

永中鍾定彬

DATE 2021

9

2021

NO 3 校友 57

3 校友 42

ex. 6

嘗試描述情境, 解釋 WHY 等式成立 (組合解釋)

$$1) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

一排 n 個相異物, 選 or 不選

$$\text{選 } 0 = \binom{n}{0}$$

$$\text{選 } 1 = \binom{n}{1}$$

...

$$\text{選 } n = \binom{n}{n}$$

相加

每一選 or 不選 2 種
 $\Rightarrow 2^n$

得証 #

有 1 \leftrightarrow 沒 1	even	odd
(去掉 All "1" 就對到對面)	0	1
	1 2	2
	1 3	3
	1 4	4
	2 3	1 2 3
	2 4	1 2 4
	3 4	1 3 4
	1 2 3 4	2 3 4

$$2) \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

$2 \mid n$:

$$\text{原式} \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n-3} + \binom{n}{n-1}$$

\therefore 交錯和為 0, 故成立

(其實只要上面這行就可以了)

得証 #

$2 \nmid n$:

—— 兩組對相等

$$\text{原式} \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n-3} + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n}$$

$$3) \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

$2n$ 分成 n, n 兩組, 一組選 k 个, 一組選 $n-k$ 个
相當於 $\binom{2n}{n}$, 故得証 #