

1-1 等差數列



例題 1

在 3 與 a 之間插入 6 個數，使其成為一個等差數列。若所插入的第 4 個數是 47，則 $a = ?$

解 \because 插入 6 個數

\therefore 新數列共有 8 項

插入的第 4 個數為第 5 項

$$3 + (5 - 1) \times d = 47 \Rightarrow d = 11$$

$$\text{第 8 項 } a = 3 + (8 - 1) \times 11 = 80$$

答：80



例題 2

舒豪原有存款 800 元，他計畫買一台售價 3500 元的變速腳踏車。若他從 8 月 1 日起每天存 50 元，試問他存到幾月幾日就可買到腳踏車？

解 由於舒豪每日存款總額成等差數列

$$850, 900, \dots, 3500$$

設此等差數列的首項 $a_1 = 850$ ，

公差 $d = 50$ ，第 n 項 $a_n = 3500$

$$\text{代入 } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$3500 = 850 + (n - 1)50$$

$$n - 1 = 53$$

$$n = 54$$

$$54 - 31 = 23$$

故 9 月 23 日可買到腳踏車。

答：9 月 23 日



例題 3

已知一等差數列的第 2 項與第 6 項的和為 16，又第 5 項及第 9 項的和為 10，則第 4 項與第 7 項的和為多少？

解 $a_2 + a_6 = 2a_4 \Rightarrow a_4 = 8$

$$a_5 + a_9 = 2a_7 \Rightarrow a_7 = 5$$

$$\text{故 } a_4 + a_7 = 8 + 5 = 13$$

答：13



例題 4

若一等差數列共有 9 項，其首項、末項的和為 50，則中間五項的和是多少？

解 $a_1 + a_9 = a_1 + a_1 + 8d = 2a_1 + 8d = 50$

$$a_1 + 4d = 25$$

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

$$= (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d)$$

$$+ (a_1 + 5d) + (a_1 + 6d)$$

$$= 5a_1 + 20d = 5(a_1 + 4d) = 5 \times 25 = 125$$

**例題 5**

若一直角三角形的三邊長成等差數列，且公差為 4，則此直角三角形斜邊上的高為多少？

解 設三邊長為 $a-4$ 、 a 、 $a+4$ ， $a>0$

$$\text{則 } (a-4)^2 + a^2 = (a+4)^2$$

$$a^2 - 8a + 4^2 + a^2 = a^2 + 8a + 4^2$$

$$a^2 = 16a$$

$$a = 16$$

∴ 三邊長為 12、16、20

$$\text{斜邊上的高} = \frac{12 \times 16}{20} = \frac{48}{5}$$

$$\text{答：} \frac{48}{5}$$

**例題 6**

某隧道工程每日開鑿 20 公尺，已知 8 月 1 日收工時已開鑿 300 公尺，則：

(1) 幾月幾日收工時已開鑿 780 公尺？

(2) 至少幾月幾日收工時已開鑿的距離會超過 1 公里？

解

(1) $a_1 = 300$ ， $d = 20$ ， $a_n = 780$

$$780 = 300 + (n-1) \times 20$$

$$480 = (n-1) \times 20, n = 25$$

故 8 月 25 日收工時已開鑿 780 公尺。

(2) 1 公里 = 1000 公尺

$$300 + (n-1) \times 20 > 1000$$

$$n-1 > 35, n > 36$$

$$37 - 31 = 6$$

故 9 月 6 日收工時已開鑿的距離會超過 1 公里。



超級馬拉松 (Ultramarathon)，簡稱超馬，是一種長跑運動競賽，距離超過標準馬拉松的 42.195 公里。超馬通常分成兩種，一種有固定距離 (50 公里或 100 公里)，另一種競賽方式，則是雙倍馬拉松，24 小時賽 (24-hour run)、1000 公里賽等，可能要用一天或多天才能完成。

阿勇報名由戀上超馬協會主辦的 2020 慢城詩畫超馬賽 100 公里組，於是展開訓練，他第 1 天從家裡路跑 1 公里後，再依原路跑回家，第 2 天從家裡路跑 1.5 公里後，再依原路跑回家，此後去程的路跑距離，會比前一天多 0.5 公里。

1. 阿勇第 7 天來回共跑幾公里？

設第 n 天去程路跑距離為 a_n 公里

則 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 1.5$ ， $a_3 = 2$ ， \dots ， $d = 0.5$

$$a_7 = a_1 + (7 - 1)d = a_1 + 6d$$

$$= 1 + 6 \times 0.5$$

$$= 4$$

$$2 \times 4 = 8$$

所以第 7 天來回共跑了 8 公里。 答：8 公里。

2. 阿勇第幾天的訓練，當天路跑來回的總距離剛好是 100 公里？

設第 n 天去程路跑距離為 a_n ，

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1) \times 0.5$$

$$= 1 + 0.5n - 0.5$$

$$= 0.5n + 0.5$$

則來回的總距離為 $2a_n$

$$2(0.5n + 0.5) = 100$$

$$n + 1 = 100$$

$$n = 99$$

所以第 99 天的訓練，當天路跑來回的總距離剛好是 100 公里。答：第 99 天。



回家作業

一、選擇題：(南進階)

