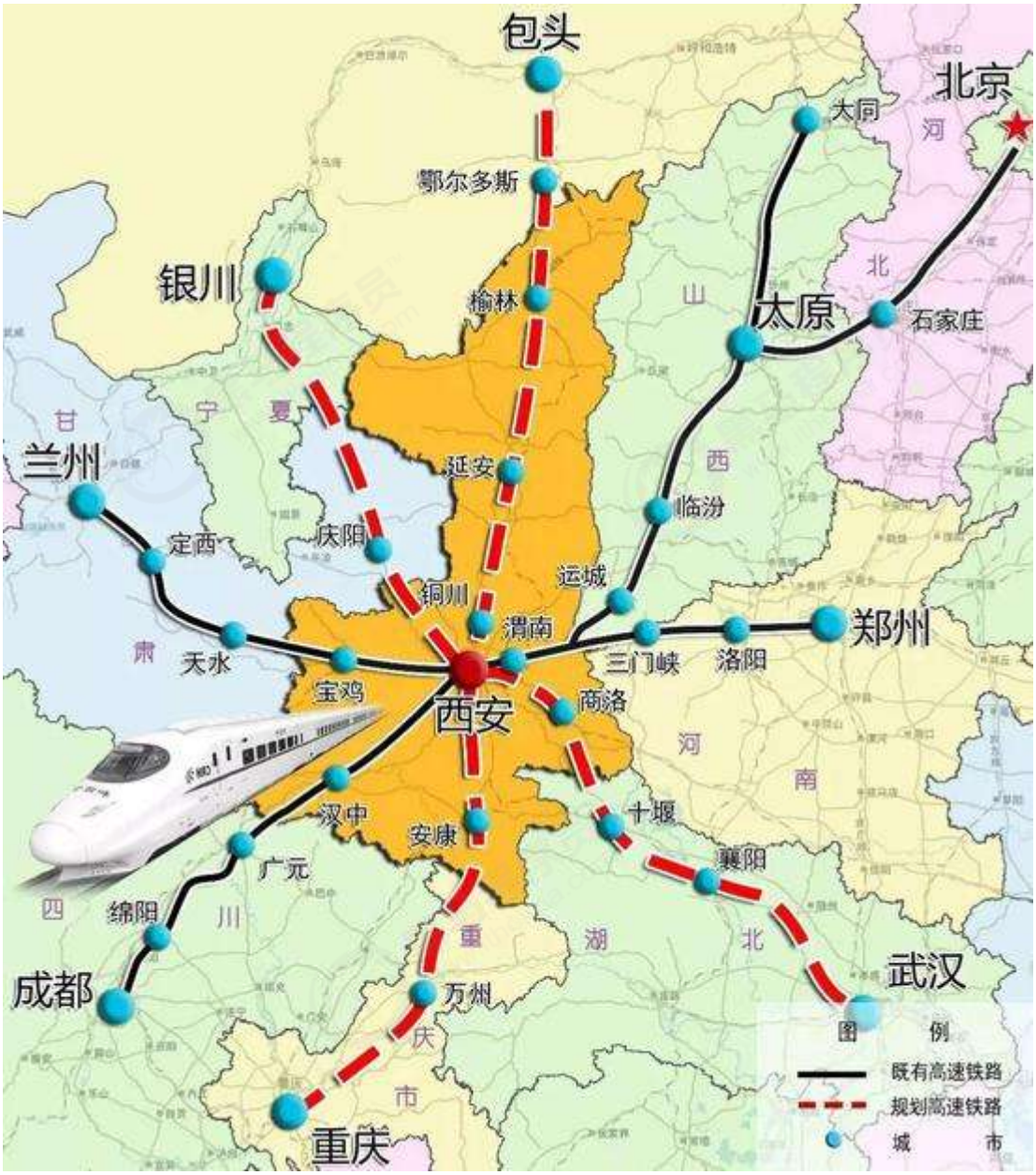
一、图的入门

1.1 图的实际应用：

在现实生活中，有许多应用场景会包含很多点以及点点之间的连接，而这些应用场景我们都可以用即将要学习的图这种数据结构去解决。

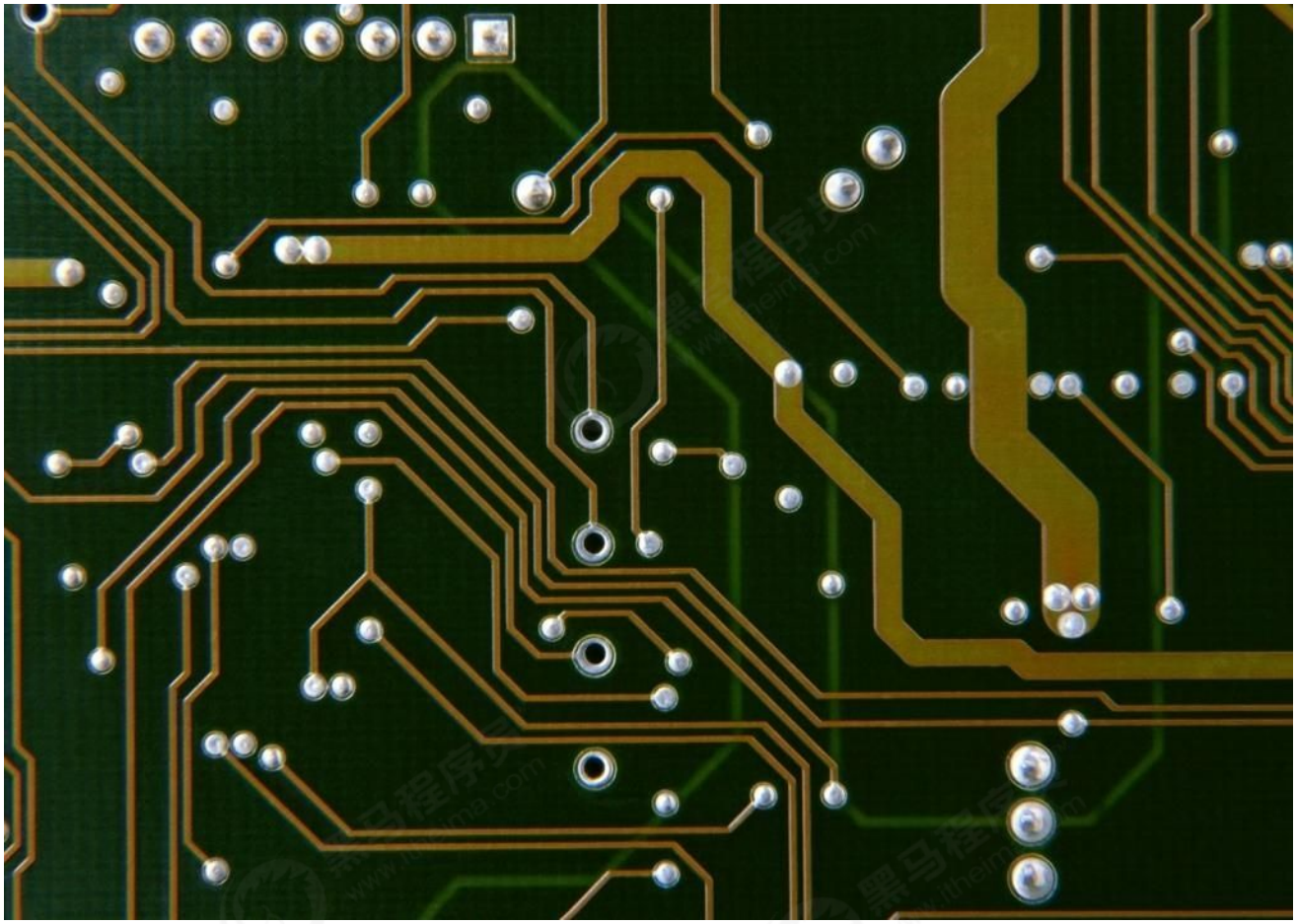
地图：

我们生活中经常使用的地图，基本上是由城市以及连接城市的道路组成，如果我们把城市看做是一个一个的点，把道路看做是一条一条的连接，那么地图就是我们将要学习的图这种数据结构。



