

# 3-3 三角形的全等性質



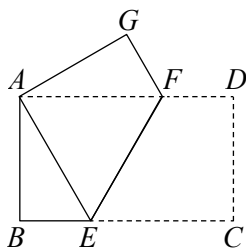
## 例題 1

如圖，矩形  $ABCD$  中，將  $\overline{EF}$  右邊的部分沿著  $\overline{EF}$  對摺，使  $C$  點落在  $A$  點， $D$  點落在  $G$  點。若  $\angle BAE = 30^\circ$ ，則  $\angle GAF = ?$

解：在  $\triangle ABE$  和  $\triangle AGF$  中

$$\therefore \angle BAE + \angle EAF = \angle EAF + \angle GAF$$

$$\therefore \angle BAE = \angle GAF = 30^\circ$$



## 例題 2

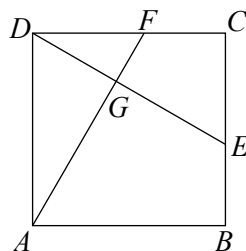
如圖，四邊形  $ABCD$  為正方形， $E$ 、 $F$  兩點分別在  $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$  上，若  $\overline{DF} = \overline{CE}$ ， $\angle DAF = 30^\circ$ ，則  $\angle AGD = \underline{\quad 90^\circ \quad}$ 。

解： $\because \triangle ADF \cong \triangle DCE (SAS)$

$$\therefore \angle CDE = \angle DAF = 30^\circ$$

$$\text{又 } \angle DFG = 60^\circ$$

$$\therefore \angle AGD = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$



## 例題 3

如右圖，矩形  $ABCD$  中， $E$ 、 $F$  在  $\overline{AD}$  上，且  $\overline{BF} = \overline{CE}$ 。試問：

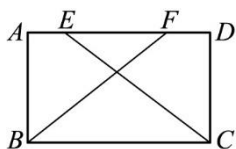
(1)  $\triangle ABF$  是否全等於  $\triangle DCE$ ？

(2) 若  $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{DE} = 8$ ，則  $\overline{BF} = ?$

解 (1) 在  $\triangle ABF$  與  $\triangle DCE$  中，  
 $\because \overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{BF} = \overline{CE}$ ， $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ，  
 $\therefore$  由  $RHS$  全等性質知  $\triangle ABF \cong \triangle DCE$ 。

(2) 由(1)知  $\overline{AF} = \overline{DE} = 8$ ，  
 故  $\overline{BF} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ 。

答：(1) 是；(2) 10



## 例題 4

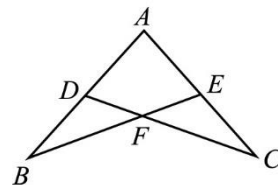
如右圖，已知  $\angle B = \angle C$ ， $\overline{DF} = \overline{EF}$ ， $\overline{BF} = \overline{CF}$ ，試問：

(1)  $\triangle BDF$  是否全等於  $\triangle CEF$ ？

(2)  $\triangle ABE$  是否全等於  $\triangle ACD$ ？

解 (1) 在  $\triangle BDF$  與  $\triangle CEF$  中，  
 因為  $\angle B = \angle C$ ， $\overline{DF} = \overline{EF}$ ，  
 $\angle DFB = \angle EFC$  (對頂角相等)，  
 所以由  $AAS$  全等性質知  
 $\triangle BDF \cong \triangle CEF$ .....答

(2) 在  $\triangle ABE$  與  $\triangle ACD$  中，因為  
 $\angle B = \angle C$ ， $\angle A = \angle A$  (公用角)，  
 $\overline{BE} = \overline{BF} + \overline{EF} = \overline{CF} + \overline{DF} = \overline{CD}$ ，  
 所以由  $AAS$  全等性質知  
 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ .....答

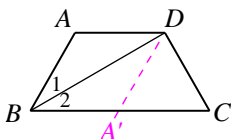




例題 5

如右圖， $\angle 1 = \angle 2$ ，

$$\angle BAD = 120^\circ, \overline{AB} = \overline{AD} =$$



$\overline{CD}$ 。若四邊形  $ABCD$  面積為

60，求  $\triangle ABD$  面積。

解 在  $\overline{BC}$  上取  $\overline{BA'} = \overline{AB}$ ，連  $\overline{DA'}$

$$\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle A'BD \text{ (SAS 全等性質)}$$

$$\Rightarrow \overline{BA'} = \overline{AB} = \overline{AD} = \overline{A'D} = \overline{CD}$$

$$\text{又 } \angle BA'D = \angle BAD = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DA'C = 60^\circ$$

