中華民國第65屆**中小學**科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：鏡下心來

關 鍵 詞：鏡射三角形、鏡射矩陣、坐標化

編 號：

摘要

　　本研究從探討平面上任點對任意三角形所鏡射出之三角形的心，與原三角形的心是否具

有關聯性開始。鏡射三角形即是平面上任一點分別對三角形的三邊延長直線做鏡射後，所得

到三點形成的三角形。在特定情況下，鏡射三角形的心與原三角形的心之間有所關聯。之後

進一步觀察不同點對固定角度之三角形作出之鏡射三角形的各個心之間的關係，以及這些鏡

射點的連線與原點連線間的關係，也利用固定角度之三角形所推出的規律，繼續探究任意角

度的三角形的各個心，與鏡射三角形的心之間的關聯。

壹、前言

一、研究動機

　　在尋找題目時，看了第 62 屆全國科展作品《三角形與其垂足三角形的心不變量》，

發現鏡射三角形會與垂足三角形相似，因為若把鏡射三角形的三點與原本的點之距離縮放二

分之一倍，就會落在原三角形之垂足上，即是垂足三角形，因此可以依此性質回推，如果將

垂足三角形對原本的點縮放兩倍，即為鏡射三角形；在研究中，垂足三角形上有許多漂亮的

性質，我們便猜想與垂足三角形類似的鏡射三角形是否也具有特別的性質。

為了更加了解垂足和垂足三角形的性質，我們又參考了第 62 屆全國科展作品

《X-mirrOr~三角形全等點位置與性質討論》，之後決定以鏡射三角形的心為研究方向，觀察

原本的點與鏡射三角形的各個心形成之圖形以及對應點之坐標的關聯。

　　在利用軟體繪圖並觀察性質後，發現在眾多的心之中，重心以及外心具有

較特別的性質，且有較簡單的坐標計算方式，重心即是三點的坐標相加的三分之一倍，

而外心則是三邊中垂線的交點，可以先求出兩條中垂線的直線方程式，再得到兩條直線的

交點，也就是外心，確認好大致的方向之後，我們就朝著鏡射三角形的重心與外心的鏡射

狀況持續進行研究。

二、研究目的

（一）平面上任一點對特殊三角形做鏡射後，得到的鏡射三角形的重心之位置，

與原三角形之重心位置之關聯性。

（二）平面上任三點對特殊三角形做鏡射後，得到的三個鏡射三角形之重心形成的三角形，

與原本的三點形成之三角形之間的關係。

（三）平面上任三點對任意三角形做鏡射後，得到的三個鏡射三角形之重心形成的三角形，

與原本的三點形成之三角形之間的關係。

（四）平面上任意點落在過任意三角形頂點的直線上，其鏡射外心軌跡的圖形。

（五）平面上任意點落在過特殊三角形頂點的外接圓切線上時，其鏡射外心和頂點的距離

與原本的點和頂點的距離之關係。

（六）平面上點在直線上移動時，對特殊三角形的鏡射外心形成之軌跡及其方程式。

貳、研究器材與設備

紙、筆、電腦、計算機、

參、研究過程及方法

本研究中所有圖片皆為作者使用軟體繪製。

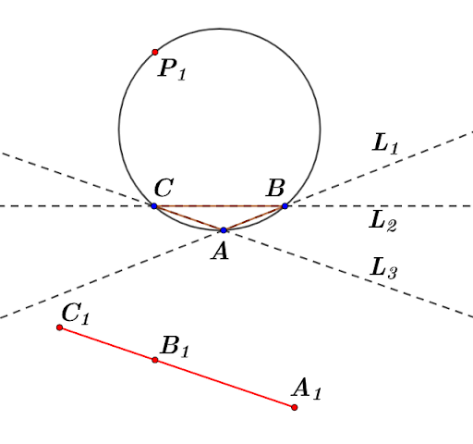
【名詞定義】

**（一）**：點對直線鏡射之後得到的點。

**（二）鏡射三角形**：給定一三角形、不在外接圓上的任意點，對三角形

三邊延長線分別鏡射，得到三個點形成的圖形就是鏡射三角形。

圖點位於外接圓上時，鏡射後三點共線。



根據參考資料，當落於的外接圓上時，對

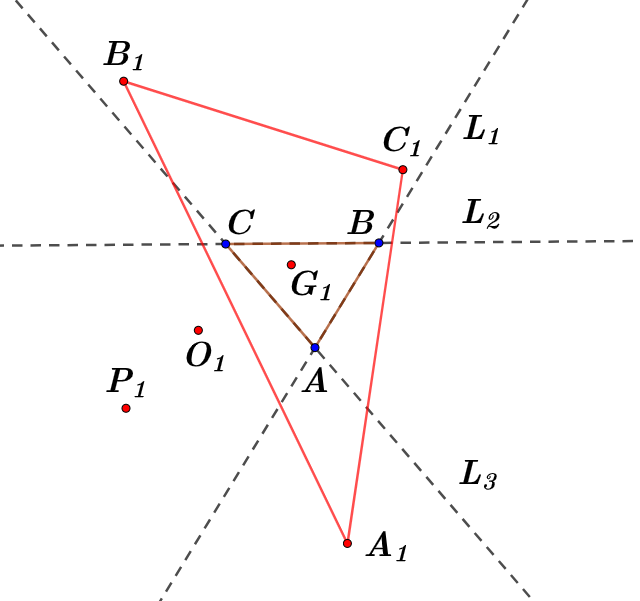
鏡射後三點會形成一直線，如圖，故不考慮此狀況。

**（三）**：此為對的鏡射三角形；為了方便對頂點的表示，我們

將視為、視為、視為，故也可

記為，如圖。

圖為，重心為，外心為。



**（四）鏡射重心**：重心為，如圖。

**（五）鏡射外心**：外心為，如圖。

**（六）外接圓切線**：、、分別為過、、點

的外接圓切線。

肆、研究結果

一、對正三角形的鏡射重心性質

　　用、兩點分別對正三角形做鏡射三角形，發現這兩個鏡射三角形的重心都與原三

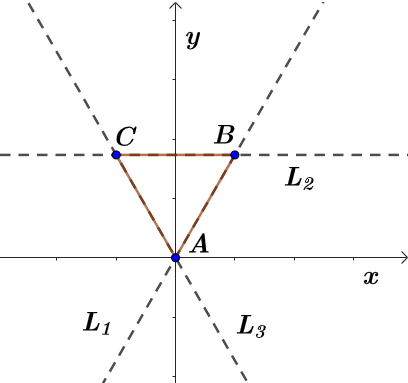
角形的重心重合。因此我們猜測，任意點對正三角形作鏡射三角形，其會和

原三角形之重心重合。底下證明之：

　　為平面上的一邊長為之正三角形，不失一般性，將點固定在原點，

使平行軸，位於此時，如圖。

圖正三角形旋轉後，固定一點在直角坐標平面原點。



　　令平面上一點，為、為 、

為、為；利用鏡射矩陣得到：

關於的鏡射矩陣為

(因與軸正向夾角為)

對的鏡射矩陣為

(因與軸正向夾角為)

