Seminar zur Vorlesung Physik II für Naturwissenschaftler

Sommersemester 2024 **Blatt 11** **24.06.2024**

Aufgabe 29 *Superposition zweier optischer Wellen*

Zwei harmonische Wellen mit derselben Frequenz ω und derselben Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ breiten sich in x-Richtung aus; eine in positiver x-Richtung, die andere in negativer x-Richtung. Die Superposition dieser beiden Wellen wird durch

$$\vec{E}(x,t) = E_0\,\vec{e}_1 \cos(kx - \omega t) + \sqrt{3}\,E_0\,\vec{e}_2 \cos(kx + \omega t)$$

mit den beiden Polarisationsvektoren $\vec{e}_1 = (0,0,1)$ und $\vec{e}_2 = (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$ beschrieben.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Identität

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

die optische Intensität $I(x)$ dieser Welle $\vec{E}$. (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum von $I(x)$ und skizzieren Sie den Verlauf von $I(x)$. (1 Punkt)

c) Wie ändert sich der Verlauf von $I(x)$, wenn man den Polarisationsvektor $\vec{e}_2$ durch $(0,1,0)$ bzw. durch $(0,0,-1)$ ersetzt? (1 Punkt)

Aufgabe 30 *Entspiegeln*

Um Glasflächen (z. B. Brillen) zu entspiegeln, werden diese mit einem durchsichtigen Material mit kleinem Brechungsindex n beschichtet, wie z. B. Kryolith ($Na_3AlF_6, n = 1{,}33$) oder Magnesiumfluorid ($MgF_2, n = 1{,}38$). Bei passend gewählter Schichtdicke kann man erreichen, dass sich die an der Beschichtung reflektierte Welle und die an der Glasfläche reflektierte Welle (weitgehend) auslöschen (Zwei-Wellen-Interferenz). Für die nachfolgenden Rechnungen machen wir folgende Annahmen:

1. Das Licht trifft senkrecht auf die beschichtete Glasfläche.
2. Die Amplitude der an der Beschichtung reflektierten Welle und die Amplitude der an der Glasfläche reflektierten Welle sind gleich groß.

Wie muss die Dicke d der Beschichtung gewählt werden, damit Licht mit einer Wellenlänge $\lambda = 550\,\text{nm}$ an einer mit Kryolith beschichteten Glasfläche nicht reflektiert wird? (1 Punkt)

Hinweis: In Materialen mit dem Brechungsindex n hat die Lichtgeschwindigkeit den Wert $c' = c/n$. Was bedeutet das für die Wellenlänge λ' bzw. die Wellenzahl k'?

Aufgabe 31 *Young'scher Doppelspalt*

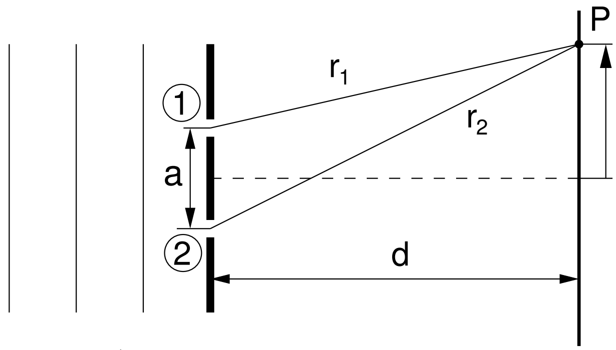


Abb. 1: Young'scher Doppelspalt.

Eine ebene Welle trifft, wie in Abb. 1 skizziert, auf einen Doppelspalt. Die beiden Spalte 1 und 2 im Abstand a sind dann als neue Lichtquellen anzusehen, von denen neue Wellen ausgehen (Huygens). Im Abstand d treffen diese Wellen auf einen Schirm.

a) Berechnen Sie die Abstände r_1 und r_2 der beiden Spalte vom Punkt P und zeigen Sie, dass für $d \gg a$ und $d \gg x$ diese Abstände durch

$$r_{1/2} \approx d\left[1 + \frac{(x \mp a/2)^2}{2d^2}\right]$$

angenähert werden können. (1 Punkt)