$\therefore \triangle A'DC$  為正三角形

$$\Rightarrow \overline{A'C} = \overline{CD} = \overline{BA'}$$

$$\text{故 } \triangle ABD = \triangle A'BD = \triangle A'DC = 60 \div 3$$

$$= 20 \dots \dots \dots \text{答}$$



例題 6

在  $\triangle ABC$  與  $\triangle DEF$  中，已知  $\overline{AB} > \overline{AC}$ ， $\overline{AB}$

$$= \overline{DE}, \overline{AC} = \overline{DF}, \angle B = \angle E,$$

$\angle C = 60^\circ$ ，則  $\angle F = ?$

解 (1) 若  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，則  $\angle F = \angle C = 60^\circ$ 。

(2) 若  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  不全等，

$$\text{則 } \angle F = 180^\circ - \angle C$$

$$= 180^\circ - 60^\circ$$

$$= 120^\circ$$

答： $60^\circ$  或  $120^\circ$



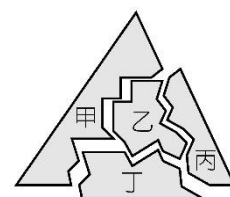
小草和小花在假日時參加玻璃工藝課程，兩人分別都製作了一塊三角形的玻璃，在回家的路途中，兩人都不慎將自己的作品摔破。試回答下列問題：

Q1：如右圖，若小草將三角形玻璃摔成甲、乙、丙、丁4片，

則他只要帶哪一片去玻璃行，即可請師傅再切一塊與原來大小完全一樣的玻璃？請說明你的原因。

甲，利用三角形  $ASA$  全等性質

答：甲



Q2：如右圖，若小花將三角形玻璃摔成甲、乙、丙3片，則他最少要帶哪幾片去玻璃行，即可請師傅再切一塊與原來大小完全一樣的玻璃？請說明你的原因。

甲、丙，利用三角形  $AAS$  全等性質

乙、丙，利用三角形  $ASA$  全等性質

答：甲、丙或乙、丙





## 回家作業

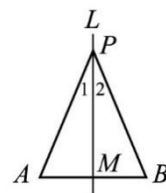
### 一、選擇題：(南進階)

( C ) 1. 下列各選項中的已知條件，哪一項無法畫出唯一的 $\triangle ABC$ ？

- (A)  $\overline{AB} = 8$ ,  $\overline{AC} = 3$ ,  $\angle A = 60^\circ$       (B)  $\overline{AB} = 8$ ,  $\overline{BC} = 6$ ,  $\angle C = 90^\circ$   
 (C)  $\angle A = 20^\circ$ ,  $\overline{AB} = 8$ ,  $\overline{BC} = 3$       (D)  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 75^\circ$ ,  $\overline{AC} = 8$

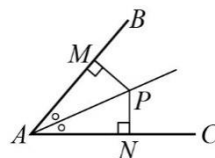
( D ) 2. 如右圖，直線  $L$  為  $\overline{AB}$  的中垂線，且交  $\overline{AB}$  於  $M$ ， $P$  為直線  $L$  上的一點，則下列敘述何者錯誤？

- (A)  $\overline{AM} = \overline{BM}$       (B)  $\angle 1 = \angle 2$   
 (C)  $\triangle PAM \cong \triangle PBM$       (D)  $\angle A$  和  $\angle B$  互餘



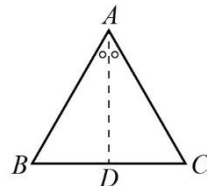
( A ) 3. 如右圖，已知  $P$  點在  $\angle BAC$  的角平分線上，且  $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{PN} \perp \overline{AC}$ ，則可根據下列何種全等性質說明  $\triangle APM \cong \triangle APN$ ？

- (A) AAS      (B) RHS  
 (C) ASA      (D) SAS



( C ) 4. 如右圖，若  $D$  點在  $\angle BAC$  的角平分線上，則再加上下列哪一個條件仍無法確定  $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ ？

- (A)  $\angle ADB = 90^\circ$       (B)  $\angle B = \angle C$   
 (C)  $\overline{BD} = \overline{CD}$       (D)  $\overline{AB} = \overline{AC}$