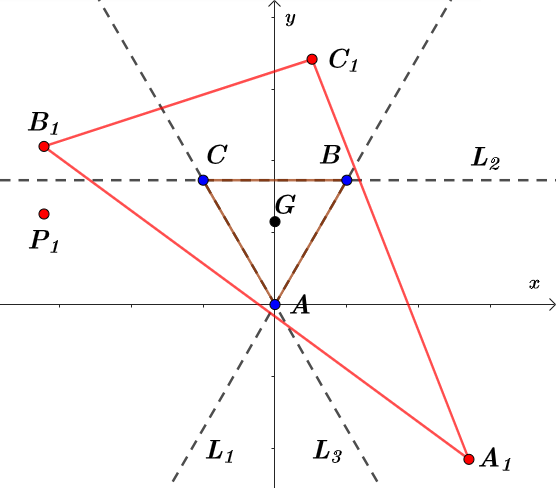
得到鏡射三角形三點坐標分別為：為、

為、為。

　　此時 ， 即為

的重心 ，與的重心相同，如圖。

圖任意點對正三角形作鏡射三角形後，其重心與正三角形重心重合。



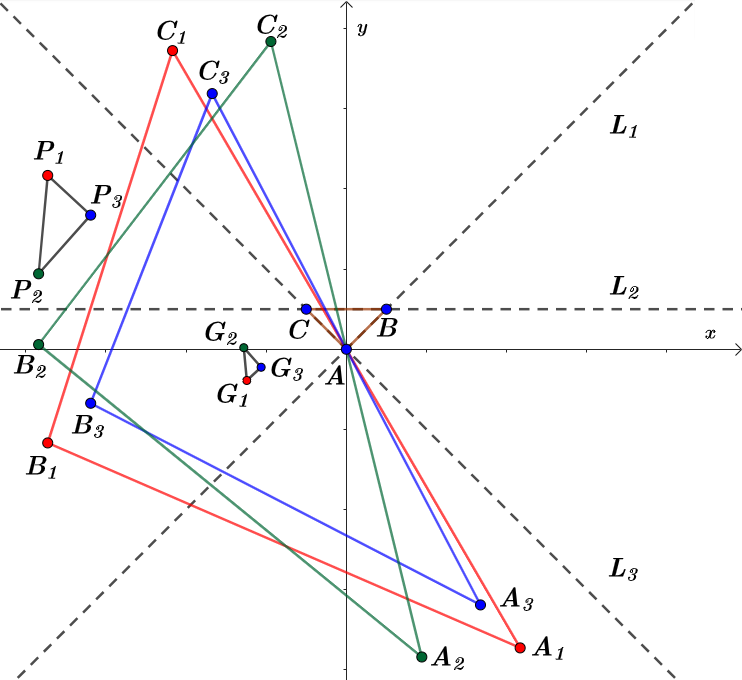
　　將其整理成定理一，如下：

|  |
| --- |
| 定理一：當為正三角形時， 的重心 與的重心重合。 |

有了定理一，可以確定任意三點對正三角形的鏡射重心並沒有辦法形成三角形，都只會

對應到相同位置。

討論完正三角形後，觀察發現等腰直角三角形與、、的三角形鏡射後重心

連線之新三角形會與原三角形相似，且縮放倍率為，如圖、圖。

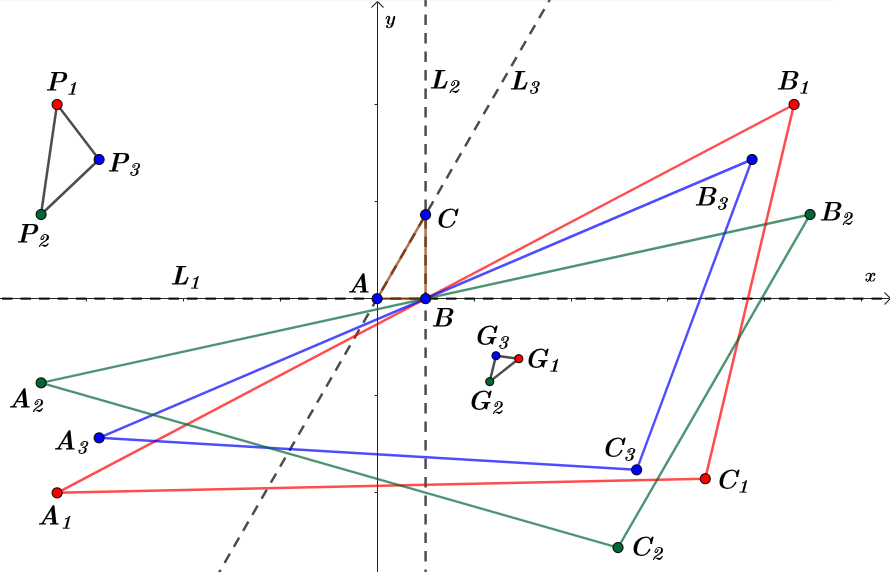


圖 對、、的三角形鏡射後，  
會是縮放倍。

圖 對、、的三角形鏡射後，  
會是縮放倍。

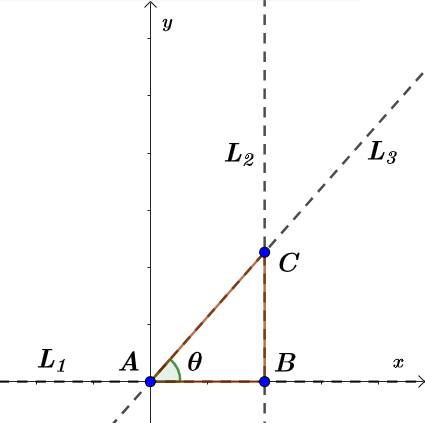
二、對直角三角形的鏡射重心性質

　　因此猜測，平面上任三點對任意直角三角形做鏡射後，鏡射重心形成之三角形會

與相似，且縮放倍率為，底下證明之：

　　令一直角三角形，將固定在原點，使位於軸上，垂直軸，

且與軸的正向夾角為，此時、、，如圖。



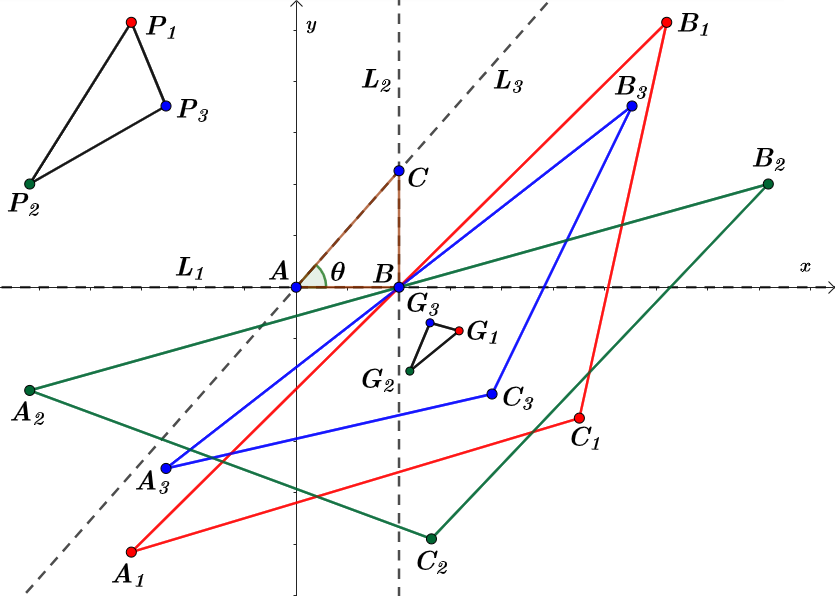
圖直角三角形旋轉後，

固定一點在直角坐標平面原點，

讓一股貼合軸。

　　給定三點、、，將這三點分別對做鏡射三角形，

這三個鏡射三角形的重心分別為、、，如圖。



圖將、、分別對做鏡射三角形，此三個鏡射三角形的  
重心分別為、、。

此時，關於的鏡射矩陣為

（因與軸正向夾角為）

可得為、為、

為

因此，以此類推可知道、。

故與全等；又因為對原點縮放倍，

與相似，且長度會是的倍。

將其整理成定理二，如下。

|  |
| --- |
| 定理二：在對任意直角三角形鏡射的情況下，、、會分別對應到 、、 且與相似，長度會分別是的倍。 |

根據定理二，發現在對直角三角形鏡射的情況下，與