Hinweis: Für $|\xi| \ll 1$ gilt $(1+\xi)^{1/2} \approx 1 + \frac{\xi}{2}$ (Taylor).

b) Wie groß ist die Wegdifferenz $\Delta r = r_2 - r_1$? Welchen Wert hat demzufolge die Intensität auf dem Schirm am Punkt P? (1 Punkt)

Ergebnis: $I(x) = I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{x \cdot a}{d}\right)\right]$.

c) Diskutieren Sie den Verlauf der Intensität auf dem Schirm. An welchen Stellen auf dem Schirm ist die Intensität maximal bzw. minimal? (1 Punkt)

d) Die beiden Spalte haben einen Abstand von $a = 1\,\text{mm}$, und der Abstand d zwischen Schirm und Doppelspalt beträgt $5\,\text{m}$. Bei einer monochromatischen Lichtquelle findet man das zweite Maximum ($m = 2$) der Intensität bei $x = 6{,}33\,\text{mm}$. Welche Wellenlänge hat das Licht (Spektroskopie!)? Wie groß ist der Abstand zwischen zwei benachbbarten Maxima? (1 Punkt)

Aufgabe 29: Superposition zweier optischer Wellen

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \vec{e}_1 \cos(kx-\omega t) + \sqrt{3}\, E_0 \vec{e}_2 \cos(kx+\omega t)$$

$\vec{e}_1 = (0,0,1)$

$\vec{e}_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

a) $I(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{E}^2(x,t)\, dt$

$$\vec{E}^2(x,t) = \left(E_0 \vec{e}_1 \cos(kx-\omega t) + \sqrt{3}\, E_0 \vec{e}_2 \cos(kx+\omega t)\right)^2$$

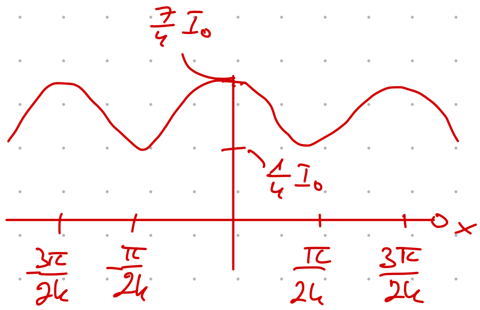
$$= E_0^2 \vec{e}_1^{\,2} \cos^2(kx-\omega t) + \sqrt{12}\, E_0^2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 \cos(kx-\omega t)\cos(kx+\omega t) + 3E_0^2 \vec{e}_2^{\,2} \cos^2(kx+\omega t)$$

$$\Rightarrow I(x) = \underbrace{\frac{E_0^2}{T}}_{=I_0}\Big[\underbrace{\vec{e}_1^{\,2}}_{=1} \underbrace{\int_0^T \cos^2(kx-\omega t)\,dt}_{\frac{T}{2}} + \boxed{\sqrt{3}\, \vec{e}_1 \vec{e}_2} \int_0^T 2\cos(kx-\omega t)\cos(kx+\omega t)\,dt + \underbrace{3 \underbrace{\vec{e}_2^{\,2}}_{=1} \int_0^T \cos^2(kx+\omega t)\,dt}_{\frac{3T}{2}}$$

$$\rightsquigarrow I_0\left(2 + \frac{3}{2}\cos(2kx)\right)$$

b) Minima bei $x = \frac{\pi}{2k} \Rightarrow I(x_{min}) = \frac{1}{4} I_0$

Maxima bei $x = 0 \Rightarrow I(x_{max}) = \frac{7}{4} I_0$



c) $\vec{e}_2 = (0,1,0) \Rightarrow \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$

$\Rightarrow I(x) = I_0$ (const.) $\rightsquigarrow$ keine Interferenz

$\vec{e}_2 = (0,0,-1) \Rightarrow \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = -1$

$\Rightarrow I(x) = I_0\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2kx)\right)$ $\rightsquigarrow$ stärkere Überlagerung!

