

表 1 對任意三角形的鏡射重心情況

步驟一：觀察各點的鏡射重心連線。			步驟二： $\overline{K_1A}\cdot\overline{G_1A}$ 。			步驟三：證明 $\Delta G_1G_2G_3$ 與 $\Delta P_1P_2P_3$ 相似及求出其縮放倍率。		
利用鏡射矩陣得到鏡射三角形三點座標。 以 $P_1(x_1, y_1)$ 為例： $A_1 = (x_1 \cdot \cos 2\theta_1 + y_1 \cdot \sin 2\theta_1, -y_1 \cdot \cos 2\theta_1 + x_1 \cdot \sin 2\theta_1)$ $B_1 = (x_1, 2k - y_1)$ $C_1 = (x_1 \cdot \cos 2\theta_2 - y_1 \cdot \sin 2\theta_2, -y_1 \cdot \cos 2\theta_2 - x_1 \cdot \sin 2\theta_2)$			將鏡射三角形三點座標相加得到 $K_1$ 、 $K_2$ 、 $K_3$ 以 $P_1(x_1, y_1)$ 為例： $K_1 = (x_1 \cdot (1 + \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2)$ $+ y_1 \cdot (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2),$ $- y_1 \cdot (1 + \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2)$ $+ x_1 \cdot (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) + 2k)$			因 $\Delta K_1K_2K_3$ 與 $\Delta P_1P_2P_3$ 相似（對應邊成固定比例） 故 $\Delta G_1G_2G_3$ 與 $\Delta P_1P_2P_3$ 相似，且縮放倍率為 $\frac{\sqrt{-3+4[\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2(\theta_1+\theta_2)]}}{3}$ 。		

將其整理成**定理三**，如下：

**定理三**：在對任意三角形鏡射的情況下， $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  會分別對應到  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$ ； $\Delta G_1G_2G_3$  與  $\Delta P_1P_2P_3$  相似，且  $\Delta G_1G_2G_3$  邊長長度會分別是  $\Delta P_1P_2P_3$  邊長的  $\frac{\sqrt{-3+4[\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2(\theta_1+\theta_2)]}}{3}$  倍。

根據**定理三**，可知道對任意非正三角形鏡射重心連線形成三角形與原三角形相似，接著來討論鏡射外心的情況。

### 三、鏡射外心的特殊情況

經過觀察，我們發現了鏡射外心的三種特殊情況，如下：

表 2 鏡射外心的特殊情況

$P_1$ 落在 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 上	$P_1$ 、 $P_2$ 落在 $t_A$ 、 $t_B$ 、 $t_C$ 上	$P_3$ 、 $P_4$ 落在過 $\Delta ABC$ 一頂點的直線上
$P_1$ 位於 $L_1$ 上，且 $O_1$ 與 $C$ 重合	$P_1$ 、 $P_2$ 都在 $t_A$ 上時， $\overline{O_1O_2}$ 平行 $\overline{BC}$	$\overrightarrow{O_3O_4}$ 連線也會通過該頂點

將其整理成**定理四**、**定理五**及**定理六**，如下：

**定理四**：當 $P_1$ 落在 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 上時，鏡射外心 $O_1$ 分別會與 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 的對角頂點 $C$ 、 $A$ 、 $B$ 重合。

**定理五**：當 $P_1$ 落在 $t_A$ 、 $t_B$ 、 $t_C$ 上時，鏡射外心 $O_1$ 會落在過切點且平行對邊的直線上。

**定理六**：當 $P_1$ 、 $P_2$ 連線通過 $\Delta ABC$ 一頂點時，鏡射外心 $O_1$ 、 $O_2$ 連線也會通過該頂點。

接下來討論 $O_1$ 移動軌跡為特定直線的情況。

### 四、 $P_1$ 在特殊三角形的過頂點外接圓切線上移動之鏡射情況

表 3  $P_1$ 在特殊三角形的過頂點外接圓切線上移動的情況

$P_1$ 落在等腰直角三角形 $\Delta ABC$ 的 $t_B$ 上	$P_1$ 落在正三角形 $\Delta ABC$ 的 $t_A$ 、 $t_B$ 、 $t_C$ 上
$O_1$ 的移動軌跡為 $t_B$	$O_1$ 的移動軌跡為 $t_A$

將其整理成**定理七**及**定理八**，如下：

**定理七**：當 $P_1$ 等腰直角三角形 $\Delta ABC$ 的外接圓切線 $t_B$ 上移動時， $O_1$ 的移動軌跡就會與 $t_B$ 重合。

**定理八**：當 $P_1$ 在正三角形 $\Delta ABC$ 的外接圓切線 $t_A$ 、 $t_B$ 、 $t_C$ 上移動時， $O_1$ 的移動軌跡會與 $t_A$ 、 $t_B$ 、 $t_C$ 重合。