

壹、前言

一、研究動機

在尋找題目時，看了第 62 屆全國科展作品《三角形與其垂足三角形的心不變量》，發現鏡射三角形與垂足三角形相似，而垂足三角形有許多漂亮的性質，便猜想與鏡射三角形是否也有特別的性質。我們又參考了第 62 屆全國科展作品《 $X-mirrOr$ ~三角形全等點位置與性質討論》，決定以鏡射三角形的心為研究方向。在利用 *GeoGebra* 軟體繪圖並觀察後發現，在眾多的心之中，重心及外心具有較特別的性質，且較方便計算坐標。確認好研究方向後，我們就朝著鏡射三角形的重心與外心的鏡射狀況持續研究。

本研究中所有圖片皆為作者使用 *GeoGebra* 軟體繪製。

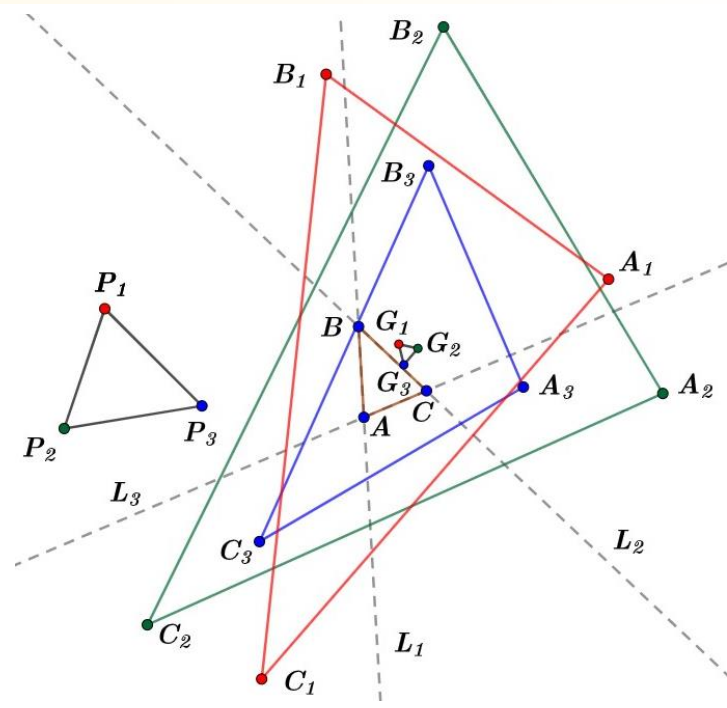


圖 1－原三角形及其鏡射重心形成之三角形。

二、研究目的

- (一) 平面上任一點對特殊三角形做鏡射後，得到的鏡射三角形的重心之位置，與原三角形之重心位置之關聯性。
- (二) 平面上任三點對特殊三角形做鏡射後，得到的三個鏡射三角形重心形成的三角形，與原本的三點形成之三角形之間的關係。
- (三) 平面上任三點對任意三角形做鏡射後，得到的三個鏡射三角形重心形成的三角形，與原本的三點形成之三角形之間的關係。
- (四) 平面上任意點落在過任意三角形頂點的直線上，其鏡射外心軌跡的圖形。
- (五) 平面上任意點落在過特殊三角形頂點的外接圓切線上時，其鏡射外心和頂點的距離與原本的點和頂點的距離之關係。
- (六) 平面上點在直線上移動時，對特殊三角形的鏡射外心形成之軌跡及其方程式。

貳、研究過程及方法

一、名詞定義

(一) $M(L, P_n)$ ： P_n 點對直線 L 鏡射之後得到的點。

(二) **鏡射三角形**：

給定一三角形、任意點 P_n （不位於的三角形的外接圓上），對三角形三邊延長線分別鏡射，得到三個點，所形成的圖形就是鏡射三角形。根據前面的研究，當 P_1 落於 $\triangle ABC$ 的外接圓上時， P_1 對 $\triangle ABC$ 的鏡射三點會形成一直線，如圖 2，故不考慮此狀況。

