(一)P_1 落在 T_A、T_B、T_C 上

在此不失一般性，將其平移、旋轉、翻轉後令 $A=(0,0)$、$B=\left(k\cdot\frac{1}{tan\theta_1},k\right)$、$C=\left(-k\cdot\frac{1}{tan\theta_2},k\right)$，且 $\theta_1<\theta_2$。則 $\overline{BC}$ 平行於 x 軸、$\overline{AB}$ 與 x 軸正向的夾角為 θ_1、$\overline{CA}$ 與 x 軸正向的夾角為 $180°-\theta_2$，T_A 與 x 軸正向的夾角為 $180°+\theta_1-\theta_2$，斜率為 $tan(180°+\theta_1-\theta_2)$，如圖 x。

此時與 $\overline{AC}$ 的夾角為 θ_1，與 $\overline{AB}$ 的夾角為 θ_2，故 $\angle P_1AC_1=2\theta_1$、$\angle P_1AA_1=2\theta_2$。（因對頂角及鏡射，可得角度），如圖 x。

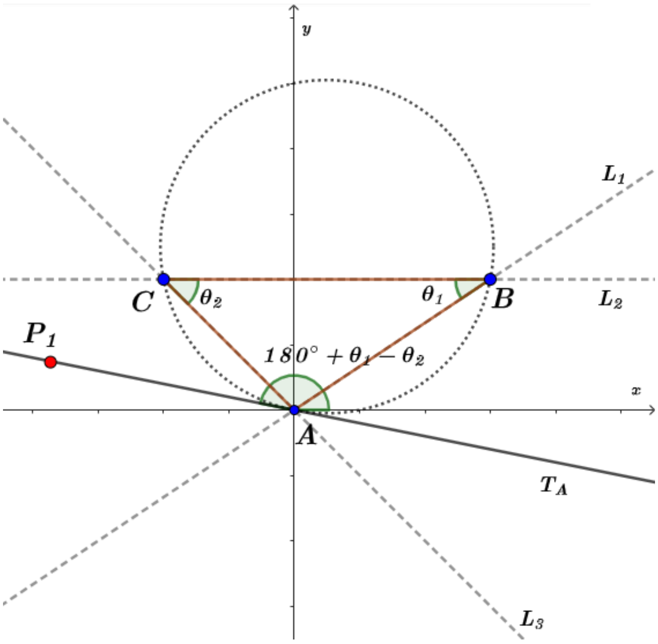

圖 x −將 ΔABC 平移、旋轉、翻轉後，

T_A 與 x 軸正向的夾角為

$180°+\theta_1-\theta_2$。

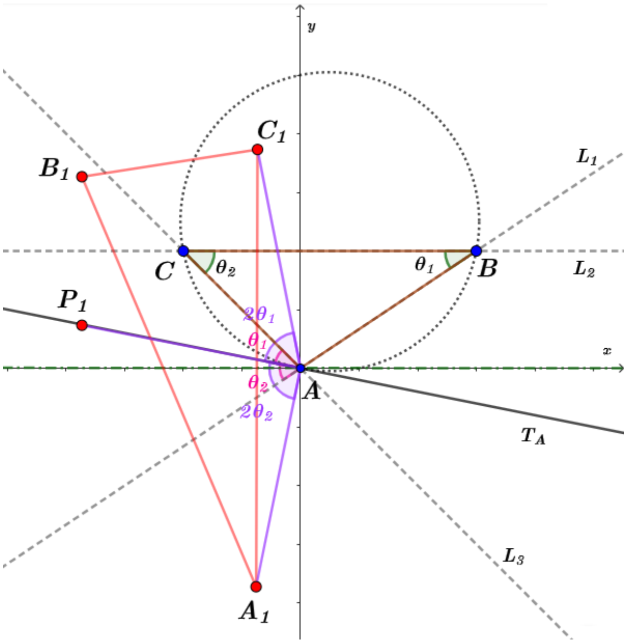

圖 $x-A_1$相當於 P_1 以 A 點為原點

旋轉 $2\theta_2$，C_1 同理，

因此 $\overline{A_1C_1}$ 的中垂線固定。

因 $\angle P_1AC_1=2\theta_1$，故 $\overleftrightarrow{C_1A}$ 與 x 軸正向的夾角為 $180°+\theta_1-\theta_2-2\theta_1=180°-\theta_1-\theta_2$，則 $\overleftrightarrow{C_1A}$ 的斜率為 $tan(180°-\theta_1-\theta_2)$。

因 $\angle P_1AA_1=2\theta_2$，故 $\overleftrightarrow{A_1A}$ 與 x 軸正向的夾角為 $180°+\theta_1-\theta_2+2\theta_2=180°+\theta_1+\theta_2$，則 $\overleftrightarrow{A_1A}$ 的斜率為 $tan(180°+\theta_1+\theta_2)$。

由於 P_1 再過 A 點的直線上移動，所以 $\overline{A_1A}$ 跟 $\overline{C_1A}$ 的斜率不變，可得知中垂線為固定直線；又因 $\overline{C_1A}=\overline{P_1A}=\overline{A_1A}$，故 $\overline{C_1A_1}$ 的中垂線即為 $\angle C_1AA_1$ 的角平分線，

其斜率是 $tan\left[\frac{(180°-\theta_1-\theta_2)+(180°+\theta_1+\theta_2)}{2}\right] = tan\,180°$，與 $\overline{BC}$ 平行。利用平移、旋轉、翻轉，可以此類推 P_1 落在 T_B、T_C 的情況也成立，如圖 x。

