Capítulo 1

Noções de Probabilidades Conceitos Básicos

Probabilidades

É o campo do conhecimento que estuda os fenômenos ou experimentos aleatórios.

Experimentos Aleatórios

São aqueles cujos resultados nem sempre são os mesmos, apresentam variações, são imprevisíveis, mesmo quando repetidos indefinidamente em condições uniformes.

Exemplos:

- O lançamento de um dado é um experimento aleatório, pois os resultados variam de forma imprevisível;
- O lançamento de uma moeda é um experimento aleatório, pois os resultados se comportam de forma aleatória.

Ao observar o comportamento das variáveis abaixo, temos contextos de incertezas, pois não sabemos previamente qual o valor exato dos resultados antes da realização dos mesmos:

- Número de erros emitidos por um programa em uma linguagem computacional na realização de uma tarefa;
- Tempo que um programa demora para realizar uma tarefa;
- Tempo que sistemas bancários ficam fora do ar inesperadamente;

- Número de computadores vítimas de invasão de *hackers* em uma cidade;
- Número de computadores com defeitos produzidos por uma indústria;
- Tempo que um analista demora para finalizar um programa computacional;
- Tempo que um banco de dados demora para finalizar uma pesquisa relacional;
- Número de problemas que os computadores domésticos apresentam ao longo de sua vida útil;
- Extensão em metros do formulário contínuo produzido pela saída de um programa computacional;
- Peso de CPUs de computadores de uma empresa;
- Altura de CPUs de computadores de uma empresa.

Espaço amostral (S)

Podemos notar que, nos exemplos acima, quando temos um fenômeno aleatório não podemos prever com certeza qual será o seu resultado, contudo podemos descrever, em muitas situações, os possíveis resultados desse experimento.

Espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

Seja a experiência que consiste no lançamento de uma moeda, o espaço amostral associado é:

{Cara, Coroa}

Seja a experiência que consiste no lançamento de um dado, o espaço amostral associado é:

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

Seja a experiência aleatória que consiste em selecionar um computador de um conjunto de cinco de um setor de uma empresa e verificar se tem instalado um programa antivírus, o espaço amostral associado pode ser:

{Sim, Sim, Não, Não, Sim }

Seja a experiência aleatória que consiste em colher a opinião de programadores sobre qual algoritmo é mais eficiente para um determinado programa, o espaço amostral associado é:

{Algoritmo A, Algoritmo B}

Seja a experiência aleatória que consiste em observar o número de *chips* de um celular, o espaço amostral associado pode ser:

{1, 2, 3, 4}

Evento (E)

É todo subconjunto finito de um espaço amostral. É um resultado ou um conjunto de resultados de interesse em uma experiência aleatória.

Exemplos:

Seja a experiência aleatória que consiste em selecionar um computador de um conjunto de cinco em um setor de uma empresa e verificar se um programa antivírus está instalado. Podemos ter os seguintes eventos de interesse:

E_1 = {Sim, Sim, Sim}
E_2= {Não, Não}

Seja a experiência aleatória que consiste em colher a opinião de programadores sobre qual algoritmo é mais eficiente para um determinado programa. Podemos ter os seguintes eventos de interesse:

E_1={Algoritmo A}
E_2={ Algoritmo B}

Seja a experiência aleatória de observar em cada um dos quatro anos da gestão de um presidente o número de "apagões" e queda do sistema de energia elétrica que enfrentou. Podemos ter o seguinte evento de interesse:

E= {1,1,2,3}

Seja a experiência aleatória que consiste em selecionar um *smartphone* e observar o número de *chips* deste. Podemos ter os seguintes eventos de interesse:

E_1= { 1 }
E_2= {1, 2,}

Conceito de Probabilidades em Função da Noção de Eventos

É uma medida numérica, em termos relativos ou percentuais, que expressa a chance de um evento de interesse ocorrer. É a quantificação de incertezas.

Exemplos:

Seja a experiência que consiste no lançamento de uma moeda. A medida numérica que expressa a chance de ocorrer o evento cara, em um dado lançamento, é 50%;

Seja a experiência aleatória que consiste em selecionar um *smartphone* e observar o número de *chips* deste. É intuitivo que a probabilidade de ter um *chip* é 25%.