(三) $M(\triangle ABC, P_n)$ ：

此為 P_n 對 $\triangle ABC$ 的鏡射三角形；為了方便對頂點的表示，將 \overrightarrow{AB} 視為 L_1 、 \overrightarrow{BC} 視為 L_2 、 \overrightarrow{CA} 視為 L_3 ，故 $M(\triangle ABC, P_n)$ 也可記為 $\triangle A_nB_nC_n$ ，如圖 3。

(四) **鏡射重心**： $M(\triangle ABC, P_n)$ 重心為 G_n ，如圖 3。

(五) **鏡射外心**： $M(\triangle ABC, P_n)$ 外心為 O_n ，如圖 3。

(六) **外接圓切線**： t_A 、 t_B 、 t_C 分別為過 A 、 B 、 C 點的 $\triangle ABC$ 外接圓切線。

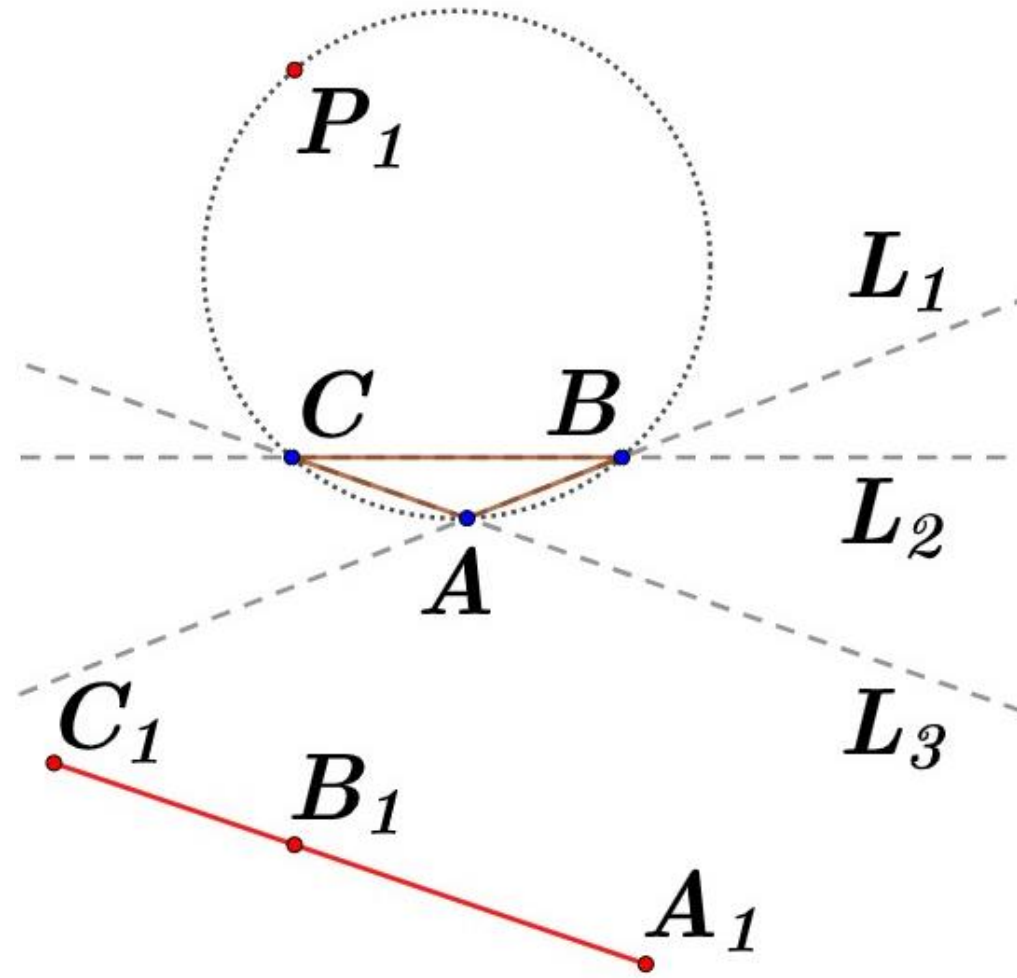


圖 2－ P 點位於外接圓上時，鏡射後三點共線。

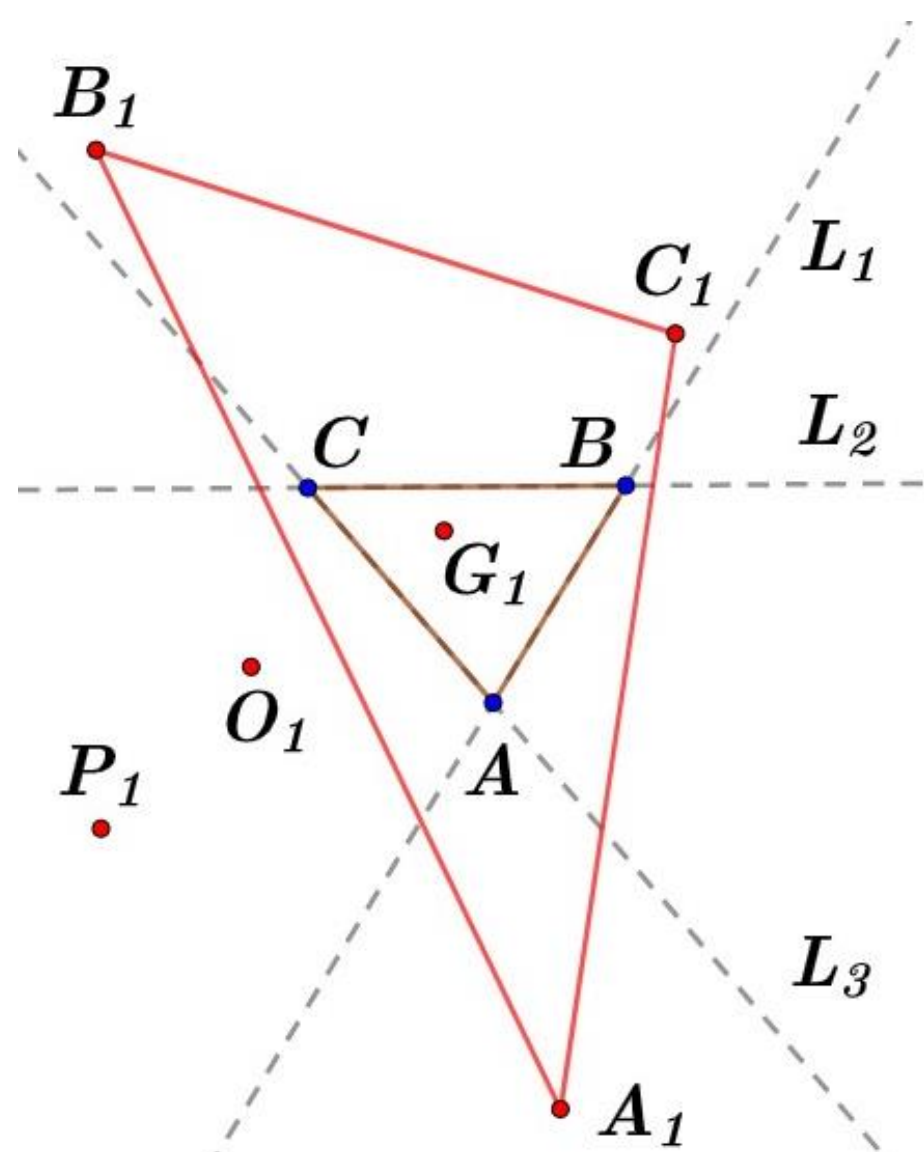


圖 3－ $M(\triangle ABC, P_1)$ 為 $\triangle A_1B_1C_1$ ，重心為 G_1 ，外心為 O_1 。

參、研究結果

一、正三角形的鏡射重心情況

P_1 點對正三角形做鏡射三角形，利用鏡射矩陣得到鏡射三角形三點座標 A_1 、 B_1 、 C_1 ，此時鏡射重心 $G_1 = \frac{A_1+B_1+C_1}{3}$ ，與 $\triangle ABC$ 的重心相同。將其整理成**定理一**，如下：