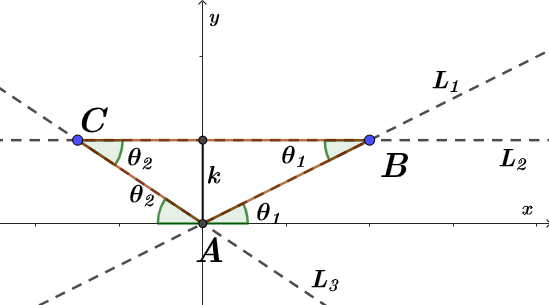
都會相似，且縮放倍率是倍，於是好奇其餘的三角形會不會也有固定的縮放倍率，接著來

討論任意三角形的情況，一樣利用類似的手法進行坐標化來減少代數運算。

三、對任意三角形的鏡射重心性質

　　令一三角形，其斜邊上的高長度為，、，將點固定在

原點，此時：，，且平行於軸，如圖。



圖，，。

將定義為，將定義為: ，將定義為

: ，並給定三點、、，將這三點分別

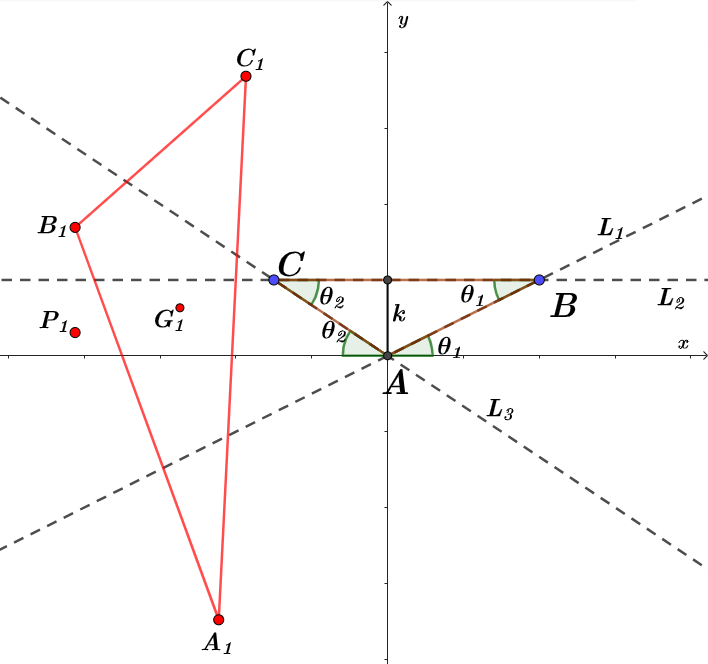
對的三邊延長線鏡射出，分別

記作、、。

以為例，為對鏡射所得到的點，為對鏡射所得到的點，

為對鏡射所得到的點，將、、三點連線，即為，如圖。

圖將對的三邊鏡射得到、、三點，將此三點連線，即為。

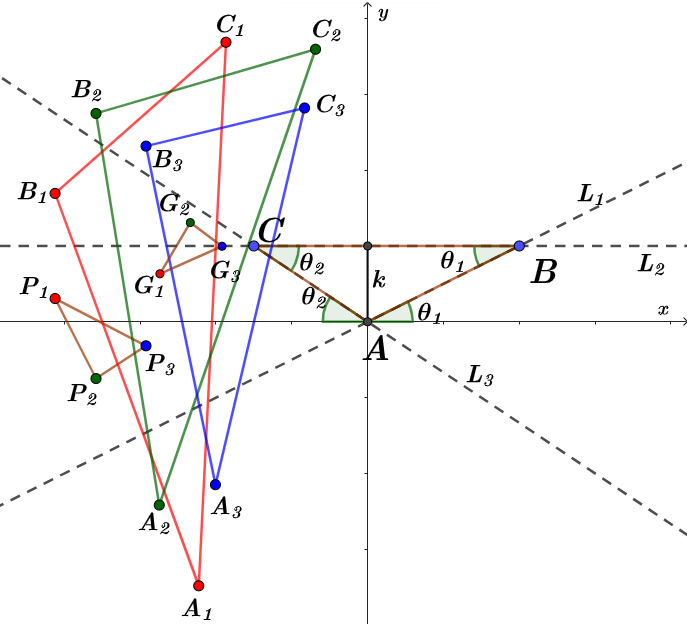


同理類推，分別對點可得、。

此三個鏡射三角形的重心分別為、、，如圖。

圖將、、分別對做鏡射三角形，此三個鏡射三角形的

重心分別為、、。



為了求出坐標，因此我們先利用鏡射矩陣求出、、

的坐標，再將、、三點之和除以三（即），其值即為坐標。

同理可類推、。

關於的鏡射矩陣為 （因與軸正向夾角為）

關於的鏡射矩陣為 （因與軸正向夾角為）

可得點

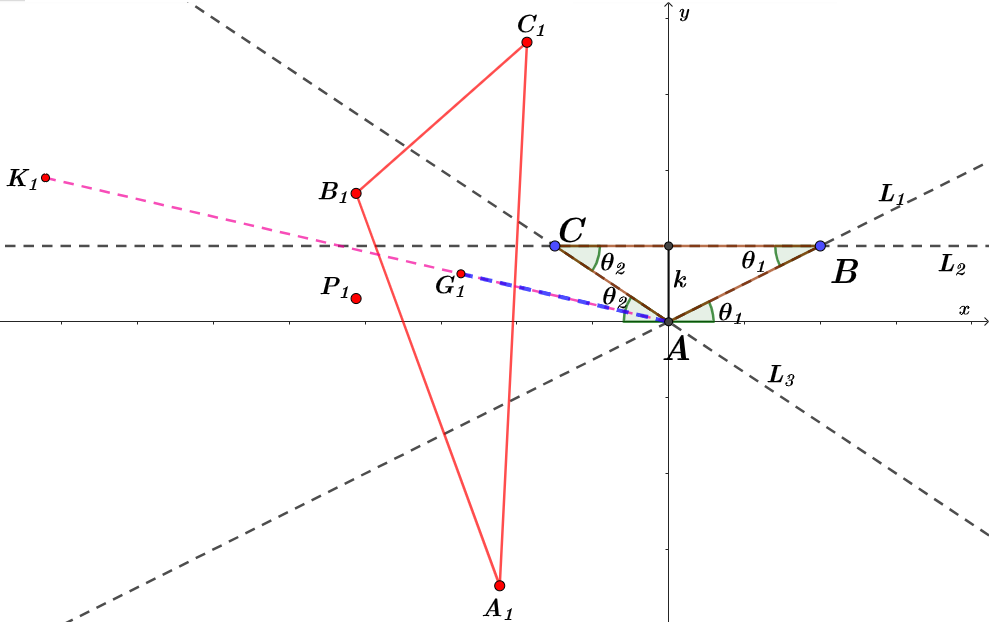
為、

為、

為，

令點為上述三點的和（其、坐標分別為倍坐標），如圖。

圖為三點之和（即倍坐標），  
與離之距離比為。



因此可得、、對鏡射後的三點坐標和分別為：

因此的分量平方為

的分量平方為：

故

亦即，

以此類推可得、

，

根據相似性質，與相似，證畢。

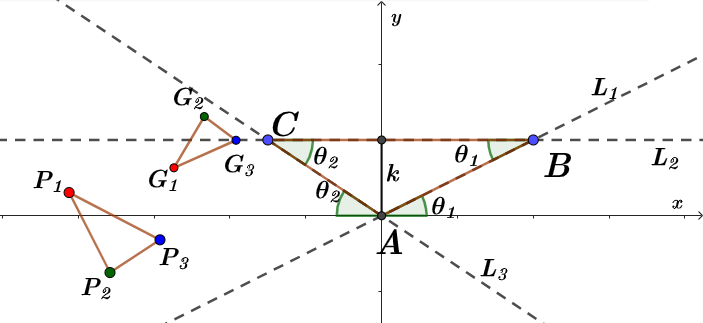
將其整理成**定理三**，如下。

|  |
| --- |
| **定理三**：在對任意三角形鏡射的情況下，、、會分別對應到、、； 與相似，且邊長長度會分別是邊長的倍。 |

有了**定理三**，可以知道對任意非正三角形鏡射後重心連線所形成的三角形會與

原三角形相似，如圖。

