八、當點在任意直線上時

（一）為等腰直角三角形的情況

　　不失一般性，將平移、旋轉後，使、、。

　　先不考慮水平或鉛直線的情況，此時直線必會交、軸各一點，令其為、。

　　，則可得鏡射後三點：、、。中垂線為、中垂線為；即為此二中垂線之交點，將帶入可得，因此。

　　，則可得鏡射後三點：、、。中垂線為、中垂線為；即為此二中垂線之交點，將帶入可得，因此。

　　由於有觀察道，點的軌跡為直線時，其鏡射外心軌跡會是圓錐曲線。根據定理四，可得知必有其中點的外心分別落在、、點上，故在此利用、、、、這點來求出此圓錐曲線。

　　利用兩點式，先求得、、、。

　　利用圓錐曲線族的方法，我們可以得出，再將帶入，可以得出，因此。將帶回原式，；將此式左右同除以，即可得此圓錐曲線為。

　　為了確認此圓錐曲線，我們將上的點帶入做計算，可得。將代入此圓錐方程，如下：

　　先令，先計算二次項總和，

、、項總和為，

接著計算一次項總和，

、項總和為；兩者相加為，故上的任意點，其鏡射外心都會落在此圓錐曲線上，如圖。

　　將上述整理為定理如下：

|  |
| --- |
| 定理：為等腰直角三角形，當點落在直線上時，鏡射外心會落在  　　　　圓錐曲線上。 |

（二）為正三角形的情況

　　不失一般性，將平移、旋轉後，使、、。

　　先不考慮水平或鉛直線的情況，此時直線必會交、軸各一點，令其為、。

　　，則可得鏡射後三點：、、。中垂線為、中垂線為；即為此二中垂線之交點，整理上式後將帶入可得，因此。

　　，則可得鏡射後三點：、、。中垂線為、中垂線為；即為此二中垂線之交點，整理上式後將帶入可得，因此。

　　由於有觀察道，點的軌跡為直線時，其鏡射外心軌跡會是圓錐曲線。根據定理四，可得知必有其中點的外心分別落在、、點上，故在此利用、、、、這點來求出此圓錐曲線。

　　利用兩點式，先求得、、、。

　　利用圓錐曲線族的方法，我們可以得出，再將帶入，可以得出，因此。將帶回原式，；即可得此圓錐曲線為。

　　為了確認此圓錐曲線，我們將上的點帶入做計算，可得。將代入此圓錐方程，如下：

　　先令，先計算二次項總和，

、、項總和為，

接著計算一次項總和，

、項總和為；兩者相加為，故上的任意點，其鏡射外心都會落在此圓錐曲線上，如圖。

　　將上述整理為定理如下：

|  |
| --- |
| 定理：當點落在直線上時，鏡射外心會落在圓錐曲線  　　　　上。 |