定理一：當 $\triangle ABC$ 為正三角形時， $M(\triangle ABC, P_1)$ 的重心 G_1 與 $\triangle ABC$ 的重心重合。

接下來我們研究對非正三角形的鏡射重心性質。

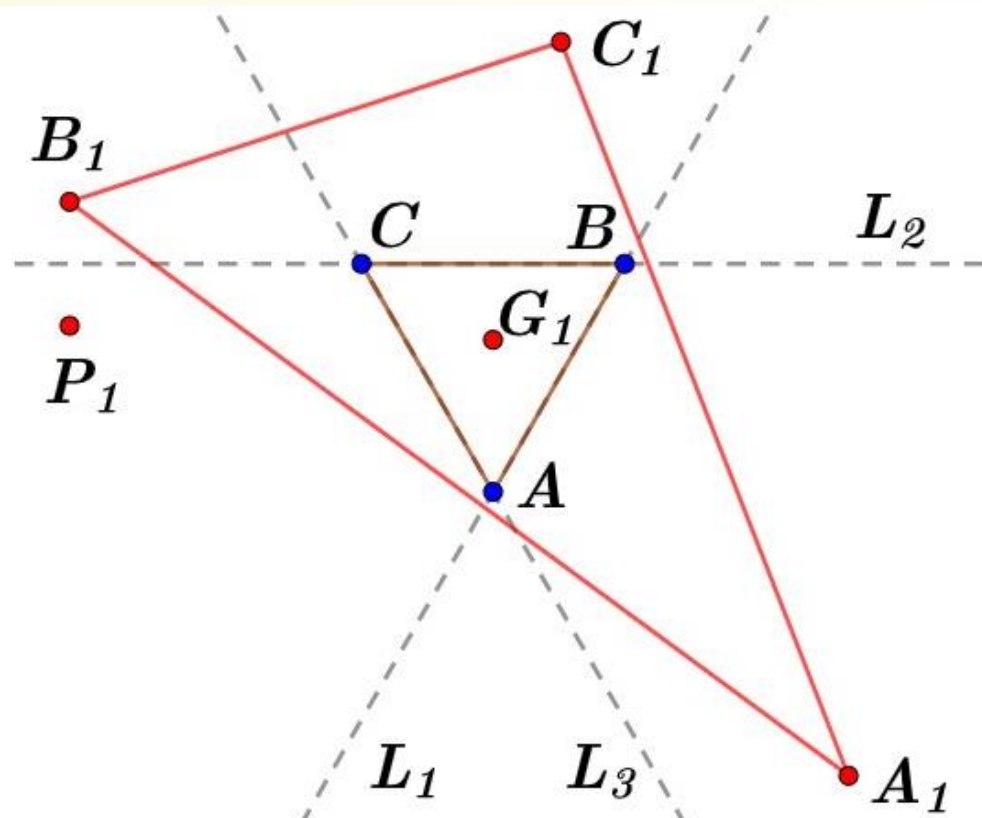


圖 4－鏡射重心 G_1 與正三角形重心 G 重合。

二、任意三角形的鏡射重心情況

我們首先來看任意直角三角形的鏡射情況，經過觀察發現任意三點對任意直角三角形鏡射後，重心連線之新三角形與原三角形相似，三個鏡射三角形的重心所連成的三角形會與 $\triangle P_1P_2P_3$ 相似，且縮放倍率同為 $\frac{1}{3}$ 倍，如圖 5。

