壹、前言

一、研究動機

在尋找題目時，看了第 62 屆全國科展作品《三角形與其垂足三角形的心不變量》，發現鏡射三角形與垂足三角形相似，而垂足三角形有許多漂亮的性質，便猜想與鏡射三角形是否也有特別的性質。

在利用 *GeoGebra* 軟體繪圖並觀察後發現，在眾多的心之中，重心及外心具有較特別的性質，且較方便計算坐標。確認好研究方向後，我們就朝著鏡射三角形的重心與外心的鏡射狀況持續研究。

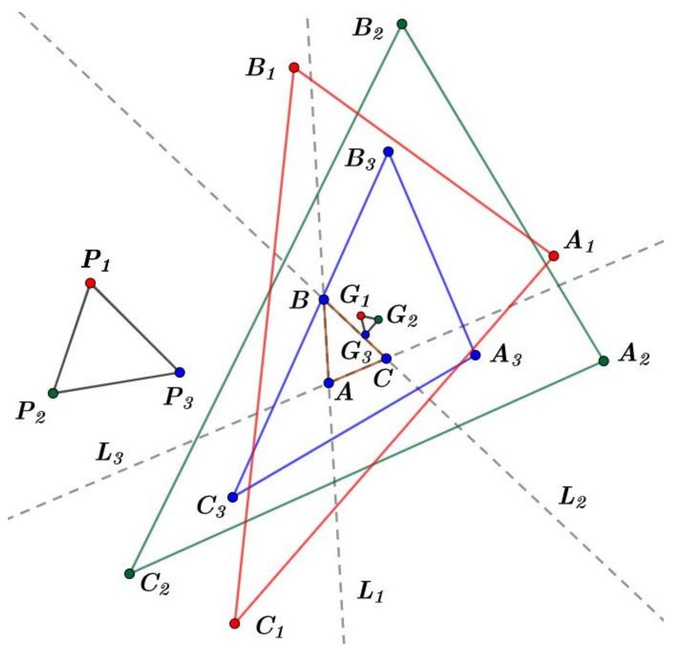

圖 1 原三角形及其鏡射重心形成之三角形。

二、研究目的

（一）平面上任一點對三角形鏡射後，形成三角形的重心性質。

（二）平面上任三點對三角形鏡射後，其三個三角形的重心形成圖形與原三角形關係。

（三）平面上任一點對三角形鏡射後，形成三角形外心性質。

（四）平面上任一點為直線上動點，對三角形鏡射後，形成三角形外心的移動軌跡。

貳、研究過程及方法

一、名詞定義

本研究中所有圖片皆為作者使用 *GeoGebra* 軟體繪製。

（一）$\boldsymbol{M(L,P_n)}$：P_n 點對直線 L 鏡射之後得到的點。

（二）**鏡射三角形**：

給定一三角形、任意點 P_n（不位於的三角形的外接圓上），對三角形三邊延長線分別鏡射，得到三個點，所形成的圖形就是鏡射三角形。根據前面的研究，當 P_1 落於 ΔABC 的外接圓上時，P_1 對 ΔABC 的鏡射三點會形成一直線，如圖 2，故不考慮此狀況。

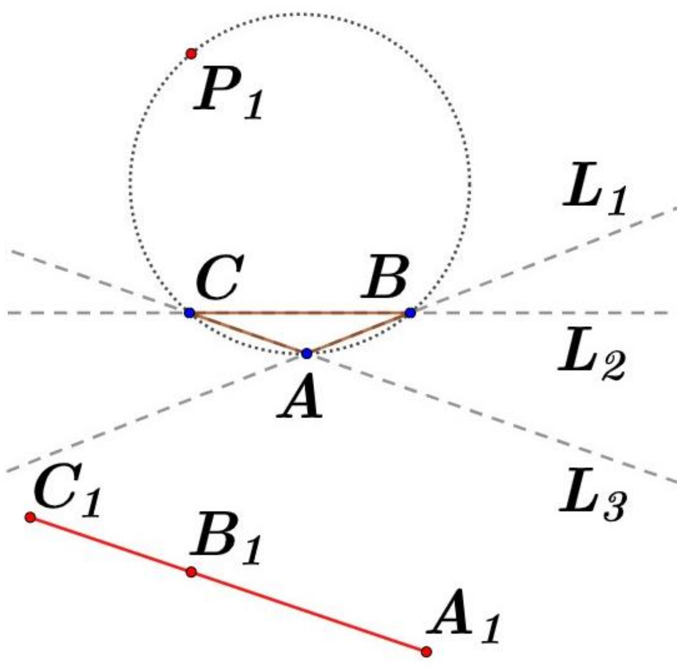

圖 2 P 點位於外接圓上時，鏡射後三點共線。

（三）$\boldsymbol{M(\Delta ABC,P_n)}$：

此為 P_n 對 ΔABC 的鏡射三角形；為了方便對頂點的表示，將 $\overleftrightarrow{AB}$ 視為 L_1、$\overleftrightarrow{BC}$ 視為 L_2、$\overleftrightarrow{CA}$ 視為 L_3，故 $M(\Delta ABC,P_n)$ 也可記為 $\Delta A_nB_nC_n$，如圖 3。