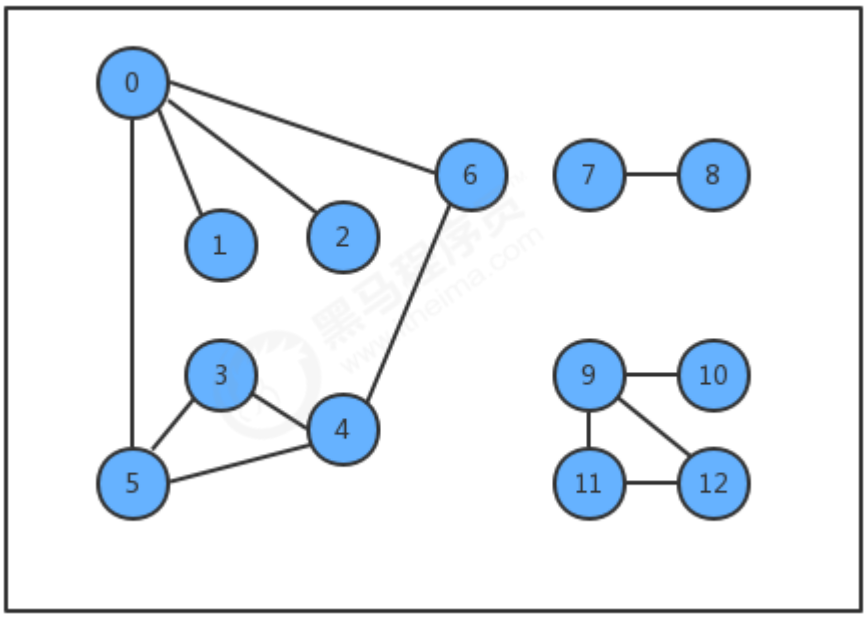
电路图：

下面是一个我们生活中经常见到的集成电路板，它其实就是由一个一个触点组成，并把触点与触点之间通过线进行连接，这也是我们即将要学习的图这种数据结构的应用场景



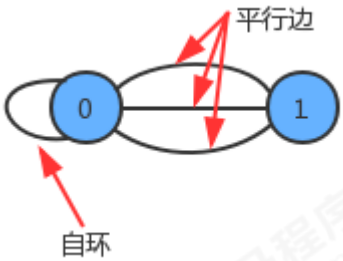
1.2 图的定义及分类

定义：图是由一组顶点和一组能够将两个顶点相连的边组成的



特殊的图：

1. 自环：即一条连接一个顶点和其自身的边；
2. 平行边：连接同一对顶点的两条边；



图的分类：

按照连接两个顶点的边的不同，可以把图分为以下两种：

无向图：边仅仅连接两个顶点，没有其他含义；

有向图：边不仅连接两个顶点，并且具有方向；

1.3 无向图

1.3.1 图的相关术语

相邻顶点：

当两个顶点通过一条边相连时，我们称这两个顶点是相邻的，并且称这条边依附于这两个顶点。

度：

某个顶点的度就是依附于该顶点的边的个数

子图：

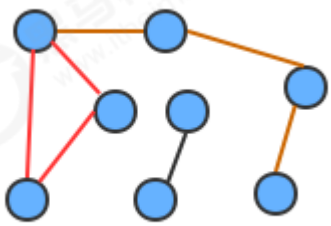
是一幅图的所有边的子集(包含这些边依附的顶点)组成的图；

路径：

是由边顺序连接的一系列的顶点组成

环：

是一条至少含有一条边且终点和起点相同的路径

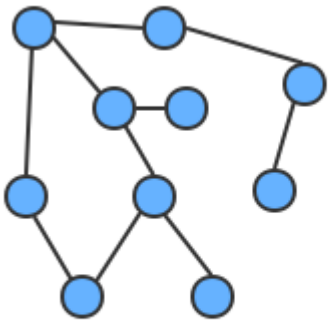


