新北市立永和國民中學 113 學年度科學展覽會

作品說明書封面

參賽科別：

□ 物理

□ 化學

□ 生物

□ 地球科學

■ 數學

□ 生活與應用科學(一)(機械/能源/光電/物理/資訊之工程與應用)

□ 生活與應用科學(二)(化學工程/生物科技/食品科學/環境科學/材料)

作品名稱：鏡射三角形

關 鍵 詞：鏡射、三角形的心、保角變換

編　　號：

摘要

本研究是假設任意一個點對任意三角形，利用解析幾何研究在平面上鏡射出來的三個點關係，或是用多個任意點觀察其三角形的重心的保角變換，並整理成一般式。

壹、前言

我們看了第 62 屆全國科展作品《三角形與其垂足三角形的心不變量》之後，對鏡射三角形有新的想法，暑假開始嘗試翻閱其他文獻，想要對鏡射三角形著手研究。

貳、研究目的

相異點對同一三角形做鏡射三角形後，其重心之間的關係。

參、研究器材與設備

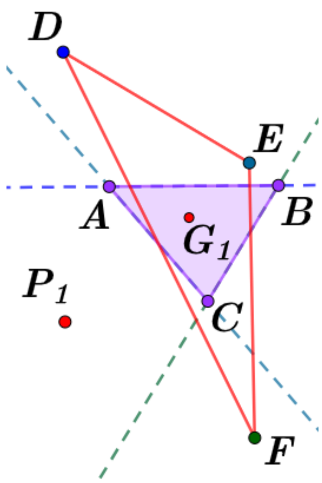
紙、筆、電腦、計算機、$GeoGebra$

肆、研究過程及方法

【名詞定義】

鏡射三角形：給定一個三角形 ABC 做一個任意點 P_1 分別對 $\overline{AB}$ $\overline{BC}$ $\overline{CA}$ 鏡射得到三個鏡射點 D E F，將其連起來就是鏡射三角形。

鏡射重心：點 P_n 對三角形 ABC 的鏡射三角形重心為 G_n。

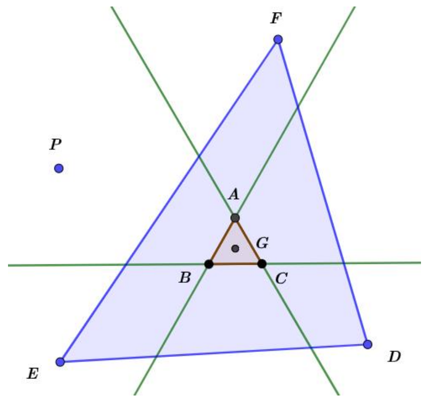


一、對 60°、60°、60° 的三角形鏡射後重心位置恆定

用 P_1、P_2 兩點分別對正三角形做鏡射三角形，發現這兩個鏡射三角形的重心都與原三角形的重心重合。因此我們猜測，不論 P 點位於何處，形成之鏡射三角形重心必會和原三角形之重心重合。

底下證明之：

$\triangle ABC$ 為平面上的一邊長為 $2a$ 正三角形，將 $\triangle ABC$ 旋轉後使 C 點朝下位於 $(0,0)$，A 位於 $\left(-a, a\sqrt{3}\right)$ 此時$B=(a, a\sqrt{3})$ ，$\overline{AB}$ 平行於 x 軸，且點 A 和點 B 到 y 軸的距離均為 a 。此時 $A+B+C=(0, 2a\sqrt{3})$。



設 $\overline{AB}$ 為 L_1: $y=a\sqrt{3}x$、$\overline{BC}$ 為 L_2: $y=\sqrt{3}x$、$\overline{AC}$ 為 L_3: $y=-\sqrt{3}x$、P 為 (x_0, y_0)。

因此可求得 P 對 L_1 對稱點為 $D=(x_0, 2a\sqrt{3}-y_0)$、

對 L_2 對稱點為 $E=(\frac{-x_0+3y_0}{2}, \frac{3x_0+y_0}{2})$ 、對 L_3 對稱點為 $F=(\frac{-x_0-3y_0}{2}, \frac{-3x_0+y_0}{2})$。

