

1-2 等差級數



例題 1

等差級數 $(-21) + (-19) + (-17) + \cdots$ ，加到第 50 項的和為多少？

解： $a_1 = -21$ ， $d = 2$ ， $n = 50$

$$S_{50} = \frac{50(-42 + 49 \times 2)}{2} = 1400$$



例題 2

若一等差級數 $S_n = n(2n + 1)$ ，則其公差 = ？

解： $S_1 = a_1 = 1 \times (2 + 1) = 3$

$$S_2 = 2 \times (4 + 1) = 10$$

$$a_2 = 10 - 3 = 7$$

$$\text{公差} = 7 - 3 = 4$$



例題 3

若一個等差級數共 99 項，其和為 495，求 $a_{13} + a_{50} + a_{87}$ 之值。

解 $a_{50} \times 99 = 495$ ， $a_{50} = 5$

$$a_{13} + a_{50} + a_{87}$$

$$= 3 \times a_{50}$$

$$= 15$$

答：15



例題 4

若一等差數列前 10 項的和為 120，第 11 項至第 20 項的和為 240，則 $S_{30} = ?$

$$\text{解 } S_{10} = \frac{10 \times (a + a + 9d)}{2} = 120 \cdots \cdots \text{①}$$

$$S_{20} = \frac{20 \times (a + a + 19d)}{2} = 120 + 240 = 360 \cdots \cdots \text{②}$$

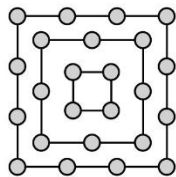
由①、②解得 $d = 1.2$ ， $a = 6.6$

$$S_{30} = \frac{30 \times (a + a + 29d)}{2} = 720$$

答：720

**例題 5**

正志國中校慶時，由一年級學生排出口字型的大會操隊形，如右圖。已知由內而外共排了 9 圈，試問該校一年級學生共有多少人？



解 第 1 圈有 4 人，第 2 圈有 8 人，第 3 圈有 12 人，……
可知每圈人數成等差數列。

設 $a_1 = 4$ ， $d = 4$ ， $n = 9$

$$S_9 = \frac{9[2 \times 4 + (9-1) \times 4]}{2} = 180$$

故該校一年級學生共有 180 人。

答：180 人

**例題 7**

兩個等差數列 $\langle a_n \rangle$ 和 $\langle b_n \rangle$ ，其第 n 項 a_n ： $b_n = (2n-5) : (3n+2)$ ，則此兩數列前 7 項和 $S_7 : T_7 = ?$

解 $S_7 : T_7 = 7a_4 : 7b_4$

$$= a_4 : b_4$$

$$= (2 \times 4 - 5) : (3 \times 4 + 2)$$

$$= 3 : 14$$

答：3 : 14

**例題 6**

國家音樂廳共有 40 排座位，後一排均比前一排多 2 個座椅。若茂伯的位置在第三排，且這排共有 24 個座椅，則全部共有多少個座椅？

解 $a_1 = 24 + 2 \times (-2) = 20$

$$a_{40} = 20 + 39 \times 2 = 98$$

$$S_{40} = \frac{40 \times (20 + 98)}{2} = 20 \times 118 = 2360$$

答：2360 個

**例題 8**

若一等差數列的 $a_{1000} = 99$ ， $a_{3000} = 1$ ，則 $a_{1000} + a_{1001} + a_{1002} + \cdots + a_{3000} = ?$

解 $\therefore a_{2000} = \frac{1}{2}(a_{1000} + a_{3000})$

$$= \frac{1}{2}(99 + 1)$$

$$= 50$$

$$\therefore \text{所求} = (3000 - 1000 + 1) \times a_{2000}$$

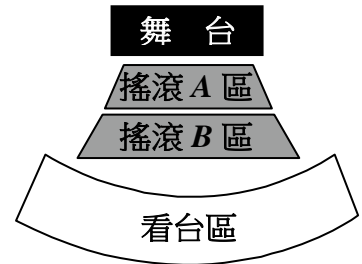
$$= 2001 \times 50$$

$$= 100050$$

答：100050



1. 著名樂團即將在台大體育館舉辦演唱會，已知場館內的座位分為搖滾 A 區、搖滾 B 區和看台區，如圖。搖滾區共有 8 排，第一排有 10 個座位，接下來每往後一排就增加 2 個座位，其中搖滾 A 區為 1~4 排，每張售價 3200 元，搖滾 B 區為 5~8 排，每張售價 2600 元；看台區共 6 排，每排有 30 個座位，每張售價 1800 元。試回答下列問題：