连通图：

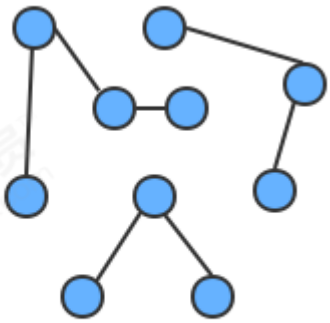
如果图中任意一个顶点都存在一条路径到达另外一个顶点，那么这幅图就称之为连通图

连通子图：

一个非连通图由若干连通的部分组成，每一个连通的部分都可以称为该图的连通子图



连通图



非连通图

1.3.2 图的存储结构

要表示一幅图，只需要表示清楚以下两部分内容即可：

1. 图中所有的顶点；
2. 所有连接顶点的边；

常见的图的存储结构有两种：邻接矩阵和邻接表

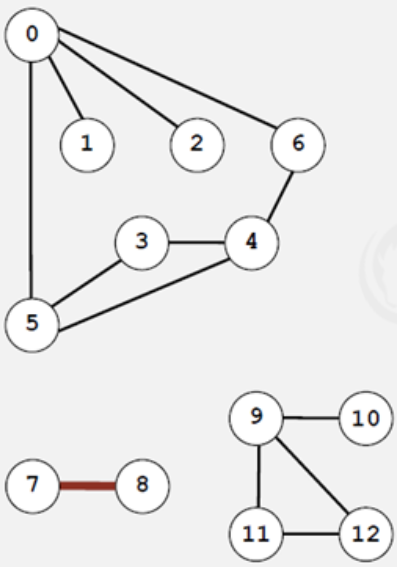
1.3.2.1 邻接矩阵

1. 使用一个V*V的二维数组int[V][V] adj,把索引的值看做是顶点；
2. 如果顶点v和顶点w相连，我们只需要将adj[v][w]和adj[w][v]的值设置为1,否则设置为0即可。

使用二维数组int[12][12] adj来表示图，二维数组的索引的值代表顶点，二维数组存储的值表示两个顶点是否连接，如果链接，存储1，如果不连接，则存储0

adj[7][8]=1,adj[8][7]=1

表示的是连接顶点7和8的同一条边



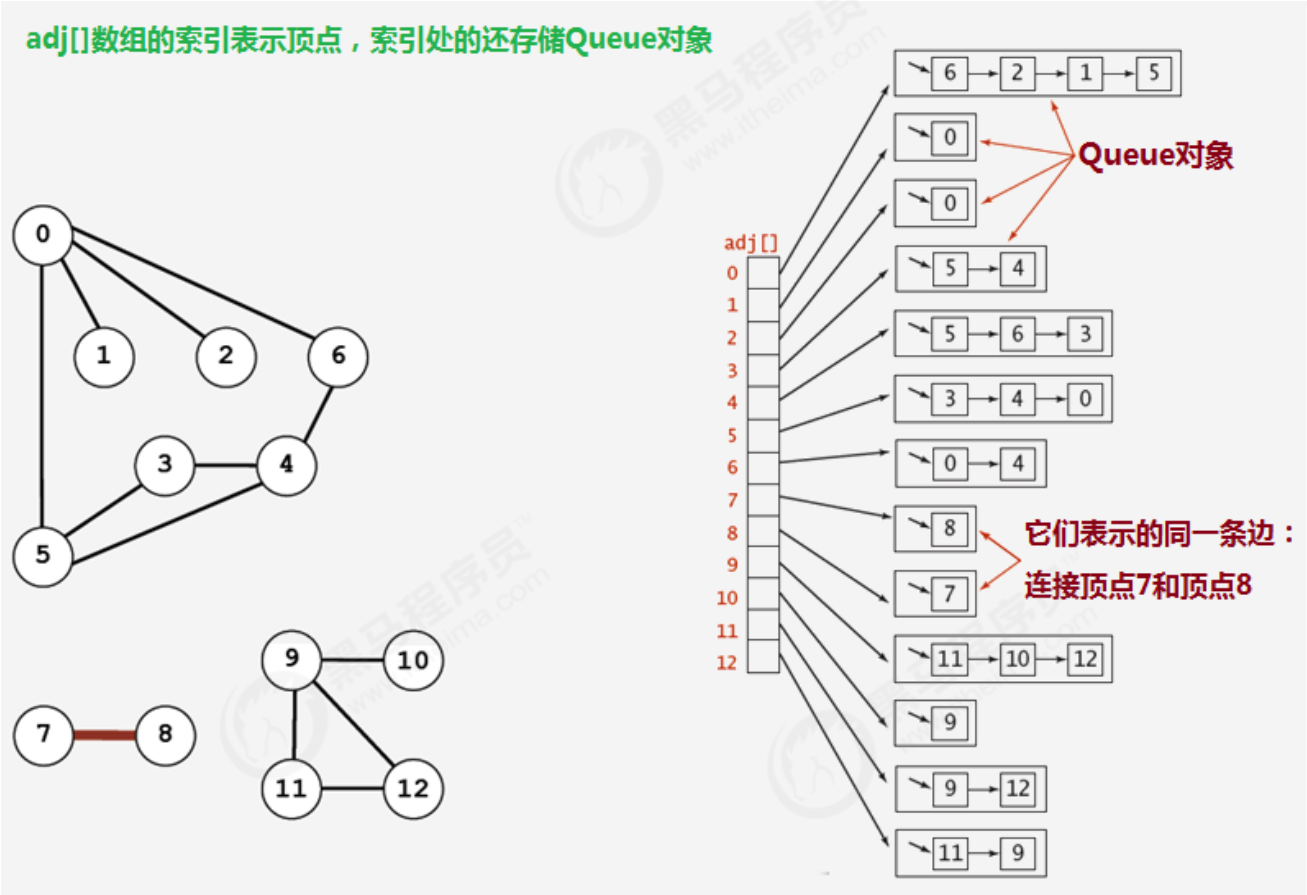
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

