壹、前言

一、研究動機

我們想要觀察鏡射三角形的心與原三角形之間的關係，看了第 62 屆全國科展作品《三角形與其垂足三角形的心不變量》，發現鏡射三角形與垂足三角形相似，因為若把鏡射三角形的三點與原本的點之距離縮放二分之一倍，就會落在原三角形之垂足上，因此如將垂足三角形縮放兩倍，即為鏡射三角形。由此接續觀察原本的點與鏡射三角形重心及外心的關聯。

於是又陸續參考了一件在探討垂足的第 62 屆全國科展作品《$X-mirrOr\sim$ 三角形全等點位置與性質討論》。經過討論，組員們對於研究鏡射三角形的內容都頗感興趣，便開始著手研究同一點對鏡射三角形鏡射出來的心之間的關係。

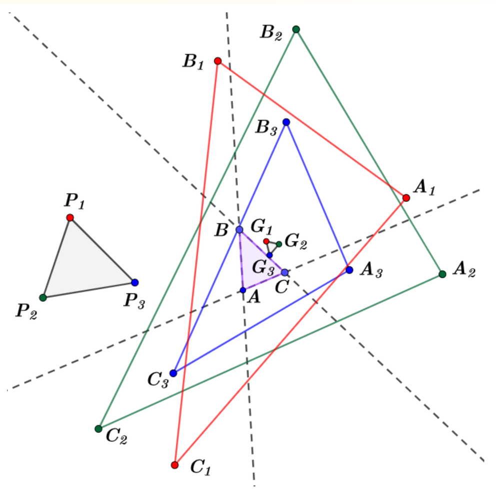


圖 1－原三角形及其鏡射重心形成之三角形。

二、研究目的

（一）平面上任一點對特殊三角形做鏡射後，得到的鏡射三角形的重心之位置，與原三角形之重心位置之關聯性。

（二）平面上任三點對特殊三角形做鏡射後，得到的三個鏡射三角形重心形成的三角形，與原本的三點形成之三角形之間的關係。

（三）平面上任三點對任意三角形做鏡射後，得到的三個鏡射三角形重心形成的三角形，與原本的三點形成之三角形之間的關係。

（四）平面上任意點落在過任意三角形頂點的直線上，其鏡射外心軌跡的圖形。

（五）平面上任意點落在過特殊三角形頂點的外接圓切線上時，其鏡射外心和頂點的距離與原本的點和頂點的距離之關係。

（六）平面上點在直線上移動時，對特殊三角形的鏡射外心形成之軌跡及其方程式。

貳、研究設備與器材

紙、筆、電腦、計算機、$GeoGebra$

參、研究過程及方法

一、名詞定義

（一）$\boldsymbol{M(L,P_n)}$：P_n 點對直線 L 鏡射之後得到的點。

（二）**鏡射三角形**：給定一三角形、任意點 P_n（不位於的三角形的外接圓上），對三角形三邊延長線分別鏡射，得到三個點，所形成的圖形就是鏡射三角形。根據前面的研究，當 P_1 落於 ΔABC 的外接圓上時，P_1 對 ΔABC 的鏡射三點會形成一直線，如圖 1，故不考慮此狀況。

（三）$\boldsymbol{M(\Delta ABC,P_n)}$：此為 P_n 對 ΔABC 的鏡射三角形；為了方便對頂點的表示，我們將 $\overleftrightarrow{AB}$ 視為 L_1、$\overleftrightarrow{BC}$ 視為 L_2、$\overleftrightarrow{CA}$ 視為 L_3，故 $M(\Delta ABC,P_n)$ 也可記為 $\Delta A_nB_nC_n$，如圖 2、圖 3。

