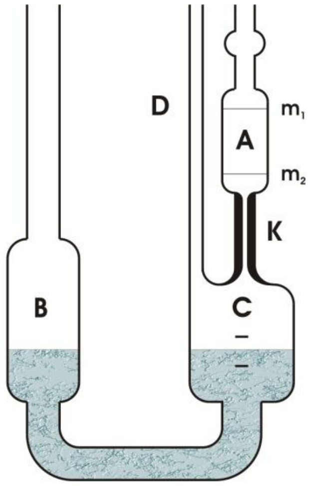
Praktikum Physik
für Naturwissenschaftler

Viskosität

Versuchsinhalt

Laminare Strömung, Stokes'sche Reibungskraft, Kräftegleichgewicht,
Strömung in einem Kapillarrohr, Hagen-Poiseuille'sches Durchflussgesetz

Statistische Datenauswertung, Mittelwert, Standardabweichung, Größtfehler,
Lineare Regression, Histogramm, Normalverteilung, Software für Datenanalyse



Kapillar-Viskosimeter

Experimente

Aus der stationären Fallgeschwindigkeit von Stahlkugeln in einer zähen Flüssigkeit wird die Viskosität der Flüssigkeit bestimmt (nach Stokes).

Aus der Zeit, die ein bestimmtes Flüssigkeitsvolumen benötigt, um ein Kapillarrohr zu durchströmen, wird die kinematische Viskosität eines Glycerin/Wasser-Gemischs und daraus die Glycerinkonzentration bestimmt. Durch Messungen mit zwei verschiedenen Kapillaren wird die Radius-Abhängigkeit des Volumenstroms verifiziert.

Mit Hilfe von Tabellenkalkulations-Software werden Mittelwert und Standardabweichung der Messreihen berechnet. Die Ergebnisse werden grafisch dargestellt und mittels linearer Regression ausgewertet. Ebenso wird die Häufigkeitsverteilung von Messwerten in einem Histogramm dargestellt und durch Anpassung einer Normalverteilung analysiert.

Inhalt

Literatur

- P.A. Tipler : „Physik“, Spektrum-Verlag
- H. Vogel: „Gerthsen Physik“, Springer
- W. Walcher : „Praktikum der Physik“, Teubner

I) Theorie

1. Bedeutung der Viskosität für Naturvorgänge

Das menschliche Herz pumpt das Blut samt Nähr- und Signalstoffen durch die Blutgefäße des Körpers. Aber welche Faktoren entscheiden darüber, ob alles Gewebe genügend durchblutet wird? - Welchen Gesetzen gehorcht der Druckabfall in Rohrleitungen; wie müssen sie demnach dimensioniert werden, um ihre Funktion zu erfüllen? - Wie lange dauert es zwei Flüssigkeiten zu vermischen, um sie dadurch miteinander reagieren zu lassen?
Flüssigkeiten fließen zäh. Zwar füllen sie jedes zur Verfügung stehende Volumen im Laufe der Zeit aus, doch kann es je nach Stoff und Temperatur sehr verschieden lange dauern, bis sie diesen - mechanischen - Gleichgewichtszustand erreichen. In den folgenden Experimenten werden die physikalischen Gesetze für die Strömung von Flüssigkeiten und insbesondere die Charakterisierung der Zähigkeit von Flüssigkeiten behandelt.

2. Newtons Definition der Viskosität

Im ersten Schritt müssen wir mit einem objektiven Begriff erfassen, was wir subjektiv als "Zähigkeit" erfahren. Intuitiv schreiben wir diese Zähigkeit der Substanz selbst als Materialeigenschaft zu.
Zur Definition der Viskosität stellen wir uns einen Versuchsaufbau vor, bei dem sich eine zähe Flüssigkeit (oder auch ein Gas) zwischen einer beweglichen Platte mit Flächeninhalt A und einer festen Wand im Abstand x befindet (Abb. 1).

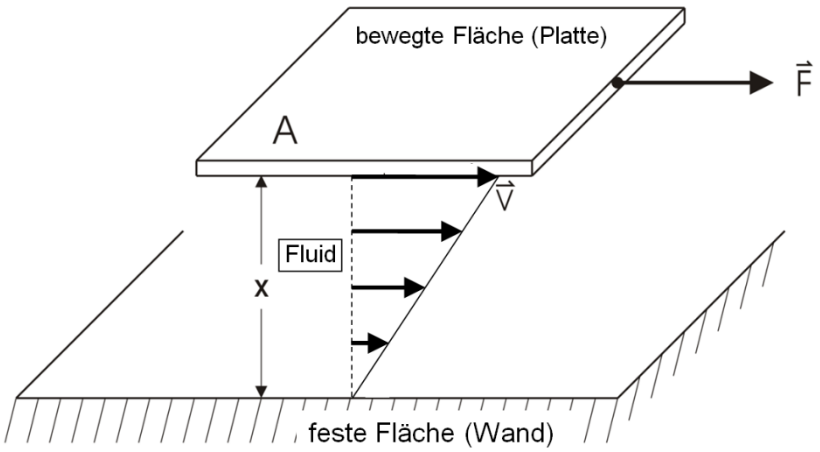


Abbildung 1: *Zwei Flächen schließen eine zähe Flüssigkeit ein. Wird die obere Platte bewegt, bewegen sich die darunter liegenden Flüssigkeitsschichten mit einer Geschwindigkeit, die mit zunehmendem Abstand von der Platte abnimmt.*

An der Platte greife tangential die Zugkraft F an. Sie beschleunigt aber die Platte nur kurz; es stellt sich bald eine Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit v ein. Es muss also eine Gegenkraft, die Reibungskraft F_R, wirken, die die ursprünglich beschleunigende Wirkung der Zugkraft gerade kompensiert. Es gilt der Zusammenhang

$$-F_R = F = \eta \cdot A \cdot \frac{v}{x} \qquad (1)$$

Die Viskosität η (griech. eta) ist dabei die charakteristische Zähigkeit des verwendeten Materials (Flüssigkeit oder Gas).