很明显，邻接矩阵这种存储方式的空间复杂度是V^2的，如果我们处理的问题规模比较大的话，内存空间极有可能不够用。

1.3.2.2 邻接表

1.使用一个大小为V的数组 Queue[V] adj，把索引看做是顶点；

2.每个索引处adj[v]存储了一个队列，该队列中存储的是所有与该顶点相邻的其他顶点



很明显，邻接表的空间并不是是线性级别的，所以后面我们一直采用邻接表这种存储形式来表示图。

1.3.3 图的实现

1.3.3.1 图的API设计

类名	Graph
构造方法	Graph(int V)：创建一个包含V个顶点但不包含边的图
成员方法	1.public int V():获取图中顶点的数量 2.public int E():获取图中边的数量 3.public void addEdge(int v,int w):向图中添加一条边 v-w 4.public Queue adj(int v)：获取和顶点v相邻的所有顶点
成员变量	1.private final int V: 记录顶点数量 2.private int E: 记录边数量 3.private Queue[] adj: 邻接表

1.3.3.2 代码实现

```
public class Graph {
    //顶点数目
    private final int V;
    //边的数目
    private int E;
    //邻接表
    private Queue<Integer>[] adj;

    public Graph(int V){
        //初始化顶点数量
        this.V = V;
        //初始化边的数量
        this.E=0;
        //初始化邻接表
        this.adj = new Queue[V];
        //初始化邻接表中的空队列
        for (int i = 0; i < adj.length; i++) {
            adj[i] = new Queue<Integer>();
        }
    }


    //获取顶点数目
    public int V(){
        return V;
    }

    //获取边的数目
    public int E(){
        return E;
    }

    //向图中添加一条边 v-w
    public void addEdge(int v, int w) {
        //把w添加到v的链表中，这样顶点v就多了一个相邻点w
```

```
        adj[v].enqueue(w);
        //把v添加到w的链表中，这样顶点w就多了一个相邻点v
        adj[w].enqueue(v);
        //边的数目自增1
        E++;
    }

    //获取和顶点v相邻的所有顶点
    public Queue<Integer> adj(int v){
        return adj[v];
    }

}
```

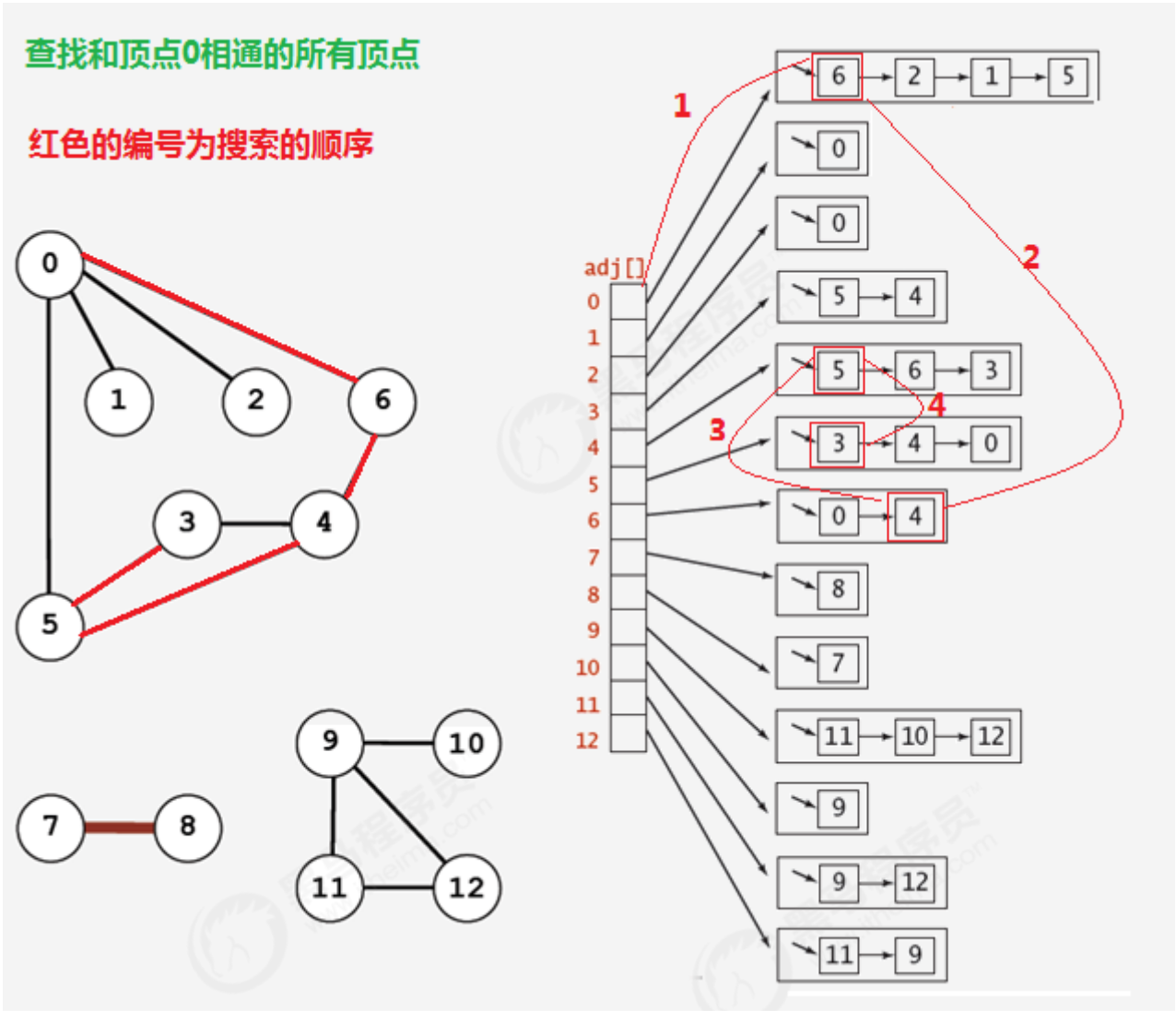
1.3.4 图的搜索

在很多情况下，我们需要遍历图，得到图的一些性质，例如，找出图中与指定的顶点相连的所有顶点，或者判定某个顶点与指定顶点是否相通，是非常常见的需求。

有关图的搜索，最经典的算法有深度优先搜索和广度优先搜索，接下来我们分别讲解这两种搜索算法。

1.3.4.1 深度优先搜索

所谓的深度优先搜索，指的是在搜索时，如果遇到一个结点既有子结点，又有兄弟结点，那么先找子结点，然后找兄弟结点。



很明显，在由于边是没有方向的，所以，如果4和5顶点相连，那么4会出现在5的相邻链表中，5也会出现在4的相邻链表中，那么为了不对顶点进行重复搜索，应该要有相应的标记来表示当前顶点有没有搜索过，可以使用一个布尔类型的数组 boolean[V] marked,索引代表顶点，值代表当前顶点是否已经搜索，如果已经搜索，标记为true，如果没有搜索，标记为false；