Q1：搖滾區共有多少座位？

設搖滾區第 1~ n 排共有 S_n 個座位，公差為 2

$$S_8 = \frac{8 \times [2 \times 10 + (8-1) \times 2]}{2} = 136$$

答：136 個座位

Q2：已知門票上的座位編號由左而右，由上而下，從 1 號開始依序編排。若小熊買搖滾區的門票，且座位編號為 88 號，則他是坐在第幾排？

$$88 = (10 + 12 + 14 + 16 + 18) + 18$$

故小熊坐在第 6 排

答：第 6 排

Q3：若演唱會門票全數售出，則門票收入共多少元？

$$S_4 = \frac{4 \times [2 \times 10 + (4-1) \times 2]}{2} = 52$$

$$52 \times 3200 + (136 - 52) \times 2600 + 6 \times 30 \times 1800 = 708800$$

答：708800 元



回家作業

一、選擇題：(南進階)

- (B) 1. 一等差級數 $54 + 51 + 48 + \dots$ 。若前 n 項的和為 378，則 n 可能的值為何？
 (A) 9 或 30 (B) 9 或 28 (C) 12 或 30 (D) 12 或 28
- (A) 2. 有一等差級數的首項為 120，公差為 -7 。若前 n 項的和 S_n 為最大，則 $S_n = ?$
 (A) 1089 (B) 2136 (C) 2144 (D) 2178
- (A) 3. 有一 n 邊形周長為 540 公分，已知其邊長恰好是公差為 4 公分的等差數列，且最長邊為 72 公分，則 $n = ?$
 (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13
- (D) 4. 在 10 到 200 的整數中，所有 7 的倍數之總和為多少？
 (A) 10500 (B) 7250 (C) 5670 (D) 2835

二、填充題：(南基礎)

1. 若一等差級數前 n 項的和為 $\frac{n(3n+5)}{2}$ ，則前 9 項之和為 144。
2. 已知一等差級數為 $9 + 14 + 19 + \dots$ ，則 $S_{10} =$ 315。
3. 已知一等差級數的首項為 -4 ，末項為 56，和為 416，則項數 $n =$ 16。
4. 設一等差級數的公差為 -2 ，前 14 項的和為 -112 ，則其首項為 5。
5. 在 32 和 -10 之間插入 13 個數，使其成等差數列，則所插入 13 個數的和為 143。

三、計算題：(康進階)

1. 某國中校慶時舉辦趣味競賽，每班指派一人，進行折返跑拿彈珠的遊戲，每隔 1 公尺處設一站，選手需於第一站取回 1 個彈珠回到起點，再到第二站取回 2 個彈珠回到起點，再到第三站取回 3 個彈珠回到起點，依此類推。若小毅在時間結束時剛好跑到第十站，但來不及跑回起點，只停在第十站的位置，則：

(1) 他帶回起點的彈珠共有多少個？(6 分)

(2) 他共跑了多少公尺？(6 分)

$$\text{彈珠數} = \frac{(1+9) \times 9}{2} = 45$$

$$\text{跑步的總長度} = 1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + \cdots + 9 \times 2 + 10$$

$$= (1+2+\cdots+9) \times 2 + 10$$

$$= 45 \times 2 + 10 = 100$$

答：(1) 45 個彈珠 (2) 100 公尺

2. 將等差數列 2, 5, 8, 11, 14, ……，依順序由左到右，由上到下依次填入右圖的階梯方格中，則第十層的所有數字和為何？(7 分)

$$\text{前九層共有數字} \frac{(1+9) \times 9}{2} = 45 \text{ 個}$$

$$\Rightarrow \text{第十層的第一個數字為 } 2 + (46-1) \times 3 = 137$$

$$\text{所求} = \frac{[2 \times 137 + (10-1) \times 3] \times 10}{2} = 1505$$

答：1505

2			
5	8		
11	14	17	

第一層
第二層
第三層
⋮



數學好好玩

九階數獨的基本規則

- 1、圖形由 9×9 的方格構成。
- 2、每排、每列或每個 3×3 的方格中，都必須填上 1~9，且不可重複。
- 3、所用的方法只需推理不必計算。
- 4、答案只能有一種。

