

Formelsammlung:

Physik I+II für Naturwissenschaftler

Stand: 15. Mai 2024

1 Messen und Einheiten

- Physikalische Größe

$$X = \text{Zahl} \cdot [X]$$

↙
Einheit

- SI-Basiseinheiten (Mechanik)

Zeit	$[t] = 1 \text{ s}$
Länge	$[x] = 1 \text{ m}$
Masse	$[m] = 1 \text{ kg}$

2 Mechanik

2.1 Kinematik in 1D

bekannt	gesucht	Operation
Bahn $x(t)$	Geschwindigkeit	differenzieren $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$
	Beschleunigung	differenzieren $a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$
Geschwindigkeit $v(t)$	Bahn	integrieren $x(t) = \int_0^t v(t') dt' + x_0$
	Beschleunigung	differenzieren $a(t) = \dot{v}(t)$
Beschleunigung $a(t)$	Geschwindigkeit	integrieren $v(t) = \int_0^t a(t') dt' + v_0$
	Bahn	integrieren $x(t) = \int_0^t v(t') dt' + x_0$

x_0 : Anfangsort

v_0 : Anfangsgeschwindigkeit

→ vollständige Information über 1D-Bahn: $a(t)$, x_0 , v_0 !

Beispiel: Bahn bei $a = \text{const.}$

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

2.2 Kinematik in 2D

- Ortsvektoren (angeheftet an Koordinatenursprung!) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
- Momentangeschwindigkeit (Tangente an Bahn) $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$
- Bahngeschwindigkeit $v(t) = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$
- Beschleunigung $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$

- Beispiel 1:** Allgemeiner Wurf unter Abwurfwinkel φ mit Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$

Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\varphi) \\ v_0 \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

Anfangsort $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Damit folgt für die Bahn $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \varphi \cdot t \\ v_0 \sin \varphi \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$

z.B. Wurfweite $x_A = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\varphi)$

- Beispiel 2:** Gleichförmige Kreisbewegung mit Umlaufzeit T und Radius R

Bahn $\vec{x}(t) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \text{const.}$ (gleichförmig!)

Bahngeschwindigkeit $v = |\vec{v}| = \omega \cdot R = \text{const.}$

Zentripetalbeschleunigung $a = |\vec{a}| = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R}$ (Betrag)

2.3 Dynamik

- **2. Newtonsches Axiom:** $m \ddot{\vec{x}}(t) = \sum_i \vec{F}_i$
 - Lineare Superposition aller am Massenpunkt m angreifenden Kräfte \vec{F}_i ,
 $[F] = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$
 - Mit Anfangsort $\vec{x}(0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(0)$ folgt damit die gesamte Bahn $\vec{x}(t)$ („Programm der Mechanik“)

- **Reibungskräfte (Beträge)**

- proportional zur Normalkraft F_n
- Maximale Haftreibungskraft $F_{RH} = \mu_H \cdot F_n$
- Gleitreibungskraft $F_{RG} = \mu_G \cdot F_n$ $\mu_G < \mu_H$

- **Gravitationskraft** (Betrag) zwischen Massen m_1 und m_2 im Abstand r

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

wirkt anziehend entlang Verbindung der Massenpunkte mit Gravitationskonstante

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

- **Federkraft** (Hooke'sches Gesetz) $F(x) = -kx$
 - x : Dehnung/Stauchung der Feder
 - k : Federkonstante

2.4 Arbeit und Energie

- **Arbeit** einer Kraft $\vec{F}(\vec{x})$ auf dem Weg von \vec{x}_1 nach \vec{x}_2

$$W(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x}, \quad [W] = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 1 \text{ J}$$

Variante in 1D $W(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$ (Fläche unter Kurve $F(x)$)

- **Satz von der kinetischen Energie:**

Energiebilanz für einen Massenpunkt m

$$\frac{1}{2} m \vec{v}_1^2 + W(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{2} m \vec{v}_2^2$$

mit der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$

- **Energieerhaltungssatz:** Bei *konservativen* Kräften \vec{F} wird

$$W(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = E_{\text{pot}}(\vec{x}_1) - E_{\text{pot}}(\vec{x}_2)$$

$E_{\text{pot}}(\vec{x}_i)$: potentielle Energie am Punkt \vec{x}_i

Damit folgt der **Energieerhaltungssatz**

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 + E_{\text{pot}}(\vec{x}_1) = \frac{1}{2}m\vec{v}_2^2 + E_{\text{pot}}(\vec{x}_2) = E_{\text{ges}} = \text{const.}$$

