

DATE 2024

10

12, 27

NO. 三校教78

三校教作59

永中鍾定翔

ex. 7

5封寄给不同人的信, 放入5个写着对应不同地址的信封, 若随意把信放入信封, 全部放错可能有几种?

$$5! - 4! \cdot 5 + 3! \cdot 10 - 2! \cdot 10 + 1! \cdot 5 - 0! \cdot 1$$

$$= 120 - 24 \cdot 5 + 6 \cdot 10 - 2 \cdot 10 + 1 \cdot 5 - 1 \cdot 1$$

$$= 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1$$

$$= 45 - 1$$

$$= 44$$

• 全错位 (Derangement) $D_n \Rightarrow 1 \sim n$ 全错的可能性

n	0	1	2	3	4	5	6	7
D_n	1	0	1	2	9	44	265	1854

$\begin{matrix} \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix}$

 $\begin{matrix} \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix}$

 $\begin{matrix} \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix}$

* OEIS: A000166

递推: ① $D_n = n \cdot D_{n-1} + (-1)^n$ (2024 发现组合证明)

② $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

一般: $D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot (-1)^k$ 见 P. 92