將其整理成**定理二**，如下：

定理二：在對直角三角形鏡射的情況下， P_1 、 P_2 、 P_3 會分別對應到 G_1 、 G_2 、 G_3 ； $G_1G_2G_3$ 與 $\triangle P_1P_2P_3$ 相似，且 $\triangle G_1G_2G_3$ 為 $\triangle P_1P_2P_3$ 的 $\frac{1}{3}$ 倍。

因為對直角三角形鏡射的情況下 $\triangle G_1G_2G_3$ 與 $\triangle P_1P_2P_3$ 都會相似，且縮放倍率皆為 $\frac{1}{3}$ 倍，由此猜測，平面上任意三點對任意三角形（非正三角形）做鏡射， $\triangle G_1G_2G_3$ 必與 $\triangle P_1P_2P_3$ 相似，且依照角度會有特定的縮放倍率，底下依照圖 6 的標示坐標化證明之。

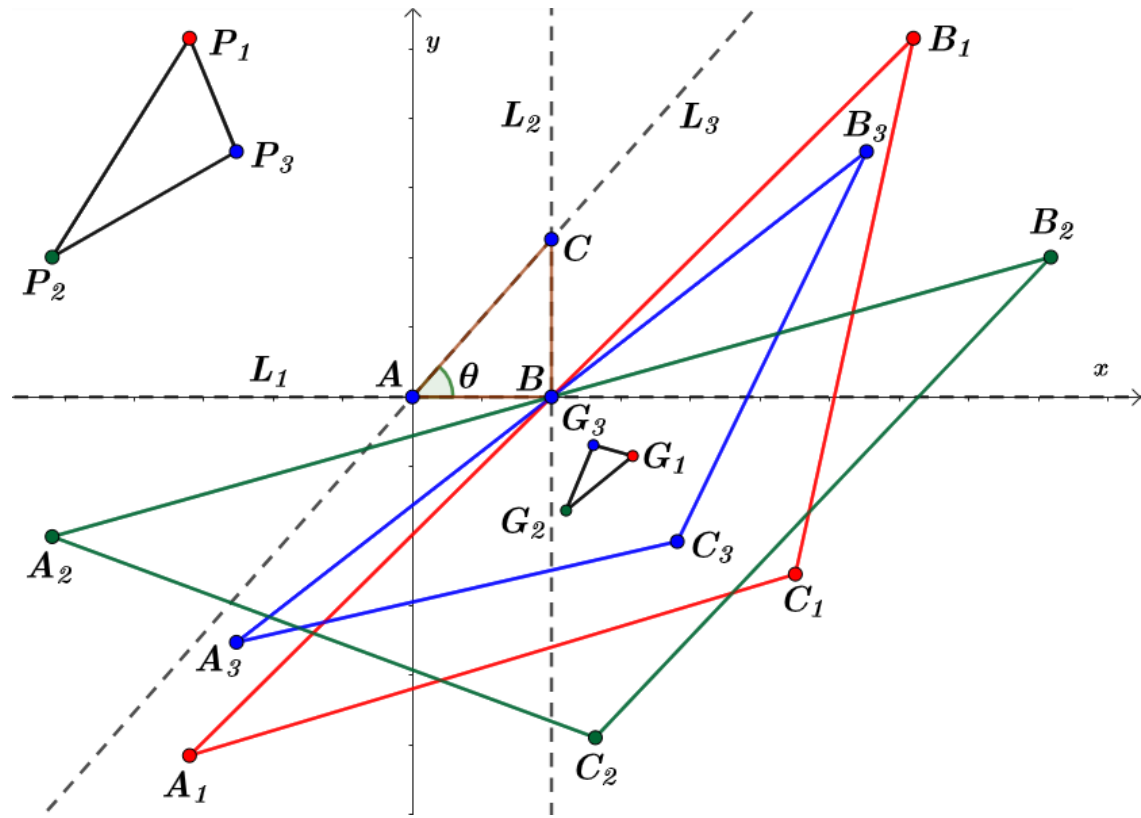


圖 5－在對任意直角三角形鏡射的情況， $\triangle G_1G_2G_3$ 與 $\triangle P_1P_2P_3$ 相似，且 $\triangle G_1G_2G_3$ 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的 $\frac{1}{3}$ 倍。