Aus Gleichung (1) können wir die SI-Einheit der Viskosität ablesen :

$$[\eta] = 1\, N \cdot s \cdot m^{-2} = 1\, Pa \cdot s \qquad (= 10\, dyn \cdot s \cdot cm^{-2} = 10\, Poise)$$

In Klammern steht die c-g-s-Einheit (nach Poisseuille benannt), die zwar im gesetzlichen Einheitssystem (SI, Système International d´Unités) nicht mehr zugelassen ist, aber in manchen Tabellenwerken noch vorkommt.

Anhand von Abb. 1 kann das Konzept der laminaren Strömung veranschaulicht werden:
Wir denken wir uns die Flüssigkeit zwischen den Platten in sehr dünne ebene Schichten der Dicke Δx zerlegt, die aneinander vorbei gleiten sollen ohne miteinander zu verwirbeln. Man spricht von einer laminaren Strömung oder Schichtströmung, im Gegensatz zur wirbelnden, turbulenten Strömung. Im Übergangsbereich zwischen zwei dünnen Schichten mit dem Geschwindigkeitsunterschied Δv wird die schnellere durch die viskose Reibung an der langsameren gebremst, die langsamere durch die schnellere beschleunigt (actio = reactio). Die Kraft zwischen ihnen beträgt nach (1) dann

$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dx} \tag{2}$$

Diese Gleichung beschreibt den Einfluss der Reibung zwischen infinitesimal dünnen strömenden Schichten.
Mit Hilfe von Gleichung (2) können Strömungsprobleme für spezielle Geometrien (z.B. für Strömung durch Rohre bzw. Kapillaren) durch Integration mit entsprechenden Randbedingungen gelöst werden. Als Randbedingung nimmt man typischerweise an, dass die Flüssigkeit an den Wänden anhaftet.

Die Viskosität hängt bei niedermolekularen Stoffen, den so genannten Newtonschen Flüssigkeiten, nur von den Umweltbedingungen Druck und Temperatur ab (Tab. 1). Bei makromolekularen Bestandteilen wie Polymeren kann sie darüber hinaus von der Geschwindigkeit abhängen oder gar von der Zeit seit Versuchsbeginn.
Die Viskosität eines Fluids sinkt normalerweise mit steigender Temperatur. Durch den Zusatz von Polymeren, die ein umgekehrtes Verhalten zeigen, kann die Viskosität eines solchen Gemisches über einen weiten Temperaturbereich konstant gehalten werden. Bei Mehrbereichs-Motorölen wird dieser Effekt eingesetzt

Tabelle 1: *Viskositäten für verschiedene Flüssigkeiten bei unterschiedlichen Temperaturen (Daten aus Paul A. Tipler, ‚Physik', Spektrum Verlag Heidelberg 1994)*

Flüssigkeit	**Temperatur [°C]**	**η [mPa·s]**
Blut	37	4,0
Glycerin	0	10000
	20	1410
	60	81
Motoröl (SAE 10)	30	200
Wasser	0	1,8
	20	1,00
	60	0,65
Luft	20	0,018

3. Viskose Strömung in Rohren (Hagen/Poiseuille)

Das Gesetz von Hagen und Poiseuille behandelt Strömungen durch Kapillaren, also zylindrische Rohre mit Radius R und Länge L. Der deutsche Ingenieur Hagen dachte dabei an Wasserleitungen, der französische Arzt Poiseuille an Blutgefäße. Beide wollten herausfinden, von welchen Faktoren der Volumenstrom (das ist der Quotient „Volumen der Flüssigkeit pro Zeit“) durch die Kapillare abhängt.

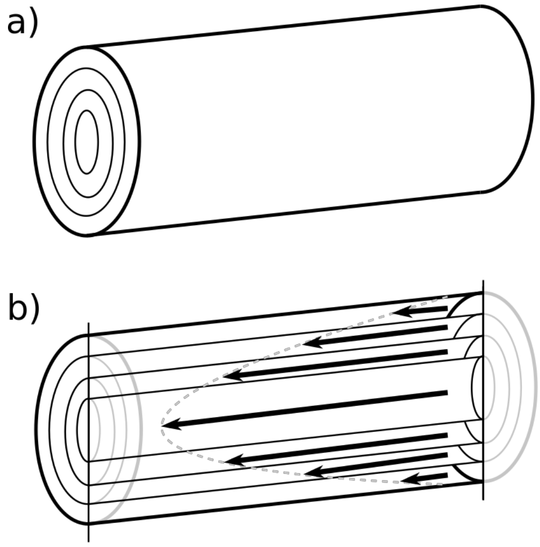


Abbildung 2: *Ein Kapillarrohr wird von einer Flüssigkeit durchströmt. a) gedachte Strömungsschichten, b) Querschnitt durch das Rohr mit Darstellung der verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten der einzelnen Schichten.*
(Source: Grajales at https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Poiseuille_abstraction.svg, public domain).

Die Strömungsgeschwindigkeit innerhalb des Rohrs variiert mit dem Abstand von der Rohrachse (Abb. 2). Wir können uns die strömenden Schichten (laminare Strömung) als dünne konzentrische Hohlzylinder vorstellen, wobei die äußerste Schicht an der Gefäßwand haftet und die innerste Schicht die höchste Strömungsgeschwindigkeit besitzt. Es zeigt sich ein parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil. Der ‚Strömungswiderstand’, der für einen Druckabfall Δp längs des Rohres sorgt ist durch die viskose Reibung zwischen den Flüssigkeitsschichten verursacht und kann durch Integration über den Rohrradius berechnet werden. Analog zum Ohm’schen Gesetz ergibt sich der Strömungswiderstand als Quotient aus der Druckdifferenz Δp und dem Volumenstrom ΔV/Δt.
Für den Volumenstrom gilt:

$$\boxed{\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{R^4}{\eta \cdot L} \cdot \Delta p} \qquad (3)$$

Dies wird als das Strömungsgesetz von Hagen-Poiseuille bezeichnet. Die Herleitung findet sich im Detail zum Beispiel bei Gerthsen.

