永中鍾定物

DATE 2024 .12 .17,19 NO. 三校校141 三校校作1.3

ex.6 已知2次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1)=6, f(3)=-14, f(-2)=-9$

1. 分別用指定方法求 $f(x)$

1) 設 $f(x)=ax^2+bx+c$，分別代入 $x=1,-2,3$

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ 4a-2b+c=-9 \\ 9a+3b+c=-14 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow f(x)=-3x^2+2x+7 \#$$

2) 牛頓插值法

$f(x)=a(x-1)(x-3)+b(x-1)+c$

$f(1)=c=6$

$f(3)=2b+c=-14 \Rightarrow b=-10$

$f(-2)=15a-3b+c=-9 \Rightarrow a=-3$

$\Rightarrow f(x)=-3(x-1)(x-3)-10(x-1)+6 \#$

3) Lagrange 插值法

$$\begin{cases} f(x)\equiv 6 \pmod{x-1} \\ f(x)\equiv -14 \pmod{x-3} \\ f(x)\equiv -9 \pmod{x+2} \end{cases}$$

$[-(x+2)(x-3)]+[-\frac{7}{5}(x-1)(x+2)]+[\frac{3}{5}(x-1)(x-3)]$

$=-(x^2-x-6)-\frac{7}{5}(x^2+x-2)-\frac{3}{5}(x^2-4x+3)$

$=-3x^2+2x+7 \#$

2. 承上，將(2),(3)求出的 $f(x)$ 展開，驗證三種插值方法求出的 $f(x)$ 相等

$-3(x-1)(x-3)-10(x-1)+6$

$=-3(x^2-4x+3)-10x+10+6$

$=-3x^2+12x-9-10x+16$

$=-3x^2+2x+7$

(1),(2),(3) 相等 #