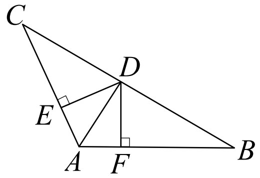
3-4 中垂線與角平分線性質

例題 1

如圖，$\overrightarrow{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，且 $\overline{DF} \perp \overline{AB}$，$\overline{DE} \perp \overline{AC}$，若 $\overline{AB}+\overline{AC}=20$ 公分，$\overline{DE}=5$ 公分，則 $\triangle ABC$ 的面積為多少平方公分？



解：$\triangle ABC$ 面積

$=\triangle ABD$ 面積 $+\triangle ACD$ 面積

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DF}+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{DE}$

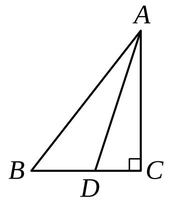
$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DE}+\frac{1}{2}\ \overline{AC}\times\overline{DE}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times(\overline{AB}+\overline{AC})$

$=\frac{1}{2}\times5\times20=50$(平方公分)

例題 2

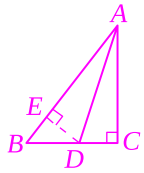
右圖 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$，則 $\overline{CD}=$？



解 作 $\overline{DE}\perp\overline{AB}$，

交 $\overline{AB}$ 於 E 點

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$



$\because\ \overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$

$\therefore$ 令 $\overline{CD}=\overline{DE}=x$

$\triangle ABC$ 面積 $=\triangle ACD$ 面積 $+\triangle ABD$ 面積

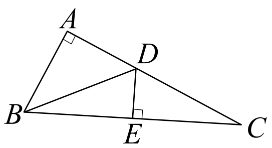
$\therefore\ \frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times4\times x+\frac{1}{2}\times5\times x$

$\Rightarrow 12=9x$，$x=\frac{4}{3}$

答：$\frac{4}{3}$

例題 3

如圖，$\overline{AB}\perp\overline{AC}$，$\overline{DE}\perp\overline{BC}$，$\overline{BE}=\overline{EC}$，若 $\overline{BE}=4\sqrt{5}$ 公分，$\overline{DE}=2\sqrt{5}$ 公分，$\overline{AB}=8$ 公分，則 $\triangle ABC$ 面積為多少平方公分？



解：$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}=6+10=16$

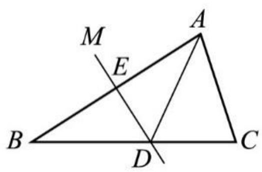
$\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$

$=\frac{1}{2}\times8\times16$

$=64$

例題 4

如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}$ 之中垂線 M 交 $\overline{AB}$ 於 E，交 $\overline{BC}$ 於 D。若 $\overline{BE}=12$，$\overline{DE}=5$，$\overline{CD}=10$，$\overline{AC}=8$，求 $\triangle ADC$ 的周長。



解 $\because$ M 為 $\overline{AB}$ 的中垂線

$\therefore\ \overline{BD}=\overline{AD}$

$\triangle ADC$ 周長

$=\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{AD}$

$=\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{BD}$

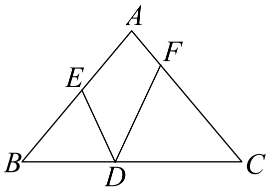
$=8+10+\sqrt{12^2+5^2}$

$=8+10+13=31$

答：31

例題 5

如圖，等腰△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$D$ 在 $\overline{BC}$ 上，若 $\overline{BD}=\overline{BE}$，$\overline{CF}=\overline{CD}$，且∠$B$=50°，則∠$EDF$=？

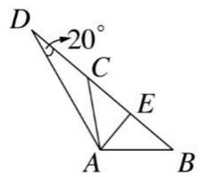


解：∠EDF=180°－∠EDB－∠FDC

=180°－130°=50°

例題 6

如右圖，等腰△ABC 中，E 為 $\overline{BC}$ 的中點，若 D、C、E 三點共線，又 $\overline{CD}=\overline{CA}$，則：



