

定義新增：

T_A 、 T_B 、 T_C ： T_A 、 T_B 、 T_C 分別為過 A 、 B 、 C 點的 ΔABC 外接圓切線。

一、 P_1 落在過 ΔABC 的直線上

二、 P_1 落在 ΔABC 的外接圓切線上

接著來討論當 P_1 位於 ΔABC 的外接圓切線上的情況。

1. ΔABC 為等腰直角三角形的情況

/* P_1 落在 T_A 、 T_B 、 T_C 時， O_1 移動軌跡為一直線，且與切點的對邊平行 */

在此不失一般性，將其平移、旋轉、縮放後令 $A = (0, 0)$ 、 $B = (1, 0)$ 、 $C = (1, 1)$ ， \overline{AB} 與 x 軸重合、 \overline{BC} 垂直於 x 軸。此時發現 $\overline{A_1B_1}$ 的中垂線即為 T_B ；又 O_1 是三角形三邊 $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{B_1C_1}$ 、 $\overline{A_1C_1}$ 的中垂線交點， O_1 必定位於 T_B 上，如圖 x 。

當 $P_1 = (x_1, y_1)$ 時， $A_1 = (x_1, -y_1)$ 、 $B_1 = (-x_1 + 1, y_1)$ 、 $C_1 = (y_1, x_1)$ 。

以 T_A 為例，因 $T_A: y = -x$ ，以 $P_1(t, -t)$ 代入，則 $A_1 = (t, t)$ 、 $B_1 = (-t + 1, -t)$ 、 $C_1 = (-t, t)$ ，而 $\overline{A_1C_1}$ 的中垂線固定 ($x = 0$)；又 O_1 是三角形三邊 $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{B_1C_1}$ 、 $\overline{A_1C_1}$ 的中垂線交點， $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{B_1C_1}$ 的中垂線則不固定，因此 O_1 的軌跡會形成一直線，且該軌跡 ($x = 0$) 為過 A 點且平行 \overline{BC} 的直線。

因 $T_B: y = x - 1$ ，以 $P_1(t, t - 1)$ 代入，則 $A_1 = (t, -t + 1)$ 、 $B_1 = (-t + 1, t - 1)$ 、

$C_1 = (t-1, t)$ ，而 $\overline{A_1B_1}$ 的中垂線固定 ($y = x - 1$)；又 O_1 是三角形三邊 $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{B_1C_1}$ 、 $\overline{A_1C_1}$ 的中垂線交點， $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{B_1C_1}$ 的中垂線則不固定，因此 O_1 的軌跡會形成一直線，且該軌跡 ($y = x - 1$) 為過 B 點且平行 \overline{AC} 的直線。

因 $T_C: y = -x + 2$ ，以 $P_1(t, -t + 2)$ 代入，則 $A_1 = (t, t - 2)$ 、

$B_1 = (-t + 1, -t + 2)$ 、 $C_1 = (-t + 2, t)$ ，而 $\overline{B_1C_1}$ 的中垂線固定 ($y = 1$)；又 O_1 是三角形三邊 $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{B_1C_1}$ 、 $\overline{A_1C_1}$ 的中垂線交點， $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{B_1C_1}$ 的中垂線則不固定，因此 O_1 的軌跡會形成一直線，且該軌跡 ($y = 1$) 為過 C 點且平行 \overline{AB} 的直線。

由此可得知，當 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形， P_1 落在 $\triangle ABC$ 的外接圓切線上時， O_1 的軌跡會形成一直線，且該軌跡為過切點且平行對邊的直線。

2. $\triangle ABC$ 為正三角形的情況

三、

/* P_1 落在 T_B 上時， O_1 軌跡與 T_B 重合，且 O_1 與 P_1 之間有特殊關係 */

如圖， P_1 位於 T_B 上，設 P_1 為 $(x_1, x_1 - 1)$ 。

此時 $O_1 = \left(\frac{(x_1 + y_1) \cdot (x_1 - 1)}{x_1 \cdot (x_1 - 1) + y_1 \cdot (y_1 - 1)}, \frac{(x_1 - y_1) \cdot (x_1 - 1)}{x_1 \cdot (x_1 - 1) + y_1 \cdot (y_1 - 1)} \right)$ ；以 $y_1 = x_1 - 1$ 代入，

則 $O_1 = \left(\frac{2x_1 - 1}{2 \cdot (x_1 - 1)}, \frac{1}{2 \cdot (x_1 - 1)} \right)$ ，而 $\frac{2x_1 - 1}{2 \cdot (x_1 - 1)} - 1 = \frac{(2x_1 - 1) - 2 \cdot (x_1 - 1)}{2 \cdot (x_1 - 1)} = \frac{2x_1 - 1 - 2x_1 + 2}{2 \cdot (x_1 - 1)} = \frac{1}{2 \cdot (x_1 - 1)}$ 。因此可得知 O_1 也位於 $y = x - 1$ 這條直線上，且此直線與 T_B 重合。