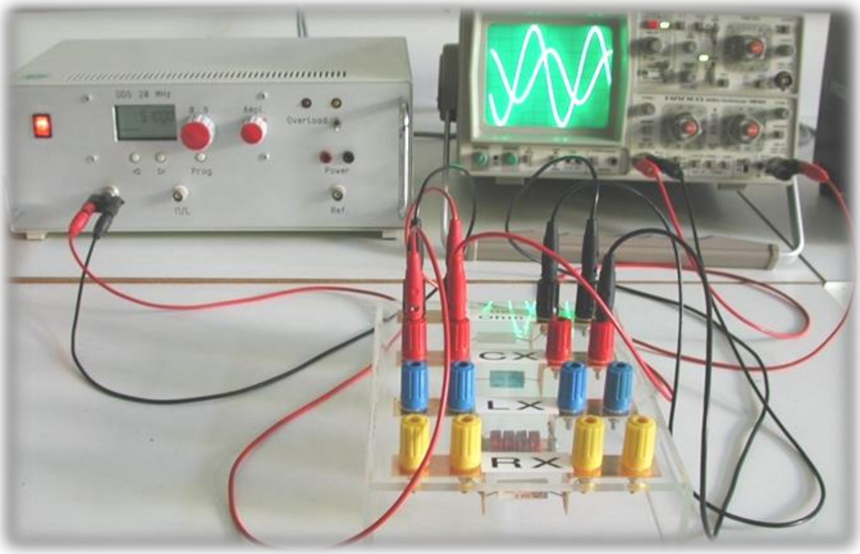
Praktikum Physik
für Naturwissenschaftler

universität ulm

Wechselstromkreise

Versuchsinhalt

Wechselstrom-Eigenschaften von Widerstand, Spule und Kondensator, Elektrische Netzwerke, Kirchhoff'sche Regeln, Funktion und Anwendung von Analog- und Digital-Oszilloskop



Experimente

Signale unterschiedlicher Form, Frequenz und Amplitude werden mit dem Oszilloskop erfasst und charakterisiert

An einem unbekannten Zweipol wird bei verschiedenen Frequenzen die Beziehung von Strom- und Spannungsverlauf untersucht. Aus dem Frequenzverlauf des Scheinwiderstands und der Phase wird auf die im Zweipol enthaltenen Bauelemente und deren Verschaltung geschlossen.

Inhalt

Stichworte zur Vorbereitung

- Spannung, Potential und Strom
- Wechselspannungen, Wechselströme
- Phase, Phasenverschiebung
- Zweipole und Ersatzschaltbilder
- Widerstand, Induktivität, Kapazität
- Gleich- und Wechselstromwiderstand, Impedanz
- Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Regeln

Literatur zum Versuch

- P.A. Tipler : „Physik“, Spektrum-Verlag
- H. Vogel: „Gerthsen Physik“, Springer
- W. Walcher : „Praktikum der Physik“, Teubner

I) EINLEITUNG

Bevor wir uns mit den Grundlagen und Eigenschaften von Zweipolen und daraus aufgebauten Netzwerken beschäftigen, betrachten wir ein elementares Beispiel einer elektrischen Schaltung und sprechen dabei einige wichtige Begriffe an.

Als einfachste elektrische Schaltung diene uns eine gewöhnliche Batterie (z.B. eine mit 3V Klemmenspannung), deren zwei Anschlüsse (Plus-, Minuspol) mittels zweier Drähte mit einem Glühbirnchen verbunden werden (Abb.1a). Die Glühbirne leuchtet, solange die Verbindungen zwischen den Batterieanschlüssen und der Glühbirne nicht unterbrochen sind. Man sagt dann, der Stromkreis ist geschlossen, es fließt Strom durch die Glühbirne.

Als nächstes nehmen wir eine weitere Glühbirne und ein weiteres Stück Draht hinzu und verbinden die beiden Glühbirnchen mit der Batterie so, dass sich, wie in Abb.1b gezeigt, wieder ein geschlossener Stromkreis ergibt. Wir stellen fest, dass jede der beiden Glühbirnchen weniger hell aufleuchtet, als wenn sich nur eine im Stromkreis befindet. Offensichtlich ist der Widerstand, den beide Birnen dem Stromfluss entgegensetzen, größer als der einer einzigen.

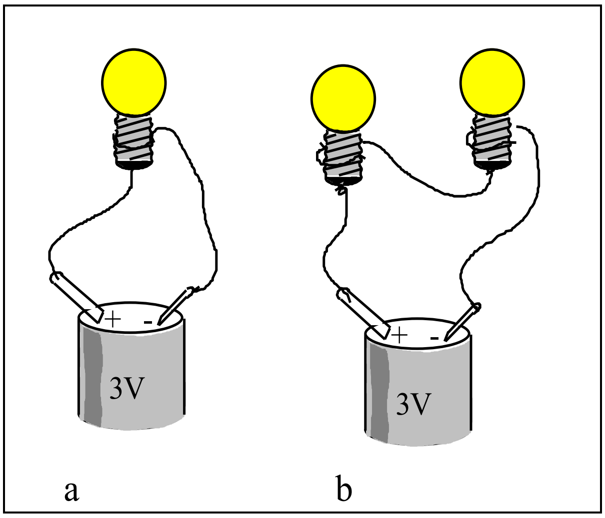


Abb.1: Einfache Beispiele für elektrische Schaltungen.

Die Fragen, die sich nun stellen, lauten:

- Wie hängt die Helligkeit, mit der die Glühbirnen aufleuchten, von der Klemmenspannung der Batterie ab? Was bedeutet "*Spannung*"?
- Was passiert, wenn der Stromkreis geschlossen wird (man sagt, "wenn der Strom eingeschaltet wird") ? Was ist "*Strom*" ?
- Warum leuchten die zwei in Reihe geschalteten Glühbirnen schwächer, als wenn nur eine sich im Stromkreis befindet? Was bedeutet "*Widerstand*" und wie lässt er sich bestimmen?
- Wie hängen Spannung, Strom und Widerstand von einander ab?