(A) 1. 若等差數列的第 3 項為 33，末項為 -16 ，公差為 -7 ，則此數列共有多少項？

- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

(A) 2. 有一等差數列的第 3 項和第 7 項互為相反數，則此等差數列的第 5 項為多少？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(C) 3. 等差數列 a_1, a_2, \dots, a_{100} 中，已知 $a_{35} - a_{21} < 0$ ，則下列何者正確？

(A) $a_{35} - a_{60} < 0$ (B) $a_{27} + a_{33} < a_{15} + a_{45}$

(C) $a_{99} - a_{55} < 0$ (D) $a_{50} + a_{30} < a_{60} + a_{20}$

(C) 4. 有一等差數列 $-20, -18\frac{3}{4}, -17\frac{1}{2}, \dots$ ，試問第幾項開始出現正數？

- (A) 20 (B) 19 (C) 18 (D) 17

二、填充題：(南基礎)

1. 已知一等差數列的首項為 8，公差為 2，則此等差數列的第 9 項為 24。

2. 若一等差數列的首項為 -3 ，末項為 4，公差為 $\frac{1}{2}$ ，則這個等差數列共有 15 項。

3. 若 $1+3x, 6+2x, 5-2x$ 三數成等差數列，則 $x =$ -2。

4. 太陽劇場 共有 10 排座位，每一排比前一排多 5 個座位。已知最後一排共有 82 個座位，則第一排有 37 個座位。

5. 在等差數列 $\langle a_n \rangle$ 中，已知 $a_6 = 39$ ， $a_{11} = 69$ ，則首項 $a_1 =$ 9。

三、計算題：(康進階)

1. 已知 a, b, c 為一等差數列，其中 $a < b < c$ ，若 $a + b + c = 24$ ， $abc = 440$ ，則此等差數列為何？

$$b = 24 \div 3 = 8, \text{ 設 } a = 8 - d, c = 8 + d (d > 0)$$

$$\Rightarrow abc = (8 - d) \times 8 \times (8 + d) = 440, 8^2 - d^2 = 55, d = 3$$

$$\Rightarrow \text{此數列為 } 5, 8, 11$$

$$\text{答：} 5, 8, 11$$

2. 已知一數列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ……。

觀察以上數列可發現從第 3 項開始，每一項都是之前兩項的和，若寫出此數列的前 200 項，則這 200 個數中共有幾個偶數？

若由首項開始每三項一組

可發現每組內的數字皆為奇數、奇數、偶數

$$200 \div 3 = 66 \cdots 2$$

\Rightarrow 共可分成 66 組，剩餘 2 個數皆為奇數

故共有 66 個偶數

答：66 個

3. 已知三兄弟的年齡正好成等差數列，若老二今年 21 歲，且老大歲數的 2 倍比老三歲數的 3 倍少 6 歲，試求老大、老三今年的歲數。(康實力)

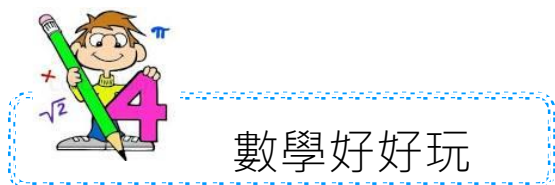
解：設老大今年 $(21 + d)$ 歲，老三今年 $(21 - d)$ 歲

$$2 \times (21 + d) = 3 \times (21 - d) - 6$$

$$\text{得 } d = 3$$

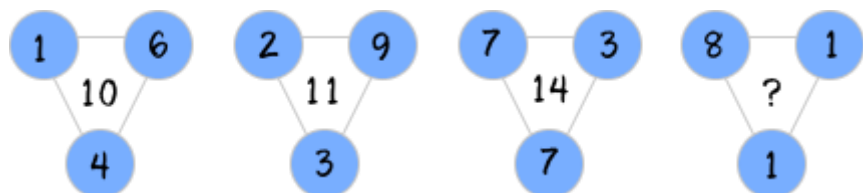
$$\text{所以老大：} 21 + 3 = 24 \text{ (歲)}$$

$$\text{老三：} 21 - 3 = 18 \text{ (歲)}$$



數學好好玩

下圖三角形中央的數字，是由三角形周圍的數字根據某種簡單規律計算出來的，請問，最後的問號處應該填上什麼數字呢？



答：17

每一個三角形中央的數字，都是它前一個三角形周圍的三個數字之和。

本題考的重點在於先入為主的觀念跟語意的陷阱，

讓人容易把各個三角形分開各自找它們中央跟周圍的規律，就很難找到答案，

但跳脫原來思考的規範，簡單的規律就跑出來囉！