1	4	7	2	5	3	9	6	8
2	3	8	4	6	9	1	7	5
6	9	5	7	8	1	2	3	4
4	5	6	1	3	8	7	2	9
3	7	9	6	2	4	5	8	1
8	1	2	5	9	7	3	4	6
9	2	3	8	1	6	4	5	7
5	6	4	9	7	2	8	1	3
7	8	1	3	4	5	6	9	2

	4		2	5				8
	3		4		9	1	7	
				8	1	2		
		6				7	2	
			6		4			
	1	2				3		
		3	8	1				
	6	4	9		2		1	
7				4	5		9	

1-3 等比數列

新課網



例題 1

若一等比數列的第 n 項可表示為 $3 \times 2^{n-1}$ ，則公比為多少？

解： $a_1 = 3 \times 2^{1-1} = 3$

$$a_2 = 3 \times 2^{2-1} = 6$$

$$\text{公比} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$



例題 2

若一個等比數列的首項是 6，第三項比第二項多 72，寫出此數列的前四項。

解： $a_3 = a_2 + 72$

$$6r^2 = 6r + 72$$

$$6r^2 - 6r - 72 = 0$$

$$r^2 - r - 12 = 0$$

$$(r-4)(r+3) = 0$$

$$r = 4 \text{ 或 } -3$$

所以前四項為 6, 24, 96, 384 或

6, -18, 54, -162



例題 3

若一等比數列共有 7 項，其首項、末項的乘積為 16，則中間三項的乘積是多少？

解： $a_1 \times a_7 = a_2 \times a_6 = a_3 \times a_5 = a_4^2 = 16$

得 $a_4 = \pm 4$

所以 $a_3 \times a_4 \times a_5 = 16 \times (\pm 4) = \pm 64$



例題 4

若 $x+1$ 和 $x+46$ 的等比中項為 12，則 x 是多少？

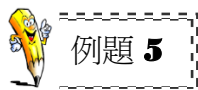
解： $(x+1)(x+46) = 12^2$

$$x^2 + 47x + 46 = 144$$

$$x^2 + 47x - 98 = 0$$

$$(x+49)(x-2) = 0$$

$$x = -49 \text{ 或 } 2$$



例題 5

有一款密碼鎖，其密碼有四位數字，分別為 $1, 2, a, b$ ，已知此數列為等比數列，則 $a + b = ?$

解 $a_1 = 1, r = 2 \div 1 = 2,$

$$a = 2 \times 2 = 4, b = 4 \times 2 = 8$$

$$a + b = 4 + 8 = 12$$

答：12



已知某 youtuber 上傳新影片的第一天觀看次數即為 3 萬次，且接下來每一天觀看累積次數皆變為前一天的 2 倍，試回答下列問題：

Q1：此影片的觀看次數在第幾天剛好是 48 萬？

$$48 = 3 \times 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} = 16 = 2^4$$

$$n - 1 = 4, n = 5$$

答：第 5 天

Q2：此影片的觀看次數在第幾天會超過一百萬？

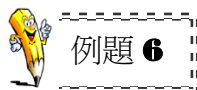
$$3 \times 2^{n-1} > 100$$

$$2^{n-1} > 33\frac{1}{3}$$

$$\text{當 } n = 7 \text{ 時, } 2^{7-1} = 64 > 33\frac{1}{3}$$

故在第 7 天會超過 100 萬

答：第 7 天



例題 6

某培養皿中有一隻細菌，已知這隻細菌每過一小時就會一分为三，即一小時後總共有 3 隻細菌，請問這隻細菌六小時之後會變成幾隻細菌？

解 $a_1 = 1$ ，公比 $r = 3$ ，

$$\text{六小時之後為 } a_7, a_7 = 1 \times 3^6 = 729,$$

故六小時之後會變成 729 隻細菌。

答：729 隻



一、選擇題：(南進階基礎康實力)