Bemerkenswert ist, dass der Volumenstrom durch das Rohr (Rohrradius R) mit der 4. Potenz des Rohrradius R steigt! Wenn sich der Durchmesser der Blutgefäße reduziert, dann wird entweder die Blutströmung wesentlich verringert, oder das Herz muss wesentlich mehr arbeiten, um pro Zeiteinheit das gleiche Volumen durchzupumpen. Wird zum Beispiel ein Blutgefäß auf ¼ des ursprünglichen Radius verengt, so sinkt bei gleicher Druckdifferenz der Blutstrom um den Faktor 256. Andererseits kann bei Bedarf (z.B. starke Muskeltätigkeit) die

Blutstromstärke immens erhöht werden durch eine geringfügige Erweiterung der Kapillaren ($V/t \propto R^4$).

Blut ist wegen der festen Bestandteile, die im Blutplasma suspendiert sind (Erythrozyten, Leukozyten...), eine komplexe Flüssigkeit, deren Strömungseigenschaften nicht denen einer einfachen Newton'schen Flüssigkeit entsprechen. Dennoch ist das Gesetz von Hagen-Poisseuille eine gute Näherung für das qualitative Verständnis des Blutflusses.

4. *Umströmung eines Körpers (Stokes)*

Jeder weiß, dass Radfahren und Schwimmen umso anstrengender ist, je schneller man sich bewegt. Dies rührt daher, dass die Reibungskraft selbst im Idealfall der laminaren Strömung mit der Geschwindigkeit anwächst (siehe Gleichung (1)). Bei höherer Geschwindigkeit wird die laminare Strömung instabil (Abb. 3); es bilden sich Wirbel (turbulente Strömung). Für die Ausbildung der Wirbel muss zusätzliche Energie aufgewendet werden, die der Bewegung des Körpers entnommen wird. Die Reibungskraft ist daher bei turbulenter Strömung größer als bei laminarer Strömung und wächst stärker mit der Geschwindigkeit (oft gilt: $F_R \propto v^2$).

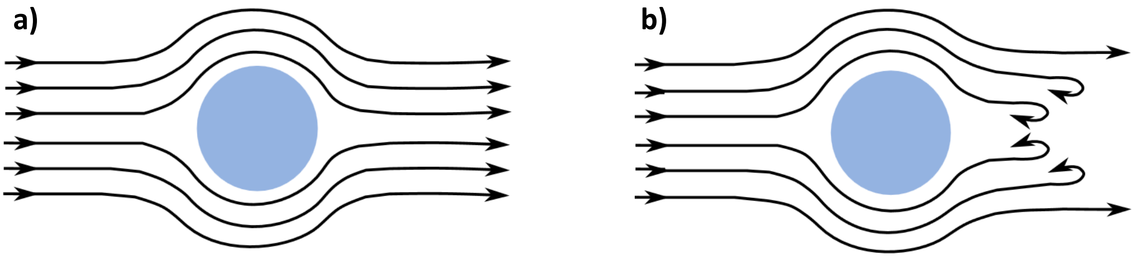


Abbildung 3: *Veranschaulichung durch Stromlinien: Eine laminare Strömung (a) zeichnet sich durch strikte Trennung der Flüssigkeitsschichten aus, bei der turbulenten Strömung (b) treten Verwirbelungen auf.*

Im folgenden soll der Fall der laminaren Umströmung einer Kugel betrachtet werden:
Eine Kugel mit Radius r, bewege sich mit der Geschwindigkeit v durch ein Medium der Viskosität η. Die Flüssigkeit hafte an der Kugeloberfläche und werde in einem Übergangsbereich mehr oder weniger mit bewegt. Das Geschwindigkeitsgefälle dv/dr schätzen wir einfach mit v/r ab. Setzen wir diese Annahmen in (2) ein, finden wir

$$F_R \approx -4 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot v$$

Durch aufwendige Berechnungen fand Stokes das exakte Ergebnis

$$\boxed{F_R = -6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot v} \qquad (4)$$

Das ist der Ausdruck für die Reibungskraft, die auf eine Kugel wirkt, welche bei ihrer Bewegung durch ein Medium laminar umströmt wird. Sie gilt streng genommen nur in unendlich ausgedehnten Flüssigkeiten. In der Praxis genügt es, wenn die Gefäßabmessung D >> r ist; eine Bedingung, die bei Experimenten überprüft werden muss.

II) Methodik

1. Kugelfallmethode nach Stokes

Stahlkugeln verschiedener Größe (Durchmesser d) werden nacheinander in ein senkrecht stehendes, mit einer viskosen Flüssigkeit gefülltes Rohr (Durchmesser D) geworfen. Nach einer kurzen Beschleunigungsphase erreichen sie bald ihre Endgeschwindigkeit, die bestimmt wird über die Laufzeit t, die sie für eine vorgegebene Strecke der Länge L brauchen.
Auf diese Situation wollen wir die Gleichgewichtsbedingung der Statik anwenden: die Summe aller angreifenden Kräfte muss Null ergeben, damit sich die Kugeln mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Denn wäre die resultierende Kraft $F \neq 0$, so würde nach $F = m \cdot a$ eine Beschleunigung auftreten. In unserem Fall müssen wir die Schwerkraft F_G, die Auftriebskraft F_A und die Reibung F_R (Stokessche Reibung nach Gleichung(4)) betrachten. Mit dem Kugelvolumen V_K, Kugelradius r, Dichte der Kugel ρ_K bzw. der Flüssigkeit ρ_F und der Erdbeschleunigung $g = 9{,}81 \mathrm{m/s^2}$ lautet die Kräftebilanz

$$\begin{aligned} & F_G + F_A + F_R = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \rho_K \cdot g \cdot V_K - \rho_F \cdot g \cdot V_K - 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta \cdot v = 0 \end{aligned}$$

(Die Auftriebskraft wirkt entgegen der Gewichtskraft, die Reibungskraft wirkt entgegen der Bewegungsrichtung!). Das Volumen einer Kugel ist $V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ und die Geschwindigkeit wird aus der Laufzeit t für die Fallstrecke L bestimmt $v = L/t$.