Wir können die Glühbirne durch einen anderen "Verbraucher" ersetzen, z.B. durch einen Tauchsieder, eine elektrische Klingel oder durch beliebige andere elektrische Geräte mit einem zweipoligen Anschluss. Dann suchen wir nach einer möglichst einfachen symbolischen Darstellung der Geräteanordnung (*Schaltbild*), die eine allgemeinverständliche Beschreibung ermöglicht. Zur Beschreibung der Eigenschaften eines Netzwerkes (*Netzwerkanalyse*) benötigen wir einen einfachen mathematischen Formalismus.
Zuletzt bedarf es geeigneter Messgeräte und -methoden, um das Verhalten der elektrischen Bauteile und den daraus aufgebauten Anordnungen bei entsprechenden Versuchsbedingungen zu messen.

II) STROM UND SPANNUNG

1. Elektrisches Potential und elektrische Spannung

Die Voraussetzung zum Betrieb elektrischer Geräte ist das Vorhandensein von "elektrischer Spannung". Um diesen Begriff zu erklären, müssen wir zunächst den Begriff des "elektrischen Potentials" klären.

Spannung ist nichts anderes als die Differenz zweier elektrischer Potentiale.

Eine elektrische Ladung, die vom Bezugspunkt zu einem bestimmten Punkt gebracht wird, hat dort eine der Potentialdifferenz proportionale potentielle Energie. Wir wollen uns dies zunächst an der mechanischen Analogie veranschaulichen:

Ein Stein, den wir von einem Hocker auf einen Tisch heben (Abb.2a), hat auf dem Tisch gegenüber dem Bezugspunkt Fußboden - verursacht durch das Gravitationsfeld der Erde - eine potentielle Energie

$$W_2 = mgh_2 \text{ (ergibt sich aus } W = m\int_0^{h_2} g\,dh)$$

(g: Ortsfaktor)m: Masse des Steins)

Dabei ist der Wert der potentiellen Energie unabhängig vom speziellen Weg, auf welchem wir den Stein auf den Tisch bewegen.

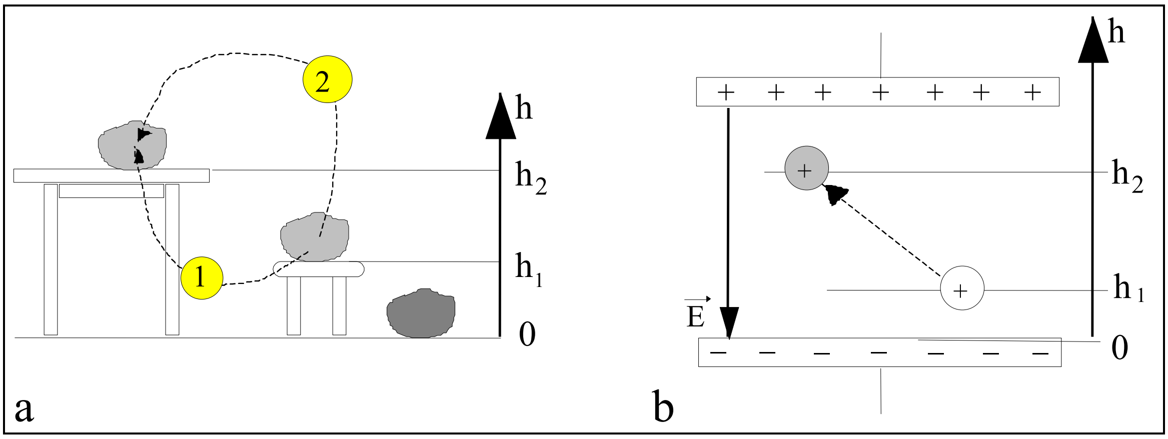


Abb.2: Zur Veranschaulichung der Analogie zwischen potentieller Energie einer Masse im Gravitationsfeld der Erde (a) und einer elektrischen Ladung im elektrischen Feld eines Plattenkondensators (b). Der Zuwachs an potentieller Energie der Masse (a) bzw. der Ladung (b) ist unabhängig vom Weg, auf welchem die Bewegung von h1 nach h2 erfolgt.

Im elektrischen Fall herrscht in einem geladenen Plattenkondensator (Abb.2b) ein konstantes elektrisches Feld $\vec{E}$, welches dem oben diskutierten Gravitationsfeld völlig analog ist.
Betrachten wir eine Ladung Q, die sich zwischen den Platten des Kondensators befindet (Abb.2b). Als Bezugspunkt wählen wir die negativ geladene Platte. Wir bewegen die Ladung vom Bezugspunkt zuerst zum Ort h_1 und von dort zum Ort h_2. Dann beträgt die potentielle Energie W der Ladung Q an den Orten h_1 und h_2 :

$$W_1 = Q\,E\,h_1 \quad \text{bzw.} \quad W_2 = Q\,E\,h_2$$

(E: elektrische Feldstärke).

Dabei ist es vollkommen egal, auf welchem Weg wir die Ladung zu den entsprechenden Punkten bewegen.
Die Größen $\Phi_1 = E\,h_1$ bzw. $\Phi_2 = E\,h_2$ bezeichnen das elektrische Potential, welches an den entsprechenden Punkten des elektrischen Feldes gegenüber dem Bezugspunkt herrscht. Die Differenz der elektrischen Potentiale an den Orten h_2 und h_1 beträgt also

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = E\left(h_2 - h_1\right) = U_{21}.$$

Diese Differenz bezeichnet man als "*elektrische Spannung*" U_{21}. Man sagt auch, dass zwischen den Punkten 2 und 1 "die Spannung U anliegt/abfällt".

Die Maßeinheit für die Spannung im internationalen Einheitensystem (SI) ist das Volt (V).

In einer Spannungsquelle (Batterie, Generator, Steckdose) werden Ladungen so getrennt, dass an einem Anschluss ein Elektronenmangel (Pluspol) und am anderen ein Elektronenüberschuss (Minuspol) herrscht. Somit besteht zwischen den Polen ein elektrisches Feld und damit eine Potentialdifferenz, die man als Klemmenspannung, Batteriespannung oder auch als Urspannung bezeichnet.