API设计：

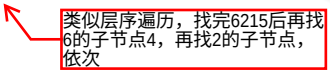
类名	DepthFirstSearch
构造方法	DepthFirstSearch(Graph G,int s)：构造深度优先搜索对象，使用深度优先搜索找出G图中s顶点的所有相通顶点
成员方法	1.private void dfs(Graph G, int v)：使用深度优先搜索找出G图中v顶点的所有相通顶点 2.public boolean marked(int w):判断w顶点与s顶点是否相通 3.public int count():获取与顶点s相通的所有顶点的总数
成员变量	1.private boolean[] marked: 索引代表顶点，值表示当前顶点是否已经被搜索 2.private int count：记录有多少个顶点与s顶点相通

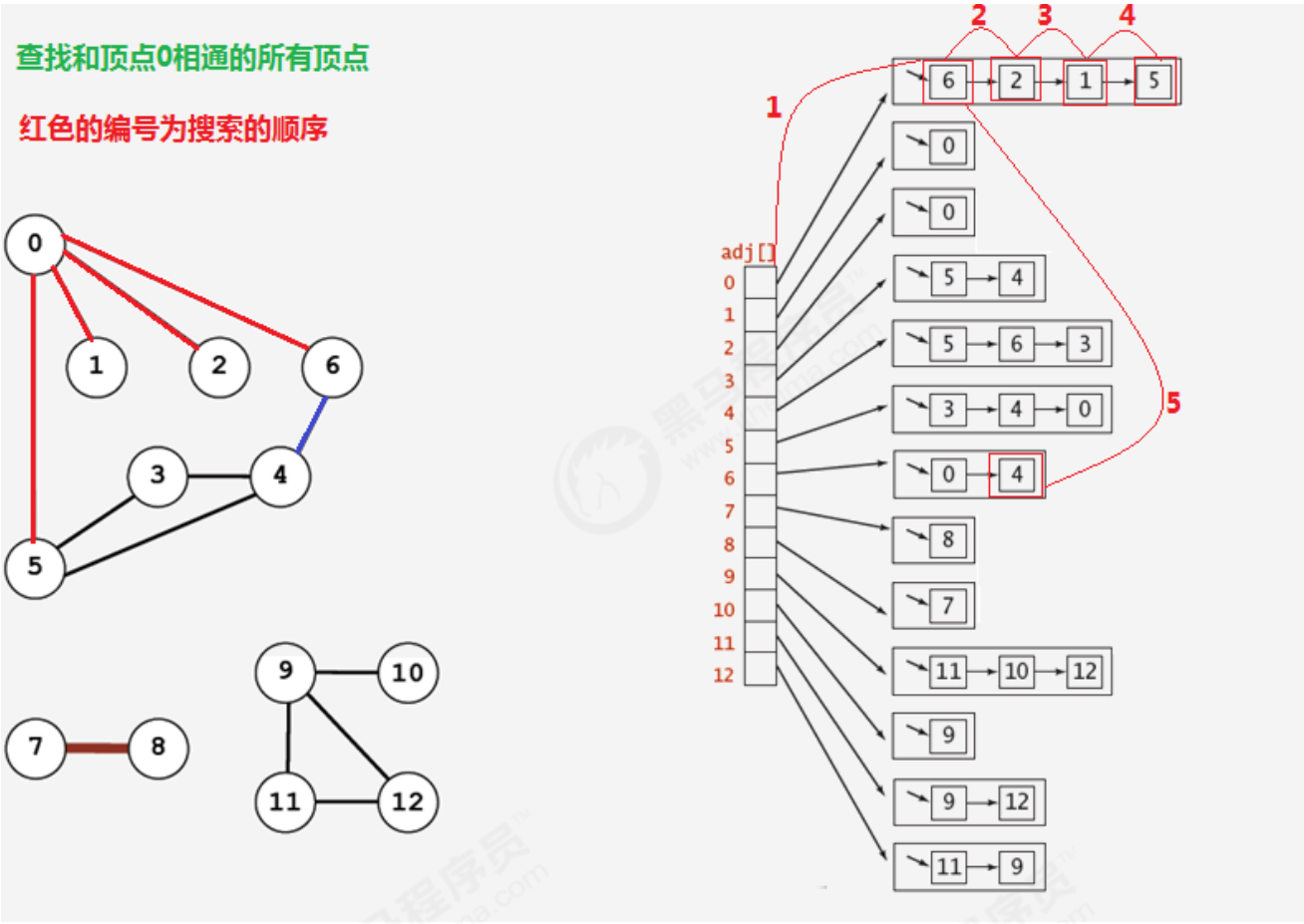
代码：

```java
public class DepthFirstSearch {
    //索引代表顶点，值表示当前顶点是否已经被搜索
    private boolean[] marked;
    //记录有多少个顶点与s顶点相通
    private int count;

    //构造深度优先搜索对象，使用深度优先搜索找出G图中s顶点的所有相邻顶点
    public DepthFirstSearch(Graph G,int s){
        //创建一个和图的顶点数一样大小的布尔数组
        marked = new boolean[G.V()];
        //搜索G图中与顶点s相同的所有顶点
        dfs(G,s);
    }

    //使用深度优先搜索找出G图中v顶点的所有相邻顶点
    private void dfs(Graph G, int v){
        //把当前顶点标记为已搜索
        marked[v]=true;
        //遍历v顶点的邻接表，得到每一个顶点w
        for (Integer w : G.adj(v)){
            //如果当前顶点w没有被搜索过，则递归搜索与w顶点相通的其他顶点
            if (!marked[w]){
                dfs(G,w);
            }
        }
        //相通的顶点数量+1
        count++;
    }

    //判断w顶点与s顶点是否相通
    public boolean marked(int w){
        return marked[w];
    }

    //获取与顶点s相通的所有顶点的总数
    public int count(){
        return count;
    }

}
```

