一、圓錐曲線的形式

(一) ΔABC 為等腰直角三角形的情況

圓錐曲線 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，則可利用圓錐曲線的判別式

$\begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{vmatrix} = AC-\left(\frac{B}{2}\right)^2$ 大於、等於或小於 0 來判斷該圓錐曲線為橢圓、拋物線或雙曲線。

當判別式大於 0 時，此圓錐曲線為橢圓；判別式等於 0 時，此圓錐曲線為拋物線；判別式小於 0 時，此圓錐曲線為雙曲線。以下皆以判別式大於 0、圓錐曲線為橢圓的情況推導，同理可知等於、小於 0 的情況也與大於 0 所推得的結果相同。

1. P 點是（斜率不為 0）直線上動點

當 P 點落在過 $(a,0)$、$(0,b)$ 且 $a,b\neq 0$ 的直線上時，鏡射外心會落在圓錐曲線

$bx^2+\frac{2b}{a}xy+(b-2)y^2-\frac{2b}{a}x+(-2b+2)y=0$ 上。此圓錐曲線的判別式為

$b(b-2)-\left(\frac{b}{a}\right)^2=b^2-2b-\frac{b^2}{a^2}$。

先觀察圓錐曲線為橢圓時的情況。將式子同乘 a^2，$a^2b^2-2a^2b-b^2>0$

$\Rightarrow a^2b^2-2a^2b-b^2>0 \Rightarrow a^2b^2-2a^2b-b^2=-2a^2b+a^2b^2-b^2>0$

$\Rightarrow (a-ab)^2>a^2b^2 \Rightarrow |a-ab|>\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{|a-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}>1$，剛好對應到 ΔABC 的

外心 $(0,1)$ 與直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow bx+ay-ab=0$ 的距離超過 1 的情況，因此此直線與 ΔABC 的外接圓沒有交點，反之亦然。

利用上述推論可以得到，當直線與 ΔABC 外接圓沒有交點時，圓錐曲線為橢圓。直線與 ΔABC 外接圓相切時，圓錐曲線為拋物線。直線與 ΔABC 外接圓相交 2 點時，圓錐曲線為橢圓。

2. P 點是鉛直線上動點

當 P 點落在 $x=a$ 的鉛直線上時，鏡射外心會落在圓錐曲線

$\left(\frac{4}{a^2}-1\right)x^2-\left(\frac{8}{a^3}-\frac{2}{a}\right)xy+\left(\frac{4}{a^2}-1\right)y^2+\left(-\frac{8}{a^3}+\frac{2}{a}\right)x+\left(-\frac{8}{a^2}+2\right)y=0$ 上。

此圓錐曲線的判別式為 $\left(\frac{4}{a^2}-1\right)^2-\left(\frac{8}{a^3}-\frac{2}{a}\right)^2=(a+1)(a-1)(a^2-4)^2$。因 $(a^2-4)^2$

恆正，故只需討論 $(a+1)(a-1)$ 大於、等於或小於 0 。

若 $a>1$ 或 $a<-1$，此鉛直線會與 ΔABC 外接圓沒有交點；此時 $(a+1)(a-1)>0$，因此圓錐曲線為橢圓。若 $a=1$ 或 $a=-1$，此鉛直線會通過 B 或 C 點，因此圖形會是一直線，故不考慮此情況。若 $-1<a<1$，此鉛直線交 ΔABC 外接圓於 2 點；此時 $(a+1)(a-1)<0$，因此圓錐曲線為雙曲線。

3. P 點是水平線上動點

當 P 點落在 $y=b$ 的水平線上時，鏡射外心會落在圓錐曲線 $bx^2+(b-2)y^2-(-2b+2)y=0$ 上。此圓錐曲線的判別式為 $b(b-2)$。

若 $b>2$ 或 $b<0$，此水平線會與 ΔABC 外接圓沒有交點；此時 $b(b-2)>0$，因此圓錐曲線為橢圓。若 $b=0$ 或 $b=2$，此水平線會與 ΔABC 外接圓相切；此時 $b(b-2)=0$，因此圓錐曲線為拋物線；但 $b=0$ 時此水平線會通過 A 點，因此圖形會是一直線，故不考慮此情況。若 $-2<a<0$，此時此水平線交 ΔABC 外接圓於 2 點；此時 $b(b-2)<0$，因此圓錐曲線為雙曲線。