2. Elektrischer Strom

Metallische Leiter enthalten frei bewegliche Elektronen (Elektronengas, s. Versuch "Kennlinien"). Schließen wir ein Stück Draht an die beiden Pole einer Batterie an, entsteht zwischen den Enden des Drahtes ein elektrisches Feld und damit eine beschleunigende Kraft auf die Elektronen. Dies führt zu einer Bewegung der Elektronen vom negativen zum positiven Pol der Batterie. Eine solche **gerichtete Bewegung von elektrischen Ladungen nennt man "elektrischen Strom"**. Der Stromfluss ist somit die Folge einer elektrischen Spannung und setzt einen geschlossenen Stromkreis voraus. Je mehr Ladungen pro Zeitintervall Δt durch den Stromkreis fließen, desto größer ist die Stromstärke I.

Die Stromstärke I bezeichnet diejenige Ladungsmenge ΔQ, die pro Zeitintervall Δt durch einen beliebigen Querschnitt des Stromkreises fließt, also: $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{dQ}{dt}$.

Die Maßeinheit der Stromstärke ist das Ampere (A).

Bei der Angabe der Richtung des Stromflusses unterscheidet man zwischen *physikalischer* und *technischer Stromrichtung*. Die **physikalische Stromrichtung** gibt die Bewegungsrichtung von Ladungsträgern unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes an. In metallischen Leitern zeigt die physikalische Stromrichtung also immer vom Minus- zum Pluspol. In Halbleitern (s. Versuch "Kennlinien") bewegen sich zusätzlich positive Ladungen vom Plus- zum Minuspol. In der Elektrotechnik sowie in der theoretischen Elektrodynamik wurde aus historischen Gründen die **technische Stromrichtung** beibehalten. Sie bezeichnet immer die Bewegung positiver Ladungsträger zum Minuspol. Die technische Stromrichtung liegt allen Überlegungen im Stromkreis (z.B. Korkenzieherregel) zugrunde.

Elektrolyte enthalten frei bewegliche Ionen. In Elektrolyten bewegen sich die negativ geladenen Ionen (Anionen) vom Minus- zum Pluspol, die positiv geladenen Ionen (Kationen) zum Minuspol hin.

3. Gleich- und Wechselströme, Gleich- und Wechselspannungen

Man unterscheidet die in einer Schaltung herrschenden Spannungen bzw. Ströme hinsichtlich der Art und Weise, wie sie sich zeitlich ändern. Grundsätzlich werden sie in Gleich-, Wechsel- und Mischspannung bzw. -strom eingeteilt.

Ändert sich Betrag und Richtung von Spannung bzw. Strom nicht, spricht man von Gleichspannung bzw. Gleichstrom (Abb.3a). **Von Wechselspannung bzw. -strom spricht man gewöhnlich, wenn man einen sinusförmigen Kurvenverlauf meint** (Abb.3c). Ist der Wechselspannung/dem Wechselstrom eine Gleichspannung/ein Gleichstrom überlagert, spricht man von Mischspannung/Mischstrom (Abb.3d).

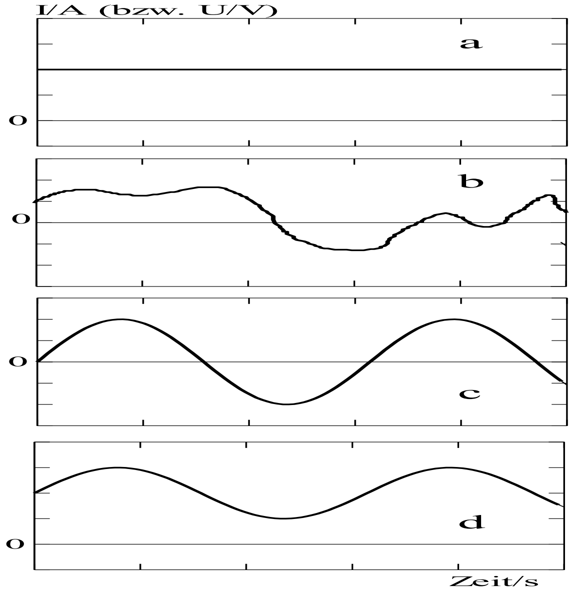


Abb.3: Verschiedene Formen des zeitlichen Verlaufs von Spannung und Strom. a) Gleichstrom, b) unperiodischer Kurvenverlauf, c) sinusförmiger Wechselstrom, d) Mischstrom.

Der Kurvenverlauf eines sinusförmigen Signals (bzw. eines cosinusförmigen Signals) ist durch *Amplitude*, *Frequenz* und Angaben zur *Phase* ausgezeichnet. Der in Abb.4 gezeigte Spannungsverlauf lässt sich mit diesen Größen wie folgt beschreiben:

$$U(t) = U_0 \sin(\tfrac{2\pi}{T} t + \varphi_0)$$

Darin bezeichnet U_0 die **Amplitude** (=Maximalwert) des periodischen Spannungsverlaufs. Die **Periodendauer** T gibt die Zeitdauer an, nach der sich die Signalform wiederholt. Mit der **Frequenz** ν eines sinusförmigen Signals hängt sie folgendermaßen zusammen:

$$\nu = \tfrac{1}{T}, \quad (\nu \text{ griech. "nü"}).$$

Anstelle der Frequenz wird meistens die **Winkelgeschwindigkeit** ω verwendet (Stichwort: Zeigerdarstellung von Schwingungen), für die folgende Zusammenhänge gelten:

$$\omega = \tfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

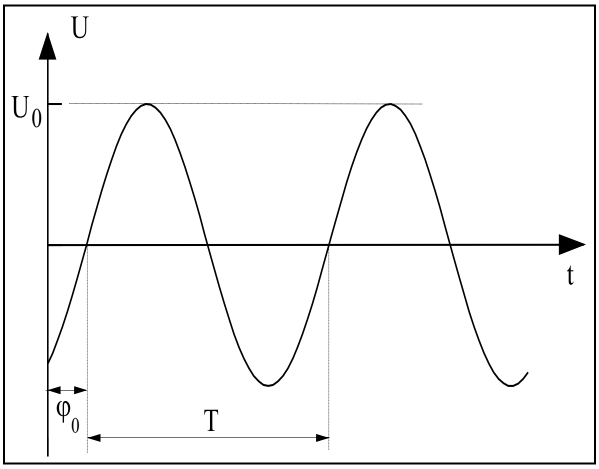
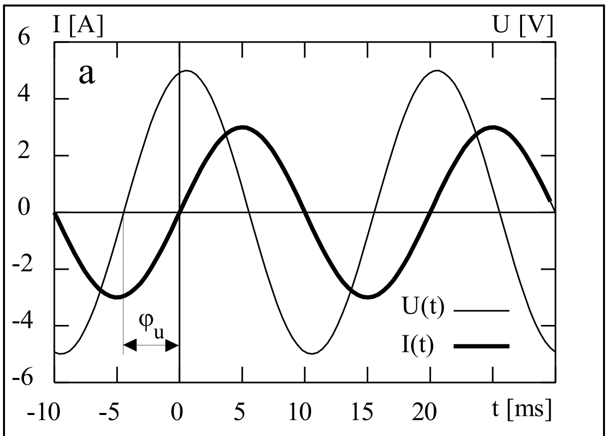


