ex.6 嘗試描述情境，解釋 WHY 等式成立（組合解釋）

DATE 2024 . 9 . 2021 NO.

1) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$

一排 n 个相異物，选 or 不选

选 0 : $\binom{n}{0}$

选 1 : $\binom{n}{1}$

⋮

选 n : $\binom{n}{n}$

相加

每一选 or 不选 2种

$\Rightarrow 2^n$

得证#

2) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots$

$2\mid n$:

原式 $\Rightarrow \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots+\binom{n}{n-3}\binom{n}{n-1}$

∵ 交錯和为 0，故成立

（其实只要上面这行就可以了）

得证#

$2\nmid n$: 一一配对相等

原式 $\Rightarrow \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots+\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n}$

3) $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\dots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

2n 分成 n, n 兩組，一組选 k 个，一組选 n-k 个

相当於 $\binom{2n}{n}$，故得证#