1.3.4.2 广度优先搜索

所谓的~~深度~~优先搜索，指的是在搜索时，如果遇到一个结点既有子结点，又有兄弟结点，那么先找兄弟结点，然后找子结点。





API设计：

类名	BreadthFirstSearch
构造方法	BreadthFirstSearch(Graph G,int s)：构造广度优先搜索对象，使用广度优先搜索找出G图中s顶点的所有相邻顶点
成员方法	1.private void bfs(Graph G, int v)：使用广度优先搜索找出G图中v顶点的所有相邻顶点 2.public boolean marked(int w):判断w顶点与s顶点是否相通 3.public int count():获取与顶点s相通的所有顶点的总数
成员变量	1.private boolean[] marked: 索引代表顶点，值表示当前顶点是否已经被搜索 2.private int count：记录有多少个顶点与s顶点相通 3.private Queue waitSearch: 用来存储待搜索邻接表的点

代码：

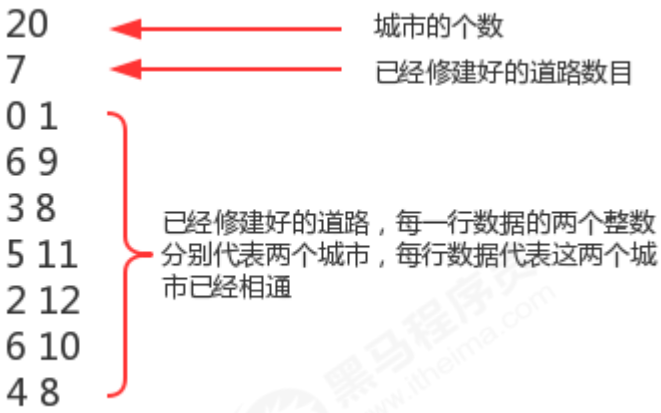
```
public class BreadthFirstSearch {
    //索引代表顶点，值表示当前顶点是否已经被搜索
    private boolean[] marked;
    //记录有多少个顶点与s顶点相通
    private int count;
    //用来存储待搜索邻接表的点
    private Queue<Integer> waitSearch;

```

```
    //构造广度优先搜索对象，使用广度优先搜索找出G图中s顶点的所有相邻顶点
    public BreadthFirstSearch(Graph G, int s) {
        //创建一个和图的顶点数一样大小的布尔数组
        marked = new boolean[G.V()];
        //初始化待搜索顶点的队列
        waitSearch = new Queue<Integer>();
        //搜索G图中与顶点s相同的所有顶点
        dfs(G, s);
    }

    //使用广度优先搜索找出G图中v顶点的所有相邻顶点
    private void dfs(Graph G, int v) {
        //把当前顶点v标记为已搜索
        marked[v]=true;
        //把当前顶点v放入到队列中，等待搜索它的邻接表
        waitSearch.enqueue(v);
        //使用while循环从队列中拿出待搜索的顶点wait，进行搜索邻接表
        while(!waitSearch.isEmpty()){
            Integer wait = waitSearch.dequeue();
            //遍历wait顶点的邻接表，得到每一个顶点w
            for (Integer w : G.adj(wait)) {
                //如果当前顶点w没有被搜索过，则递归搜索与w顶点相通的其他顶点
                if (!marked[w]) {
                    dfs(G, w);
                }
            }
        }
        //相通的顶点数量+1
        count++;
    }

    //判断w顶点与s顶点是否相通
    public boolean marked(int w) {
        return marked[w];
    }

    //获取与顶点s相通的所有顶点的总数
    public int count() {
        return count;
    }
}
```

1.3.5 案例-畅通工程续1

某省调查城镇交通状况，得到现有城镇道路统计表，表中列出了每条道路直接连通的城镇。省政府"畅通工程"的目标是使全省任何两个城镇间都可以实现交通（但不一定有直接的道路相连，只要互相间接通过道路可达即可）。目前的道路状况，9号城市和10号城市是否相通？9号城市和8号城市是否相通？

在我们的测试数据文件夹中有一个trffic_project.txt文件，它就是诚征道路统计表，下面是对数据的解释：



总共有20个城市，目前已经修改好了7条道路，问9号城市和10号城市是否相通？9号城市和8号城市是否相通？

解题思路：

1.创建一个图Graph对象，表示城市；

2.分别调用addEdge(0,1),addEdge(6,9),addEdge(3,8),addEdge(5,11),addEdge(2,12),addEdge(6,10),addEdge(4,8)，表示已经修建好的道路把对应的城市连接起来；