Definição Frequêncial (Intuitiva) de Probabilidades – "*A Posteriori*"

- Trata-se da probabilidade avaliada, empírica;
- Tem por objetivo estabelecer um modelo adequado à interpretação de certa classe de fenômenos observados (não todos);
- A experiência é a base para se montar o modelo ou para ajustá-lo ao ideal (teórico).

Exemplo:

Vamos supor uma experiência aleatória que consiste em observar o número de celulares com quatro *chips* de quatro amostras de celulares:

n=25		n=250		n=2500	
4	*16,0%*	80	*32,0%*	200	*8,0%*
1	*4,0%*	100	*40,0%*	230	*9,2%*
2	*8,0%*	50	*20,0%*	205	*8,2%*
9	*36,0%*	20	*8,0%*	210	*8,4%*

Para amostras de tamanho 25, pequenas, as variações das frequências percentuais são mais acentuadas, mas para amostras de tamanhos grandes (2500) as frequências percentuais pouco diferem entre si. É o que chamamos de **"Regularidade Estatística dos Resultados"**.

O valor hipotético fixo no qual tende a haver uma estabilização da frequência relativa, denomina-se probabilidade. No exemplo, seria a probabilidade de selecionarmos um celular e ele ter quatro *chips* em uma população destes aparelhos. A frequência relativa é, portanto, considerada uma medição experimental do valor da probabilidade.

Diríamos:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} [F(E)/n]$$

Onde:

P (E) = probabilidade de ocorrer o evento E
F (E) = frequência absoluta do evento ocorrer E
n = tamanho da amostra

Do ponto de vista matemático, essa definição de probabilidade apresenta dificuldades porque um número limite real pode não existir. Assim, a formalização da definição não obedece rigorosamente a teoria matemática de limite. Isso traz como consequência dificuldades em demonstrar os teoremas de probabilidades, muito embora essa definição seja bastante intuitiva.

A denominação *"a posteriori"* resulta do fato de termos que repetir a experiência várias vezes para calcular a probabilidade.

Tipos e Associações de Eventos:

a) Evento Simples

É o evento formado por um único elemento do espaço amostral associado.

Exemplos:

- Seja a experiência que consiste no lançamento de uma moeda, podemos ter os seguintes eventos simples de interesse:

$$E_1=\{Cara\}, \quad E_2= \{Coroa\}$$

- Seja a experiência que consiste no lançamento de um dado, podemos ter os seguintes eventos simples de interesse:

$$E_1=\{1\}, E_2= \{2\} ,E_3=\{3\}. E_4=\{4\} \text{ e } E_5= \{5\}$$

- Quando uma pessoa é sorteada para avaliar como ótimo, bom, regular, ruim ou péssimo um novo modelo de *iPhone*, podemos ter os seguintes eventos simples de interesse:

E_1={ótimo}
E_2= {bom}

b) Eventos Compostos

- É o evento formado por dois ou mais elementos do espaço amostral S associado.

Exemplos:

- Seja a experiência que consiste no lançamento de uma moeda, podemos ter o seguinte evento composto de interesse:

$$E=\{Cara, Coroa\}$$

- Seja a experiência que consiste no lançamento de um dado, podemos ter os seguintes eventos compostos de interesse:

$$E_1=\{1, 2\},$$
$$E_2=\{3, 4, 5\},$$
$$E_3=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Quando uma pessoa é sorteada para avaliar como ótimo, bom, regular, ruim ou péssimo um novo modelo de *iPhone*, podemos ter os seguintes eventos compostos de interesse:

E_1={ótimo, bom}
E_2={regular, ruim, péssimo}

c) Evento Certo (C)

É aquele que sempre ocorre, em qualquer realização da experiência aleatória, coincidindo com o próprio espaço amostral. Consequentemente, a probabilidade de ocorrer o evento certo é sempre *P(C) = 1 ou P(C) = 100%*, isto é, a certeza.