圖和相似；縮放倍率為。



至此鏡射三角形重心的性質討論完畢，可以得到任意點對非正三角形做鏡射三角形其

重心與點為保角變換，且長度的變化規律可以計算出來，底下以前面的特殊三角形為例。

　 利用**定理三**來觀察正三角形及直角三角形的情況：

**當為正三角形時**，縮放倍率為

　　縮放倍也就是重合成一個點，與定理一，對正三角形鏡射時得到的、、

會與的重心重合相符，正三角形的情況驗證完畢。

**當為直角三角形時**，縮放倍率為

因，得到上述計算結果，並與定理二相符。

　　至此，可以確定當任意點對鏡射，且非正三角形時，會

與相似，有固定的縮放倍率（由的內角決定），接著來看任一點對鏡射後外心的情況，觀察後發現當是直線上動點時，其鏡射外心移動軌跡**不一定**

是直線，底下先以鏡射外心軌跡是定點或直線的情況進行討論。

四、鏡射三角形外心與的頂點重合情況

經過觀察發現當位在、、上時，會與該直線的對邊頂點重合，底下以位於上的情況為例：

當位於上時，對鏡射後的點會與重合。是對鏡射後的點，而因和重合，故的中垂線與 的中垂線相同，也就是。同理的中垂線也與的中垂線相同，即。

可得外心會是三條中垂線的交點，也就會是和的交點，即點，如圖。

一張含有 行, 圖表, 繪圖, 平行 的圖片

AI 產生的內容可能不正確。

圖位於上，且其鏡射外心與重合。

同樣的，當位在、上，分別和、重合，鏡射重心、會與、重合，將上述整理成**定理四**，如下：

|  |
| --- |
| **定理四**：當落在的三邊延長線、、上時，鏡射外心、、  分別會與 、、的對邊頂點、、重合。 |

**五、落在過****一頂點的直線時，鏡射三角形外心位置關係**

**(一)落在、、上**

　　不失一般性，將平移、旋轉、翻轉後令、、

，且。則平行於軸、與軸正向的夾角為、與軸正向的夾角為，與軸正向的夾角為，

斜率為，如圖。

　　此時與的夾角為，與的夾角為，故、。

（因對頂角及鏡射，可得角度），如圖。

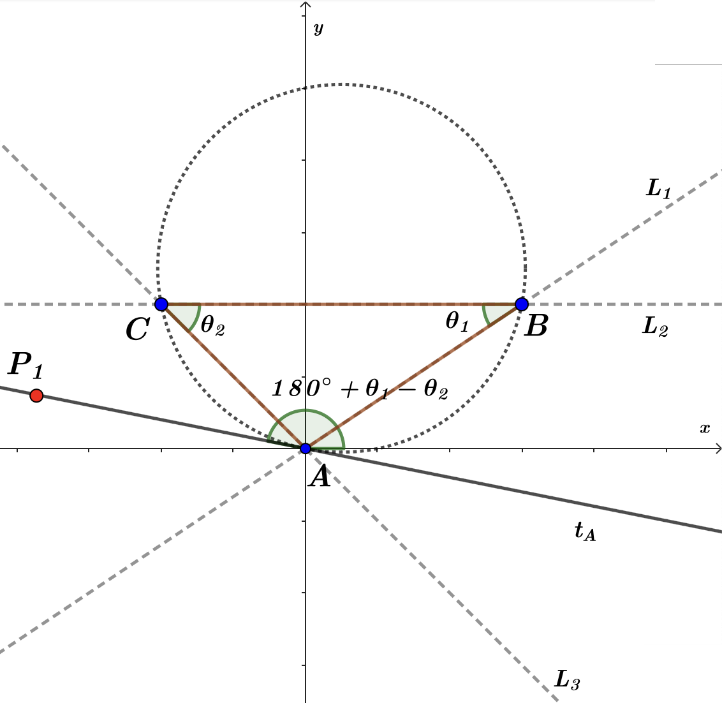
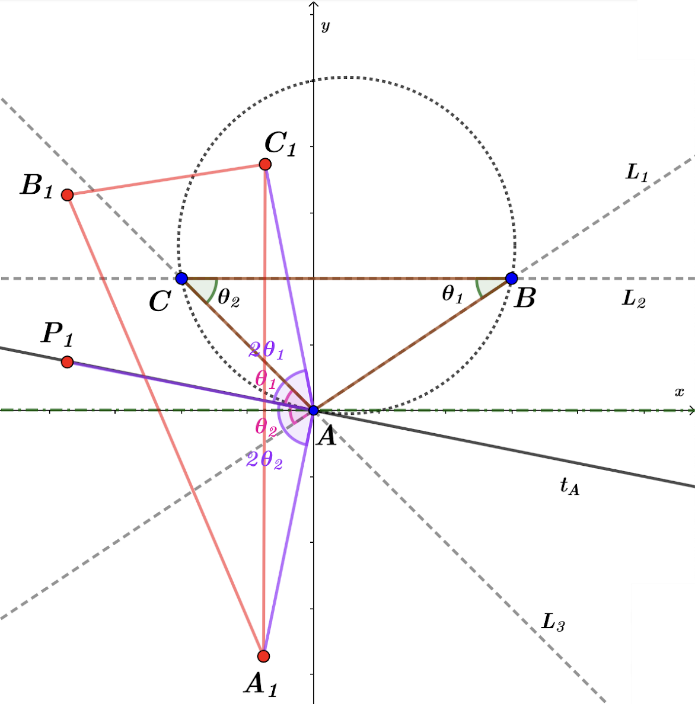