Abb.4: **Kenndaten einer sinusförmigen Wechselspannung. U_0 Amplitude, T Periodendauer, φ_0 Nullphasenwinkel (auch Phasenkonstante genannt). Man beachte, dass die Einheiten von Periodendauer und Phasenkonstante verschieden sind. Während die Periodendauer in Zeiteinheiten gemessen wird, misst man die Phasenkonstante in Winkeleinheiten (rad oder Grad).**

Wichtiger als die Betrachtung eines einzelnen Signals ist häufig der *Vergleich zweier Signale gleicher Frequenz* (z.B. Spannung und Strom).

Beide sind neben der gemeinsamen Frequenz gekennzeichnet durch ihre Amplitude und ihre Phasenkonstante. Von besonderem Interesse ist jedoch die Phasendifferenz oder **Phasenverschiebung** $\Delta\varphi$ des Spannungsverlaufs gegenüber dem Stromverlauf (oft auch kurz mit φ oder φ_u bezeichnet).

Ist φ ungleich Null, dann sind die beiden zu vergleichenden Signale gegeneinander **phasenverschoben**. Zueinander nicht phasenverschobene Signale nennt man **gleichphasig**. Abb.5 zeigt ein Beispiel für eine Phasenverschiebung von +80°.
Bei einem positiven (negativen) Phasenverschiebungswinkel ist die Spannungskurve relativ zur Stromkurve nach links (rechts) verschoben.



$$I(t) = 3 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$
$$U(t) = 5 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t + \varphi_u)$$

Abb.5: **Zur Erläuterung der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.**

III) Zweipole, Netzwerke und Schaltungsanalyse

1. Zweipole und Netzwerke

Eine bestimmte Anordnung der elektrischen Verbindungen zwischen einzelnen Bauteilen wird in der Elektrotechnik als ***Schaltung*** bezeichnet. Ihre zeichnerische Darstellung erfolgt mittels genormter Symbole in ***Schaltbildern***. In Abb.6 sind die wichtigsten Schaltsymbole dargestellt.

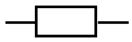
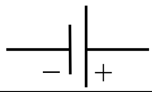
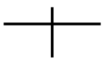
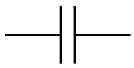
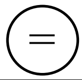
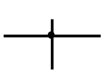
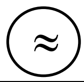
	Leitung		Widerstand **R**		Batterie, Akkumulator
	kreuzende Leitungen ohne Verbindung		Kondensator, Kapazität **C**		Gleichspannungsquelle
	kreuzende Leitungen mit Verbindung		Spule, Induktivität **L**		Wechselspannungsquelle

Abb.6: Wichtige Schaltungssymbole

Häufig werden die wesentlichen elektrischen Eigenschaften einer Anordnung in Form von ***Ersatzschaltbildern*** dargestellt. Abb.7 zeigt ein einfaches Beispiel einer Schaltung sowie den entsprechenden Schaltplan und ein Ersatzschaltbild.

Die Glühbirnen in unserem Beispiel stellen einen Verbraucher dar, der über zwei Anschlüsse die Spannungsquelle belastet (s. Abb.7b). In der Elektrotechnik werden Verbraucher mit zwei Anschlüssen als **Zweipole** bezeichnet. Dabei ist es zunächst gleichgültig, wie der innere Aufbau des Zweipols aussieht (in unserem Falle besteht er aus drei entsprechend verschalteten Glühbirnen).