3.通过Graph对象和顶点9，构建DepthFirstSearch对象或BreadthFirstSearch对象；

4.调用搜索对象的marked(10)方法和marked(8)方法，即可得到9和城市与10号城市以及9号城市与8号城市是否相通。

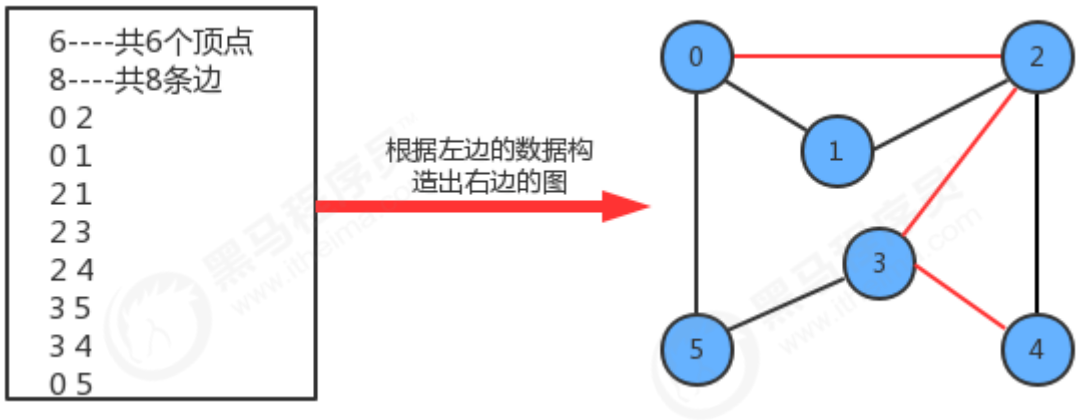
代码：

```
1  package cn.itcast;
2
3  import java.io.BufferedReader;
4  import java.io.InputStreamReader;
5
6  public class Traffic_Project2 {
7      public static void main(String[] args) throws Exception {
8          //创建输入流
9          BufferedReader reader = new BufferedReader(new
   InputStreamReader(Traffic_Project2.class.getClassLoader().getResourceAsStream("traffic_proje
   ct.txt")));
10         //读取城市数目，初始化Graph图
11         int number = Integer.parseInt(reader.readLine());
12         Graph G = new Graph(number);
13         //读取已经修建好的道路数目
14         int roadNumber = Integer.parseInt(reader.readLine());
15         //循环读取已经修建好的道路，并调用addEdge方法
16         for (int i = 0; i < roadNumber; i++) {
17             String line = reader.readLine();
18             int p = Integer.parseInt(line.split(" ")[0]);
19             int q = Integer.parseInt(line.split(" ")[1]);
20             G.addEdge(p, q);

21         }
```

```
        //根据图G和顶点9构建图的搜索对象
        //BreadthFirstSearch search = new BreadthFirstSearch(G,9);
        DepthFirstSearch search = new DepthFirstSearch(G, 9);
        //调用搜索对象的marked(10)方法和marked(8)方法
        boolean flag1 = search.marked(10);
        boolean flag2 = search.marked(8);

        System.out.println("9号城市和10号城市是否已相通：" + flag1);
        System.out.println("9号城市和8号城市是否已相通：" + flag2);
    }
}
```

1.3.6 路径查找

在实际生活中，地图是我们经常使用的一种工具，通常我们会用它进行导航，输入一个出发城市，输入一个目的地城市，就可以把路线规划好，而在规划好的这个路线上，会路过很多中间的城市。这类问题翻译成专业问题就是：从s顶点到v顶点是否存在一条路径？如果存在，请找出这条路径。



例如在上图上查找顶点0到顶点4的路径用红色标识出来,那么我们可以把该路径表示为 0-2-3-4。

1.3.6.1 路径查找API设计

类名	DepthFirstPaths
构造方法	DepthFirstPaths(Graph G,int s)：构造深度优先搜索对象，使用深度优先搜索找出G图中起点为s的所有路径
成员方法	1.private void dfs(Graph G, int v)：使用深度优先搜索找出G图中v顶点的所有相邻顶点 2.public boolean hasPathTo(int v):判断v顶点与s顶点是否存在路径 3.public Stack pathTo(int v):找出从起点s到顶点v的路径(就是该路径经过的顶点)
成员变量	1.private boolean[] marked: 索引代表顶点，值表示当前顶点是否已经被搜索 2.private int s:起点 3.private int[] edgeTo:索引代表顶点，值代表从起点s到当前顶点路径上的最后一个顶点

1.3.6.2 路径查找实现

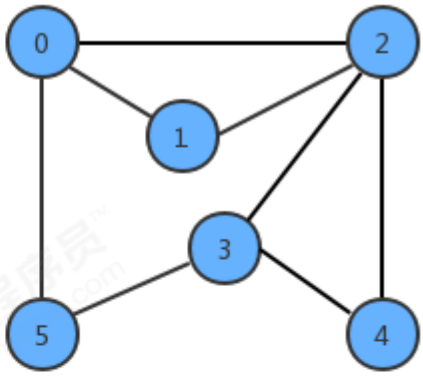
我们实现路径查找，最基本的操作还是得遍历并搜索图，所以，我们的实现暂且基于深度优先搜索来完成。其搜索的过程是比较简单的。我们添加了edgeTo[]整型数组，这个整型数组会记录从每个顶点回到起点s的路径。