（四）**鏡射重心**：$M(\Delta ABC,P_n)$ 重心為 G_n，如圖 3。

（五）**鏡射外心**：$M(\Delta ABC,P_n)$ 外心為 O_n，如圖 3。

（六）**外接圓切線**：t_A、t_B、t_C 分別為過 A、B、C 點的 ΔABC 外接圓切線。

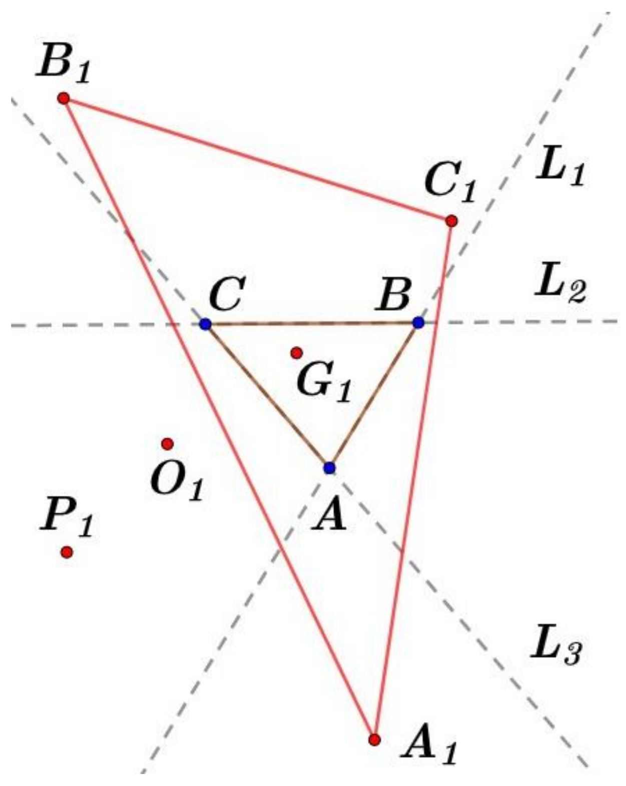

圖 3 $M(\Delta ABC,P_1)$ 為 $\Delta A_1B_1C_1$，重心為 G_1，外心為 O_1。

參、研究結果

一、正三角形的鏡射重心情況

P_1 點對正三角形做鏡射三角形，利用鏡射矩陣得到鏡射三角形三點座標 A_1、B_1、C_1，此時鏡射重心 $G_1=\dfrac{A_1+B_1+C_1}{3}$，與 ΔABC 的重心相同。

將其整理成**定理一**，如下：

> **定理一**：當 ΔABC 為正三角形時，$M(\Delta ABC,P_1)$ 的重心 G_1 與 ΔABC 的重心重合。

接下來我們研究對非正三角形的鏡射重心性質。

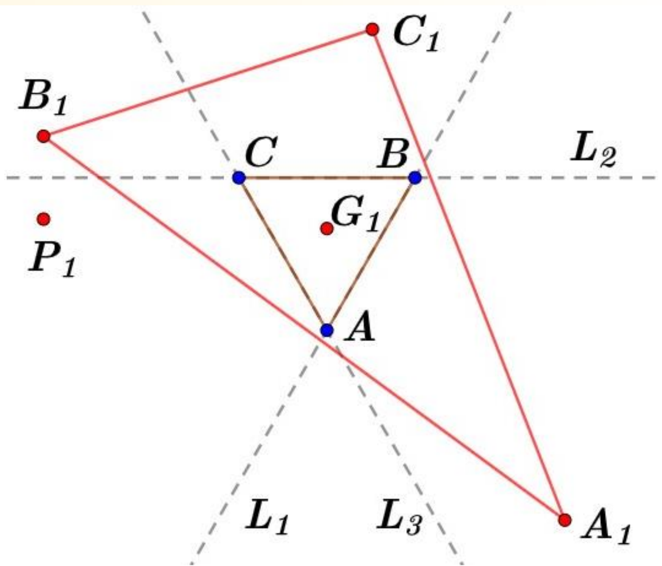

圖 4 鏡射重心 G_1 與正三角形重心 G 重合。

二、任意三角形的鏡射重心情況

我們首先來看任意直角三角形的鏡射情況，經過觀察發現任意三點對任意直角三角形鏡射後，重心連線之新三角形與原三角形相似，三個鏡射三角形的重心所連成的三角形會與 $\Delta P_1P_2P_3$ 相似，且縮放倍率同為 $\frac{1}{3}$ 倍，如圖 5。