圖 與軸正向的夾角為

。

圖相當於以點為原點

旋轉，同理，

因此的中垂線固定。

　　因，故與軸正向的夾角為

，則的斜率為。

　　因，故與軸正向的夾角為

，則的斜率為。

　　由於為過點直線的動點，所以跟的斜率不變，可得知中垂線為

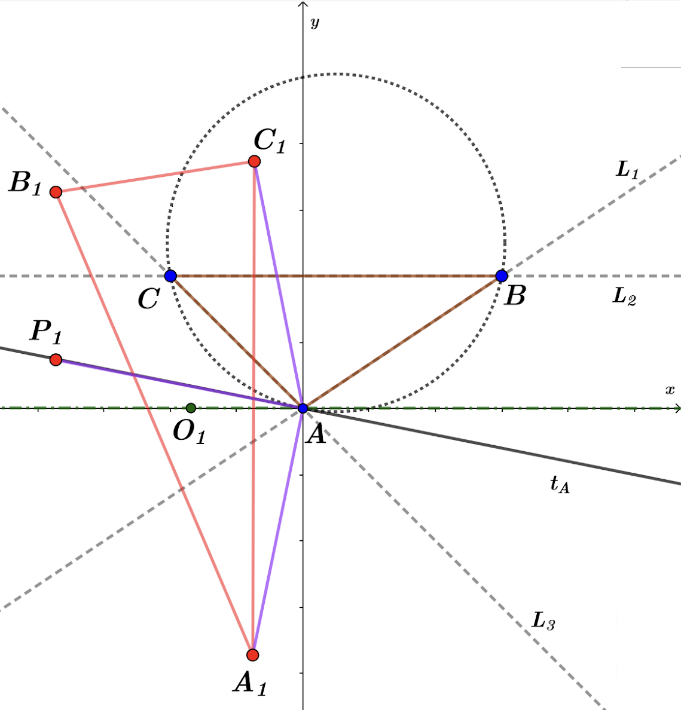
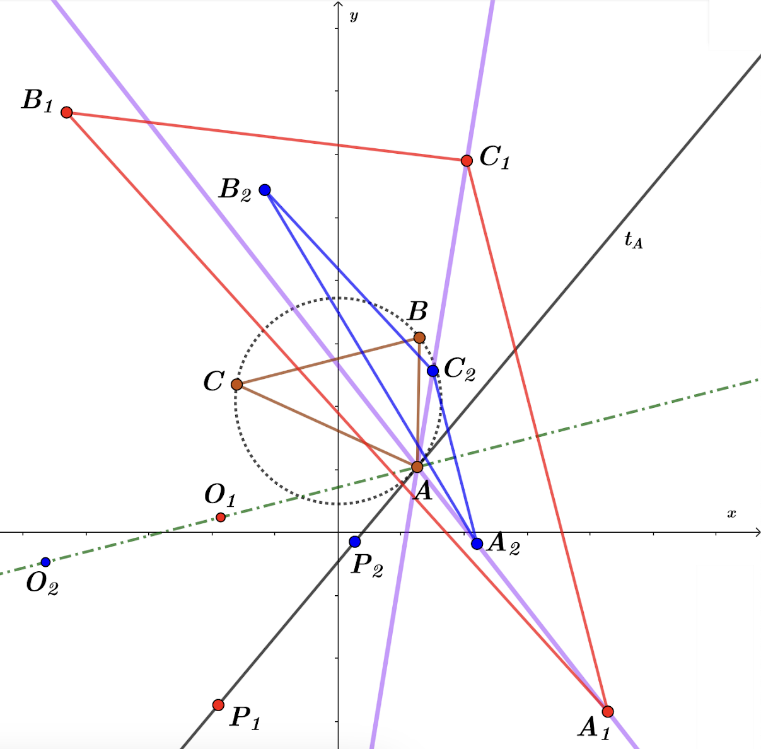
固定直線；又因，故的中垂線即為的角平分線，

其斜率是，與平行。利用平移、旋轉、

翻轉，可以此類推落在、的情況也成立，如圖。

　　根據上述證明可得知只要落在過頂點的外接圓切線上，的所有可能位置會落在

過頂點且平行對邊的直線上，如圖。



圖在上時，平行。

圖 、都在上時，平行。

　　將上述整理為定理五如下：

|  |
| --- |
| **定理五**：當在三角形的外接圓切線、、上時， 鏡射外心會落在過切點且平行對邊的直線上。 |

接下來討論其餘鏡射外心可能位置為直線之情況。

**(二)落在過其中一頂點的直線**

　　在此不失一般性，將其平移、旋轉、翻轉後令、、

，且。則平行於軸、與軸正向的夾角為、

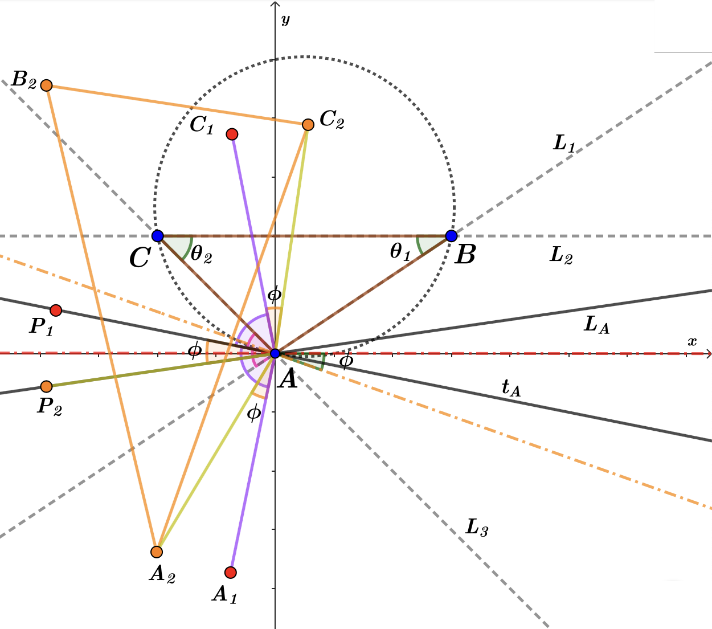
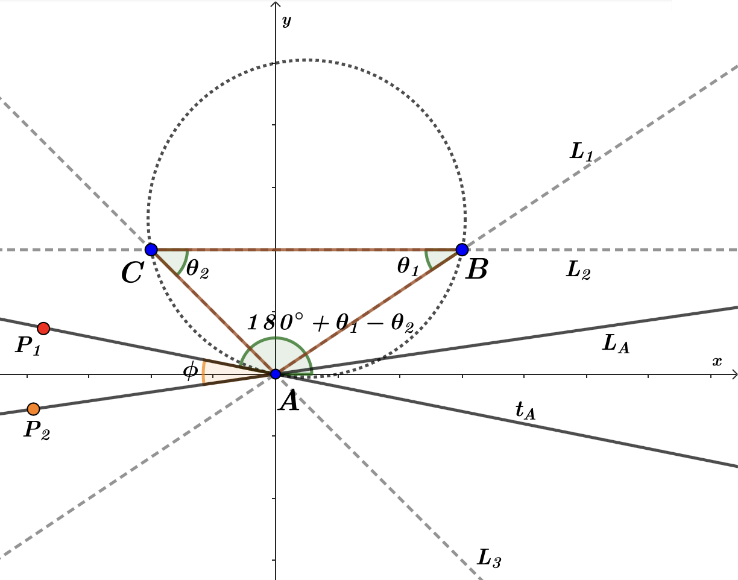
與軸正向的夾角為，與軸正向的夾角為，

