frac{1000}{p^2 + (10+100K)p + 1000}$$

1) Déterminer K pour que le système soit stable :

$$\begin{array}{c|cc} p^2 & 1 & 1000 \\ p & 10+100K & 0 \\ p^0 & 1000 & \end{array} \qquad \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1000 \\ 10+100K & 0 \end{vmatrix}}{-(10+100K)} =$$

$$10 + 100K > 0 \Rightarrow \boxed{K > -0{,}1}$$

2) • Erreur de position :

$$K_u = \lim_{p \to 0} G(p)H(p) = \lim_{p \to 0} \frac{1000}{p^2 + (10+100K)p} = +\infty \Rightarrow \varepsilon_{pos} = 0$$

• Erreur de traînage :

$$K_v = \lim_{p \to 0} p\, G(p) H(p) = \lim_{p \to 0} \frac{1000}{p + (10+100K)} = \frac{1000}{10+100K}$$

3) Pour $\varepsilon_\pi = 0{,}1 = \frac{1}{K_v} \Rightarrow \frac{10+100K}{1000} = 0{,}1$

$$\Rightarrow 10 + 100K = 100$$

$$\Rightarrow 100K = 90 \Rightarrow \boxed{K = 0{,}9}$$

4) $t_{2\%} = 0{,}5\,s = \frac{4}{\xi\omega_n} \Rightarrow \boxed{\xi\omega_n = \frac{4}{0{,}5} = 8}$

$\Rightarrow$ FTBF : $G(p) = \dfrac{1000}{p^2 + (10+100K)p + 1000}$

$\omega_n^2 = 1000 \Rightarrow \omega_n = 10\sqrt{10}$

$2\xi\omega_n = 10 + 100K \Rightarrow \xi\omega_n = 5 + 50K = 8$

$50K = +3 \Rightarrow \boxed{K = \frac{3}{50} = 0{,}06}$

5) Calculer K pour que le système ait les pôles $p_{1,2} = -6 \pm 31{,}0483$ et donner le coef d'amortist

$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ et $\omega_n = 10\sqrt{10}$

$\xi\omega_n = 5 + 50K = 6 \Rightarrow 50K = 1 \Rightarrow K = 1/50 = 0{,}02$ $\boxed{K = 0{,}02}$

$\xi\omega_n = 6 \Rightarrow \xi = \frac{6}{10\sqrt{10}} = \boxed{\xi = 0{,}1897}$

6) Calcul de la pulsation et du pic de résonance dans les conditions de la question "d".

Nous avons montré à la question "d" que : $K = 0{,}06$

Or la FTBF : $G(p) = \dfrac{1000}{p^2 + (10+100K)p + 1000}$

$$= \frac{1000}{p^2 + 16p + 1000}$$

Donc : $\begin{cases} 2\xi\omega_n = 16 \\ \omega_n^2 = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} \text{ rad/s} \\ \xi = \frac{16}{2\omega_n} = \frac{16}{20.\sqrt{10}} \end{cases}$

$\begin{cases} \omega_n = 31{,}6228 \text{ rad/s} \\ \xi = 0{,}2530 < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow$ Il y a résonance.

On sait que : $\omega_R = \omega_n . \sqrt{1 - 2\xi^2} = 29{,}5296$ rad/s

$$Q = \frac{1}{2\xi . \sqrt{1-\xi^2}} = 2{,}0429 .$$