如果我们把顶点设定为0，那么它的搜索可以表示为下图：

初始状态

edgeTo

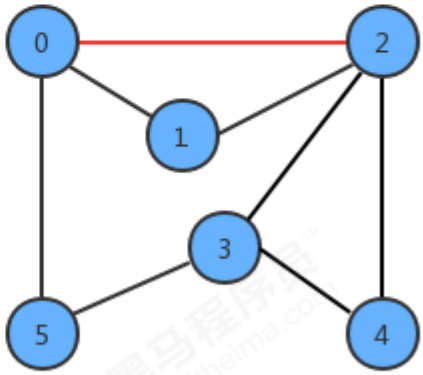
0	1	2	3	4	5



第一次搜索0顶点的邻接表中的2顶点，则修改edge[2]=0

edgeTo

0	1	2	3	4	5
		0			

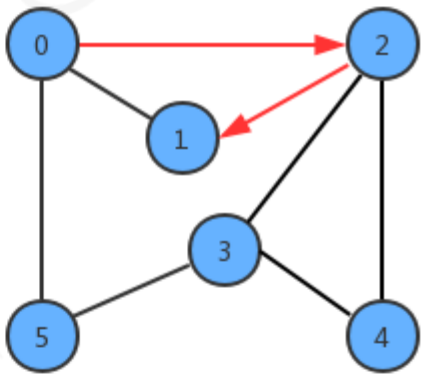


第二次搜索2顶点的邻接表中的1顶点，则修改edge[1]=2

2找到1后再找1的子节点0，发现0已经被查找过，则不标记

edgeTo

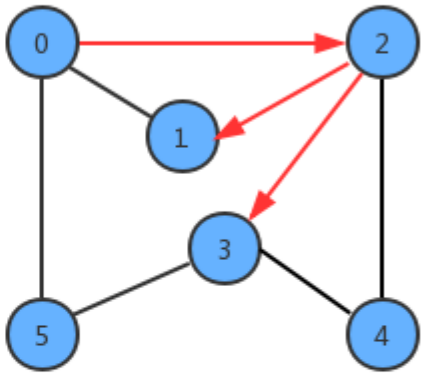
0	1	2	3	4	5
	2	0			

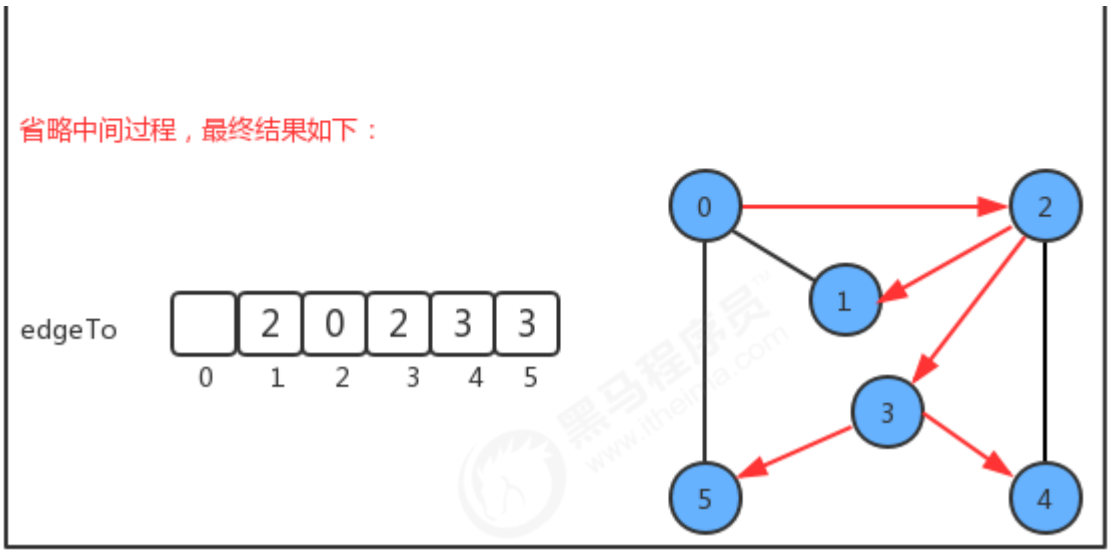


第三次搜索2顶点的邻接表中的3顶点，则修改edge[3]=2

edgeTo

0	1	2	3	4	5
	2	0	2		





根据最终edgeTo的结果，我们很容易能够找到从起点0到任意顶点的路径；

这里的查找结果并不是找出所有路径，只是找出一条路径，比如2-4就不是路径

代码：

```
public class DepthFirstPaths {
    //索引代表顶点，值表示当前顶点是否已经被搜索
    private boolean[] marked;
    //起点
    private int s;
    //索引代表顶点，值代表从起点s到当前顶点路径上的最后一个顶点
    private int[] edgeTo;

    //构造深度优先搜索对象，使用深度优先搜索找出G图中起点为s的所有路径
    public DepthFirstPaths(Graph G, int s){
        //创建一个和图的顶点数一样大小的布尔数组
        marked = new boolean[G.V()];
        //创建一个和图顶点数一样大小的整型数组
        edgeTo = new int[G.V()];
        //初始化顶点
        this.s=s;
        //搜索G图中起点为s的所有路径
        dfs(G,s);
    }

    //使用深度优先搜索找出G图中v顶点的所有相邻顶点
    private void dfs(Graph G, int v){
        //把当前顶点标记为已搜索
        marked[v]=true;
        //遍历v顶点的邻接表，得到每一个顶点w
        for (Integer w : G.adj(v)){
            //如果当前顶点w没有被搜索过，则将edgeTo[w]设置为v,表示w的前一个顶点为v，并递归搜索与w顶点相通的其他顶点
            if (!marked[w]){
                edgeTo[w]=v;
                dfs(G,w);
            }

        }
```

```
    }

    //判断w顶点与s顶点是否存在路径
    public boolean hasPathTo(int v){
        return marked[v];
    }

    //找出从起点s到顶点v的路径(就是该路径经过的顶点)
    public Stack<Integer> pathTo(int v){
        //当前v顶点与s顶点不连通，所以直接返回null，没有路径
        if (!hasPathTo(v)){
            return null;
        }
        //创建路劲中经过的顶点的容器
        Stack<Integer> path = new Stack<Integer>();
        //第一次把当前顶点存进去，然后将x变换为到达当前顶点的前一个顶点edgeTo[x],在把前一个顶点存进去，继续将x变化为到达前一个顶点的前一个顶点，继续存，一直到x的值为s为止，相当于逆推法，最后把s放进去
        for (int x = v;x!=s;x=edgeTo[x]){
            //把当前顶点放入容器
            path.push(x);
        }

        //把起点s放入容器
        path.push(s);
        return path;
    }
}


//测试代码
public class DepthFirstPathsTest {
    public static void main(String[] args) throws Exception {
        //创建输入流
        BufferedReader reader = new BufferedReader(new InputStreamReader(DepthFirstPathsTest.class.getClassLoader().getResourceAsStream("road_find.txt")));
        //读取城市数目，初始化Graph图
        int number = Integer.parseInt(reader.readLine());
        Graph G = new Graph(number);
        //读取城市的连通道路
        int roadNumber = Integer.parseInt(reader.readLine());
        //循环读取道路，并调用addEdge方法
        for (int i = 0; i < roadNumber; i++) {
            String line = reader.readLine();
            int p = Integer.parseInt(line.split(" ")[0]);
            int q = Integer.parseInt(line.split(" ")[1]);
            G.addEdge(p, q);
        }

        //根据图G和顶点0路径查找对象
        DepthFirstPaths paths = new DepthFirstPaths(G, 0);

        //调用查找对象的pathTo(4)方法得到路径
```

```
83          Stack<Integer> path = paths.pathTo(4);
84
85          //遍历打印
86          StringBuilder sb = new StringBuilder();
87          for (Integer v : path) {
88              sb.append(v+"-");
89
90          }
91
92          sb.deleteCharAt(sb.length()-1);
93          System.out.println(sb);
94
95
96      }
97  }
98
```