3-5 三角形的邊角關係 新課綱

例題 1

(1) 若三角形的三邊長為 7、16、x，則

$\sqrt{(9-x)^2}+\sqrt{(23-x)^2}=$ __14__ 。

(2) 若三角形的三邊長為 $a+1$、$a+5$、$a+7$，則 a 的範圍為 __$a>1$__ 。

解：(1) $\because 23>x>9$

$\therefore \sqrt{(9-x)^2}+\sqrt{(23-x)^2}$

$=x-9+23-x$

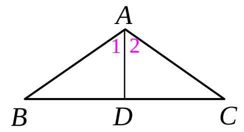
$=14$

(2) $(a+1)+(a+5)>a+7$

$a>1$

例題 2

右圖△ABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 的中點，且 $\overline{AD}<\frac{1}{2}\overline{BC}$，則△$ABC$ 為鈍角、直角或銳角三角形？



解 $\because \overline{AD}<\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}$

$\therefore \angle B<\angle 1$ 且 $\angle C<\angle 2$

$\Rightarrow \angle B+\angle C<\angle 1+\angle 2$

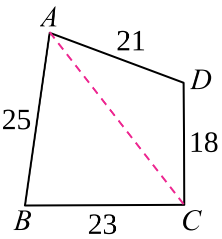
$\Rightarrow \angle B+\angle C<\angle A$

$\Rightarrow \angle A>90^\circ$

故△ABC 為鈍角三角形……………答

例題 3

如圖，$\overline{AB}=25$，$\overline{AD}=21$，$\overline{BC}=23$，$\overline{CD}=18$，則 $\angle A$ 和 $\angle C$ 的大小關係為 __$\angle A<\angle C$__ 。



解：△ABC 中

$\because \overline{AB}>\overline{BC}$，$\therefore \angle ACB>\angle CAB$

△ACD 中

$\because \overline{AD}>\overline{CD}$，$\therefore \angle ACD>\angle CAD$

$\angle BAD=\angle CAB+\angle CAD$

$<\angle ACB+\angle ACD=\angle BCD$

故 $\angle A<\angle C$

例題 4

在△ABC 中，若 $2\angle B=3\angle A$、$2\angle C=\angle A$，試比較 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的大小為

__$\overline{AB}<\overline{BC}<\overline{CA}$__ 。

解：由 $2\angle B=3\angle A$，得 $\angle A=\frac{2}{3}\angle B$

因此 $2\angle C=\angle A=\frac{2}{3}\angle B$

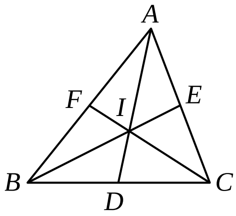
設 $\angle C=x^\circ$，則 $\angle A=2x^\circ$，$\angle B=3x^\circ$

$\therefore \angle C<\angle A<\angle B$

故 $\overline{AB}<\overline{BC}<\overline{CA}$

例題 5

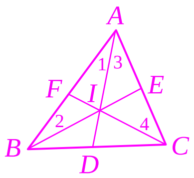
△*ABC* 中，$\overline{AB}>\overline{BC}>\overline{AC}$。若 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 分別為三內角的角平分線，且交於同一點 *I*，則 $\overline{IA}$、$\overline{IB}$、$\overline{IC}$ 的大小關係為何？



解 ∵ $\overline{AB}>\overline{BC}>\overline{AC}$

∴ $\angle ACB>\angle BAC>\angle ABC$

又 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 分別平分三內角



∴ $\angle 1>\angle 2$

∴ $\overline{IB}>\overline{IA}$

同理 $\angle 4>\angle 3$

∴ $\overline{IA}>\overline{IC}$

故 $\overline{IB}>\overline{IA}>\overline{IC}$

答：$\overline{IB}>\overline{IA}>\overline{IC}$

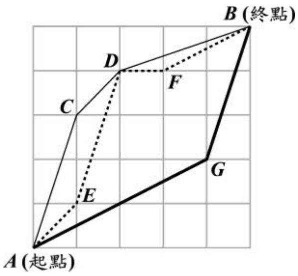
例題 6

忻澄手中有七根不同長度的竹籤，分別為$\sqrt{2}$公分、$\sqrt{3}$公分、$\sqrt{4}$公分、$\sqrt{5}$公分、$\sqrt{6}$公分、$\sqrt{7}$公分、$\sqrt{8}$公分，若從其中拿出三根竹籤組成直角三角形，則共可以組成幾種不同的直角三角形？