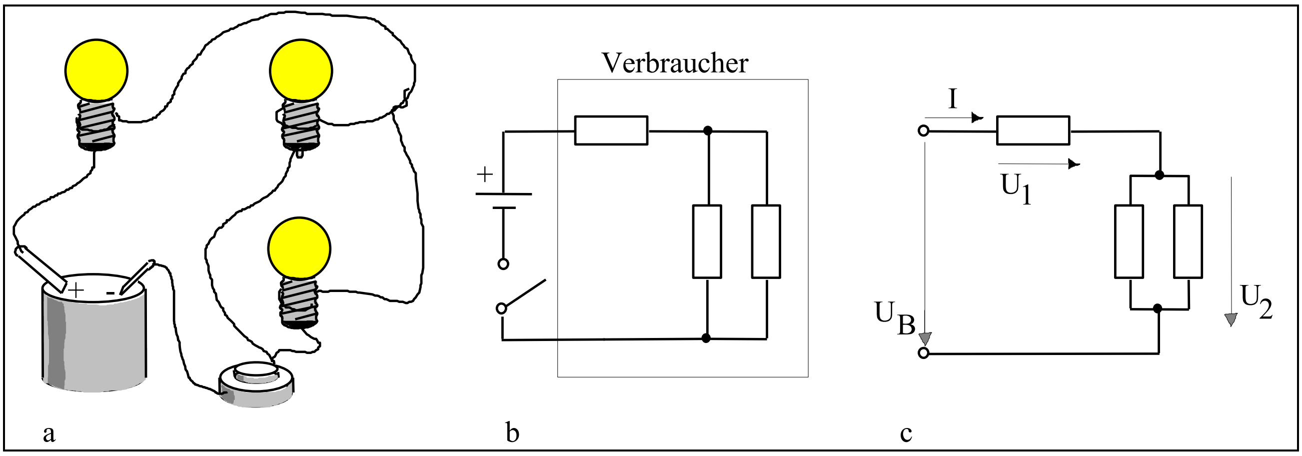


Abb.7: a) **Anordnung einer Batterie, eines Schalters sowie von drei Glühbirnen zu einer elektrischen** **<u>Schaltung</u>.** b) **<u>Schaltplan</u> der Schaltung. Die Glühbirnen wurden durch einen Ohmschen Widerstand ersetzt. Sie stellen gemeinsam einen Verbraucher dar, der mit zwei Anschlüssen mit der Spannungsquelle verbunden ist.** c) **<u>Ersatzschaltbild</u> zur Hervorhebung von Serien- und Parallelschaltung der Widerstände im Zweipol. Die Batterie wurde durch einen Spannungspfeil, der vom Plus- zum Minuspol zeigt, ersetzt. Die Richtung des Strompfeils (technische Stromrichtung) weist vom Pluspol weg. Die Spannungsabfälle an den Widerständen werden als Pfeile dargestellt, die von höherem zu niedrigerem Potential und damit in die gleiche Richtung wie die Strompfeile weisen.**

Aus der Messung des Stromes und der angelegten Spannung kann man Rückschlüsse auf den inneren Aufbau ziehen und für ihn ein Ersatzschaltbild entwerfen. Umgekehrt kann man das Verhalten eines bekannten Zweipols bei Anlegen einer Spannung vorhersagen. Zur Untersuchung von Schaltungen mit kapazitiven (C) oder induktiven (L) Eigenschaften müssen Wechselspannungen eingesetzt werden.

Auch komplizierte elektrische Netzwerke lassen sich häufig auf ein Ersatzschaltbild reduzieren, in welchem nur noch die **elementaren Zweipole** Ohmscher Widerstand R, Kondensator C, und Spule L vorkommen. So kann etwa der (passive) Signaltransport in Nervenzellen (Abb. 8a) mit Hilfe eines Ersatzschaltbildes (Abb. 8b) verstanden werden.

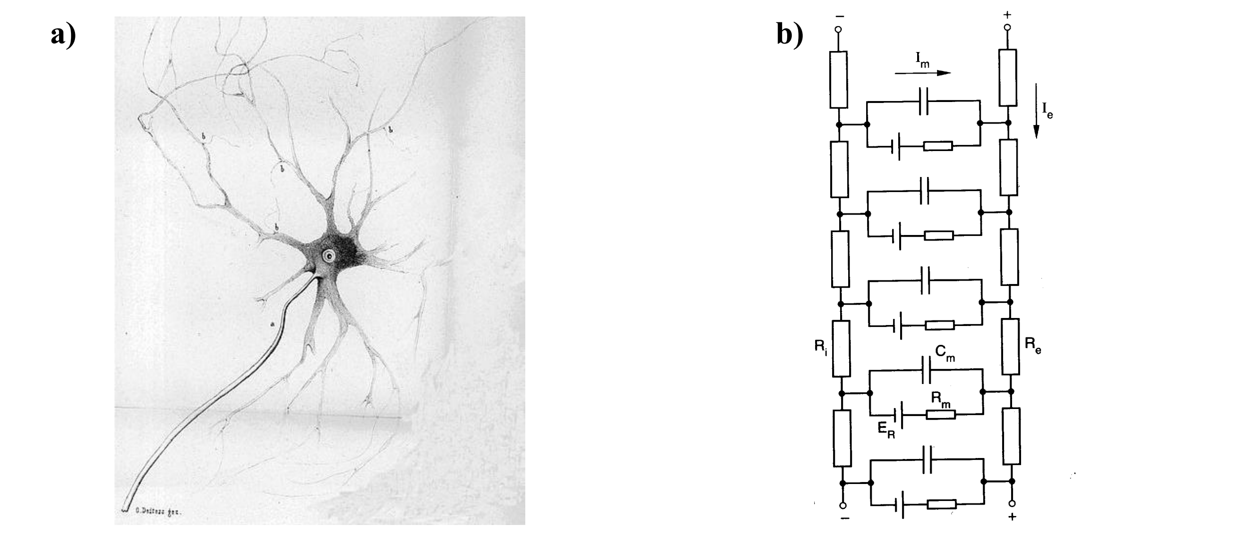


Abb. 8: (a) Historische Zeichnung einer Nervenzelle
(Quelle: Otto Deiters, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Deiters-axon.JPG, „Deiters-axon", gemeinfrei)
(b) Einfaches Ersatzschaltbild für den Signaltransport in einer Nervenzelle

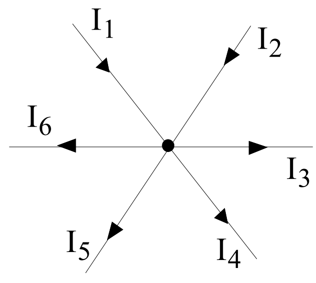
2. Schaltungsanalyse mit den Kirchhoffschen Regeln

a) Knotenregel (1.Kirchhoffsche Regel)

In einem elektrischen Stromkreis gehorchen die Ladungen einem Erhaltungssatz. Dies bedeutet, dass an jedem Verzweigungspunkt (Knoten) in einer Schaltung ebensoviel Ladungen zu- wie abfließen. Dies ist die Aussage der **Knotenregel**:

An jedem Verzweigungspunkt (Knoten) ist die Summe der zu- und abfließenden Ströme Null:

$$I_1 + I_2 + I_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$



$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 - I_6 = 0$$

Abb.8: **Beispiel zur Knotenregel**

Dabei werden die zufließenden Ströme positiv, die abfließenden negativ gezählt (s.Abb.9).

b) Maschenregel (2.Kirchhoffsche Regel)