Mit diesem Ansatz lässt sich die Viskosität auf zwei Arten bestimmen:

a) Einsetzen und Auflösen nach η ergibt

$$\eta = \frac{(\rho_K - \rho_F) \cdot g}{18 \cdot L} \cdot d^2 \cdot t \tag{5}$$

Die rechts stehenden Größen sind alle bekannt oder leicht messbar, die Viskosität kann daraus berechnet werden.

b) Auflösen nach t ergibt

$$t = \frac{18 \cdot L}{(\rho_K - \rho_F) \cdot g} \cdot \eta \cdot \frac{1}{d^2} \qquad (y = m \cdot x)$$

Diese Formel erlaubt eine graphische Auswertung. Wird in einem Diagramm t über $1/d^2$ auftragen, erhält man eine Ursprungsgerade mit der Steigung m, die bis auf einen Faktor die Viskosität liefert:

$$m = \frac{18L}{(\rho_K - \rho_F) \cdot g} \cdot \eta$$

Treten systematische Abweichungen von dieser Geraden auf, so liegt nahe, dass die Voraussetzungen für die Anwendung der Stokes'schen Formel (laminare Strömung) nicht erfüllt waren.

2. Kapillarviskosimeter nach Ubbelohde

Die Kapillarviskosimeter arbeiten nach dem Gesetz von Hagen und Poiseuille. Im Prinzip lässt man ein definiertes Flüssigkeitsvolumen unter dem Einfluss der Schwerkraft durch ein enges Rohr fließen und misst die dafür benötigte Zeit. Die in Gleichung (3) einzusetzende Druckdifferenz Δp ist durch den Schweredruck $\rho g \Delta h$ der Flüssigkeitssäule gegeben. Einsetzen und auflösen nach η ergibt

$$\eta = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{g \cdot R^4}{\Delta V} \cdot \rho \cdot t \qquad (6)$$

Auf diese Weise wird also nur der Quotient η/ρ bestimmt. Man nennt ihn die

kinematische Viskosität $\boxed{\upsilon = \frac{\eta}{\rho}}$

(ν: griech. nü). Sie hat die SI-Einheit

$$[\upsilon] = 1\, m^2 \cdot s^{-1} \qquad (= 10^4\, cm^2 \cdot s^{-1} = 10^4\ St)$$

In Klammern ist die nach Stokes benannte CGS-Einheit angegeben, die oft in älteren Tabellenwerken zu finden ist.
Die tatsächlich verwendeten Kapillarviskosimeter sind viel komplizierter aufgebaut. Der Hintergrund ist das Problem, eine genau definierte Flüssigkeitsmenge bereitzustellen und unter möglichst gleich bleibenden Bedingungen durch die Kapillare zu leiten. Ubbelohde erreicht das mit einem Glasapparat (Abb. 4), der aus zwei Vorratsbehältern A und B, einer Kapillaren K, einem Rohr zum Befüllen und einem Druckausgleichsrohr D besteht. Zunächst verschließt man D, sodass die Flüssigkeit durch K nach A hochsteigt, wenn man in A mit Hilfe eines Peleusballs einen Unterdruck erzeugt. Dann gibt man D frei, anschließend A, und misst die Zeit, in der der Flüssigkeitsspiegel von der Marke m_1 nach m_2 fällt. Das Besondere ist die Formgebung bei C. Durch einen Kunstgriff fließt die Flüssigkeit hier ganz gleichmäßig aus, gleichgültig wie hoch der Spiegel zu Beginn über m_1 stand. Die Formel zur Auswertung orientiert sich an der Gleichung (6). Weil der Apparat geometrisch sehr kompliziert ist, fasst man die stets gleichbleibenden Parameter in einer Apparatekonstanten K zusammen, die der Hersteller ermittelt, und schreibt

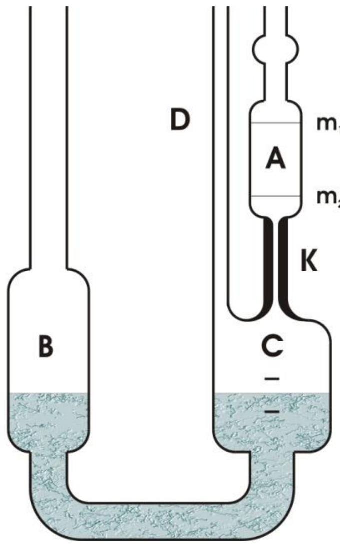


***Abb. 4:** Funktionsprinzip des Kapillarviskosimeters nach Ubbelohde.*

$$\boxed{\upsilon = K \cdot t} \qquad (7)$$

Man kann eine Genauigkeit von bis zu 0,1% erreichen. Zudem braucht man für die Messung nur wenig Zeit. Man braucht nur verhältnismäßig kleine Probenmengen. Schließlich kann die Probe sehr schnell ausgewechselt werden.