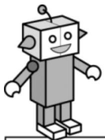
解：$(\sqrt{2}，\sqrt{3}，\sqrt{5})$、$(\sqrt{2}，\sqrt{4}，\sqrt{6})$、$(\sqrt{2}，\sqrt{5}，\sqrt{7})$、$(\sqrt{2}，\sqrt{6}，\sqrt{8})$、$(\sqrt{3}，\sqrt{4}，\sqrt{7})$、$(\sqrt{3}，\sqrt{5}，\sqrt{8})$

所以共可以組成 6 種不同的直角三角形

1. 嘉嘉參加機器人設計活動，需操控機器人在 5×5 的方格棋盤上從 A 點行走至 B 點，且每個小方格皆為正方形。主辦單位規定了三條行走路徑 R_1、R_2、R_3，其行經位置如圖(一)與表(一)所示。已知 A、B、C、D、E、F、G 七點皆落在格線的交點上，且兩點之間的路徑皆為直線，試回答下列問題：



圖(一)



路徑	編號	圖例	行經位置
第一條路徑	R_1	——	$A\to C\to D\to B$
第二條路徑	R_2	······	$A\to E\to D\to F\to B$
第三條路徑	R_3	━━	$A\to G\to B$

表(一)

Q1：觀察圖(一)，兩點之間的路徑 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DB}$、$\overline{AE}$、$\overline{ED}$、$\overline{DF}$、$\overline{FB}$、$\overline{AG}$、$\overline{GB}$ 中，哪些線段的長度相等？(請寫出所有的答案)

觀察方格可知，$\overline{AC}=\overline{ED}=\overline{DB}=\overline{BG}$、$\overline{CD}=\overline{AE}$

答：$\overline{AC}=\overline{ED}=\overline{DB}=\overline{BG}$、$\overline{CD}=\overline{AE}$

Q2：在無法使用任何工具測量的條件下，請判斷 R_1、R_2、R_3 這三條路徑中，最長與最短的路徑分別為何？請寫出你的答案，並完整說明理由。

設每個小方格的邊長為 1

$R_1=\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DB}$

$R_2=\overline{AE}+\overline{ED}+\overline{DF}+\overline{FB}$

$R_3=\overline{AG}+\overline{BG}$

$\because \overline{DB}=\overline{BG}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

又 $\overline{AD}=\overline{AG}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$

且 $\overline{AC}+\overline{CD}>\overline{AD}$　(三角形兩邊之和大於第三邊)

$\therefore R_1>R_3$……①

$\because \overline{AC}+\overline{CD}=\overline{ED}+\overline{AE}=\sqrt{1^2+3^2}+\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{10}+\sqrt{2}$

又 $\overline{DB}<\overline{DF}+\overline{FB}$　(三角形兩邊之和大於第三邊)

$\therefore R_1<R_2$……②

由①、②可知 $R_2>R_1>R_3$，故 R_2 最長，R_3 最短

答：R_2 最長，R_3 最短

一．選擇題（每題 6 分，共 30 分）

（ C ）1. 若△ABC 為等腰三角形，其三邊長分別為 7、x、15，則 x＝？

(A) 7　　(B) 8　　(C) 15　　(D) 22

（ C ）2. 下列各組長度中，何者不可以作為三角形的三邊長？

(A) 4、6、7　　(B) 5、6、10　　(C) 4、6、10　　(D) 4、7、10

（ B ）3. 若 4、9、$2x-1$ 三個線段長可圍成三角形，則下列何者正確？

(A) $x>9$　　(B) $3<x<7$　　(C) $6<x<14$　　(D) $5<x<13$

（ D ）4. 下列哪一個線段長不可以和 2 公分、3 公分這兩個線段長圍成一個三角形？

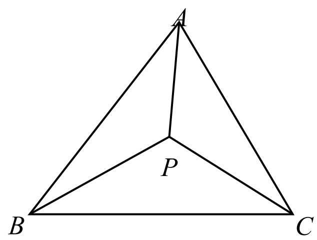
(A) $\sqrt{2}$ 公分　　(B) $\sqrt{3}$ 公分　　(C) $\sqrt{23}$ 公分　　(D) $\sqrt{32}$ 公分

（ C ）5. 四根吸管長度分別是 2 公分、3 公分、4 公分、5 公分，則拿掉哪一根吸管後，剩下的三根吸管不能拼成一個三角形？

(A) 2 公分　　(B) 3 公分　　(C) 4 公分　　(D) 5 公分

二．填充題（每格 8 分，共 56 分）

1. 若三角形的三邊長分別為 3、8、x，則 x 的範圍為 $5<x<11$ 。
2. 在△ABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=x$，且 x 為偶數，則△ABC 的周長最長為 18 。
3. 已知三角形的兩個邊長各為 12 和 2，且其周長為偶數，則此三角形的第三邊長為 12 。
4. 如圖，若 P 為△ABC 內任意一點，由下列步驟比較 $2(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})$ 和 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$ 的大小關係。