此時 $D+E+F=(0, 2a\sqrt{3})$。

因三角形重心為 $^1/_3$ 乘以三點之和，且 ABC 、 DEF 三點之和分別相同，故重心重合。

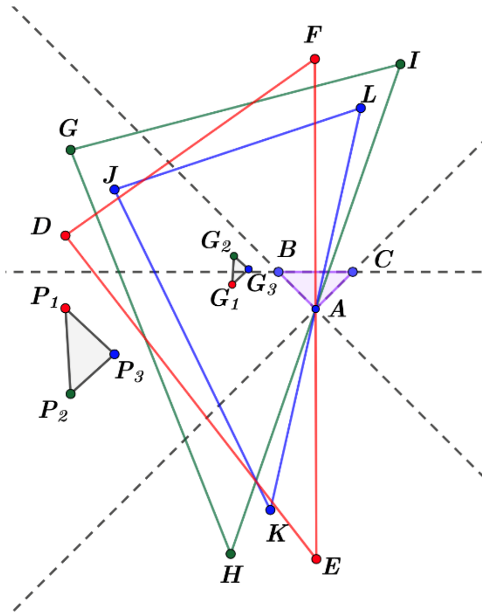
所以知道不論 P 點位於何處，對正三角形鏡射後的重心都會跟原正三角形的重心重和。接下來我們研究其他特殊三角形的性質。

二、45°、45°、90° 的三角形

待證：$\frac{(a_2-a_1)(a_3-a_1)+(b_2-b_1)(b_3-b_1)}{\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}\cdot\sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2}}=\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\cdot\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}}$

等腰直角三角形 $\Delta\mathrm{ABC}$ 由 L_1、L_2、L_3 組成

任意不位於頂點上的點 P_1



鏡射矩陣 $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$

$\mathrm{L}_2(45°)$ 帶入後此矩陣為 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$\mathrm{L}_3(135°)$ 帶入後此矩陣為 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

對 L_1 鏡射後的點為 $\mathrm{P}_{L_1}(\mathrm{x}_1,-y_1+2)$

對 L_2 鏡射後的點為 $\mathrm{P}_{L_2}(y_1,\mathrm{x}_1)$

對 L_3 鏡射後的點為 $\mathrm{P}_{L_3}(-y_1,-\mathrm{x}_1)$

此時 3 倍重心 $3\mathrm{G}_1(\mathrm{x}_1,-y_1+2)$

同理 $3\mathrm{G}_2(\mathrm{x}_2,-y_2+2)$、$3\mathrm{G}_3(\mathrm{x}_3,-y_3+2)$

此時帶入待證式子對消後即成立

三、30°、60°、90° 的三角形

待證：$\frac{(a_2-a_1)(a_3-a_1)+(b_2-b_1)(b_3-b_1)}{\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}\cdot\sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2}}=\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\cdot\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}}$

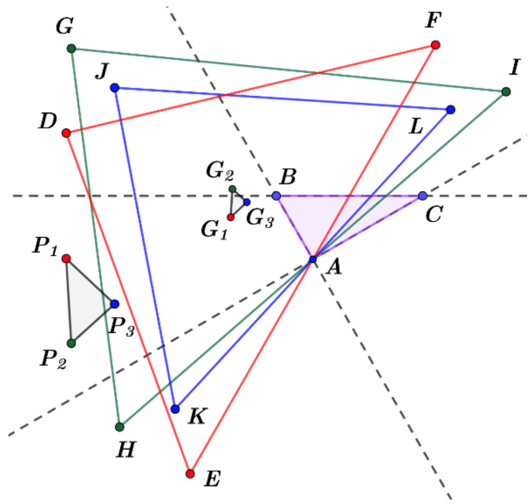
等腰直角三角形 $\Delta\mathrm{ABC}$ 由 L_1、L_2、L_3 組成

任意不位於頂點上的點 P_1

鏡射矩陣 $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$

$\mathrm{L}_2(60°)$ 帶入後此矩陣為 $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\mathrm{L}_3(150°)$ 帶入後此矩陣為 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$



對 L_1 鏡射後的點為 $\mathrm{P}_{L_1}(\mathrm{x}_1,-y_1+\sqrt{3})$

對 L_2 鏡射後的點為 $\mathrm{P}_{L_2}(\frac{-x_1+\sqrt{3}\cdot y_1}{2},\frac{\mathrm{y}_1+\sqrt{3}\cdot\mathrm{x}_1}{2})$