- **Beispiele zur potentiellen Energie:**

- Schwerefeld $E_{\text{pot}}(z) = mgz$ z : vertikale Koordinate
- Feder $E_{\text{pot}}(x) = \frac{1}{2}kx^2$ x : Dehnung/Stauchung der Feder
- Potentielle Energie im Gravitationsfeld der Masse M

$$E_{\text{pot}}(r) = -G\frac{mM}{r} \quad r: \text{ Abstand von Masse } M$$

Achtung: Referenzpunkt ist hier $r = \infty$

2.5 Impuls und Impulserhaltungssatz

- **Impuls** einer Masse m mit Geschwindigkeit \vec{v}

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- Wenn nur innere Kräfte (actio = reactio) zwischen den Massen m_i wirken, gilt der **Impulserhaltungssatz**

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \overrightarrow{\text{const.}}$$

- **Anwendung:** Zentraler elastischer Stoß zwischen den Massen m_1 und m_2

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

v_i : Anfangsgeschwindigkeit von Masse m_i **mit** Vorzeichen

v'_i : Endgeschwindigkeit von Masse m_i **mit** Vorzeichen

2.6 Starrer Körper – Drehbewegungen

- **Translation** des Schwerpunkts \vec{x}_S

$$\vec{x}_S \equiv \frac{1}{m_{\text{ges}}} \sum_i m_i \vec{x}_i$$

\vec{x}_i : Positionen der Massenpunkte m_i
 $m_{\text{ges}} = \sum_i m_i$: Gesamtmasse

Dann lautet die **Bewegungsgleichung der Translation**

$$m_{\text{ges}} \ddot{\vec{x}}_S = \sum_i \vec{F}_i$$

\vec{F}_i : äußere Kräfte

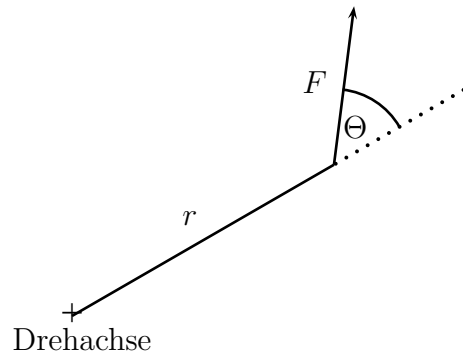
- **Kinematische Grundgrößen** der Rotation (um eine feste Drehachse)

- „Bahn“ der Rotation = Winkel um Drehachse $\varphi(t)$
- Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$
- Winkelbeschleunigung $\alpha(t) = \ddot{\varphi}(t)$

- **Drehmoment** (skalare Formulierung)

$$M = rF \sin \Theta$$

F : angreifende Kraft unter Winkel Θ im Abstand r zur Drehachse („Ursache“ der Rotation)



- **Bewegungsgleichung der Rotation**

$$I_D \ddot{\varphi} = \sum_i M_i$$

$I_D = \sum_i m_i r_i^2$: **Trägheitsmoment** der Massen m_i im Abstand r_i zur Drehachse D

M_i : angreifende Drehmomente

- **Satz von Steiner** zu Trägheitsmomenten

$$I_D = I_S + m_{\text{ges}} d^2$$

I_S : Trägheitsmoment um Schwerpunktsachse S

I_D : Trägheitsmoment um Achse D parallel zu S im Abstand d

- **Drehimpuls** um eine Achse D mit zugehörigem Trägheitsmoment I_D

$$L \equiv I_D \dot{\varphi} = I_D \omega$$

Damit wird die **Bewegungsgleichung der Rotation**

$$\dot{L} = \sum_i M_i$$

Wenn keine äußeren Drehmomente am starren Körper angreifen, gilt **Drehimpulserhaltung**

$$L = I_D \omega = \text{const.}$$

- **Kinetische Energie der Rotation** („Rotationsenergie“) um eine Achse

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_D \omega^2$$

Anwendung: **Rollen** eines Rades (auch Zylinder oder Kugel) mit Radius R und der Masse m_{ges} im Schwerfeld

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} m_{\text{ges}} v_S^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2 + m_{\text{ges}} gh = \text{const.}$$

Schwerpunktsgeschwindigkeit $v_S = \omega R$ (Rollbedingung)

- Gegenüberstellung von Translation und Rotation

Translation (1D)		Rotation	
Masse	m	Trägheitsmoment	I_D
Geschwindigkeit	v	Winkelgeschwindigkeit	ω
Kraft	F	Drehmoment	M
Impuls	$p = mv$	Drehimpuls	$L = I_D \omega$
Bewegungsgleichung	$\dot{p} = F$	Bewegungsgleichung	$\dot{L} = M$
Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} mv^2$	Rotationsenergie	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_D \omega^2$

2.7 Schwingungen

- **Freie, ungedämpfte Schwingungen:** harmonischer Oszillator
 - Wichtig: linear rückstellende Kraft (z.B. Feder)

$$F = -kx$$

- Bewegungsgleichung (2. Newton'sches Axiom) für Masse m

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ergibt Schwingung (Bahn der Masse m)

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$$

mit Amplitude A und Eigenfrequenz (Kreisfrequenz!)

