八、當點在任意直線上時

（一）ΔABC 為等腰直角三角形的情況

不失一般性，將 ΔABC 平移、旋轉後，使 $A(0,0)$、$B(1,1)$、$C(-1,1)$。

先不考慮水平或鉛直線的情況，此時直線必會交 x、y 軸各一點，令其為 $P_1(a,0)$、$P_2(0,b)$。

$P_1(a,0)$，則可得鏡射後三點：$A_1(0,a)$、$B_1(a,2)$、$C_1(0,-a)$。$\overline{A_1C_1}$ 中垂線為 $y=0$、$\overline{B_1C_1}$ 中垂線為 $\frac{-a}{2+a}\left(x-\frac{a}{2}\right)=y-1+\frac{a}{2}$；$O_1$ 即為此二中垂線之交點，將 $y=0$ 帶入可得 $-\frac{a}{2+a}x+\frac{a^2}{4+2a}=-1+\frac{a}{2}\Rightarrow x=\left[\left(-1+\frac{a}{2}\right)-\frac{a^2}{4+2a}\right]\cdot\left(-\frac{2+a}{a}\right)=\frac{2}{a}$，因此 $O_1\left(\frac{2}{a},0\right)$。

$P_2(0,b)$，則可得鏡射後三點：$A_2(b,0)$、$B_2(0,2-b)$、$C_2(-b,0)$。$\overline{A_2C_2}$ 中垂線為 $x=0$、$\overline{B_2C_2}$ 中垂線為 $\frac{-b}{2-b}\left(x+\frac{b}{2}\right)=y-1+\frac{b}{2}$；$O_2$ 即為此二中垂線之交點，將 $x=0$ 帶入可得 $-\frac{b}{2-b}\cdot\frac{b}{2}=y-1+\frac{b}{2}\Rightarrow y=-\frac{b^2}{4-2b}+1-\frac{b}{2}=\frac{2-2b}{2-b}$，因此 $O_2\left(0,\frac{2-2b}{2-b}\right)$。

由於有觀察道，P 點的軌跡為直線時，其鏡射外心軌跡會是圓錐曲線。根據定理四，可得知必有其中 3 點的外心分別落在 A、B、C 點上，故在此利用 A、B、C、O_1、O_2 這 5 點來求出此圓錐曲線。

利用兩點式，先求得 $\overline{CO_1}: ax+(2+a)y-2=0$、$\overline{BO_2}: bx+(b-2)y+2-2b=0$、$\overline{BC}: y-1=0$、$\overline{O_1O_2}: (1-b)ax+(2-b)y-2+2b=0$。

利用圓錐曲線族的方法，我們可以得出 $[ax+(2+a)y-2][bx+(b-2)y+2-2b]+k(y-1)[(1-b)ax+(2-b)y-2+2b]=0$，再將 $A(0,0)$ 帶入，可以得出 $(-2)(2-2b)+k(-1)(-2+2b)=0$，因此 $k=\frac{0}{2-2b}-2=-2$。將 $k=-2$ 帶回原式，$[ax+(2+a)y-2][bx+(b-2)y+2-2b]+(-2)(y-1)[(1-b)ax+(2-b)y-2+2b]=0\Rightarrow abx^2-(2a-ab)y^2-2bx-(2ab-2a)y+2bxy=0$；將此式左右同除以 a，即可得此圓錐曲線為 $bx^2+(b-2)y^2+\frac{2b}{a}xy-\frac{2b}{a}x+(-2b+2)y=0$。

為了確認此圓錐曲線，我們將 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 上的點 $P_3(a+at,-bt)$ 帶入做計算，可得 $O_3\left(\frac{2(a+at)(bt+1)}{(bt+1)^2+(a+at)^2-1},\frac{2bt(bt+1)}{(bt+1)^2+(a+at)^2-1}\right)$。將 O_3 代入此圓錐方程，如下：