(B) 1. 下列各數列中，何者不是等比數列？

(A) 2, 4, 8, 16, 32

(B) 5, 10, 15, 20, 25

(C) 3, 3, 3, 3, 3

(D) 1, -1, 1, -1, 1

(C) 2. 若 a, b, c 為等比數列，且 $a \times c = 25$ ，則 $b = ?$

(A) 5 (B) -5 (C) ± 5 (D) 25

(B) 3. 若 $x, y, 4, z, 12$ 為等比數列，則 x, y, z 三數之積為何？

(A) $\frac{16}{3}$ (B) $\frac{64}{3}$ (C) 64 (D) 256

(B) 4. 若 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, a, \frac{2}{9}, b$ 為等比數列，則 $b \div a = ?$

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{9}{4}$

(B) 5. 一等比數列，公比為 r ，若各項同乘上 6，則新數列的公比為多少？

(A) 6 (B) r (C) $6r$ (D) $\frac{r}{6}$

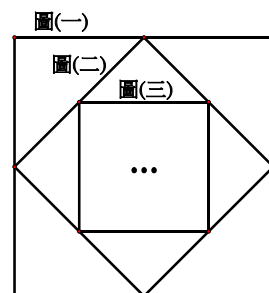
(A) 6. 若一等比數列的公比為 2，則第 3 項是第 10 項的多少倍？

(A) $\frac{1}{128}$ (B) $\frac{1}{64}$ (C) 64 (D) 128

二、填充題：

1. 已知一等比數列的首項為 486，公比為 $\frac{1}{3}$ ，則此等比數列的第 5 項為 6。
2. 已知一等比數列的首項為 5，公比為 3，則 405 為此等比數列的第 5 項。
3. 已知一等比數列的首項為 1，第 2 項為 -2，則 -512 為此等比數列的第 10 項。
4. 有一等比數列的首項為 $\frac{9}{2}$ ，公比為 $\frac{2}{3}$ ，則此等比數列的第 5 項為 $\frac{8}{9}$ 。
5. 已知 $a-5, 10, 2a+7$ 為等比數列，且 $a>0$ ，則此數列的最大數與最小數之和為 29。
6. 已知 a, b, c 三數為等比數列，且等比中項為 9，則 $a \times c =$ 81。
7. 一張 A4 的影印紙，每對摺一次紙的厚度變為原來的 2 倍。若一張紙原來的厚度為 0.08 毫米，對摺一次後，紙的厚度變為 0.16 毫米；再繼續對摺一次，紙的厚度變為 0.32 毫米；……，則至少需對摺 7 次，紙的厚度才會超過 10 毫米。
8. 實驗室裡細菌目前的數量是 100 隻，科學家進行繁殖計畫，從現在開始每分鐘變成 2 倍，則 10 分鐘後，細菌總數量變成 102400 隻。

9. 觀察右圖的規律，圖(一)是邊長 2 公分的正方形，圖(二)是圖(一)邊長中點連成的正方形，圖(三)是圖(二)邊長中點連成的正方形，……，以此類推，則圖(二)的正方形邊長為 $\sqrt{2}$ 公分，圖(六)的正方形周長為 $\sqrt{2}$ 公分。





數學好好玩

九階數獨的基本規則

- 1、圖形由 9×9 的方格構成。
- 2、每排、每列或每個 3×3 的方格中，都必須填上 1~9，且不可重複。
- 3、所用的方法只需推理不必計算。
- 4、答案只能有一種。

6	1	5	2	3	4	7	9	8
4	3	2	8	7	9	6	1	5
8	7	9	1	5	6	2	4	3
2	9	7	4	8	1	3	5	6
1	8	3	6	2	5	9	7	4
5	4	6	3	9	7	8	2	1
7	2	8	5	1	3	4	6	9
9	5	4	7	6	8	1	3	2
3	6	1	9	4	2	5	8	7

	1		2	3		7		8
			8			6		5
		9	1				4	
	9			8	1		5	6
5	4		3	9			2	
	2				3	4		
9		4			8			
3		1		4	2		8	