過點的直線與軸夾角為、與軸正向的夾角為，如圖。

　　此時比較與的鏡射結果，發現。

因，故的中垂線即為的角平分線；又因與

分別為與順時針旋轉的結果，故的角平分線也就會是

順時針旋轉後的結果，如圖。

圖與軸正向的夾角

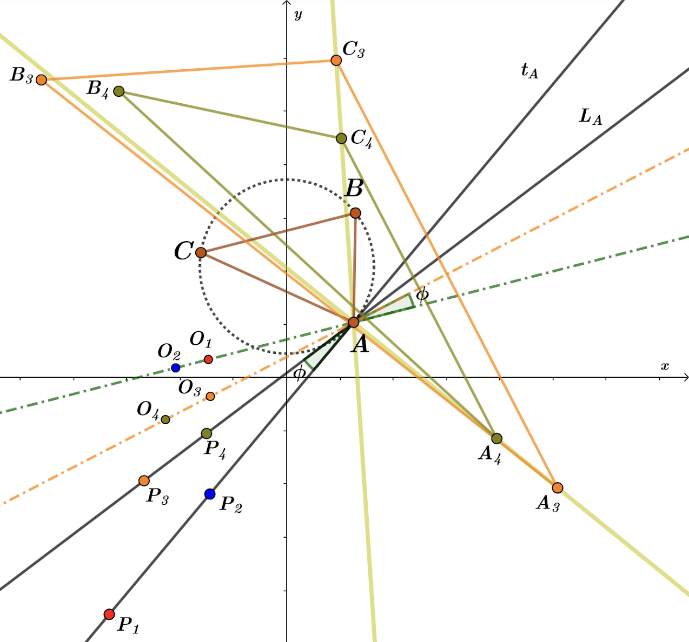
為。

圖中垂線與中垂線

的夾角與相同。

根據上述證明，若、連線過頂點，則、連線也會過點，如圖，

利用平移、旋轉、翻轉，可以類推、落在過、直線上也有此性質，如圖。

一張含有 行, 圖表, 圓形, 平行 的圖片

AI 產生的內容可能不正確。

圖通過任意頂點皆有此性質。

圖若通過點，也會通過點。

　　將上述整理為定理六如下：

|  |
| --- |
| **定理六**：當、連線通過一頂點時，鏡射外心、連線也會通過該頂點。 |

討論完直線情形後，先從特殊三角形的狀況開始討論。

**六、落在特殊三角形的外接圓切線上的情況**

**(一)為等腰直角三角形的情況**

不失一般性，將平移、旋轉、縮放後使得、、，此時為直角，股長為。

觀察發現，當在上移動時，也會在上移動。在此，因為定理五已證明

平行，且兩者的水平距離為，可令，再將此坐標代入計算：

、、，

所以、、。

的斜率為，而其中垂線的斜率為，

中點坐標為

利用點斜式列出：

，因此可以知道必位於上；

的斜率為，

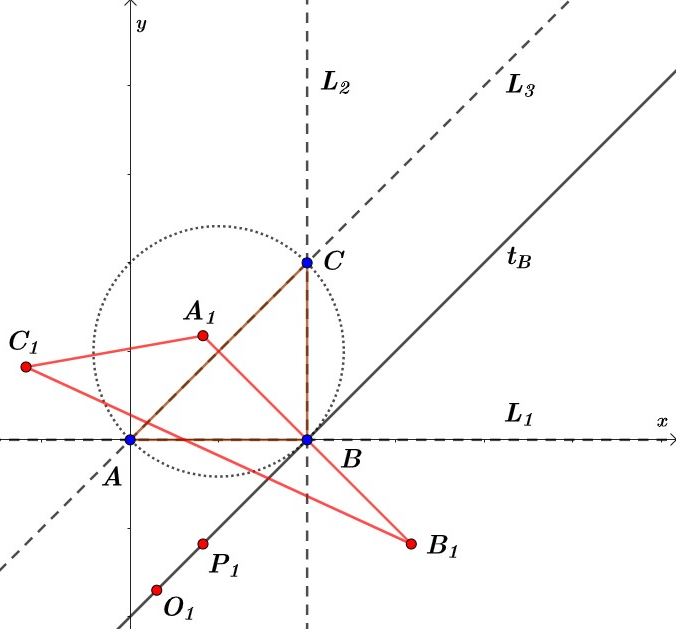
而其中垂線的斜率為，

中點坐標為。

利用點斜式列出：

以帶入，求交點坐標（外心）：

因此，可得知當為上一動點，的移動軌跡會形

成一直線並與重合，如圖。

圖當為等腰直角三角形，

為上一動點，

則的移動軌跡為。

將上述整理成定理七如下：

|  |
| --- |
| 定理七：當等腰直角三角形的外接圓切線上移動時，  鏡射外心的移動軌跡會形成一直線並與重合。 |

接著討論正三角形的狀況。

**(二)為正三角形的情況**

　　不失一般性，將平移、旋轉、縮放後，使得、、

，平行於軸，且其邊長為。

　　若時，對鏡射後得到三點坐標為：

、、。

觀察後發現，若位在、、上，則也會在此切線上。

根據定理五，的中垂線即為；又是三角形三邊、、

的中垂線交點，必定位於（）上，只要算出中垂線求其與交點即可得到坐標。

之中點為，之中點為，

而的中垂線斜率為，的中垂線斜率為，

因此我們用點斜式將值代入：

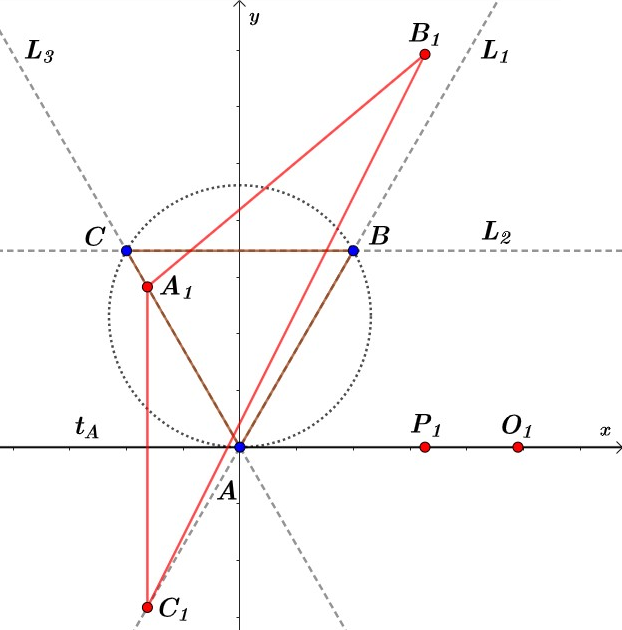
所以，又其坐標恰為，因此可得知也位於

這條直線上，且此直線與重合，因此落在、上的情況也可利用旋轉解釋。

　　由此可知，當為正三角形，且為的頂點外接圓切線上一動點，

的軌跡會形成一直線，且該軌跡為過該切點的切線。

　　如圖，當位於上，也會在上

此時為、、、 。

圖當為正三角形，

為上一動點，

則的軌跡會形成一直線，

且該軌跡為。

將上述整理成定理八如下：

|  |
| --- |
| 定理八：當分別在正三角形的外接圓切線、、上移動時，  鏡射外心的移動軌跡會形成一直線並與、、重合。 |

由於上述情況中，的移動軌跡與的移動軌跡相同，不禁好奇長度變化是否有規

律，接著來看特殊三角形下與之間的關係。

