一、圓錐曲線的形式

1. 為等腰直角三角形的情況

　　圓錐曲線，則可利用圓錐曲線的判別式

大於、等於或小於來判斷該圓錐曲線為橢圓、拋物線或雙曲線。

　　當判別式大於時，此圓錐曲線為橢圓；判別式等於時，此圓錐曲線為拋物線；

判別式小於時，此圓錐曲線為雙曲線。以下皆以判別式大於、圓錐曲線為橢圓的情況推導，同理可知等於、小於的情況也與大於所推得的結果相同。

* 1. 點是（斜率不為）直線上動點

　　當點落在過、且的直線上時，鏡射外心會落在圓錐曲線

上。此圓錐曲線的判別式為

。

　　先觀察圓錐曲線為橢圓時的情況。將式子同乘，

，剛好對應到的

外心與直線的距離超過的情況，因此此直線與

的外接圓沒有交點，反之亦然。

　　利用上述推論可以得到，當直線與外接圓沒有交點時，圓錐曲線為橢圓。

直線與外接圓相切時，圓錐曲線為拋物線。直線與外接圓相交點時，

圓錐曲線為橢圓。

* 1. 點是鉛直線上動點

　　當點落在的鉛直線上時，鏡射外心會落在圓錐曲線

上。

此圓錐曲線的判別式為。因

恆正，故只需討論大於、等於或小於。

　　若或，此鉛直線會與外接圓沒有交點；此時

，因此圓錐曲線為橢圓。若或，此鉛直線會通過

或點，因此圖形會是一直線，故不考慮此情況。若，此鉛直線

交外接圓於點；此時，因此圓錐曲線為雙曲線。

* 1. 點是水平線上動點

　　當點落在的水平線上時，鏡射外心會落在圓錐曲線

上。此圓錐曲線的判別式為。

　　若或，此水平線會與外接圓沒有交點；此時，

因此圓錐曲線為橢圓。若或，此水平線會與外接圓相切；

此時，因此圓錐曲線為拋物線；但時此水平線會通過點，因此圖形

會是一直線，故不考慮此情況。若，此時此水平線交外接圓於點；

此時，因此圓錐曲線為雙曲線。

二、反演關係之推廣

(一)為等腰三角形的情況

　　先前看過當落在特殊三角形上的情況，發現兩者都會反演，又因為正三角形與等腰直角三角形皆屬於等腰三角形，由此猜測，落在任意的等腰三角形之頂角外接圓切線上皆具有反演的性質，且反演圓的圓心為頂角，半徑為腰長，底下證明之：

　　不失一般性，將平移、旋轉、縮放後使得、、

，此時為頂角，且。

　　觀察發現，當在上移動時，也會在上移動，此處是因為定理五已證明

平行，且兩者的水平距離為，可令，再將此坐標代入計算：

、、，

所以、、。

的中垂線的直線方程式為，因此可以知道必位於上。

的斜率為，  
而其中垂線的斜率為，

且該直線通過

利用點斜式列出：

以帶入，求交點坐標（外心）：

　　因此，接著我們將與相乘並與腰長平方做比較：

，

　　由此可知，當落在等腰三角形的頂角外接圓切線上時，為對以為圓心，腰長為半徑的圓之反演點。