根據上述證明可得知 P_1 只要落在過頂點的外接圓切線上，O_1 的所有可能位置會落在過頂點且平行對邊的直線上，如圖 x。

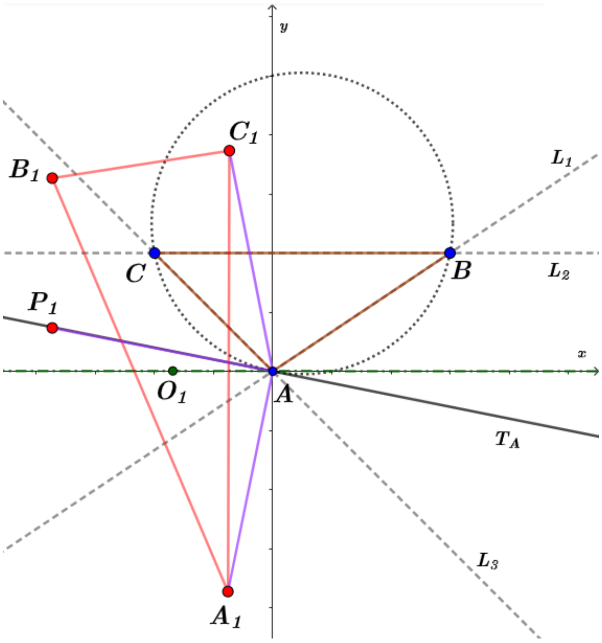

圖 $x-P_1$ 在 T_A 上時，$\overline{O_1A}$ 平行 $\overline{BC}$。

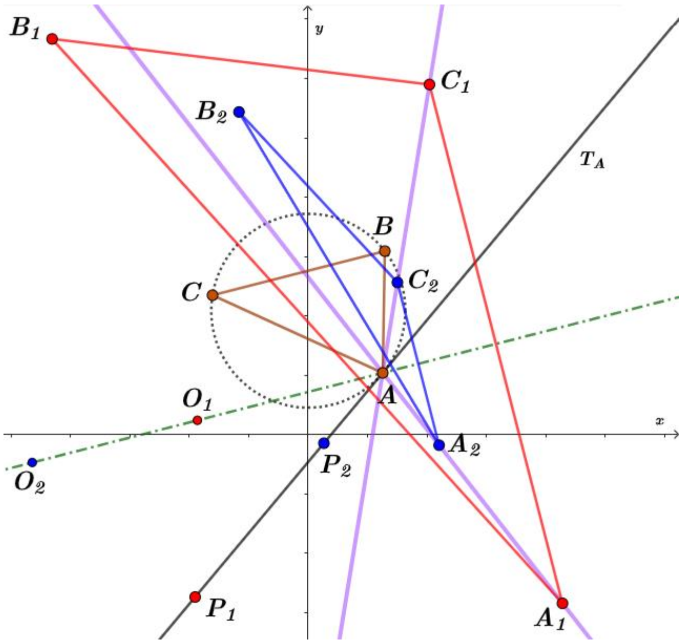

圖 x —即使 ΔABC 沒有刻意擺放，

P_1、P_2 在 T_A 上時，$\overline{O_1A}$、$\overline{O_2A}$ 仍然平行 $\overline{BC}$。

將上述整理為定理 x 如下：

定理 x：當 P_1 落在ΔABC 的外接圓切線 T_A、T_B、T_C 上時，

鏡射外心 O_1 會落在過切點且平行對邊的直線上。

(二)P_1 落在過 ΔABC 其中一頂點的直線

在此不失一般性，將其平移、旋轉、翻轉後令 $A=(0,0)$、$B=\left(k\cdot\frac{1}{tan\,\theta_1},k\right)$、$C=\left(-k\cdot\frac{1}{tan\,\theta_2},k\right)$，且 $\theta_1<\theta_2$。則 $\overline{BC}$ 平行於 x 軸、$\overline{AB}$ 與 x 軸正向的夾角為 θ_1、$\overline{CA}$ 與 x 軸正向的夾角為 $180°-\theta_2$，T_A 與 x 軸正向的夾角為 $180°+\theta_1-\theta_2$，過 A 點的直線與 T_A 軸夾角為 ϕ、與 x 軸正向的夾角為 $180°+\theta_1-\theta_2+\phi$，如圖 x。

此時比較 P_1 與 P_2 的鏡射結果，發現 $\angle C_2AC_1=\angle A_2AA_1=\phi$。因 $\overline{C_1A}=\overline{P_1A}=\overline{A_1A}$，故 $\overline{A_2C_2}$ 的中垂線即為 $\angle C_2AA_2$ 的角平分線；又因 $\overrightarrow{AC_2}$ 與 $\overrightarrow{AA_2}$ 分別為 $\overrightarrow{AC_1}$ 與 $\overrightarrow{AC_1}$ 順時針旋轉 ϕ 的結果，故 $\angle C_2AA_2$ 的角平分線也就會是 $\angle C_1AA_1$ 順時針旋轉 ϕ 後的結果，如圖 x。

/* img*2 (1, 2) */

利用平移、旋轉、翻轉，可以此類推 P_1 落在過 B、C 直線上的情況也成立，如圖 x。

根據上述證明可得知 P_1 只要落在過頂點直線上，O_1 的所有可能位置會落在過頂點的直線上，如圖 x。

/* img*2 (3, 4) */

將上述整理為定理 x 如下：

定理 x：當 P_1 落在 ΔABC 過頂點的直線上時，鏡射外心 O_1 會落在過該頂點且的直線上。