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Periodendauer der Schwingung $T \equiv 2\pi/\omega_0$
- zugehörige Frequenz

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

- **Mathematisches Pendel** (Massenpunkt) der Länge l

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

- Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{g/l}$

- **Physikalisches Pendel** (starrer Körper, Masse m) mit Trägheitsmoment I_D um Drehachse im Abstand d vom Schwerpunkt

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

- Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_D}} = \sqrt{\frac{mgd}{I_S + md^2}}$

- **Freie, gedämpfte Schwingung**

- Wichtig: lineare, rückstellende Kraft $F = -kx$ und Reibungskraft $F_R \sim \dot{x}$
- Bewegungsgleichung für Masse m

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

- Exponentiell abklingende Schwingung

$$x(t) = A e^{-\kappa t} \cos(\omega t)$$

mit Dämpfungskonstante κ und Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} < \omega_0$

- **Angetriebener Oszillator – Resonanz**

- Äußere antreibende Kraft $F \sim \cos(\Omega t)$

- Bewegungsgleichung für Masse m

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = \text{const.} \cdot \cos(\Omega t)$$

wird gelöst von

$$x(t) = A(\Omega) \cos [\Omega t - \psi(\Omega)]$$

- Amplitude

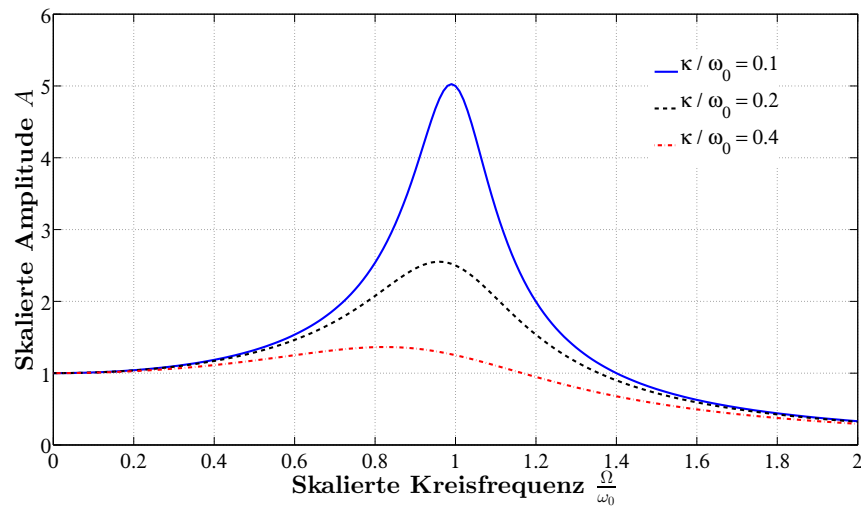
$$A(\Omega) \equiv \frac{\text{const.}}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\kappa^2 \Omega^2}}$$

mit Resonanzfrequenz (Maximum)

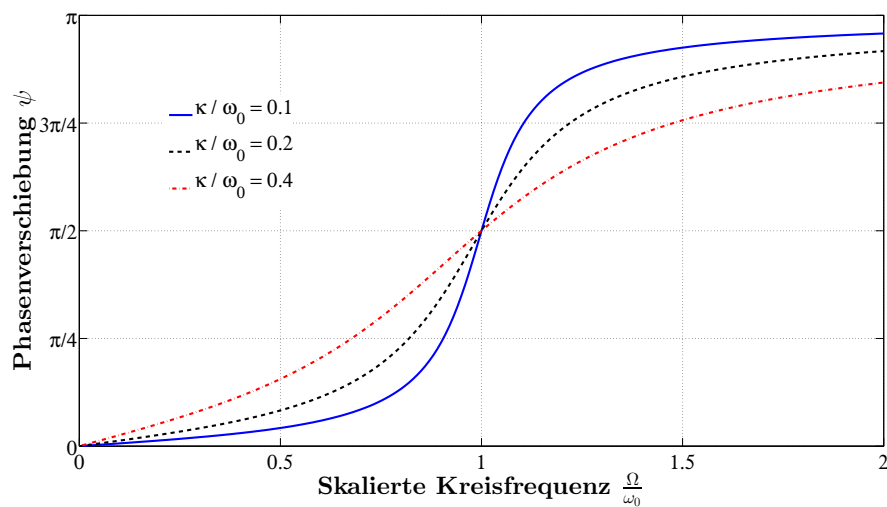
$$\Omega_{res} \equiv \sqrt{\omega_0^2 - 2\kappa^2}$$