(1)∠AEB=？

(2)∠B=？　(3)∠DAB=？

解：(1) ∵△ABC 為等腰三角形，

又 E 為 $\overline{BC}$ 的中點，

∴$\overline{AE}$ 垂直平分 $\overline{BC}$，即∠AEB=90°。

(2) ∵ $\overline{CD}=\overline{CA}$，

∴∠CAD=∠D=20°，

得到∠ACE=40°(外角定理)，

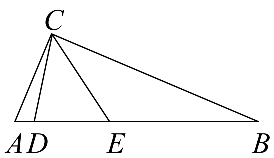
∴∠B=∠ACE=40°。

(3)∠DAB=180°－∠D－∠B

=180°－20°－40°=120°。

例題 7

如圖，∠BCA=90°，$\overline{AC}=\overline{AE}$，$\overline{BC}=\overline{BD}$，且 A、D、E、B 在同一直線上，則∠DCE=？



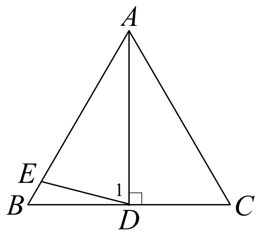
解：∠DCE=180°－∠CDE－∠AEC

$=180^\circ-\left(\dfrac{180^\circ-\angle B}{2}+\dfrac{180^\circ-\angle A}{2}\right)$

$=\left(\dfrac{\angle A+\angle B}{2}\right)=45^\circ$

例題 8

如圖，已知△ABC 為正三角形，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，且 $\overline{AD}=\overline{AE}$，則∠1=？



解：∵ $\overline{AD}\perp\overline{BC}$

∴ $\overline{AD}$ 平分∠BAC

∠EAD=30°

∠1=$\dfrac{1}{2}$(180°－30°)=75°

回家作業

一、選擇題：(南進階)

(B) 1. 分別以 A、B 兩點為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫弧交於 C、D 兩點，則下列敘述何者錯誤？

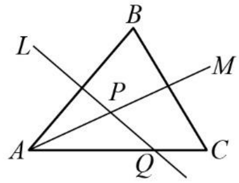
(A) 四邊形 $ACBD$ 為菱形　(B) $\overline{AB}=\overline{CD}$　(C) $\overline{AC}=\overline{BC}$　(D) $\overline{AC}=\overline{AD}$

(B) 2. 兩等腰三角形中，若有一腰長及頂角對應相等，則可依據何種全等性質說明兩三角形全等？

(A) SSS　(B) SAS　(C) ASA　(D) 兩三角形不全等

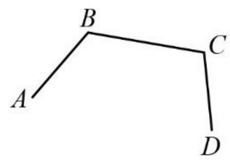
(A) 3. 已知△ABC 中，$\overline{CD}$ 為 $\overline{AB}$ 的中垂線且交 $\overline{AB}$ 於 D 點，P 在 $\overline{CD}$ 上。若 $\overline{AB}=48$，$\overline{AP}=26$，$\overline{PC}=8$，則△BCP 的周長為何？

(A) 64　(B) 56　(C) 45　(D) 32



(C) 4. △ABC 中，$\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 不等長，直線 L 為 $\overline{AB}$ 之中垂線，直線 M 為∠BAC 之角平分線，且 L 和 M 相交於 P 點，L 交 $\overline{AC}$ 於 Q 點，則下列敘述何者正確？

(A) $\overline{QA}=\overline{QC}$　(B) $\overline{PA}=\overline{PC}$　(C) $\overline{QA}=\overline{QB}$　(D) $\overline{QB}=\overline{QC}$



(D) 5. 如右圖，若想在平面上找一點 P，使 P 點到 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 的距離都相等，則 P 點要用下列哪種方法求得？