Exemplos:

- Seja a experiência que consiste no lançamento de uma moeda, o evento certo associado é:

$$C=\{Cara, Coroa\} \rightarrow P(C)=1$$

- Seja a experiência que consiste no lançamento de um dado, o evento certo associado é:

$$C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow P(C) =1$$

- Ao lançar um novo modelo de *smartphone*, ele pode ter as seguintes configurações de *chips*:

$$S=\{1,2,3,4\}$$
$$C=\{1,2,3,4\}$$
$$P(C) = 100\%$$

d) Evento Impossível (I):

É aquele que nunca ocorre, em nenhuma realização do experimento aleatório. Assim, o evento impossível é representado por I = Æ (conjunto vazio). A probabilidade de um evento impossível é sempre igual a zero, isto é, P(I)=0.

Exemplos:

- Seja a experiência que consiste no lançamento de um dado, um evento impossível associado é:

$$I = \{face > 6\} \rightarrow I = \varnothing \rightarrow P(I) =0$$

- Quando uma pessoa é sorteada para avaliar como ótimo, bom, regular, ruim ou péssimo o roteiro de determinado pacote turístico, um evento impossível associado é:

$$I=\{Outra\} \rightarrow I = \varnothing \rightarrow P(I) = 0$$

- Ao lançar um novo modelo de *smartphone*, ele pode ter as seguintes configurações de *chips*:

$$S=\{1,2,3,4\} \rightarrow \text{logo } I=\{5\} \rightarrow P(I) = 0$$

Definição Matemática de Probabilidades – *"A Priori"*

Seja uma experiência aleatória em que todos os elementos de um espaço amostral S associado a esta tenham a mesma chance de ocorrer e seja E um evento de interesse do espaço amostral S. Logo, a probabilidade de ocorrer o evento E pode ser assim definida por:

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$$

Onde:

- n (E) é o número de elementos do evento de interesse E;
- n (S) é o número de elementos do espaço amostral S.

Exemplos:

1) Uma pessoa tem 2 *netbooks* e 1 *desktop*. Ela escolhe aleatoriamente um computador para navegar na *internet*. Qual a probabilidade de escolher um *netbook*?

E = a pessoa escolher um *netbook*

n (E) = 2
n(S) = 3, então:

$$P(E)=\frac{2}{3}=67\%$$

2) Em uma loja de departamento de informática de um *shopping* existem 150 capas para *tablets* de couro vermelho e 250 de couro preto. Selecionando uma capa aleatoriamente dentre as 400 existentes, qual a probabilidade da capa selecionada ser de couro preto?

E = capa selecionada ser de couro preto

n (E) = 250
n (S) = 400

$$P(E) = \frac{250}{400} = 62{,}5\%$$

3) Quando um usuário de informática é sorteado para avaliar como ótimo, bom, regular, ruim ou péssimo um determinado programa para realização de uma rotina, qual a probabilidade do usuário avaliar positivamente o referido programa?

E = a pessoa avaliar positivamente o referido programa.

E = {ótimo, bom}

n (E) = 2
n (S) = 5

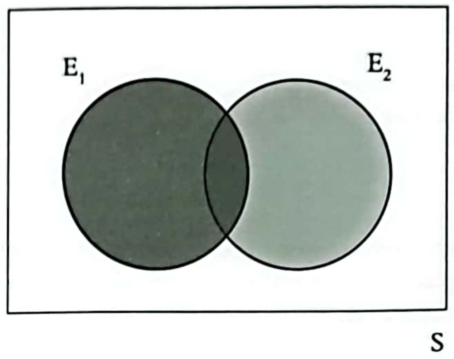
Portanto:

$$P(E) = \frac{2}{5} = 40\%$$

Tipos e Associações de Eventos:

a) União de Dois Eventos

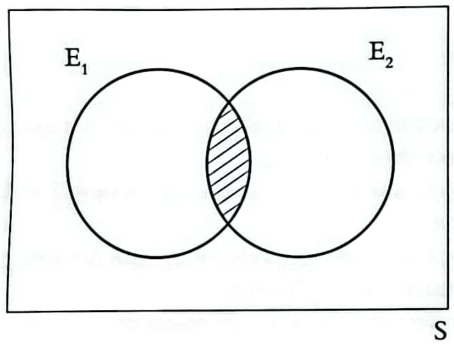
Sejam E_1 e E_2 dois eventos de um mesmo espaço amostral (S), a união deles é representada por $E_1 \cup E_2$ e é formada pelo conjunto de todos os elementos amostrais que estão somente em E_1, somente em E_2 ou em ambos. Esquematicamente, temos:



Esquema da união entre dois eventos

b) Interseção de Dois Eventos

Sejam E_1 e E_2 dois eventos de um mesmo espaço amostral (S), a interseção deles é representada por $E_1 \cap E_2$ e é formada pelo conjunto de todos os elementos amostrais que estão em E_1 e em E_2, isto é, que são comuns aos dois eventos. Esquematicamente, temos:



Exemplo:

Seja o experimento aleatório que consiste no lançamento de um dado. Sejam os eventos E_1 = ocorrer número par e E_2 = ocorrer número menor que três.

Pede-se:

a. Qual a união entre E_1 e E_2?
b. Qual a interseção entre E_1 e E_2?

Solução:

Primeiramente, deve-se realizar a construção dos eventos: $E_1 = \{2, 4, 6\}$ e $E_2 = \{1, 2\}$. Agora podemos realizar as operações entre os dois eventos em questão, que resultarão em:

a. A união entre E_1 e E_2 será $E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 4, 6\}$, pois compreende os elementos que estão em E_1 ou em E_2.
b. A interseção entre E_1 e E_2 será $E_1 \cap E_2 = \{2\}$, pois compreende os elementos que estão simultaneamente em E_1 e em E_2.

c) Eventos Mutuamente Exclusivos

São aqueles que nunca podem ocorrer simultaneamente em uma mesma realização de uma experiência aleatória.

Exemplos:

- No lançamento de uma moeda, os eventos cara e coroa são mutuamente exclusivos;
- No lançamento de um dado, os eventos 1 e 4 são mutuamente exclusivos;
- No lançamento de um dado, os eventos número par e número ímpar são mutuamente exclusivos;
- Da seleção randômica de um *smartphone*, este ser um modelo de dois e quatro *chips* são mutuamente exclusivos;
- Na escolha aleatória de um computador, este ter sistema operacional *Windows* 7 e *Windows 8*, normalmente, são mutuamente exclusivos.

Lembrando da Teoria dos Conjuntos, podemos dizer que eventos mutuamente exclusivos constituem conjuntos disjuntos, isto é, a interseção é o conjunto vazio (representado por ∅). Sejam E_1 e E_2 dois eventos de um mesmo espaço amostral (S), assim:

$$E = E_1 \cap E_2 = \varnothing.$$

Axiomas do Cálculo das Probabilidades

Pelos conceitos que acabamos de ver até agora podemos concluir que:

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Se E_1 e E_2 forem eventos mutuamente exclusivos, então:

Obs.: Se $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, então $P(E) = P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$.

Exemplos:

1) De uma população de *smartphones*, a probabilidade de selecionar aleatoriamente um celular de modelo de dois *chips* é de 60% e de modelo de quatro *chips* é de 10%. Qual a probabilidade, nesta seleção, do aparelho ser de pelo menos um dos dois tipos de modelo?

E= aparelho ser de pelo menos de um dos dois tipos de modelo.

Como os eventos são mutuamente exclusivos, temos:

$P(E) = 0{,}60 + 0{,}10 =$ **0,70** ou **70%**

2) Na escolha aleatória de um computador de uma empresa, a probabilidade dele ter sistema operacional *Windows 7 Home Basic* é de 30% e *Windows 8* é de 10%. Qual a probabilidade de ter selecionado um computador com um desses sistemas operacionais?

E = computador com sistema operacional Windows 7 Home Basic Windows 8

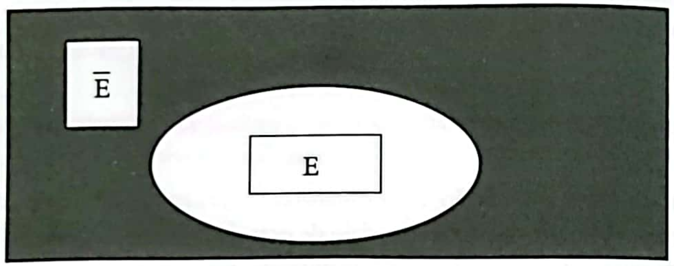
Como os eventos são mutuamente exclusivos, a probabilidade fica:

$P(E) = 0{,}30 + 0{,}10 = 0{,}40$ ou 40%

d) Eventos Complementares:

Um evento $\overline{E}$ é complementar ao evento E se ele somente ocorrer se o evento E deixar de ocorrer. São todos os elementos do espaço amostral S, que não pertencem ao evento E.