III) Grundlagen der statistischen Datenauswertung

1. Messfehler

Jede Messung lässt sich nur mit begrenzter Genauigkeit durchführen. Daher muss zur Beurteilung eines Messergebnisses neben dem Messwert auch eine Abschätzung der Unsicherheit, also des Messfehlers, angegeben werden. Ziel einer Messung ist es, den „wahren Wert“ einer physikalischen Größe zu ermitteln, erhalten wird aber ein Messwert. Messfehler sind nun Abweichungen eines Messwerts vom „wahren Wert“ (der allerdings unbekannt ist):

$$\Delta x \quad = \quad x - x_w$$

Für eine Abschätzung des Messfehlers muss zunächst nach dessen Ursachen gefragt werden. Man unterscheidet zwischen zwei Klassen von Fehlern, den systematischen und den zufälligen (statistischen) Fehlern:

Systematische Fehler entstehen durch Unzulänglichkeiten der Messapparatur oder des Experimentators. Beispiele sind: verzerrter Maßstab zur Längenmessung, nachgehende Uhr zur Zeitmessung, falsche Justierung eines Aufbaus oder zeitliche Drift eines Signals. Systematische Fehler sind zum größten Teil vermeidbar und sollten vor dem Experiment behoben werden. Ist dies nicht möglich, so sollte man die Fehler experimentell in Form einer Korrekturkurve erfassen, mit der dann die Ergebnisse beurteilt werden können. Der dann noch verbleibende systematische Fehler muss abgeschätzt und bei der Fehlerangabe berücksichtigt werden.

Zufällige (statistische) Fehler sind prinzipiell unvermeidbar und führen zu einer unsystematischen Schwankung der Messergebnisse bei mehrmaliger Messung. Verursacht werden diese zum Beispiel durch die begrenzte Auflösung der Messapparatur oder durch Schwankungen in der Messgröße (Rauschen). Der zufällige Fehler in einem Messergebnis kann durch wiederholtes Messen und Beobachten der Schwankungen charakterisiert werden. Im Folgenden wird ausschließlich die Charakterisierung von zufälligen Fehlern behandelt.

2. Verteilung zufällig schwankender Messwerte

Wenn man eine Messung (z.B. Fallzeitmessung einer Kugel) häufig wiederholt, die erhaltenen Fallzeiten in Klassen (hier 0,2 s breit) aufteilt und die Häufigkeiten für die Fallzeitklassen aufträgt, so könnte man etwa das nebenstehende Histogramm (Abb. 5) erhalten.

Die Messwerte gruppieren sich nahezu symmetrisch um einen Wert (hier etwa 9 s), der mit größerer Häufigkeit auftritt.

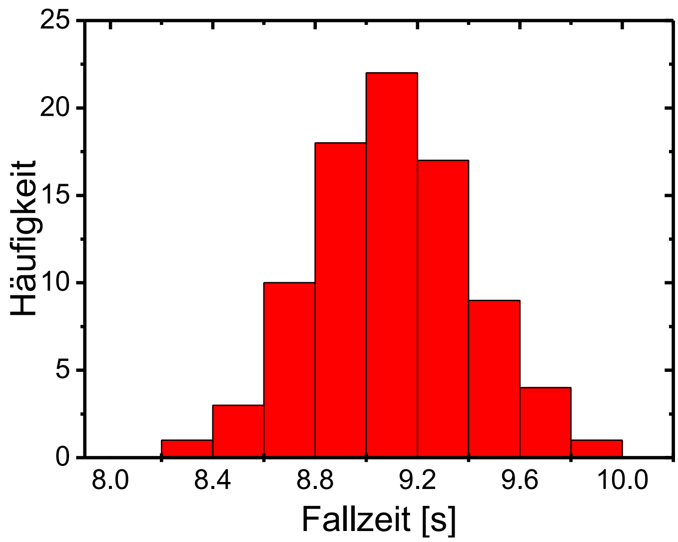


Abb. 5: *Histogramm erstellt aus den Zeitmessungen der Kugelfallmethode. Die Kugel mit Durchmesser d = 3 mm wurde 85 mal gemessen.*

Mit zunehmender Anzahl an Messungen, nähert sich die Verteilung der Messwerte in Abb. 5 immer besser einer Gauss-Funktion

$$y = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-x_W)^2}{2\sigma^2}} \tag{8}$$

an, wobei in unserem Fall die Variable x die Fallzeit und y die Häufigkeit beschreibt (Abb. 6). Dabei ist A die Fläche unter der Kurve, wenn man von -∞ bis +∞ integriert. Könnte man die Messung unendlich oft wiederholen, so würde sich im Grenzfall eine Verteilung der Messwerte um den wahren Wert x_W einstellen.

Normiert man die Gauss-Funktion (A = 1), so erhält man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die als Normalverteilung bezeichnet wird.

Die Normalverteilung wird durch zwei Parameter charakterisiert: dies sind der Mittelwert (= wahrer Wert x_w) und die Standardabweichung σ.
Die Standardabweichung beschreibt die Breite der Messwert-Verteilung und ist damit ein Maß für den zufälligen Fehler. Innerhalb des schraffierten Bereichs von ±σ um den wahren Wert x_w befinden sich etwa 68% aller Messwerte.

Bem: Die Normierung ändert lediglich die Amplitude der Gauss-Funktion und hat keinen Einfluss auf die Standardabweichung σ.

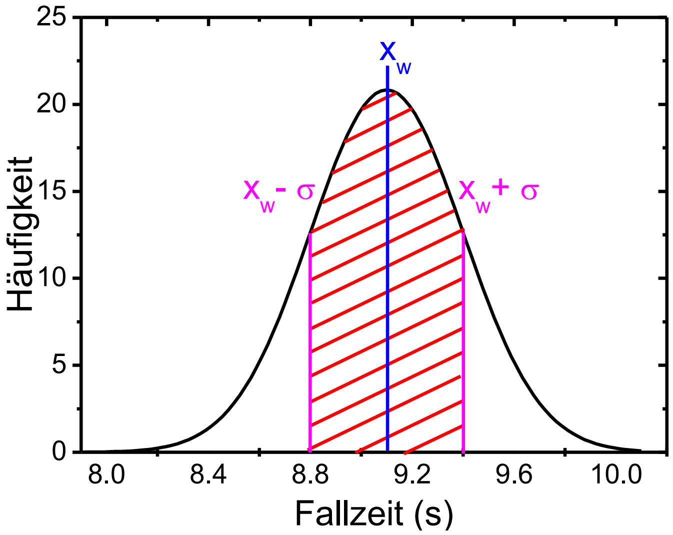


***Abb. 6:** Im Falle zufälliger Schwankungen lässt sich die Verteilung der Messwerte näherungs-weise durch die Gauss-Funktion beschreiben Verteilung*