(A) 作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的中垂線交點

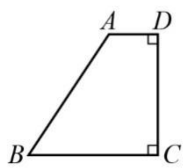
(B) 作 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 的中垂線交點

(C) 作 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的中垂線交點

(D) 作∠B、∠C 的角平分線交點

二、填充題：

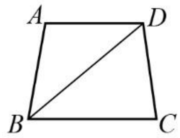
1. △ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{DE}$ 是 $\overline{AC}$ 的中垂線且交 $\overline{AB}$ 於 D，交 $\overline{AC}$ 於 E。若 $\overline{AB}=12$ 公分，$\overline{BD}=3$ 公分，則 $\overline{DE}=$ ___$3\sqrt{5}$___ 公分。



圖(一)

2. 如右圖(一)，梯形 $ABCD$ 中，∠C=∠D=90°，$\overline{AD}=7$，$\overline{BD}=25$。若 $\overline{AB}$ 的中垂線恰可通過 C 點，則 $\overline{CD}=$ ___$12\sqrt{2}$___。

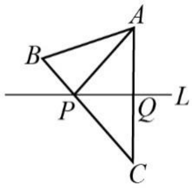
3. 如右圖(二)，$\overline{BD}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線，且 $\overline{AB} < \overline{BC}$，$\overline{AD} = \overline{CD}$。若 $\angle ABC = 80°$，則 $\angle A + \angle C =$ ___180___ 度。



圖(二)

4. 在等腰△ABC 中，$\overline{AB} = \overline{AC} = 8$，已知 L 為 $\overline{AB}$ 的中垂線且交 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 於 D、E 兩點。若 $\overline{AD} = 5$，則四邊形 $BCDE$ 面積為 ___$\frac{66}{5}$___。

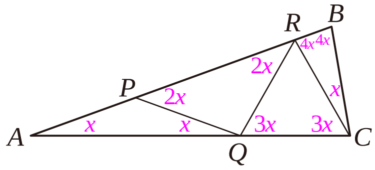
5. 如右圖，直線 L 為 $\overline{AC}$ 的中垂線。若 $\overline{PB} = 2$ 公分，$\overline{AB} = 4.5$ 公分，$\overline{AP} = 4$ 公分，$\overline{AQ} = 3$ 公分，則△ABC 周長為 ___16.5___ 公分。



6. △ABC 中，$\angle B$ 的角平分線交 $\overline{AC}$ 於 D，E 點在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$。若 $\overline{AB} = 12$，$\overline{BC} = 10$，$\overline{DE} = 5$，則△ABC 面積為 ___55___。

三、計算題：

1. 如右圖，△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB} = \overline{AC}$，$P$、$Q$、$R$ 分別為 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 上的點，且 $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RC} = \overline{CB}$，則 $\angle A =$？ 【中區】



解：設 $\angle A = x°$，則其他角的角度分別如圖所示。

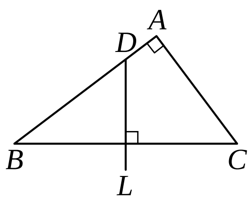
因為三角形內角和為 180°，

所求 $4x + (x + 3x) + x = 180 \Rightarrow 9x = 180 \Rightarrow x = 20$

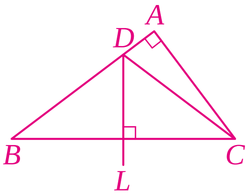
故 $\angle A = 20°$

答：20°

2. 如右圖，△ABC 中，$\angle A = 90°$，L 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，交 $\overline{AB}$ 於 D 點。若 $\overline{AC} = 12$，$\overline{AB} = 16$，則 $\overline{BD} =$？ (康進階)



連接 $\overline{CD}$



設 $\overline{BD} = \overline{CD} = x$，則 $\overline{AD} = 16 - x$

$\Rightarrow (16 - x^2) + 12^2 = x^2$

$\Rightarrow 256 - 32x + x^2 + 144 = x^2$，$32x = 400$，$x = \frac{25}{2}$ 答：$\frac{25}{2}$