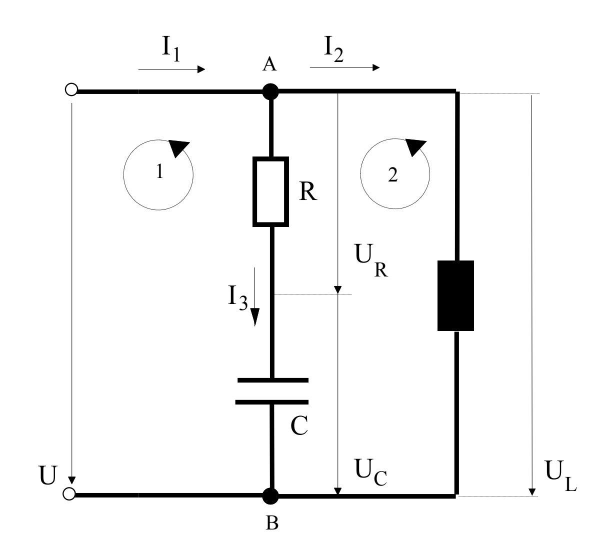
In einer elektrischen Schaltung gilt überall die Wegunabhängigkeit einer Potentialdifferenz. Deswegen müssen die Spannungen längs zweier verschiedener Wege zwischen zwei Punkten einer Schaltung gleich sein. Anders ausgedrückt: Durchläuft man einen geschlossenen Weg innerhalb einer Schaltung (Masche) und addiert die Spannungen an den passierten Bauteilen auf, ergibt deren Summe stets Null. Dies gilt auch, wenn auf dem Weg Spannungsquellen liegen. Dies ist die Aussage der **Maschenregel**:

Entlang einer Masche ist die Summe der Spannungen Null:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{n} U_k = 0$$

Dabei ist es gleichgültig, welchen Umlaufsinn der Weg hat. Es muss nur beachtet werden, dass Spannung, deren Pfeile entgegen der Wegrichtung zeigen, negativ, andernfalls positiv gezählt werden (s.Abb.10).

Mit den beiden Kirchhoffschen Regeln und den Strom-Spannungs-Beziehungen der einzelnen Bauteile kann man jede beliebige Schaltung analysieren. Knoten- und Maschenregel gelten für die Momentanwerte von Strom und Spannung, also auch für Wechselströme und -spannungen.



Masche 1: $U - U_C - U_R = 0$
Masche 2: $U_R + U_C - U_L = 0$
Knoten A: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

Abb.9: **Beispiel zur Knoten- und Maschenregel.**

Aus den Kirchhoffschen Regeln folgen für Reihen- und Parallelschaltungen von Widerständen:

- **Reihenschaltung** (Abb.11a): *Bei einer Reihenschaltung ist die Summe der Einzelwiderstände gleich dem Gesamtwiderstand:* $R = R_1 + R_2$.

- **Parallelschaltung** (Abb.11b): *Bei einer Parallelschaltung ist der Kehrwert des Gesamtwiderstandes gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelwiderstände:* $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

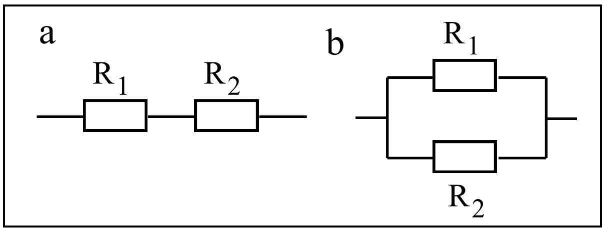


Abb.10: a) **Reihenschaltung,** b) **Parallelschaltung zweier Widerstände.**

IV) WECHSELSTROMVERHALTEN DER ELEMENTAREN ZWEIPOLE

Ausgehend vom zeitabhängigen Verhalten der elementaren Zweipole R, L und C werden wir im Folgenden die Zusammenhänge zwischen Spannungs- und Stromverlauf bei Anwendung sinusförmiger Wechselspannungen auf die elementaren Zweipole betrachten (siehe auch Abb.5, S.7).

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi\ )$$
$$I(t) = I_0 \sin(\omega t)$$

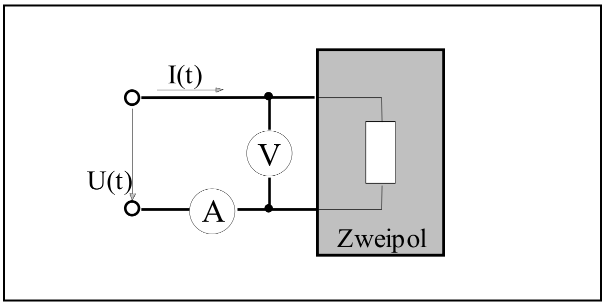


Abb.11: **Prinzipielle Anordnung zur Bestimmung der Eigenschaften eines Zweipols.**

Ein Zweipol wird durch seinen Wechselstromwiderstand (= Impedanz) charakterisiert. Dieser ist bestimmt durch das Amplitudenverhältnis von Spannung und Strom, welches man als Scheinwiderstand bezeichnet, sowie durch die Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Strom.

Scheinwiderstand $\lvert Z\rvert = \dfrac{U_0}{I_0}$	**Phasenverschiebung φ**

Kennen wir beide Größen (Phasenverschiebung und Scheinwiderstand), können wir das Verhalten des betrachteten Zweipols vollständig beschreiben.

1. Ohmscher Widerstand

Den Zusammenhang zwischen der Spannung U, dem Strom I und dem Widerstand R beschreibt das **Ohmsche Gesetz**

Der Strom, der infolge einer angelegten Spannung fließt, ist der Spannung proportional.

$$I(t) = \frac{1}{R} \cdot U(t)$$

Widerstände, an denen dieser lineare Zusammenhang erfüllt ist, nennt man ohmsche Widerstände. Die Maßeinheit des Widerstandes ist das Ohm (Ω, 1Ω=1V/1A).

Diese Relation gilt für beliebige zeitliche Verläufe der angelegten Spannung, also für Gleich- und Wechselspannungen gleichermaßen.

Der Scheinwiderstand eines ohmschen Widerstands ist somit unabhängig von der Frequenz der Wechselspannung und es tritt keine Phasenverschiebung zwischeen Spannung und Strom auf.

R	**Scheinwiderstand** $\lvert Z_R\rvert = \dfrac{U_0}{I_0} = R$	**Phasenverschiebung** $\varphi_R = 0$

2. Spule

Wir betrachten wir eine Spule aus mehreren Drahtwicklungen. Der Draht habe einen vernachlässigbar kleinen Ohmschen Widerstand. Nach dem Ampere'schen Durchflutungsgesetz erzeugt ein Stromfluss durch einen Leiter ein Magnetfeld, welches den Leiter kreisförmig umgibt (Abb.13a). Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule (Abb.13b) ergibt sich als Überlagerung der magnetischen Felder der einzelnen Drahtschleifen.