Visualizando:



Portanto:

$\mathbf{E + \overline{E} = S}$
$\mathbf{E \cap \overline{E} = 0}$

Assim, eventos complementares são mutuamente exclusivos.

Podemos escrever:

$S = E + \overline{E} \rightarrow P(S) = 1$

$P(E + \overline{E}) = 1$, como são eventos mutuamente exclusivos temos que

$P(E) + P(\overline{E}) = 1 \rightarrow P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

Sabemos que um evento pode ocorrer ou não ocorrer. Sendo p a probabilidade de que ocorra (sucesso) e q a probabilidade de que não ocorra (insucesso).

Chamando E ocorrer o sucesso e $\overline{E}$ o insucesso, temos:

$P(E) = p$ e $P(\overline{E}) = q$

Temos que:

$$\boxed{\mathbf{p + q = 1 \rightarrow q = 1 - p}}$$

Exemplos:

1) A probabilidade de um profissional de sistema de informação detectar falha de segurança de um sistema do governo federal é de 60%. Qual a probabilidade do evento complementar?

$p = 0{,}60$, logo $q = 1 - 0{,}60 =$ **0,40** ou **40%**

2) A probabilidade de um antivírus não detectar uma ameaça nova em um computador doméstico é 5%. Qual a probabilidade do *software* detectar o novo vírus infectado no computador?

$p = 0{,}05$, logo $q = 1 - 0{,}05 =$ **0,95** ou **95%**

3) A probabilidade de um profissional de sistema de informação detectar falha de segurança em um sistema computacional do governo federal é de 60%. De um colega seu, é de 70%. Os dois profissionais serão contratados para tentar detectar falhas de segurança no sistema do computacional do governo. Qual a probabilidade da falha ser detectada?

E = ser detectada falha no sistema computacional federal.

P(E) = 1 - (0,40 x 0,30) = 1 – 0,12 = **0,88** ou **88%**

e) Eventos Independentes

Dizemos que dois eventos são independentes quando a realização ou não-realização de um dos dois não afeta a probabilidade da realização do outro e vice-versa. A ocorrência de um deles não aumenta ou diminui a ocorrência do outro e a realização de um deles não modifica a chance de realização do outro.

Exemplos:

- Quando lançamos dois dados, o resultado obtido em um deles não afeta o resultado obtido no outro. Os resultados são independentes;
- Quando ligamos dois computadores domésticos, um *desktop* e um *netbook*, o tempo que cada um deles leva para estar pronto pra uso são eventos independentes;
- Quando selecionamos dois profissionais de sistema de informação para detectar falhas de segurança em um sistema computacional do governo federal, o sucesso de cada um deles é independente;
- Observando a falta de sinal de duas operadoras de TV a cabo em uma noite, as ocorrências dos eventos são independentes;
- Observando o erro de execução na realização de uma tarefa por dois programas computacionais distintos, temos que os eventos são independentes;
- Os números de erros de sintaxe de dois programas que realizam a modelagem de um problema acadêmico são independentes.

Regra do Produto para Eventos Independentes

Se dois eventos são independentes, a probabilidade de que se realizem simultaneamente é igual ao produto das probabilidades de realização dos dois eventos. Sejam E_1 e E_2 dois eventos independentes, suponha que tenhamos o interesse de, em uma experiência aleatória, quantificar a ocorrência dos dois simultaneamente. Então, desejamos:

$$\boxed{P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)}$$

Exemplos:

- Quando ligamos dois computadores domésticos, um *desktop* e um *netbook*, as probabilidades de que levem menos de 60 segundos para estarem prontos para uso tem respectivamente probabilidades de 90% e 95%. Qual a probilidade que, ligando os dois computadores ao mesmo tempo, eles levem menos de 60 segundos para estarem prontos?