3. Auswertung von Messreihen in der Praxis

Bei realen Messreihen hat man in der Regel nur wenige Messwerte zur Verfügung. Der wahre Wert der Messgröße und der Standardabweichung können deshalb nicht genau ermittelt, sondern nur abgeschätzt werden (Die Lage der Gaußkurve ist nicht genau bekannt!). Der beste Schätzwert für x_w ist der Mittelwert (arithmetisches Mittel) aus den n Messwerten x_i:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Die Mittelwertbestimmung führt zu einer genaueren Aussage über eine physikalische Messung als der Einzelwert, weil sich die Schwankungen der Messgröße, soweit es sich um zufällige Fehler handelt, teilweise kompensieren. Systematische Fehler werden hingegen durch die Mittelwertbildung nicht verringert, da sie jeden Messwert in derselben Richtung verfälschen.

Die Standardabweichung der Verteilung wird durch die mittlere quadratische Abweichung der Messwerte vom Mittelwert abgeschätzt:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Die Streuung der Mittelwerte, die man sich aus mehreren Messreihen gewonnen denken kann, ist natürlich geringer als die der einzelnen Messwerte. Die Standardabweichung des Mittelwerts wie folgt berechnet:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

Die Standardabweichung des Mittelwertes wird also mit wachsender Anzahl der Einzelmessungen immer kleiner.

Sind die systematischen Fehler vernachlässigbar klein, so wird das Ergebnis einer Messreihe angegeben durch den Mittelwert und die Standardabweichung des Mittelwertes einer Messgröße.

4. Fehlerfortpflanzung und Größtfehlerabschätzung

In vielen Fällen interessiert nicht der Wert einer primären Messgröße, sondern der einer daraus berechneten physikalischen Größe. Im Falle des Stokesschen Kugelfalls ist eine primäre Messgröße die Fallzeit, während das eigentliche Interesse der Viskosität gilt, die daraus erst berechnet wird. Wie hängt nun der Fehler in der Viskosität mit den Fehlern in den Messgrößen, also der Fallzeit, der Fallstrecke etc., zusammen?
Man kann einerseits nach einer realistischen Einschätzung des Fehlers, also der Fortpflanzung der Standardabweichung, fragen (Gaußsche Fehlerfortpflanzung). Andererseits kann auch der maximal auftretende Fehler in der berechneten Größe abgeschätzt werden (Größtfehlerabschätzung). Bei der Größtfehlerabschätzung nimmt man den ungünstigsten Fall an, dass sich die Fehler in der berechneten Größe y, die sich aus den Fehlern in den Messgrößen $x_1, x_2, \ldots$ ergeben, zum Gesamtfehler Δy betragsmäßig addieren:

$$\Delta y = \left|\Delta y_{x_1}\right| + \left|\Delta y_{x_2}\right| + \ldots$$

Die Einzelfehler Δy_{x_i} lassen sich einfach berechnen, wenn man die Funktion $y(x_i)$ durch ihre Steigungsgerade an der Stelle x_i annähert (für kleine Δx_i):

$$\Delta y_{x_i} \approx \left|\frac{dy}{dx_i}\right| \cdot \Delta x_i$$

Im Folgenden soll dies auf das Beispiel des Stokesschen Kugelfalls angewandt werden. Die Berechnungsformel für die Viskosität lautet:

$$\eta = \frac{(\rho_K - \rho_F)\cdot g}{18\cdot L}\cdot d^2 \cdot t$$

Nimmt man an, dass die Fehler in den beiden Dichten und der Erdbeschleunigung g sehr klein sind gegen die Fehler in Fallstrecke L, Kugeldurchmesser d und Fallzeit t, so folgt:

$$\Delta\eta = \left|\frac{\partial\eta}{\partial L}\right| \cdot \Delta L + \left|\frac{\partial\eta}{\partial d}\right| \cdot \Delta d + \left|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right| \cdot \Delta t$$

Nach Ausführen der Differentiationen und Einsetzen der Mittelwerte $\bar{L}, \bar{d}, \bar{t}$ kann der Größtfehler $\Delta\eta$ aus der Kenntnis der Fehler in den Messgrößen abgeschätzt werden.

5. Lineare Regression

Um die Gültigkeit eines physikalischen Zusammenhangs nachzuweisen genügt es nicht, ein Experiment mit dem gleichen Parametersatz viele Male zu wiederholen. Vielmehr muss ein Parameter (hier etwa der Kugeldurchmesser d) geändert werden und der Einfluss auf das Messergebnis (hier die Fallzeit t) untersucht werden. Im einfachsten Fall versucht man einen linearen Zusammenhang zwischen der Messgröße und dem variierten Parameter herzustellen:

$$y = m \cdot x$$

Beim Kugelfallexperiment lautet dies:

$$t = \frac{18 \cdot L \cdot \eta}{(\rho_K - \rho_F) \cdot g} \cdot \frac{1}{d^2}$$

Trägt man also die gemessenen Fallzeiten t_i über$1/d^2$ auf, so sollte sich eine Ursprungsgerade ergeben, aus deren Steigung die Viskosität berechnet werden kann.