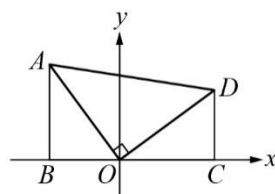


( C ) 5. 根據下列何種性質不一定能使兩三角形全等？

- (A) SSS      (B) ASA      (C) AAA      (D) SAS

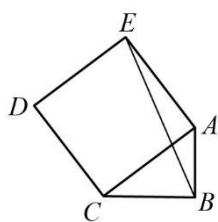
### 二、填充題：

1. 如右圖，在坐標平面上， $O$  為原點，已知  $\triangle AOD$  為等腰直角三角形， $\overline{AB}$ 、 $\overline{DC}$  均垂直  $x$  軸。若  $A$  點坐標為  $(-3, 4)$ ，則  $D$  點坐標為  $(4, 3)$ 。

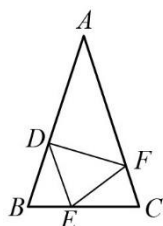


2. 如下圖(三)， $\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ 。若四邊形  $ACDE$  為正方形，則  $\triangle ABE$  面積為  $\frac{9}{2}$ ， $\overline{BE} =$  $\sqrt{58}$ 。

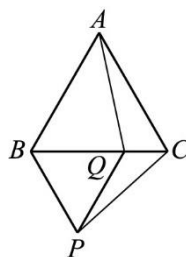
3. 如下圖(四)， $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BE} = \overline{CF}$ ， $\overline{BD} = \overline{CE}$ 。若  $\angle A = 36^\circ$ ，則  $\angle EDF =$  54 度。



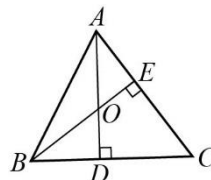
圖(三)



圖(四)



圖(五)



圖(六)

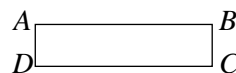
4. 如上圖(五)， $\triangle ABC$  和  $\triangle BPQ$  都是正三角形。若  $\angle BAQ = 42^\circ$ ，則  $\angle CPQ =$  18 度。
5. 如上圖(六)， $\triangle ABC$  中，已知  $\overline{AC} = \overline{BC}$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{BD} = 2$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\triangle ABO$  面積為 2.5，則  $\triangle AOE$  面積為 1.5。

### 三、計算題：(康實力)

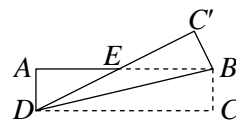
1. 如右圖，將圖(一)長方形  $ABCD$  沿著對角線  $\overline{BD}$  摺疊，如圖(二)，則：

(1) 試說明  $\triangle ADE \cong \triangle C'BE$ 。

(2) 若  $\overline{AD} = 1$ ， $\overline{AB} = 4$ ，則  $\overline{AE} = ?$



圖(一)



圖(二)

解：(1) 因為  $ABCD$  為長方形，所以  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ， $\angle A = \angle C = 90^\circ$

因為沿著  $\overline{BD}$  摺疊， $\triangle DBC \cong \triangle DBC'$ ，所以  $\angle C = \angle C'$ ， $\overline{BC} = \overline{BC'}$

在  $\triangle ADE$  與  $\triangle C'BE$  中， $\overline{AD} = \overline{C'B}$ ， $\angle A = \angle C' = 90^\circ$ ， $\angle AED = \angle C'EB$

所以  $\triangle ADE \cong \triangle C'BE$  (AAS 全等性質)

(2) 因為  $\triangle ADE \cong \triangle C'BE$ ，所以  $\overline{DE} = \overline{BE}$ ，設  $\overline{AE} = x$ ， $\overline{DE} = \overline{BE} = 4 - x$

所以  $(4 - x)^2 = x^2 + 1^2 \Rightarrow x = \frac{15}{8}$ ，故  $\overline{AE} = \frac{15}{8}$



## 數學好好玩

### 九階數獨的基本規則

- 1、圖形由  $9 \times 9$  的方格構成。
- 2、每排、每列或每個  $3 \times 3$  的方格中，都必須填上 1~9，且不可重複。
- 3、所用的方法只需推理不必計算。
- 4、答案只能有一種。

新湖 m 數獨第 1 題 答案

3	2	8	1	4	9	5	7	6
6	1	4	5	7	2	8	9	3
9	7	5	8	3	6	2	1	4
1	4	6	3	8	7	9	5	2
2	8	7	6	9	5	4	3	1
5	3	9	2	1	4	7	6	8
8	5	3	9	2	1	6	4	7
4	6	1	7	5	8	3	2	9
7	9	2	4	6	3	1	8	5

新湖 m 數獨第 1 題 開始時間：

				4	9	5	7	
6		4	5					3
		5						4
	4	6		8				2
	8	7				4	3	
5				1		7	6	
8						6		
4					8	3		9
	9	2	4	6				