- Phasenverschiebung (Oszillator „hinkt hinterher“)

$$\psi(\Omega) \equiv \arctan \frac{2\kappa\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$



(a) Amplitude $A(\Omega)$ zeigt Resonanz



(b) Phasenverschiebung $\psi(\Omega)$

2.8 Mechanik fluiden Medien (inkompressibel)

- Grundgrößen

- Druck

$$p = \frac{F_{\perp}}{A}$$

ausgeübt von der senkrechten Komponente F_{\perp} einer Kraft \vec{F} auf eine Fläche A mit den Einheiten

$$[p] = 1 \text{ N m}^{-2} = 1 \text{ Pa (Pascal)} = 10^{-5} \text{ bar}$$

- Dichte

$$\rho = \frac{m}{V}$$

eines Körpers mit der Masse m und dem Volumen V mit der Einheit

$$[\rho] = 1 \text{ kg m}^{-3}$$

- Hydrostatischer Druck

$$p = p_0 + \rho g z$$

in der Tiefe z bei äußerem Druck p_0

- Kontinuitätsgleichung (Erhaltungsgesetz)

$$Av = \text{const.}$$

bei laminarer, stationärer Strömung mit Geschwindigkeit v durch Querschnittsfläche A

- Bernoulli-Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$$

bei Geschwindigkeit v und statischem Druck p

- Oberflächenspannung

$$\sigma \equiv \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

bei Vergrößerung ΔA einer Oberfläche und dazu notwendiger Arbeit ΔW .

Einfache Messmethode über eine Kraft F zum Heben der Fluidlamelle mit Länge l ergibt

$$\sigma = \frac{F}{2l}$$

Anwendung: Kapillare Steighöhe

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$$

in einem Rohr mit Radius r (totale Benetzung)

3 Elektrizität und Magnetismus

3.1 Ladung und Ladungserhaltung

- Ladung $q = n(\pm e)$ mit Elementarladung

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

3.2 Coulomb-Gesetz

- Kraft auf die Ladung q_1 bei \vec{x}_1 durch die Ladung q_2 bei \vec{x}_2 (Fernwirkungsprinzip)

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

mit Permittivität des Vakuums (el. Feldkonstante)

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

- Gesamtkraft auf q_1 ausgeübt durch viele Ladungen q_2, q_3, \dots

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots \quad (\text{lineare Superposition})$$

- Elektrisches Feld \vec{E} (Nahwirkungsprinzip) der Ladungen $q_1, q_2 \dots q_N$ (Feldladungen) wirkend auf q (Probeladung) bei \vec{x}

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{F}}{q} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

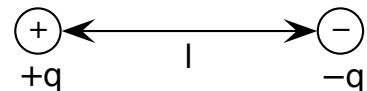
- Feldlinien:

- Dichte = Maß für $E = |\vec{E}|$
- Tangenten = Richtung von \vec{E} (von + nach -)
- Feldlinien stehen senkrecht auf Leitern und verschwinden darin

- Elektrischer Dipol: Ladungen $\pm q$ im Abstand l

- Dipolmoment $p = ql$
- Fernfeld (Betrag) im Abstand $r \gg l$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}$$



3.3 Elektrisches Potential

- Potential einer Punktladung Q (Quelle) bei \vec{x}_1

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{x} - \vec{x}_1|}$$

- Einheit $[\phi] = 1 \text{ J/C} = 1 \text{ V (Volt)}$
- Potential von N Punktladungen Q_i bei \vec{x}_i (Superposition)

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}$$

- Energieerhaltungssatz für eine Ladung q im Potential ϕ an zwei Punkten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 :

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}} &= E_{\text{kin},1} + q \phi(\vec{x}_1) \\ &= E_{\text{kin},2} + q \phi(\vec{x}_2) = \text{const.} \end{aligned}$$

- Energien werden jetzt oft in Elektronenvolt angegeben:

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= e \cdot 1 \text{ V} \\ &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} \\ &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