先令 $k=(bt+1)^2+(a+at)^2-1$，先計算二次項總和，

x^2、y^2、xy 項總和為 $\frac{4a^2b(1+t)^2(bt+1)^2}{k^2}+\frac{4(br)^2(b-2)(bt+1)^2}{k^2}+\frac{8b^2t(1+t)(bt+1)^2}{k^2}=$
$\frac{(bt+1)^2\left[4a^2b(1+t)^2+4(b-2)(bt)^2+8b^2t(1+t)\right]}{k^2}=\frac{(bt+1)^2\left(4a^2b+8a^2bt+4a^2bt^2+4b^3t^2+8b^2t\right)}{k^2}=$
$\frac{4b(bt+1)^2\left(a^2+2a^2t+a^2t^2+b^2t^2+2bt\right)}{k^2}=\frac{4b(bt+1)^2}{k}$，

接著計算一次項總和，

x、y 項總和為 $\frac{(4b+4bt)(bt+1)}{k}+\frac{(2bt)(-2b+2)(bt+1)}{k}=\frac{4b\cdot(bt+1)[(1+t)+(bt-t)]}{k}=$
$\frac{-4b(bt+1)^2}{k}$；兩者相加為 0，故 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 上的任意點，其鏡射外心都會落在此圓錐曲線上，如圖 x。

將上述整理為定理 x 如下：

> 定理 x：ΔABC 為等腰直角三角形，當點 P 落在 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 直線上時，鏡射外心 O 會落在圓錐曲線 $bx^2+(b-2)y^2+\frac{2b}{a}xy-\frac{2b}{a}x+(-2b+2)y=0$ 上。

（二）ΔABC 為正三角形的情況

不失一般性，將 ΔABC 平移、旋轉後，使 $A(0,0)$、$B(1,\sqrt{3})$、$C(-1,\sqrt{3})$。

先不考慮水平或鉛直線的情況，此時直線必會交 x、y 軸各一點，令其為 $P_1(a,0)$、$P_2(0,b)$。

$P_1(a,0)$，則可得鏡射後三點：$A_1\left(-\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$、$B_1(a,2\sqrt{3})$、$C_1\left(-\frac{1}{2}a,-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$。$\overline{A_1C_1}$ 中垂線為 $y=0$、$\overline{A_1B_1}$ 中垂線為 $\frac{3a}{\sqrt{3}a-4\sqrt{3}}(x-1)=y-\sqrt{3}$；$O_1$ 即為此二中垂線之交點，整理上式後將 $y=0$ 帶入可得 $\frac{3ax-12}{\sqrt{3}-4\sqrt{3}}=0\Rightarrow x=\frac{4}{a}$，因此 $O_1\left(\frac{4}{a},0\right)$。

$P_2(0,b)$，則可得鏡射後三點：$A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b,\frac{1}{2}b\right)$、$B_2(0,2\sqrt{3}-b)$、$C_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}b,\frac{1}{2}b\right)$。$\overline{A_2C_2}$ 中垂線為 $x=0$、$\overline{A_2B_2}$ 中垂線為$-\frac{\sqrt{3}b}{3b-4\sqrt{3}}(x-1)=y-\sqrt{3}$；$O_2$ 即為此二中垂線之交點，整理上式後將 $x=0$ 帶入可得 $y=\frac{-4\sqrt{3}+12}{4\sqrt{3}-3b}=-\frac{4(3-\sqrt{3}b)}{4\sqrt{3}-3b}=\frac{2\sqrt{3}-4b}{2-\sqrt{3}b}$，因此 $O_2\left(0,\frac{2\sqrt{3}-4b}{2-\sqrt{3}b}\right)$。

由於有觀察道，P 點的軌跡為直線時，其鏡射外心軌跡會是圓錐曲線。根據定理四，可得知必有其中 3 點的外心分別落在 A、B、C 點上，故在此利用 A、B、C、O_1、O_2 這 5 點來求出此圓錐曲線。