二、反演關係之推廣

(一) ΔABC 為等腰三角形的情況

先前看過當 P_1 落在特殊三角形上的情況，發現兩者都會反演，又因為正三角形與等腰直角三角形皆屬於等腰三角形，由此猜測，P_1 落在任意的等腰三角形之頂角外接圓切線上皆具有反演的性質，且反演圓的圓心為頂角，半徑為腰長，底下證明之：

不失一般性，將 ΔABC 平移、旋轉、縮放後使得 $A=(0,0)$、$B=\left(\frac{1}{\tan\theta},1\right)$、$C=\left(-\frac{1}{\tan\theta},1\right)$，此時 $\angle A$ 為頂角，且 $\angle B=\angle C=\theta$。

觀察發現，當 P_1 在 t_A 上移動時，O_1 也會在 t_A 上移動，此處是因為定理五已證明 L_2 平行 t_A，且兩者的水平距離為 1，可令 $P_1=(x_1,0)$，再將此坐標代入計算：

L_1：$y=x\cdot\tan\theta$、L_2：$y=1$、L_3：$y=-x\cdot\tan\theta$，

所以 $A_1=(x_1\cdot\cos 2\theta\,,x_1\cdot\sin 2\theta)$、$B_1=(x_1,2)$、$C_1=(x_1\cdot\cos 2\theta\,,-x_1\cdot\sin 2\theta)$。

$\overline{A_1C_1}$ 的中垂線的直線方程式為 $y=0$，因此可以知道 O_1 必位於 t_A 上。

$\overline{A_1B_1}$ 的斜率為 $\frac{x_1\cdot\sin 2\theta-2}{x_1\cdot\cos 2\theta-x_1}=\frac{2x_1\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta-2}{-2x_1\cdot\sin^2\theta}=\frac{x_1\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta-1}{-x_1\cdot\sin^2\theta}$，

而其中垂線的斜率為 $\frac{-1}{\frac{x_1\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta-1}{-x_1\cdot\sin^2\theta}}=\frac{x_1\cdot\sin^2\theta}{x_1\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta-1}$，

且該直線通過 $B=\left(\frac{1}{\tan\theta},1\right)$

利用點斜式列出：

$$\frac{x_1\cdot\sin^2\theta}{x_1\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta-1}\left(x-\frac{1}{\tan\theta}\right)=y-1$$

以 $y=0$ 帶入，求交點坐標（外心 O_1）：

$$\frac{x_1\cdot\sin^2\theta}{x_1\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta-1}\left(x-\frac{1}{\tan\theta}\right)=-1\Rightarrow x_1\cdot\sin^2\theta\cdot x=\frac{x_1\cdot\sin^2\theta}{\tan\theta}-x_1\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta+1$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{\tan\theta}-\frac{x_1\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta-1}{x_1\cdot\sin^2\theta}=\frac{x_1\cdot\sin^2\theta-x_1\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\tan\theta+\tan\theta}{x_1\cdot\sin^2\theta\cdot\tan\theta}=\frac{1}{x_1\cdot\sin^2\theta}$$

因此 $O_1=\left(\frac{1}{x_1\cdot\sin^2\theta},0\right)$，接著我們將 $\overline{P_1A}$ 與 $\overline{O_1A}$ 相乘並與腰長平方做比較：

$\overline{P_1A}=\sqrt{(x_1-0)^2+(0-0)^2}=x_1$，$\overline{O_1A}=\sqrt{\left(\frac{1}{x_1\cdot\sin^2\theta}-0\right)^2+(0-0)^2}=\frac{1}{x_1\cdot\sin^2\theta}$

$\overline{P_1A}\cdot\overline{O_1A}=x_1\cdot\frac{1}{x_1\cdot\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$

$\overline{AB}^2=\left(\frac{1}{\tan\theta}-0\right)^2+(1-0)^2=\frac{1}{\tan^2\theta}+1=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$

由此可知，當 P_1 落在等腰三角形 ΔABC 的頂角外接圓切線 t_A 上時，O_1 為 P_1 對以 A 為圓心，腰長為半徑的圓之反演點。