Die Gesamtheit aller magnetischen Feldlinien, die eine bestimmte Fläche durchfluten, nennt man den *magnetischen Fluss* ϕ.

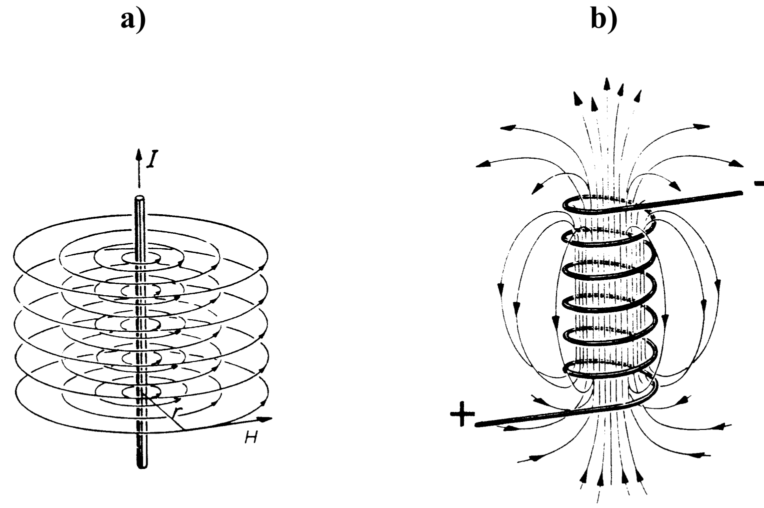


Abb.12: Magnetisches Feld um einen stromdurchflossenen Leiter (a), bzw. eine stromdurchflossene Spule (b). (Quelle: Gerthsen Physik, ed. by Dieter Meschede and Christian Gerthsen, Springer-Lehrbuch, 24, bearb. Aufl (Berlin: Springer, 2010), (a): S. 364, (b): S.366)

Im Falle der Spule ist der magnetische Fluss, der den Spulenquerschnitt durchsetzt, proportional zur Stromstärke:

$$\phi(t) = L\, I(t).$$

Darin bezeichnet L die Induktivität (auch Eigeninduktivität genannt) der Spule, für die folgende Beziehung gilt:

$$L = \mu \mu_0 \frac{n^2 A}{l}$$

μ : Permeabilitätszahl
μ_0: magnetische Feldkonstante
n : Anzahl der Spulenwindungen
A : Querschnittsfläche der Spule
l : Länge der Spule

Die Maßeinheit der Induktivität ist das Henry (H, 1H = 1 Vs/A).

Nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz erzeugt die Änderung eines magnetischen Flusses eine Induktionsspannung, die der zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses proportional ist :

$$U_{ind}(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt},$$

Damit haben wir einen Zusammenhang zwischen der induzierten Spannung und der ursächlichen zeitlichen Änderung des Stromflusses im Spulendraht gefunden:

Die Induktionsspannung ist der zeitlichen Änderung des Spulenstroms proportional und entgegengesetzt gerichtet.

$$U_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$$

Ein konstanter Strom (= Gleichstrom) bewirkt demnach keine Induktionsspannung, so dass ideale Spulen ohne Ohmschen Widerstand bei Gleichstrombetrieb wirkungslos bleiben. Jede beliebige zeitliche Änderung des Stromes bewirkt jedoch eine Induktionsspannung, die einen induzierten Strom zur Folge hat, welcher nach der *Lenz'schen Regel* immer der Ursache der Induktion entgegen wirkt. Dies wird durch das negative Vorzeichen in den Formeln zum Ausdruck gebracht.

Je größer die zeitliche Änderung des Stromes I(t) ist, desto größer ist die induzierte Spannung U_{ind} und desto größer der dem Strom I(t) entgegenwirkende "Selbstinduktions"-Strom. Je größer aber dieser Induktionsstrom ist, desto kleiner wird der die Spule durchfließende Nettostrom sein. Es wird also ein Widerstand wirksam, der strombegrenzend wirkt. In Analogie zum Ohmschen Widerstand, der bei vorgegebener Spannung U(t) den Strom I(t) bestimmt, spricht man bei der Spule von *induktivem Widerstand*.

Betrachten wir den Spannungsabfall an der Spule für einen sinusförmigen Wechselstrom, so finden wir, dass im Falle der Spule (anders als beim ohmschen Widerstand) der Scheinwiderstand von der Frequenz abhängt und eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung vorliegt:

L **Scheinwiderstand** $|Z_L| = \frac{U_0}{I_0} = \omega L$ **Phasenverschiebung** $\varphi_L = 90°$

Der induktive Scheinwiderstand nimmt linear mit der Frequenz zu und verschwindet bei Gleichstrombetrieb (ω=0). Die Phasenverschiebung von 90° bewirkt, dass die Maxima der Spannung eine Viertelperiode vor den Maxima des Stromes erscheinen.

3. Kondensator

Wir schließen einen Plattenkondensator (s.Abb.2b), bestehend aus zwei leitenden Platten, zwischen denen sich eine nichtleitende Schicht (z.B. Luft) befindet, an eine Gleichspannungsquelle an.
Da am Pluspol der Spannungsquelle Elektronenmangel und am Minuspol Elektronenüberschuss herrscht, wird der Pluspol Elektronen von der an ihn angeschlossenen Platte abziehen; zurück bleibt eine positive Nettoladung (= Elektronenmangel). Der Minuspol verschiebt Elektronen auf „seine" Platte, es kommt dort zu einer negativen Nettoladung (= Elektronenüberschuss). Während dieses Vorganges fließt demnach ein Ladestrom, der zwischen den Platten ein elektrisches Feld und damit eine Potentialdifferenz aufbaut. Der Ladevorgang kommt zum erliegen, wenn die Potentialdifferenz zwischen den Platten den vollen Wert der Quellenspannung erreicht hat.