- Elektrische Spannung zwischen den Punkten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 :

$$U = \phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1)$$

- Elektrisches Feld \vec{E} und Potential $\phi = \phi(x, y, z)$

$$\vec{E} = - \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix} = - \text{grad } \phi$$

\Rightarrow Feldlinien stehen senkrecht auf Äquipotentialflächen $\phi = \text{const.}$

3.4 Kapazitäten – Kondensatoren

- Kondensator speichert Ladung Q auf Elektroden mit Potentialdifferenz U
 - Kapazität („Fassungsvermögen“ für Ladung)

$$C = \frac{Q}{U}$$

- Einheit $[C] = 1 \text{ C/V} = 1 \text{ F}$ (Farad)

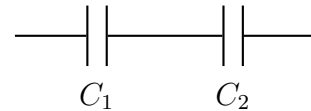
- Beispiel: Kondensator aus Platten der Fläche A im Abstand d hat Kapazität

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

ε_r : relative Dielektrizitätszahl (Vakuum: $\varepsilon_r = 1$)

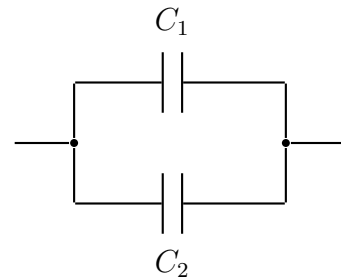
- Zusammenschalten von Kondensatoren (Zweipole)
 - Serienschaltung

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



- Parallelschaltung

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2$$



- Elektrische Energie im Kondensator

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U$$

3.5 Bewegte Ladungen – Ströme

- Elektrischer Strom

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

- Einheit $[I] = 1 \text{ C/s} = 1 \text{ A}$ (Ampère)

- Ohm'sches Gesetz ($I \sim U$)

$$I = \frac{1}{R} U$$

- Ohm'scher Widerstand R
 - Einheit $[R] = 1 \text{ V/A} = 1 \Omega$ (Ohm)

- Elektrische Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = U I$$

- Kirchhoff'sche Regeln

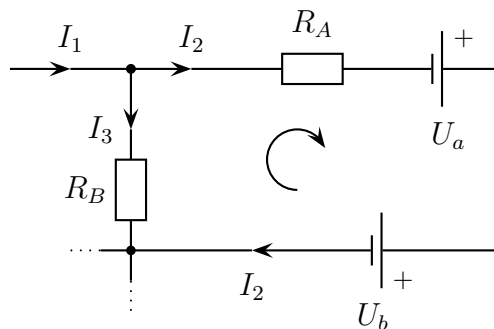
- Knotenregel

$$\sum_k I_k^{\text{in}} = \sum_k I_k^{\text{out}}$$

- Maschenregel

$$\sum_k U_k = 0$$

- Anwendung der Kirchhoff'schen Regeln



1. Identifiziere alle Knoten und wähle die Richtungen (beliebig) der Ströme I_k .
2. Bilanziere die Ströme für jeden Knoten. Für den oben gewählten Knoten bedeutet dies:

$$\underbrace{I_1}_{\text{in}} = \underbrace{I_2 + I_3}_{\text{out}}.$$

3. Wähle genügend Maschen (jedes Bauteil muss mindestens in einer Masche vorkommen) und einen Umlaufsinn (beliebig) für jede Masche.
4. Bilanziere die Potentialdifferenzen U_k im Umlaufsinn. Im obigen Beispiel wäre die Maschenregel:

$$\sum_k U_k = U_a - U_b + I_3 R_B - I_2 R_A = 0.$$

Ergebnis: Aus Knoten- und Maschenregel folgen mindestens n Gleichungen für n Unbekannte.

- Beispiel: RC-Kreis (Ladevorgang)

- Maschenregel:

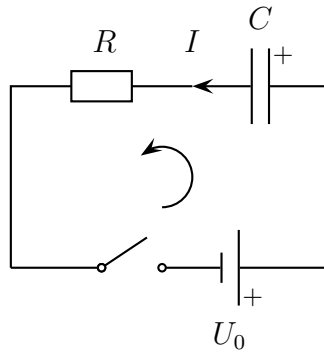
$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = U_0 \quad (\text{DGL 1. Ordnung})$$

- Lösung:

$$Q(t) = U_0 C (1 - e^{-t/RC})$$

$$I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC}$$

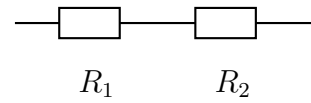
mit typischer Zeitkonstante $\tau = RC$ (Ladezeit).



- Zusammenschalten von Widerständen (Zweipole)

– Serienschaltung

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$$



– Parallelschaltung

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