E= os computadores levarem menos de 60 segundos para estarem prontos

Como os tempos que os computadores levam para estarem prontos são independentes, então:

P(E) = 0,90 x 0,95 = **0,855** ou **85,5%**

- Dois profissionais de sistema de informação detectam falhas de segurança em um sistema computacional do governo federal com probabilidades independentes de 0,10 e 0, 15, respectivamente. Qual a probabilidade de, ao tentarem de forma independente detectar falha no referido sistema, os dois consigam o objetivo quando o sistema está realmente vulnerável?

E = os dois profissionais consigam detectar falha no sistema

P(E) = 0,10 x 0,15 = **0,015** ou **1,5%**

- Observando a falta de sinal de duas operadoras de TV a cabo em uma noite, as ocorrências dos eventos são independentes com probabilidades de 0,5% e 0,2%, respectivamente. Qual a probabilidade de certa noite as duas operadoras estarem com serviço de TV sem sinal simultaneamente?

E= as duas operadoras estarem com serviço de TV sem sinal simultaneamente.

P(E) = 0,005 x 0,002 = **0,00001** ou **0,001%**

- Observando o erro de execução na realização de uma tarefa por dois programas computacionais distintos, temos que os eventos são independentes com probabilidades respectivas de 1% e 5%. Qual a probabilidades que, em uma dado ajuste dos programas, eles simultaneamente apresentem erros de execução?

E = os programas simultaneamente apresentem erros de execução.

P(E) = 0,01 x 0,05 = **0,005** ou **0,05%**

- Os números de erros de sintaxe de dois sistemas que realizam modelagens de problemas acadêmicos são independentes e respectivamente iguais a 10% e 8%. Qual a probabilidade de, em uma dada modelagem, os dois sistemas apresentem erros de sintaxe simultaneamente?

E = os dois sistemas apresentem erros de sintaxe simultaneamente.

P(E) = 0,10 x 0,08 = **0,008** ou **0,8%**

f) Eventos Condicionados (E_1/E_2)

Dois eventos associados a uma mesma experiência aleatória são ditos condicionados quando a ocorrência prévia de um deles aumenta ou diminui a ocorrência do outro, ou seja, a já ocorrência de um deles modifica a ocorrência do outro.

Contextos de condicionalidade ocorrem em muitas situações práticas e o fato de se ter uma informação extra sobre a ocorrência de determinado evento pode ser útil para o cálculo da probabilidade de um outro de interesse.

Exemplos:

- Vamos supor que um *site* de relacionamento tem a informação prévia de que a propaganda de seu *blog*, veiculada em mídia de grande penetração internacional, teve eficácia comprovada, logo ficará mais claro que o aumento de adições de novos usuários estrangeiros deve aumentar;
- É sabido que no ano de 2011, por conta da crise financeira americana, houve recessão econômica global, com reflexos no Brasil. Fica claro, então, para o analista, de que produção de novas tecnologias de *iPhone* deve diminuir por este motivo;
- Seja o evento E_1 = "a letra u ocorre na palavra" e evento E_2 = "a letra q ocorre na palavra". Certamente o evento E_1 tem uma probabilidade, mas ao saber que o evento E_2 ocorre, fica mais certo que E_1 deve também ocorrer, uma vez que **q** raramente ocorre em uma palavra sem vir seguido de **u**.
- Um frenesi de conversas no Twitter sobre um programa geralmente significa que mais telespectadores estão em sintonia, enquanto programas de TV mais populares geram mais atividade no microblog, mostra estudo da Nielsen. A empresa de medição de mídia diz que, pela primeira vez, ficou comprado com rigor estatístico o que muito no setor de mídia suspeitavam nos últimos anos: a avaliação de um programa de TV e a magnitude do barulho que ele provoca no Twitter estão condicionados. Os pesquisadores descobriram uma influência estatisticamente significante indicando que um pico na audiência de um programa de televisão pode aumentar o volume de tweets e, reciprocamente, um pico nos tweets pode aumentar a audiência. Como tomada de decisão, a Nielsen sustenta a implantação de um novo sistema de classificação que será lançado em breve: em parceria com o Twitter, a empresa deve começar a publicar o novo "Nielsen Twitter TV Rating", que mede o volume de conversa na rede social sobre cada programa.