將其整理成**定理二**，如下：

> **定理二**：在對直角三角形鏡射的情況下，P_1、P_2、P_3 會分別對應到 G_1、G_2、G_3；$G_1G_2G_3$ 與 $\Delta P_1P_2P_3$相似，且 $\Delta G_1G_2G_3$ 為 $\Delta P_1P_2P_3$ 的 $\frac{1}{3}$ 倍。

因為對直角三角形鏡射的情況下 $\Delta G_1G_2G_3$ 與 $\Delta P_1P_2P_3$ 都會相似，且縮放倍率皆為 $\frac{1}{3}$ 倍，由此猜測，平面上任意三點對任意三角形（非正三角形）做鏡射， $\Delta G_1G_2G_3$ 必與 $\Delta P_1P_2P_3$ 相似，且依照角度會有特定的縮放倍率，底下依照圖 6 的標示坐標化證明之。

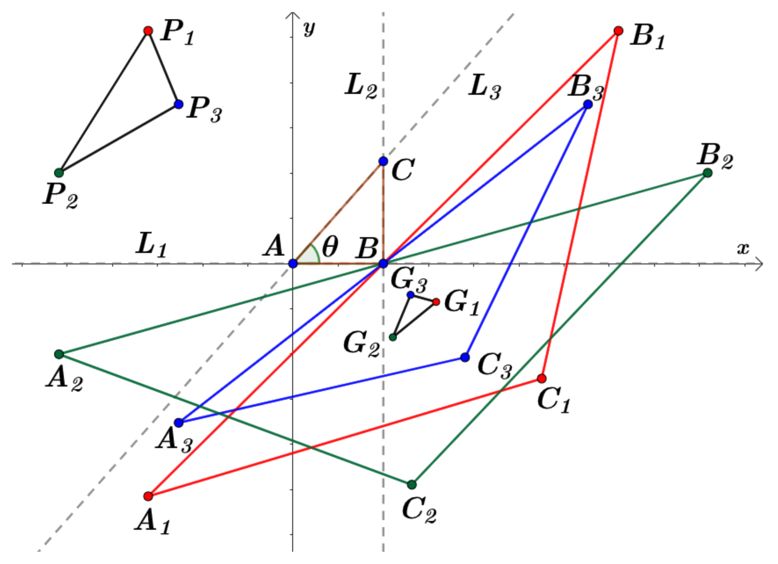

圖 5 在對任意直角三角形鏡射的情況，$\Delta G_1G_2G_3$ 與 $\Delta P_1P_2P_3$ 相似，且 $\Delta G_1G_2G_3$ 是 $\Delta P_1P_2P_3$ 的 $\frac{1}{3}$ 倍。

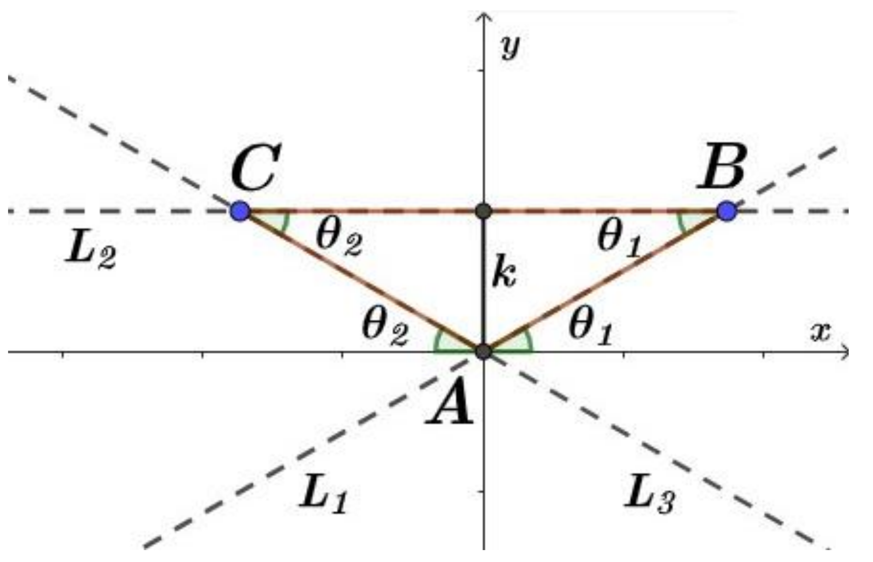

圖 6 固定三角形 A 點於原點，使其一邊平行於 x 軸。