Mit Hilfe der linearen Regression kann nun die Gerade gefunden werden, die den besten Kompromiss für alle Messpunkte darstellt. Man erreicht dies durch Minimierung der Fehlerquadrate („least squares“), d.h. durch Minimierung der Abweichungen der gemessenen Werte y_i von den mit der Auswerteformel berechneten mx_i, wobei die Steigung m variiert wird:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i)^2 = minimal$$

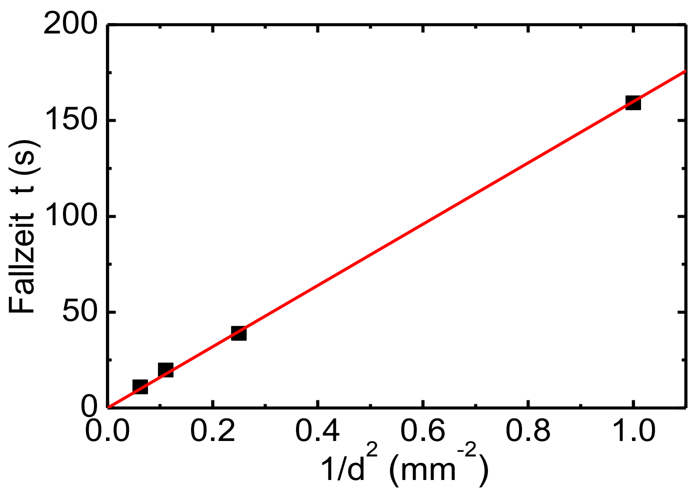


***Abb. 7:** Lineare Regression: Bei geeigneter Auftragung ergibt sich ein linearer Zusammenhang, wobei durch Minimierung der Fehlerquadrate die Steigung bestimmt werden kann (ebenso der Achsenabschnitt im Falle einer Nicht-Ursprungsgeraden).*

IV) Versuchsdurchführung

1. Bestimmung der Viskosität von Getriebeöl mit der Kugelfallmethode

a) Vergleich verschiedener Kugeldurchmesser

Machen Sie sich zunächst mit dem Experiment vertraut, indem Sie einige Kugeln verschiedener Größe im Fallrohr sinken lassen. Notieren Sie Ihre Beobachtungen und überlegen Sie sich den Ablauf der Messungen und welche physikalischen Größen Sie später zur Auswertung benötigen.

Führen Sie dann Messreihen zur Bestimmung der Viskosität der Flüssigkeit im Fallrohr durch. Jede der vier Kugelsorten sollte mindestens zehnmal gemessen werden. Für die 3 mm Kugel sind zur späteren Auswertung der Verteilung 30 Messungen erforderlich.

Werten Sie Ihre Messreihen mit einem Tabellenkalkulationsprogramm (z.B. ‚Excel') aus und geben Sie für jeden Kugeldurchmesser Mittelwert und Standardabweichung der Fallzeit an.

Berechnen Sie jeweils die Viskosität, die sich aus den Messungen mit einem Kugeldurchmesser ergibt (siehe II.1.a). Erkennen Sie eine Systematik in den Ergebnissen? Führen Sie eine Größtfehlerabschätzung durch, bilden Sie den Mittelwert aus den vier Viskositätswerten und vergleichen Sie Ihre Resultate mit dem Literaturwert für das verwendete Getriebeöl OKS3740.

Stellen Sie die mittleren Fallzeiten über 1/(Kugeldurchmesser)^2 grafisch dar und ermitteln Sie mittels linearer Regression die Viskosität (siehe II.1.b). Warum unterscheidet sich die aus der linearen Regression bestimmte Viskosität von der aus dem Mittelwert über die vier Kugeldurchmesser?

b) Statistische Auswertung von Messwerten

Erstellen Sie mit den 30 Messwerten für die 3 mm Kugel eine Häufigkeitsverteilung (Histogramm) und versuchen Sie diese möglichst gut durch eine Normalverteilung zu beschreiben ("anfitten einer Gauss-Funktion"). Entnehmen Sie aus dieser (nichtlinearen) Regression die als "Fitparameter" verwendeten Werte für Mittelwert und Standardabweichung (Anleitung siehe Anhang). Hierfür werden Sie die Datenauswertungs-Software Origin (kiz-Netzwerklizenz) zunächst auf Ihrem (Windows) Notebook installieren.

Welche Bedeutung haben die ermittelten Werte? Vergleichen Sie Standardabweichung und Mittelwert aus dem Gauss-Fit mit den direkt bestimmten Werten aus a). Warum sind die Werte nicht identisch?

2. Bestimmung der Glycerinkonzentration mit dem Kapillarviskosimeter

Temperieren Sie ein Wasserbad auf 30°C und machen Sie sich während der Equilibrierungszeit des Bades mit dem Kapillarviskosimeter vertraut.

Messen Sie eine Lösung unbekannter Glycerin-Konzentration jeweils dreimal mit zwei verschiedenen Kapillarviskosimetern (Typ III und Typ IIc) und ermitteln Sie mit Hilfe der Apparatekonstanten der beiden Viskosimeter jeweils die kinematische Viskosität.

Erstellen Sie zur Auswertung des Kapillarrohr-Versuchs ein Diagramm kinematische Viskosität über Glycerin Konzentration. Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Kalibrierkurve aus den Mittelwerten der kinematischen Viskosität jeweils die Glycerin-Konzentration.

Nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille sollte die Abhängigkeit des Volumenstroms vom Radius einem Potenzgesetz folgen. Welche Potenz finden Sie für Ihre Messungen mit den zwei verschiedenen Kapillardurchmessern (siehe Tabelle und Erläuterung im Anhang), wenn Sie das Verhältnis der Durchlaufzeiten mit dem Verhältnis der Kapillardurchmesser vergleichen (unter der Annahme ansonsten gleicher Geometrie)?

V) Anhang

1. Histogramm und Normalverteilung mit Origin

Origin ist ein Analyse- und Darstellungsprogramm vorwiegend für wissenschaftliche Anwendungen, dessen Möglichkeiten die eines Tabellenkalkulationsprogramms weit übersteigen. Insbesondere sind Modellanpassungen ("Fits") mit beliebigen Funktionen möglich.

Zunächst werden Sie **Origin** (kiz-Netzwerklizenz) auf Ihrem (Windows) Notebook installieren und ebenso (falls nicht schon vorhanden) den **Cisco VPN Client.**
Für die uneingeschränkte Nutzung von Origin ist es notwendig, dass man im VPN der Universität angemeldet ist.

