Seminar zur Vorlesung Physik II für Naturwissenschaftler

Sommersemester 2024 **Blatt 10** **17.06.2024**

Aufgabe 27 *Wellengleichung*

Funktion!

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine Funktion der Form $A = A(x - vt)$ eine nach rechts laufende Welle beschreibt. Wie sieht folglich die Funktion für eine nach links laufende Welle aus? Zeigen Sie, dass die nach links und nach rechts laufenden Wellen bei geeignet gewähltem v die sogenannte Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

erfüllen. Zeigen Sie außerdem, dass $1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ die Einheit m/s hat. (1 Punkt)

Aufgabe 28 *Stehende Welle*

Wir überlagern die nach rechts laufende harmonische Welle

$$A_\mathrm{r}(x,t) = A_0 \cos{(kx - \omega t)}$$

und die nach links laufende harmonische Welle

$$A_\ell(x,t) = A_0 \cos{(kx + \omega t)}\ .$$

a) Zeigen Sie, dass die daraus resultierende Welle $A(x,t) = A_\mathrm{r}(x,t) + A_\ell(x,t)$ in der Form

$$A(x,t) = 2A_0 \cos{(kx)}\ \cos{(\omega t)}$$

geschrieben werden kann. (1 Punkt)

b) Interpretieren Sie dieses Ergebnis. An welchen Punkten x_n liegen die Nullstellen dieser „Welle“? Wie groß ist der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen? Wie ändern sich die Nullstellen mit der Zeit? In welche Richtung läuft demzufolge die „Welle“? (1 Punkt)

Hinweis: Es gilt (Additionstheoreme)

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta.$$

Aufgabe 27: Wellengleichung

nach rechts: $A = A(x - vt)$ $\rightsquigarrow$ nach links: $A = A(x + vt)$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = A''(x \mp vt), \quad \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = A''(x \mp vt) \cdot \underbrace{(\mp v)^2}_{= v^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A''(x \mp vt) - \varepsilon_0 \mu_0 A''(x \mp vt)\, v^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow A''(x \mp vt) \underbrace{\left(1 - \varepsilon_0 \mu_0 v^2\right)}_{} = 0$$

$$1 - \varepsilon_0 \mu_0 v^2 = 0 \quad | + \varepsilon_0 \mu_0 v^2 \quad | : \varepsilon_0 \mu_0 \quad | \sqrt{\ }$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\frac{C^2}{Nm^2} \frac{Tm}{A}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{A^2 s^2}{\frac{kgm}{s^2} m^2} \frac{\frac{kg}{s^2 A} m}{A}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cancel{A^2} s^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{kg}\, m^{\cancel{3}\,2}} \frac{\cancel{kg\, m}}{\cancel{s^2} \cancel{A^2}}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{s^2}{m^2}}} = \frac{m}{s}$$

$[\varepsilon_0]$ $\frac{C^2}{Nm^2}$ $[N]$ $\frac{kg\,m}{s^2}$ $[T]$ $\frac{kg}{s^2 A}$

$[\mu_0]$ $\frac{Tm}{A}$ $[C]$ $A \cdot s$

Aufgabe 28: Stehende Welle

$A_r(x,t) = A_0 \cos(kx - \omega t)$

$A_l(x,t) = A_0 \cos(kx + \omega t)$

a)

$$A(x,t) = A_r(x,t) + A_l(x,t)$$
$$= A_0 \cos(kx - \omega t) + A_0 \cos(kx + \omega t)$$
$$= A_0 \left(\cos(\underset{\alpha}{kx} - \underset{\beta}{\omega t}) + \cos(\underset{\alpha}{kx} + \underset{\beta}{\omega t})\right)$$
$$= A_0 \left(\cos kx \cdot \cos \omega t + \cancel{\sin kx \cdot \sin \omega t} + \cos kx \cdot \cos \omega t - \cancel{\sin kx \cdot \sin \omega t}\right)$$
$$= \underbrace{2A_0 \cos kx \cdot \cos \omega t}_{\text{Amplitude}}$$

b) Interpretation:

$\cos(kx_n) = 0 \iff kx_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$\iff x_n = \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi}{k}$

- Nullstellen x_n: alle Vielfachen $n = \frac{\pi}{2k}$ ✓
- Abstand Nullstellen: $\frac{\pi}{k}$ ✓ $= \frac{\lambda}{2}$ $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$
- Änderung Nullstellen mit Zeit: keine Änderung — minimale Änderung ✓
- In welche Richtung „läuft" die Welle: Stehende Welle ✓