（四）**鏡射重心**：$M(\Delta ABC,P_n)$ 重心為 G_n，如圖 3。

（五）**鏡射外心**：$M(\Delta ABC,P_n)$ 外心為 O_n，如圖 3。

（六）**外接圓切線**：t_A、t_B、t_C 分別為過 A、B、C 點的 ΔABC 外接圓切線。

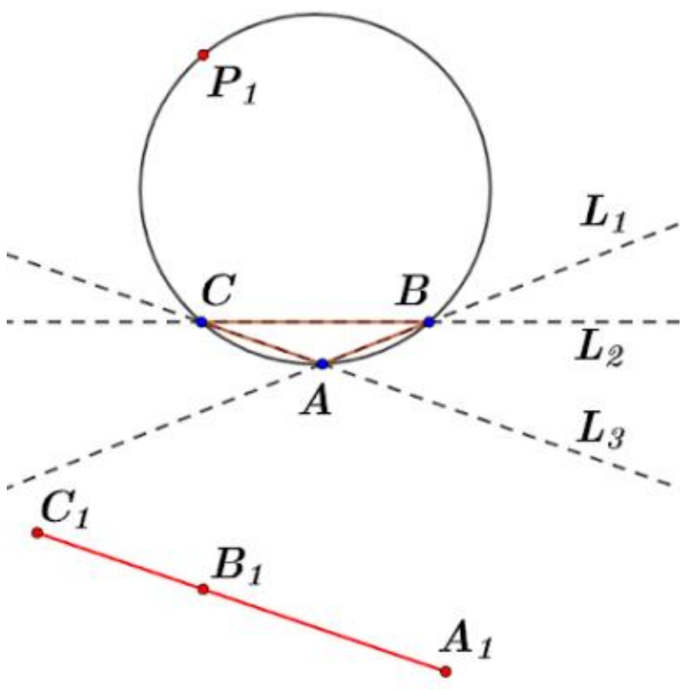


圖 2－P 點位於外接圓上時，鏡射後三點共線。

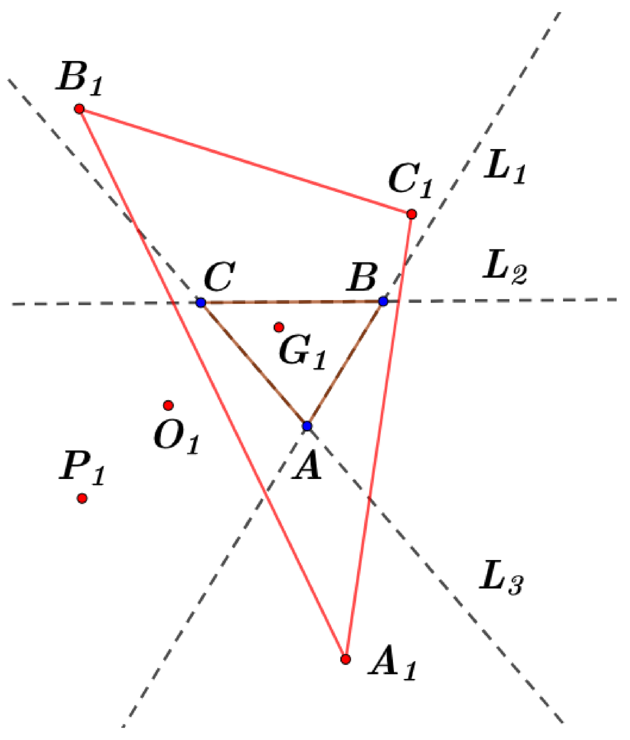


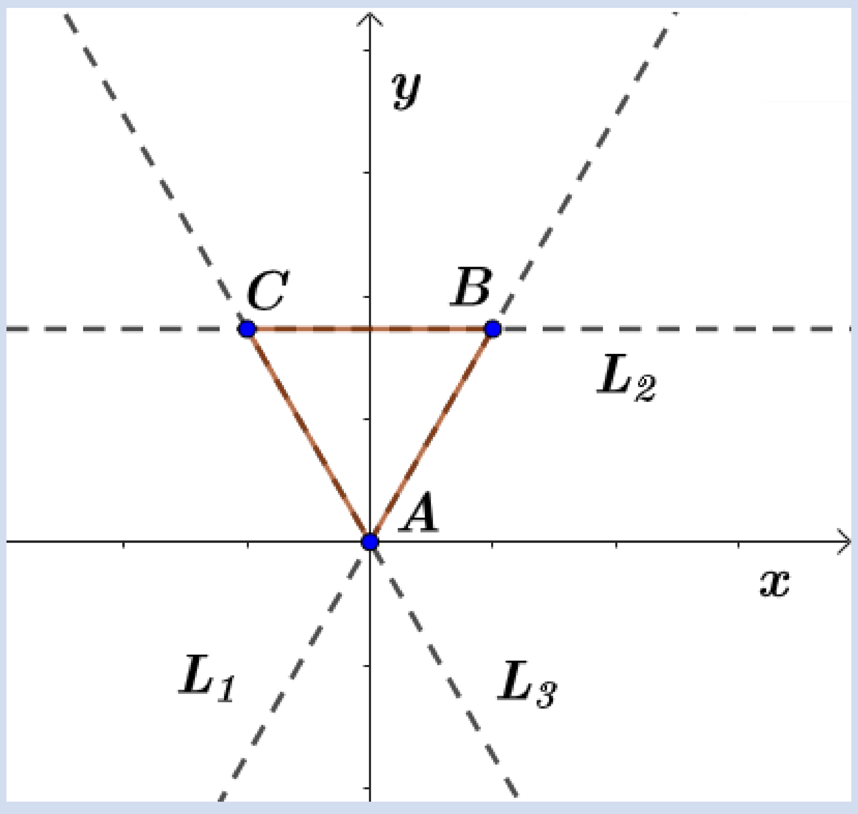
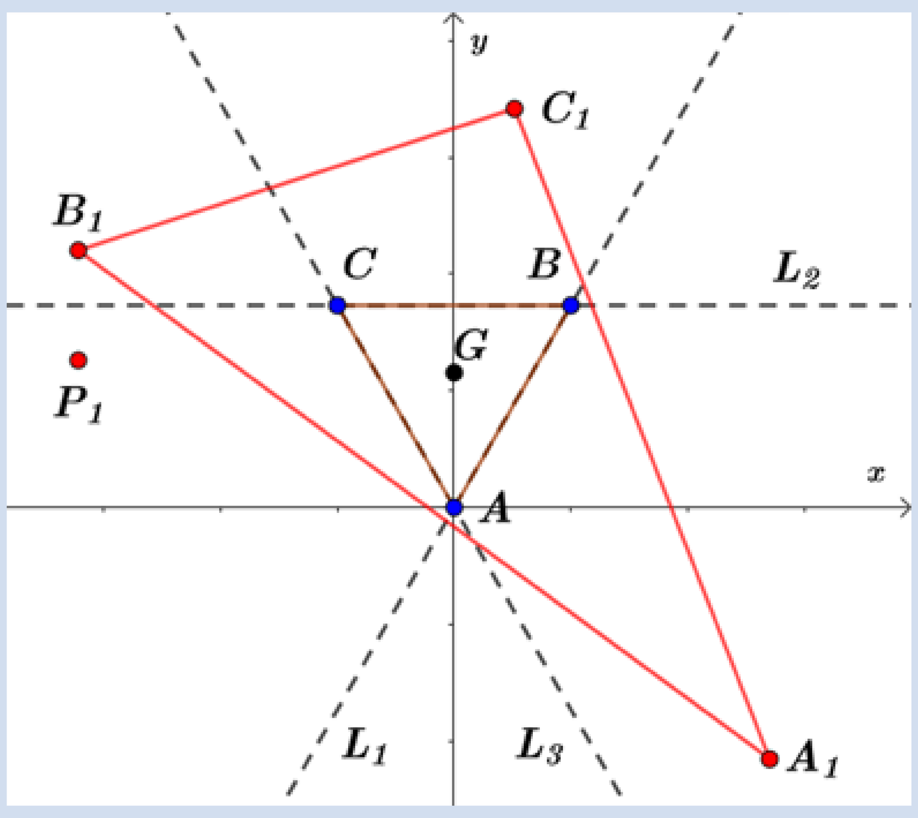
圖 3－$M(\Delta ABC,P_1)$ 為 $\Delta A_1B_1C_1$，重心為 G_1，外心為 O_1。

肆、研究結果

一、正三角形的鏡射重心情況

用 P_1、P_2 兩點分別對正三角形做鏡射三角形，發現這兩個鏡射三角形的重心都與原三角形的重心重合。因此我們猜測，任意 P_k 點對正三角形作鏡射三角形，其 G_k 會和原三角形之重心重合。

表 1－對正三角形鏡射的情況。

步驟一：固定正三角形一點於原點，使其底邊平行於 x 軸。	步驟二：利用鏡射矩陣對正三角形作鏡射三角形後，證明其重心與正三角形重心重合。
	
ΔABC 為平面上的一邊長為 $2a$ 之正三角形，不失一般性，將 A 點固定在原點，使 $\overline{BC}$ 平行 x 軸，B 位於 $\left(-a,a\sqrt{3}\right)$，此時 $C=\left(a,a\sqrt{3}\right)$。	利用鏡射矩陣得到鏡射三角形三點座標 A_1、B_1、C_1，此時 $\dfrac{A_1+B_1+C_1}{3}$ 即為 $M(\Delta ABC,P_1)$ 的重心 G_1，與 ΔABC 的重心相同。

將其整理成**定理一**，如下：

> **定理一**：當 ΔABC 為正三角形時，$M(\Delta ABC,P_1)$ 的重心 G_1 與 ΔABC 的重心重合。

接下來我們研究其他特殊三角形的性質。