對 L_3 鏡射後的點為 $\mathrm{P}_{L_3}(\frac{x_1-\sqrt{3}\cdot y_1}{2},\frac{-\mathrm{y}_1-\sqrt{3}\cdot\mathrm{x}_1}{2})$

此時 3 倍重心 $3\mathrm{G}_1=(\mathrm{x}_1,-y_1+\sqrt{3})$

同理 $3\mathrm{G}_2(\mathrm{x}_2,-y_2+\sqrt{3})$、$3\mathrm{G}_3(\mathrm{x}_3,-y_3+\sqrt{3})$

此時帶入待證式子對消後即成立

四、任意直角三角形

待證：$\frac{(a_2-a_1)(a_3-a_1)+(b_2-b_1)(b_3-b_1)}{\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}\cdot\sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2}}=\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\cdot\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}}$

等腰直角三角形 $\Delta\mathrm{ABC}$ 由 L_1、L_2、L_3 組成

任意不位於頂點上的點 P_1

旋轉後將 A 點固定在原點，$\overline{BC}$ 平行於 x 軸，其與 x 軸的距離為 k

鏡射矩陣 $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$

$\mathrm{L}_2(\theta)$ 帶入後此矩陣為 $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$

$\mathrm{L}_3(90°+\theta)$ 帶入後此矩陣為 $\begin{bmatrix}\cos(180°+2\theta) & \sin(180°+2\theta)\\ \sin(180°+2\theta) & -\cos(180°+2\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$

對 L_1 鏡射後的點為 $\mathrm{P}_{L_1}(\mathrm{x}_1,-y_1+2\mathrm{k})$

對 L_2 鏡射後的點為 $\mathrm{P}_{L_2}(\mathrm{x}_1\cdot\cos 2\theta+y_1\cdot\sin 2\theta,-y_1\cdot\cos 2\theta+x_1\cdot\sin 2\theta)$

對 L_3 鏡射後的點為 $\mathrm{P}_{L_3}(-\mathrm{x}_1\cdot\cos 2\theta-y_1\cdot\sin 2\theta,y_1\cdot\cos 2\theta-x_1\cdot\sin 2\theta)$

此時 3 倍重心 $3\mathrm{G}_1=(\mathrm{x}_1,-y_1+2k)$

同理 $3\mathrm{G}_2(\mathrm{x}_2,-y_2+2k)$、$3\mathrm{G}_3(\mathrm{x}_3,-y_3+2k)$

此時帶入待證式子對消後即成立

總結

1. 任意點對正三角形 ΔABC 的鏡射三角形，其重心位置必定和 ABC 三角形的重心重合。

2. 我們將 ΔABC 三個角度假設成 45°、45°、90°。用 P_1、P_2、P_3 三個點對 ΔABC 鏡射，得到三個重心 G_1、G_2、G_3，將三重心連起來得到的三角形必與 P_1、P_2、P_3 三角形相似。接著我們再將 ΔABC 三個角度假設成 30°、60°、90°。用 P_1、P_2、P_3 三個點對 ΔABC 鏡射，得到三個重心 G_1、G_2、G_3，將三重心連起來得到的三角形也必與 P_1、P_2、P_3 三角形相似。

3. 第二點證明方法是使用鏡射矩陣，並使用

$$\frac{(a_2-a_1)(a_3-a_1)+(b_2-b_1)(b_3-b_1)}{\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}\times\sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2}} \Rightarrow \frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\times\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}}$$

此方法求相似形證明，發現只要一將個角度設為 90°，改變等式結果的常數項只有一個。

伍、未來展望

1. 討論任意三角形對任意 ΔABC 是否都存保角變換。

2. 找出任意三點對任意 ΔABC 鏡射，觀察保角變換的縮放倍率關係。

3. 希望能觀察出共同的外心性質，並且整理成一般式。

陸、參考資料

[1] 第 62 屆全國科展作品：三角形與其垂足三角形的心不變量。檢自：
https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/62/pdf/NPHSF2022-030415.pdf?0.5737694491921621
[2] 數學基礎講義 – 平面上的線性變換。檢自：
https://resource.learnmode.net/upload/flip/book/14/14facc1cc84d7f7a/dcb0b85eb4dd.pdf