定義新增：

$\boldsymbol{T_A}$、$\boldsymbol{T_B}$、$\boldsymbol{T_C}$：T_A、T_B、T_C 分別為過 A、B、C 點的 ΔABC 外接圓切線。

一、P_1 落在過 ΔABC 的直線上

二、P_1 落在 ΔABC 的外接圓切線上

接著來討論當 P_1 位於 ΔABC 的外接圓切線上的情況。

1. ΔABC 為等腰直角三角形的情況

/ P_1 落在 T_A、T_B、T_C 時，O_1 移動軌跡為一直線，且與切點的對邊平行 */*

在此不失一般性，將其平移、旋轉、縮放後令 $A=(0,0)$、$B=(1,0)$、$C=(1,1)$，$\overline{AB}$ 與 x 軸重合、$\overline{BC}$ 垂直於 x 軸。此時發現 $\overline{A_1B_1}$ 的中垂線即為 T_B；又 O_1 是三角形三邊 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{A_1C_1}$ 的中垂線交點，O_1 必定位於 T_B 上，如圖 x。

當 $P_1=(x_1,y_1)$ 時，$A_1=(x_1,-y_1)$、$B_1=(-x_1+1,y_1)$、$C_1=(y_1,x_1)$。

以 T_A 為例，因 $T_A: y=-x$，以 $P_1(t,-t)$ 代入，則 $A_1=(t,t)$、$B_1=(-t+1,-t)$、$C_1=(-t,t)$，而 $\overline{A_1C_1}$ 的中垂線固定（$x=0$）；又 O_1 是三角形三邊 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{A_1C_1}$ 的中垂線交點，$\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$ 的中垂線則不固定，因此 O_1 的軌跡會形成一直線，且該軌跡（$x=0$）為過 A 點且平行 $\overline{BC}$ 的直線。

因 $T_B: y=x-1$，以 $P_1(t,t-1)$ 代入，則 $A_1=(t,-t+1)$、$B_1=(-t+1,t-1)$、

$C_1=(t-1,t)$，而 $\overline{A_1B_1}$ 的中垂線固定（$y=x-1$）；又 O_1 是三角形三邊 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{A_1C_1}$ 的中垂線交點，$\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$ 的中垂線則不固定，因此 O_1 的軌跡會形成一直線，且該軌跡（$y=x-1$）為過 B 點且平行 $\overline{AC}$ 的直線。

因 $T_C: y=-x+2$，以 $P_1(t,-t+2)$ 代入，則 $A_1=(t,t-2)$、$B_1=(-t+1,-t+2)$、$C_1=(-t+2,t)$，而 $\overline{B_1C_1}$ 的中垂線固定（$y=1$）；又 O_1 是三角形三邊 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{A_1C_1}$ 的中垂線交點，$\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$ 的中垂線則不固定，因此 O_1 的軌跡會形成一直線，且該軌跡（$y=1$）為過 C 點平行 $\overline{AB}$ 的直線。

由此可得知，當 ΔABC 為等腰直角三角形，P_1 落在 ΔABC 的外接圓切線上時，O_1 的軌跡會形成一直線，且該軌跡為過切點且平行對邊的直線。將上述整理成定理 x 如下：

定理 x：當 P_1 落在 ΔABC 的外接圓切線 T_A、T_B、T_C 上時，鏡射外心 O_1 的移動軌跡會形成一直線，且該軌跡為過切點且平行對邊的直線。

2. ΔABC 為正三角形的情況

/ 在洪紹宸那邊 */*

三、

/ P_1 落在 T_B 上時，O_1 軌跡與 T_B 重合，且 O_1 與 P_1 之間有特殊關係 */*

如圖，P_1 位於 T_B 上，設 P_1 為 (x_1,x_1-1)。

此時 $O_1=\left(\frac{(x_1+y_1)\cdot(x_1-1)}{x_1\cdot(x_1-1)+y_1\cdot(y_1-1)},\frac{(x_1-y_1)\cdot(x_1-1)}{x_1\cdot(x_1-1)+y_1\cdot(y_1-1)}\right)$；以 $y_1=x_1-1$ 代入，

則 $O_1=\left(\frac{2x_1-1}{2\cdot(x_1-1)},\frac{1}{2\cdot(x_1-1)}\right)$，而 $\frac{2x_1-1}{2\cdot(x_1-1)}-1=\frac{(2x_1-1)-2\cdot(x_1-1)}{2\cdot(x_1-1)}=\frac{2x_1-1-2x_1+2}{2\cdot(x_1-1)}=\frac{1}{2\cdot(x_1-1)}$。因此可得知 O_1 也位於 $y=x-1$ 這條直線上，且此直線與 T_B 重合。將上述整理成定理 x 如下：

定理 x：當 P_1 落在等腰直角三角形 ΔABC 的外接圓切線 T_B 上時，鏡射外心 O_1 的移動軌跡

會與 T_B 重合。

我們也發現，在此情況 O_1 與 P_1 之間有特殊關係，$\overline{O_1B}$ 與 $\overline{P_1B}$ 的長度相乘會是 1。底下證明之：

$B=(1,0)$，$P_1=(x_1,x_1-1)$，因此 $\overline{P_1B}$ 的長度是$\sqrt{(x_1-1)^2+(x_1-1)^2}=\sqrt{2\cdot(x_1-1)^2}=(x_1-1)\cdot\sqrt{2}$。

$O_1=\left(\frac{2x_1-1}{2\cdot(x_1-1)},\frac{1}{2\cdot(x_1-1)}\right)$，因此 $\overline{O_1B}$ 的長度是$\sqrt{\left(\frac{2x_1-1}{2\cdot(x_1-1)}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2\cdot(x_1-1)}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2\cdot(x_1-1)}\right)^2+\left(\frac{1}{2\cdot(x_1-1)}\right)^2}=\sqrt{2\cdot\left(\frac{1}{2\cdot(x_1-1)}\right)^2}=\left(\frac{1}{2\cdot(x_1-1)}\right)\cdot\sqrt{2}$。

將 $\overline{P_1B}$ 與 $\overline{O_1B}$ 相乘，可得 $\overline{P_1B}\cdot\overline{O_1B}=\left[(x_1-1)\cdot\sqrt{2}\,\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{2\cdot(x_1-1)}\right)\cdot\sqrt{2}\right]=\frac{x_1-1}{2\cdot(x_1-1)}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 2=1$。

綜合上述與上定理 x，可得知 P_1、O_1 與 B 皆位於同一條直線（$y=x-1$）上，且 $\overline{P_1B}$ 與 $\overline{O_1B}$ 相乘會是 1，因此 P_1 與 O_1 之間為反演關係，且反演圓為以 B 點為圓心、半徑為 1 的圓。將上述內容整理成定理 x：

定理 x：當 P_1 落在等腰直角三角形 ΔABC 的外接圓切線 T_B 上時，P_1 與 O_1 互為反演關係且反演圓為以 B 點為圓心、半徑為 1 的圓。