Aufgabe 30: Entspiegeln

$I(\Delta r) = I_0 (1 + \cos(k \Delta r))$

Minimale Intensität: $k\Delta r = \pm (2n+1)\pi$

$\curvearrowright \boxed{\Delta r = \pm (2n+1)\frac{\lambda}{2}}$

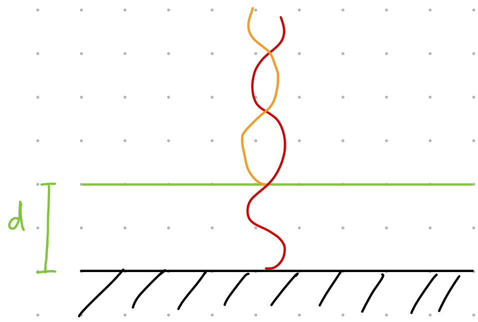
$\lambda = 550\,nm$

$Bi_{\text{Kryolith}} = z = 1{,}33$

$\lambda = \frac{c}{f}$ mit $c' = \frac{c}{n}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{c' n}{f}$

$\rightsquigarrow \lambda' = \frac{\lambda}{n}$



$2d = \frac{\lambda'}{2} \rightsquigarrow d = \frac{\lambda}{4n} \approx \frac{550\,nm}{4 \cdot 1{,}33} \approx 103{,}4\,nm$

Aufgabe 31: Young'scher Doppelspalt

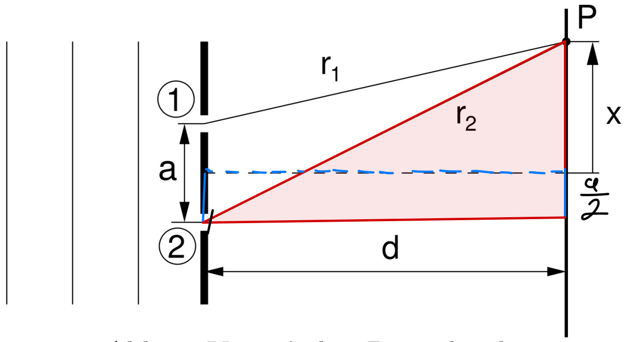


Abb. 1: Young'scher Doppelspalt.

$$r_1 = \sqrt{d^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{d^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow r_{1/2} = \sqrt{d^2 + \left(x \mp \frac{a}{2}\right)^2}$$

a)

$$r_{1/2} = \sqrt{d^2 + \left(x \mp \frac{a}{2}\right)^2} = d\sqrt{1 + \frac{\left(x \mp \frac{a}{2}\right)^2}{d^2}}$$

$$\overset{!}{\approx} d\left(1 + \frac{\left(x \mp \frac{a}{2}\right)^2}{2d^2}\right)$$

b)

$$\Delta r = d\left(1 + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{2d^2}\right) - d\left(1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2d^2}\right)$$

$$= \cancel{d} + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{2d} - \cancel{d} - \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2d}$$

$$= \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2d}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \cancel{x^2} + ax + \cancel{\frac{a^2}{4}}$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \cancel{x^2} - ax + \cancel{\frac{a^2}{4}}$$

$$= \frac{2ax}{2d} = \frac{ax}{d}$$

$$I(x) = I_0\left(1 + \cos(k\Delta r)\right) = I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{ax}{d}\right)\right)$$

$$\hookrightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

c) $I(x)$ wird max, wenn cos max

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{ax}{d} = 2\pi m \leadsto x = \frac{\lambda d m}{a}$$

mit $m \in \mathbb{Z}$

analog für min

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{ax}{d} = \pi(2m+1) \leadsto x = \frac{(m+\frac{1}{2})\lambda d}{a}$$

d) $a = 1\,\text{mm}$, $d = 5\,\text{m}$, $m = 2$, $x = 6{,}33\,\text{mm}$

$$\lambda = \frac{x \cdot a}{d m} = \frac{6{,}33\,\text{mm} \cdot 1\,\text{mm}}{5\,\text{m} \cdot 2} = \underline{\underline{633\,\text{nm}}}$$

$\overline{6{,}33}$

2 1 0 1 2

0 0 0 0 0

Abstand $= \frac{x}{2} \approx 3{,}165\,\text{mm}$