**七、為對特定圓的反演點**

**(一)為等腰直角三角形的情況**

觀察後發現，在等腰直角三角形的情況下，當在直線上時，與之間有特殊

關係，即與的長度相乘會是，其中為之股長，底下證明之：

設，，因此的長度是：

。

，因此的長度是：

。

將與相乘，可得：

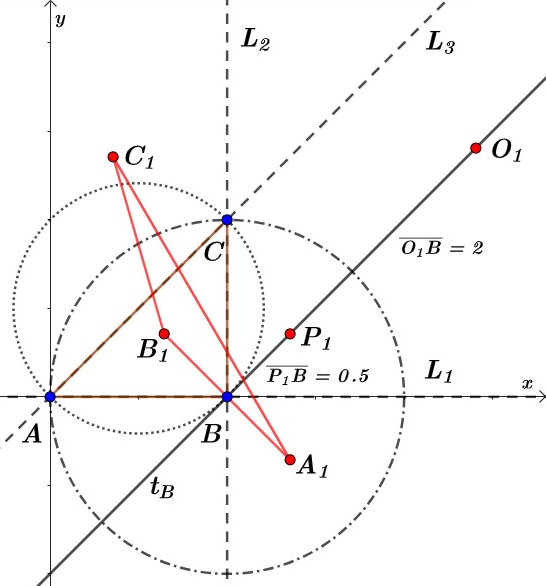
。

　　綜合上述與上定理七，可得知當為等腰直角三角形時，且位於上，

則、與皆位於同一條直線（）上，且與相乘會是，

因此與之間為反演關係，且反演圓為以點為圓心、半徑為的圓，

可以此類推，不論此三角形的股長為何，此性質依舊存在，如圖。



圖股長為，

在上；

則。

將上述內容整理成定理九：

|  |
| --- |
| 定理九：當落在等腰直角三角形的時，  是對以點為圓心，股長為半徑的圓之反演點。 |

接著來看對正三角形的鏡射外心有沒有相同性質。

**(二)為正三角形的情況**

在正三角形情況下，當在直線上時，與之間也具有特殊關係，

與的長度相乘同樣會是，其中為之邊長，底下證明之：

　　，，故的長度是。

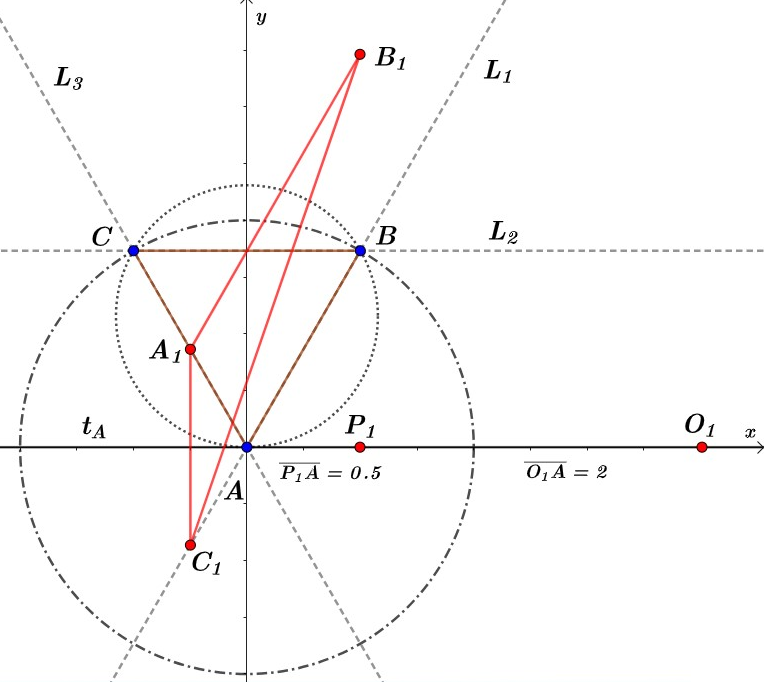
　　其鏡射外心坐標為，因此的長度是。

　　將與相乘，可得。

　　綜合上述與上定理八，可得知、與皆位於同一條直線（）上，

而與相乘會是；因此與之間為反演關係，

且反演圓是以點為圓心、半徑為的圓，如圖。



圖當為邊長正三角形，

且在上，

則

可同理類推當點在上的情況，將上述內容整理成定理十：

|  |
| --- |
| 定理十：當落在正三角形(邊長為)的外接圓切線上時，  是對以點為圓心、半徑為的圓反演點。 |

接下來討論點為直線上動點時，對特殊三角形鏡射後的鏡射外心軌跡。

八、當點在任意直線上移動時，鏡射外心軌跡

觀察到當點為不通過頂點直線上動點，鏡射外心軌跡是圓錐曲線，底下進行討論：

**（一）為等腰直角三角形的情況**

　　1.點是(斜率不為)直線上動點

不失一般性，先將平移、旋轉、縮放後，使、、，

此時股長為，在不是水平或鉛直線的情況下，直線必會交、軸各一點。

分別令其為、，底下先計算這兩點的鏡射外心：

落在上，根據定理五也會在此切線上，

又因(股長平方)，利用定理九可得坐標為。

　　，可得鏡射後三點：、、。

中垂線為、中垂線為；

即為此二中垂線之交點，將代入

可得，因此坐標為。

　　由於觀察到點的軌跡為直線時，其鏡射外心軌跡會是圓錐曲線，先求出其方程式

再檢驗直線上其它點的外心有沒有滿足次方程式；根據定理四，可得知必有其中點的外心

分別落在、、點上，故在此利用、、、、這點來求出此圓錐曲線。

　　利用兩點式，先求得、、、。

　　利用圓錐曲線族的方法，我們可以得出，再將代入，可以得出，因此。將代回原式，；將此式左右同除以，即可得此圓錐曲線為。

　　為了確認上的點之鏡射外心都會落在此圓錐曲線，我們將上的點

代入做計算，可得。

將代入此圓錐方程，如下：

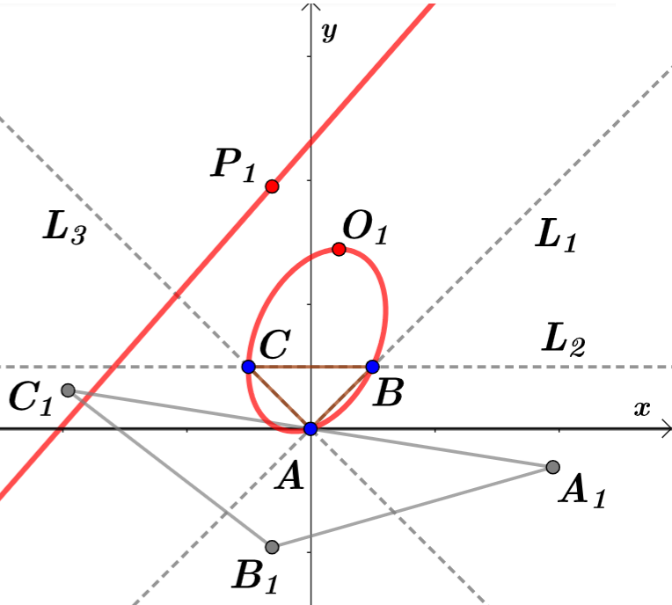
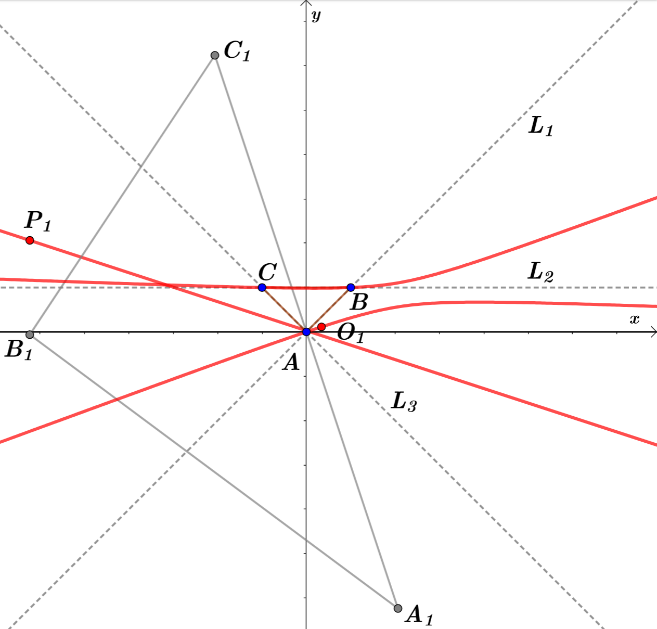
　　先令，先計算二次項總和，、、項總和為