說明：

△PAB 中，$\overline{PA}+\overline{PB}>$ $\overline{AB}$ …………①

△PAC 中，$\overline{PA}+$ $\overline{PC}$ $>\overline{CA}$ …………②

△PBC 中，$\overline{PB}+\overline{PC}$ $>$ $\overline{BC}$ …………③

由①＋②＋③得，$2(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})$ $>$ $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$ 。

一、選擇題：(南進階)

(B) 1. 若△ABC 為等腰三角形，其中 $\overline{AB}=4$ 公分，$\overline{BC}=9$ 公分，則 $\overline{AC}$ 為多少公分？

(A) 4　(B) 9　(C) 4 或 9　(D) 7

(D) 2. 在△ABC 中，已知 $\overline{AB}<\overline{AC}$，$\overline{AH}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，且 H 點在 $\overline{BC}$ 上，則下列敘述何者正確？

(A) $\angle B=\angle C$　(B) $\angle B<\angle C$

(C) $\angle BAH>\angle CAH$　(D) $\angle BAH<\angle CAH$

(A) 3. 在△ABC 中，$\angle A=90°$，$\overline{AB}>\overline{AC}$，則下列關於 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的大小關係何者正確？

(A) $\overline{BC}>\overline{AB}$　(B) $\overline{AB}>\overline{BC}$

(C) $\overline{AC}>\overline{BC}$　(D) $\overline{BC}=\overline{AC}$

(C) 4. △ABC 中，已知 $\angle A>\angle B>\angle C$，今作 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，$\overline{CF}\perp\overline{AB}$，則下列關於 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 的大小關係何者正確？

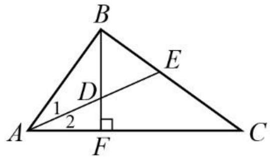
(A) $\overline{AD}>\overline{CF}$　(B) $\overline{AD}>\overline{BE}$

(C) $\overline{CF}>\overline{BE}$　(D) $\overline{BE}>\overline{CF}$

二、填充題：

1. 已知△ABC 的三邊長皆為正整數，周長為 11 公分，則△ABC 三邊長所有可能情況共有 ___4___ 種。

2. 如右圖，△ABC 中，$\angle ABC=90°$。若 $\angle 1>\angle 2$，則 $\overline{BD}$ 和 $\overline{BE}$ 的大小關係為 ___$\overline{BD}<\overline{BE}$___。



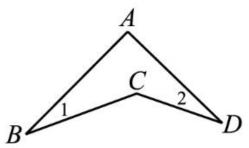
3. 設三角形三邊長分別為 10、7、$x-3$，則 $\sqrt{(x-4)^2}+\sqrt{(x-22)^2}=$ ___18___。

4. $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=17$，$\overline{AC}=9$ 且 $\angle A$ 為最大角，則 $\overline{BC}$ 的範圍為

$\overline{BC}>17$ 且 $\overline{BC}<26$ 。

5. 如右圖，$\overline{AB}>\overline{AD}$，$\angle 1=\angle 2$，則 $\overline{BC}$ 和 $\overline{CD}$ 的大小關係為

$\overline{BC}>\overline{CD}$ 。



三、計算題：

1. 已知 a、b、c 是$\triangle ABC$ 的三邊長，且 $a^2+b^2+c^2+x^2-8a-16b-2cx+80=0$，則 x 值的範圍為何？ 【南區】

解：$a^2+b^2+c^2+x^2-8a-16b-2cx+80=0$

$\Rightarrow (a-4)^2+(b-8)^2+(c-x)^2=0$

$\Rightarrow a=4$，$b=8$，$c=x$，又 a、b、c 為$\triangle ABC$ 的三邊長

$\Rightarrow 8-4<x<8+4$

$\Rightarrow 4<x<12$

答：$4<x<12$

數學好好玩

九階數獨的基本規則

1、圖形由 9×9 的方格構成。

2、每排、每列或每個 3×3 的方格中，都必須填上 1~9，且不可重複。

3、所用的方法只需推理不必計算。

4、答案只能有一種。

新湖 m 數獨第 2 題 答案

3	9	2	1	5	4	6	7	8
8	7	1	2	9	6	3	5	4
6	4	5	3	8	7	2	9	1
4	2	7	5	3	1	9	8	6
1	6	9	7	4	8	5	3	2
5	3	8	9	6	2	4	1	7
2	8	3	6	1	9	7	4	5
9	1	6	4	7	5	8	2	3
7	5	4	8	2	3	1	6	9

新湖 m 數獨第 2 題 開始時間：

	9		1		4	6		
	7	1						4
6		5				2		
4		7			1			
1		9	7		8	5		2
			9			4		7
		3				7		5
9						8	2	
		4	8		3		6	