Wichtig: Origin muss beim ersten Mal mit Admin Rechten gestartet werden, damit die Lizenz aktiviert werden kann. Nach dem Start von Origin werden die Daten für die 30 Kugeln in die geöffnete Tabelle eingegeben.

Erstellen der Häufigkeitsverteilung:
Messwerte markieren. *Statistik -> deskriptive Statistik -> Häufigkeiten zählen*.
Über die Schaltfläche *Steuerung Berechnung* können alle relevanten Einstellungen vorgenommen werden (Beginn, Ende, Anzahl der Intervalle etc.). In einem neuen Tab werden die Ergebnisse der Häufigkeitszählung aufgeführt.

Plotten der Häufigkeiten als Balkendiagramm:
Von Origin ermittelte Häufigkeiten markieren. *Zeichnen* -> (*Balken* ->) *Säulen*
Anpassen der Balken durch einen Rechtsklick darauf: *Eigenschaften Zeichnung*
Anpassen der Achsenbeschriftung durch Doppelklick darauf.

Fit mit Modellfunktion:
(hier Gauss-Fit): *Analyse -> Anpassen -> nichtlinearer Fit*.
Nun wählt man als *Funktion* Gauss aus.
Unter *Parameter* müssen die Anfangsparameter des Fits ausgewählt werden
Der Offset muss dabei unbedingt auf 0 fixiert werden. Dann wird der Fit ausgeführt -> *Fit*.
Es öffnet sich ein neuer Tab mit den Ergebnissen des Fits.

Wichtige Ergebnisse: Mittelwert, Standardabweichung und die Genauigkeit der erzielten Resultate, d.h. die Genauigkeit der Anpassung der Gauss-Funktion an die Messergebnisse.

Projekt speichern und über *Datei -> Grafik exportieren* die Abbildung exportieren.

2. Potenzgesetz Hagen-Poiseuille

Nach dem Gesetz von Hagen und Poiseuille (3) sollte die Abhängigkeit des Volumenstroms vom Radius einer Kapillare einem Potenzgesetz folgen. Wir möchten prüfen, ob das Potenzgesetz für unsere Experimente zutrifft und nehmen deshalb zunächst eine unbekannte Potenz x an. Wenn sich die beiden verwendeten Viskosimeter nur im Kapillarradius unterscheiden (ΔV, Δp, L für beide Viskosimeter identisch), gilt für unsere Messung derselben Flüssigkeit mit zwei verschiedenen Viskosimetern mit den Radien R_1, R_2:

$$\frac{1}{\Delta t} \propto R^x \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^x \quad \rightarrow \quad log\left(\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}\right) = x \cdot log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Somit kann die Potenz x, die sich aus unseren beiden Experimenten ergibt, aus den gemessenen Durchflusszeiten und den bekannten Kapillarradien berechnet werden.

3. Literaturwerte

Dichte von V2A-Stahl (Stoff-Nr.1.4301): σ = 7900 kg/m³

(Quelle: d'Ans, Jean; Lax, Ellen: Taschenbuch für Chemiker und Physiker. Bd. III, 4. Auflage. Berlin, Heidelberg; Springer Verlag, 1998)

Eigenschaften des Getriebeöls OKS 3740:

Kinematische Viskosität (100°C): ν = 65 mm²/s
Kinematische Viskosität (40°C): ν = 680 mm²/s
Dichte (20°C): σ = 860 kg/m³

(Quelle: OKS Spezialschmierstoffe: Produktinformation Getriebeöl OKS 3740 https://shop.oks-germany.com/produkte/oele/getriebeoele/105/oks-3740 – Zugriff: 6.08.2019)

Referenzwerte für dynamische Viskosität aus eigenen Messungen (Ubbelohde)

ϑ (°C)	20	21	22	23	24	25	26	27	28
η (Pa·s)	1.885	1.776	1.654	1.551	1.454	1.364	1.280	1.202	1.129

Gerätekonstanten und Maße für Ubbelohde-Viskosimeter:

(Quelle: Gebrauchsanweisung Ubbelohde Viskosimeter Schott-Geräte GmbH, Mainz www.schott.com/labinstruments ---> http://www.si-analytics.com/en/)

Typ-Nr.	Kapillare Nr.	Kapillare $\varnothing_i$ (mm)	Konstante K (Richtwert)	Messbereich mm²/s (cSt) (Richtwert)
... 00	0	0,36	0,001	0,2 bis 1,2
... 03	0c	0,46	0,003	0,5 bis 3
... 01	0a	0,53	0,005	0,8 bis 5
... 10	I	0,63	0,01	1,2 bis 10
... 13	Ic	0,84	0,03	3 bis 30
... 11	Ia	0,95	0,05	5 bis 50
... 20	II	1,13	0,1	10 bis 100
... 23	IIc	1,50	0,3	30 bis 300
... 21	IIa	1,69	0,5	50 bis 500
... 30	III	2,01	1	100 bis 1000
... 33	IIIc	2,65	3	300 bis 3000
... 31	IIIa	3,00	5	500 bis 5000
... 40	IV	3,60	10	1000 bis 10000
... 43	IVc	4,70	30	3000 bis 30000
... 41	IVa	5,34	50	über 10000
... 50	V	6,40	100	über 10000

Kinematische Viskosität von Glycerin-Wasser-Gemischen bei 30°C

(Quelle: d'Ans, Jean; Lax, Ellen: Taschenbuch für Chemiker und Physiker. Bd. I, 3. Auflage. Berlin, Heidelberg; Springer Verlag, 1967)

c [Gew.-%]	10	20	30	40	50	60	65	70	75	80	85	90	95	100
υ [mm²/s]	1,02	1,30	1,76	2,49	3,79	6,36	8,61	12,2	18,3	29,0	49,4	93,9	200	497