；

接著計算一次項總和，、項總和為

；

兩者相加為，故上的任意點，其鏡射外心都會落在此圓錐曲線上，如圖。



圖此圓錐曲線為雙曲線的情況

圖此圓錐曲線為橢圓的情況

　　將上述整理為定理十一如下：

|  |
| --- |
| 定理十一：為等腰直角三角形，當點落在直線上時，鏡射外心會  落在圓錐曲線：。 |

到此確定點是斜率不為直線上動點時，其鏡射外心軌跡為圓錐曲線。

2.點是鉛直線上動點

接著探討點在鉛直線上移動時，其鏡射外心的軌跡。

不失一般性，將平移、旋轉、縮放後使得、、，此時為直角。

令平面上一條水平線，並在此直線上分別找兩點、，而的部分

利用定理九可得其鏡射外心坐標為，因此只需計算座標：

、、，、、。

的斜率為，而其中垂線的斜率為，

且的中垂線會過，利用點斜式列出：

；

的斜率為，而其中垂線的斜率為，

且的中垂線會過，利用點斜式列出：

以此式帶入，求交點座標（外心）：

，

因此坐標為。

接著，我們將、、、、代入求其鏡射外心

的圓錐曲線方程式，先利用兩點式求條直線的直線方程式：

：

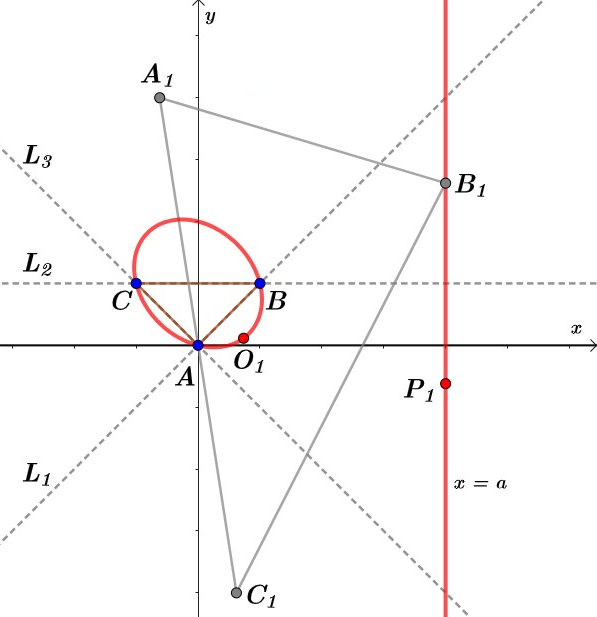
：

：

：

因此可得，將代入：

，再將其代回原式：

**故點為鉛直線上一動點時，鏡射外心的軌跡會是圓錐曲線，其方程式為：

，如圖。

圖此圓錐曲線為橢圓的情況

將其整理成定理十二：

|  |
| --- |
| 定理十二：當點落在直線上時，鏡射外心會落在圓錐曲線  　　　　上。 |

看完鉛直線，我們接著要探討點在水平線上移動的鏡射外心以及圓錐曲線方程式。

3.點是水平線上動點

不失一般性，將平移、旋轉、縮放後使得、、，

此時，令平面上一條水平線，並在此直線上分別找兩點、，

而有在前面計算過，的坐標為，因此只需計算坐標：

、、，鏡射點、、。

的斜率為，而其中垂線的斜率為，

且的中垂線會過，利用點斜式列出：

；

的斜率為，而其中垂線的斜率為，

且的中垂線會過，利用點斜式列出：

，以此式代入，求交點坐標（外心）：

，因此坐標為。

接著，我們將、、、、

代入求其鏡射外心的圓錐曲線方程式，先利用兩點式求條直線的直線方程式：

：

：

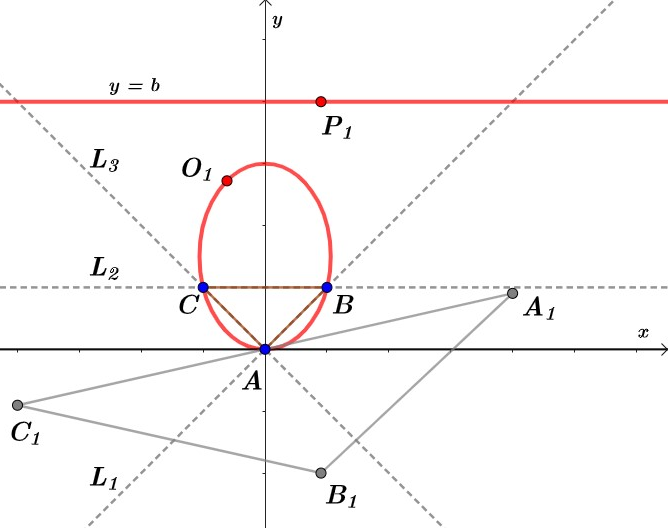
：

：

因此可得，將代入：，再將其代回原式：

故點為水平線上一動點時，鏡射外心的軌跡會是圓錐曲線，其方程式為：

，如圖。



圖此圓錐曲線為橢圓的情況

將其整理成定理十三：

|  |
| --- |
| 定理十三：當點落在直線上時，鏡射外心會落在圓錐曲線  　　　　 上。 |

**（二）為正三角形的情況**

　　不失一般性，將平移、旋轉、縮放後，使、、，

此時邊長為，在不考慮水平或鉛直線的情況下，直線必會交、軸各一點。分別令其為

、底下先計算這兩點的鏡射外心：

　　，根據定理五也會在此切線上，且(邊長平方)，

利用定理九可得坐標為

　　，則可得鏡射後三點：、、。

中垂線為、中垂線為；

即為此兩中垂線之交點，整理上式後將代入可得：

，坐標為。

　　由於觀察到點的軌跡為直線時，其鏡射外心軌跡會是圓錐曲線，先求出其方程式

再檢驗直線上其它點的外心有沒有滿足次方程式；根據定理四，可得知必有其中點的外心

分別落在、、點上，故在此利用、、、、這點來求出此圓錐曲線。

　　利用兩點式，先求得、、、。

　　利用圓錐曲線族的方法，我們可以得出，再將代入，

可以得出，因此。

將帶回原式，；將此式左右同除以，即可得此圓錐曲線為

。

利用變數變換的手法，可得、時的圓錐曲線為

。

為了確認上的點之鏡射外心都會落在此圓錐曲線，我們將上的點

代入做計算，可得

帶回驗算後成立。

將上述整理為定理十二如下：

|  |
| --- |
| 定理十四：為正三角形，當點落在直線上時，鏡射外心會落在  圓錐曲線： |

**伍、討論**

根據前面的鏡射外心定理，我們可以得知當點落在的三邊延長線上，

鏡射外心就會是該邊的對角；若點是通過其中一點的直線上的動點，則點的

移動軌跡為一直線；而在對等腰直角三角形鏡射時，若點是平面上的任意直線

（不通過頂點）上的動點時，點的移動軌跡就會是圓錐曲線。

藉由繪圖觀察發現，當點是直線上的動點，對任意三角形做鏡射得到的鏡

射外心移動軌跡都會是圓錐曲線，且可以仿特殊三角形的做法，利用圓錐曲線族的方式求其

圓錐曲線方程式，但因為變數眾多，且目前的手法都要將直線上第三的外心代回圓錐曲線驗

證，計算量十分龐大，我們會之後繼續進行處理，並想辦法優化算法，來將對任意三角形鏡

射得到鏡射外心關係一般化。

目前觀察到當點是直線上的動點，鏡射外心移動軌跡會形成橢圓、拋物還是雙曲線，

是由點所在直線與的外心距離決定，未來會先從等腰直角三角形開始驗證。

陸、結論

1. 當為正三角形時，的重心與的重心重合。

2. 當為直角三角形時，、、會分別對應到、、；

與相似，且是縮放倍，兩者相似。

3. 當為任意三角形時，、、會分別對應到、、；

與相似，且邊長長度會分別是邊長的

倍。

4. 當落在三邊延長線上時，鏡射外心會位在對邊的頂點。

5. 當落在三角形的外接圓切線上時，鏡射外心會落在過切點且

平行對邊的直線上。

6. 當過頂點時，鏡射後的也會通過該頂點。

7. 當落在等腰直角三角形的上時，與會位於同一直線上，  
且兩者為為圓心，三角形股長為半徑的圓之反演關係。

8. 當落在正三角形的外接圓切線上時上時，與會位於同一直線  
上，且兩者為以頂點為圓心，三角形邊長為半徑的圓之反演關係。

9. 當為等腰直角三角形，且落在上時，  
會落在圓錐曲線：。

10.當為正三角形，且落在上時，會落在圓錐曲線：  
。

11.未來會將對任意三角形其鏡射外心的性質繼續探究，並嘗試持續發掘三角形的內心

等各個心之性質，以及其特性。

柒、參考文獻資料

[1] 林宥穎 (2022)

三角形與其垂足三角形的心不變量 第 62 屆全國科展作品

[2] 張宸閎、趙子涵、陳亭涵 (2022)

X-mirrOr~三角形全等點位置與性質討論           第 62 屆全國科展作品

[3] 翰林出版 游森棚，林延輯，柯建彰，洪士薰，洪育祥，張宮明 (2020)

普通型高級中等學校二下用書 數學4A

[4] 梁子傑 香港道教聯合會青松中學 (2000)

五點求圓錐曲線                                         Mathematical Excalibur Vol.5 No.5