利用兩點式，先求得 $\overline{CO_1}:\sqrt{3}ax+(2+a)y-2\sqrt{3}=0$、$\overline{BO_2}:bx+(\sqrt{3}b-2)y+2\sqrt{3}-4b=0$、$\overline{BC}:y-\sqrt{3}=0$、$\overline{O_1O_2}:(\sqrt{3}-2b)ax+(2-\sqrt{3}b)y-2\sqrt{3}+4b=0$。

利用圓錐曲線族的方法，我們可以得出 $[\sqrt{3}ax+(2+a)y-2\sqrt{3}][bx+(\sqrt{3}b-2)y+2\sqrt{3}-4b]+k(y-\sqrt{3})[(\sqrt{3}-2b)ax+(2-\sqrt{3}b)y-2\sqrt{3}+4b]=0$，再將 $A(0,0)$ 帶入，可以得出 $(-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-4b)+k(-\sqrt{3})(-2\sqrt{3}+4b)=0$，因此 $k=\frac{12-8\sqrt{3}b}{6-4\sqrt{3}b}=2$。將 $k=2$ 帶回原式，$[\sqrt{3}ax+(2+a)y-2\sqrt{3}][bx+(\sqrt{3}b-2)y+2\sqrt{3}-4b]+(-2)(y-\sqrt{3})[(\sqrt{3}-2b)ax+(2-\sqrt{3}b)y-2\sqrt{3}+4b]=0\Rightarrow\sqrt{3}abx^2+(\sqrt{3}b-2)ay^2+2bxy-2\sqrt{3}bx+(2\sqrt{3}-4b)ay=0$；即可得此圓錐曲線為 $\sqrt{3}abx^2+(\sqrt{3}b-2)ay^2+2bxy-2\sqrt{3}bx+(2\sqrt{3}-4b)ay=0$。

為了確認此圓錐曲線，我們將 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 上的點 $P_3(a+at,-bt)$ 帶入做計算，可得 $O_3\left(\frac{2(a+at)(bt+1)}{(bt+1)^2+(a+at)^2-1},\frac{2bt(bt+1)}{(bt+1)^2+(a+at)^2-1}\right)$。將 O_3 代入此圓錐方程，如下：

先令 $k=(bt+1)^2+(a+at)^2-1$，先計算二次項總和，

x^2、y^2、xy 項總和為 $\frac{4a^2b(1+t)^2(bt+1)^2}{k^2}+\frac{4(br)^2(b-2)(bt+1)^2}{k^2}+\frac{8b^2t(1+t)(bt+1)^2}{k^2}=$
$\frac{(bt+1)^2\left[4a^2b(1+t)^2+4(b-2)(bt)^2+8b^2t(1+t)\right]}{k^2}=\frac{(bt+1)^2\left(4a^2b+8a^2bt+4a^2bt^2+4b^3t^2+8b^2t\right)}{k^2}=$
$\frac{4b(bt+1)^2\left(a^2+2a^2t+a^2t^2+b^2t^2+2bt\right)}{k^2}=\frac{4b(bt+1)^2}{k}$，

接著計算一次項總和，

x、y 項總和為 $\frac{(4b+4bt)(bt+1)}{k}+\frac{(2bt)(-2b+2)(bt+1)}{k}=\frac{4b\cdot(bt+1)[(1+t)+(bt-t)]}{k}=$

$\frac{-4b(bt+1)^2}{k}$；兩者相加為 0，故 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 上的任意點，其鏡射外心都會落在此圓錐曲線上，如圖 x。

將上述整理為定理 x 如下：

定理 x：當點 P 落在 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 直線上時，鏡射外心 O 會落在圓錐曲線

$\sqrt{3}abx^2+\left(\sqrt{3}b-2\right)ay^2+2bxy-2\sqrt{3}bx+\left(2\sqrt{3}-4b\right)ay=0$上。