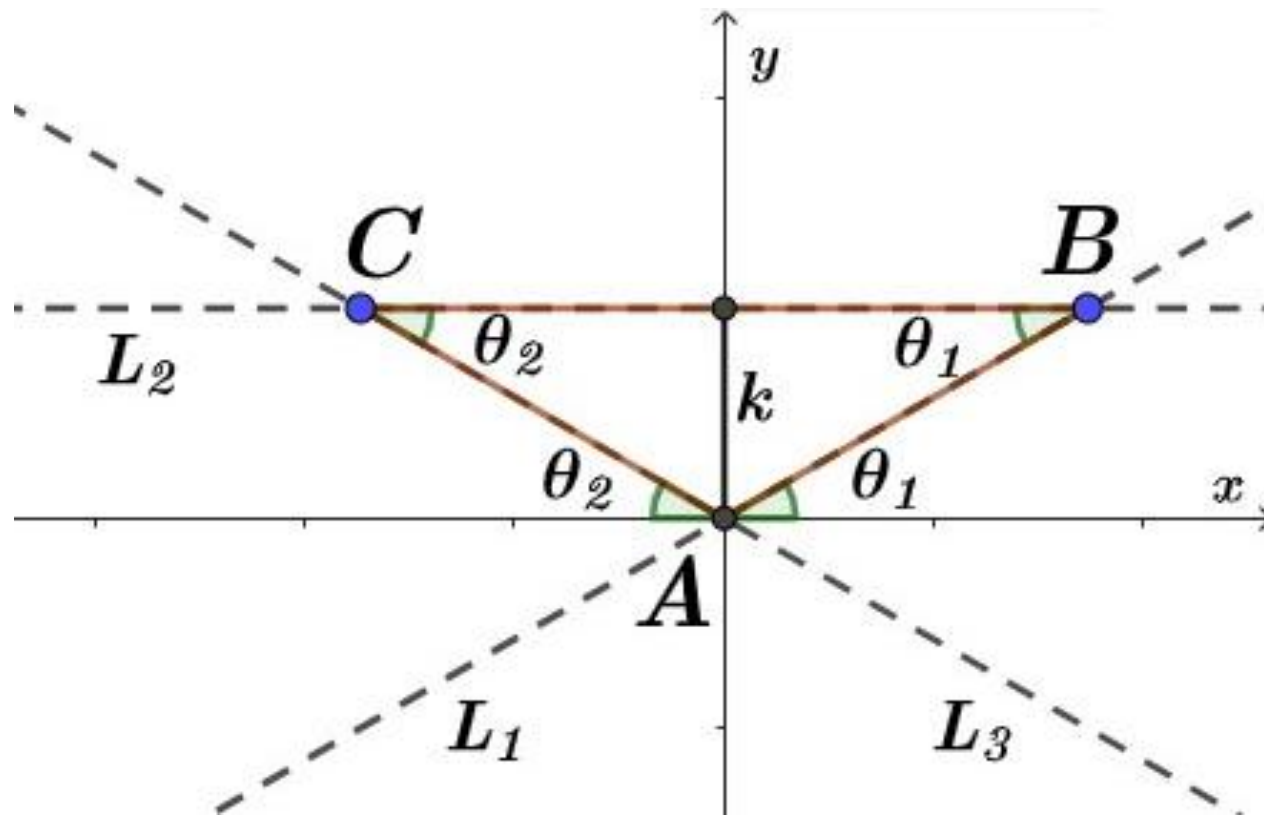


圖 6－固定三角形 A 點於原點，使其一邊平行於 x 軸。