Die Platten des Kondensators speichern die aufgebrachten Ladungen auch wenn die angeschlossene Spannungsquelle entfernt wird. Der Zusammenhang zwischen der angelegten Spannung U und der gespeicherten Ladung Q ist gegeben durch

Die auf einem Kondensator gespeicherte Ladung ist der angelegten Spannung proportional.

$$Q = C \cdot U$$

Darin bezeichnet C die Kapazität des Kondensators, ein Maß für die Speicherfähigkeit für Ladungen bei einer gegebenen Spannung.

Die Maßeinheit der Kapazität ist das Farad (F, 1F = 1As/V).

Bei gegebenem Plattenkondensator kann sie nach folgender Formel berechnet werden:

$$C = \varepsilon \varepsilon_0 \tfrac{A}{d}$$

ε : Dielektrizitätskonstante der Isolationsschicht
ε_0 : elektrische Feldkonstante
A : Fläche einer Kondensatorplatte
d : Abstand der Platten

Um das Verhalten des Kondensators im Wechselspannungsfall zu betrachten, müssen wir noch einen Zusammenhang zwischen der angelegten Spannung U(t) und dem Ladestrom I(t) herstellen.
Dazu müssen wir in die obige Kapazitätsformel den Wert für die Ladung einsetzen, der sich aus den vielen kleinen Ladungsmengen aufsummiert, die durch den jeweiligen Stromfluss in einem bestimmten Zeitintervall aufgebracht wurden.
Wir müssen also den Strom bis zum momentanen Zeitpunkt integrieren:

$$dQ = I\,dt \quad \Rightarrow \quad Q = \int_0^t I\,dt$$

Für den Zusammenhang zwischen der Spannung U am Kondensator und dem Ladestrom I gilt deshalb zu jedem Zeitpunkt:

$$U = \tfrac{1}{C}\int_0^t I\,dt\;.$$

Betrachten wir die Kondensatorspannung für einen sinusförmigen Wechselstrom, so finden wir:

C **Scheinwiderstand** $|Z_C| = \dfrac{U_0}{I_0} = \dfrac{1}{\omega C}$ **Phasenverschiebung** $\varphi_C = -90°$

Der kapazitive Scheinwiderstand ist umgekehrt proportional zur Frequenz und wird bei Gleichstrombetrieb (ω=0) unendlich groß. Die Phasenverschiebung von -90° bewirkt, dass die Maxima der Spannung eine Viertelperiode nach den Maxima des Stromes erscheinen.

4. Frequenzverhalten zusammengesetzter Zweipole

Nachdem wir nun die frequenzabhängigen Eigenschaften der elementaren Zweipole kennen, können wir auch das Verhalten einer Kombination dieser Bauelemente beschreiben.

Wegen der unterschiedlichen Phasenverschiebung dürfen allerdings die Werte für den Scheinwiderstand nicht einfach addiert werden. Man muss vielmehr zwischen dem **Wirkwiderstand R**, der keine Phasenverschiebung zeigt, und dem **Blindwiderstand X**, der eine Phasenverschiebung von +90° oder –90° zeigt, unterscheiden. Der **Wechselstromwiderstand Z** verhält sich wie ein Vektor mit den beiden Komponenten R und X, sodass bei Zusammenfügen mehrerer Zweipole auch vektoriell addiert werden muss. In der Vektordarstellung (Abb.14) wird der Wirkwiderstand R auf der x-Achse, der Blindwiderstand X auf der y-Achse aufgetragen. Der **Phasenwinkel φ** ist der Winkel zwischen der x-Achse und dem Vektorpfeil, die Länge des Vektorpfeils entspricht dem **Scheinwiderstand |Z|**.

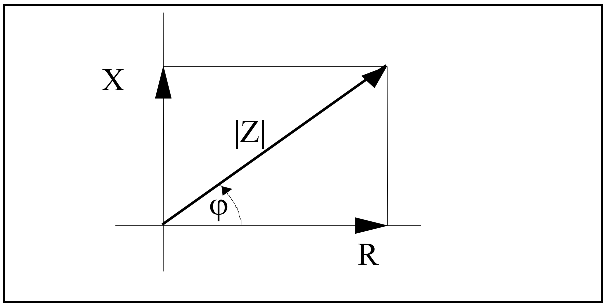


Abb.13: **Vektordarstellung des Scheinwiderstandes einer realen Spule.**

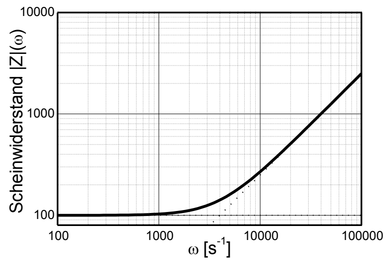
Betrachten wir als Beispiel eine Serienschaltung von Spule und Widerstand:
Wir müssen die beiden Wechselstromwiderstände vektoriell (d.h. komponentenweise) addieren:

$R_L = 0, \quad X_L = \omega L$: die (ideale) Spule hat einen reinen Blindwiderstand

$R_R = R, \quad X_R = 0$: der Widerstand hat einen reinen Wirkwiderstand

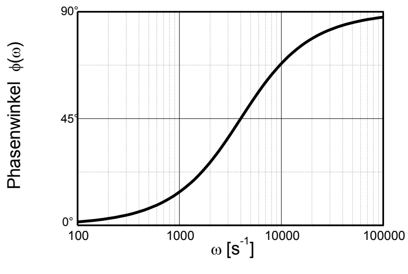
Damit hat dieser zusammengesetzte Zweipol einen Wirkwiderstand R und einen Blindwiderstand $X = \omega L$. Der Scheinwiderstand ergibt sich (Pythagoras!) als:

$$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$



Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom ergibt sich aus:

$$\tan\varphi = \frac{\omega L}{R}.$$



Die Phasenverschiebung zusammengesetzter Zweipole ist frequenzenzabhängig. Das Bauteil, welches bei einer bestimmten Frequenz den Scheinwiderstand dominiert bestimmt dort auch wesentlich die Phasenverschiebung.

Bem: Der Blindwiderstand des Kondensators ist negativ ($-\frac{1}{\omega C}$), da wegen des Phasenwinkels von –90° der Vektorpfeil (Abb.14) in Richtung der negativen y-Achse weist!

5. Zusammenfassung

Aus der Analyse des Zeit- und Frequenzverhaltens der elementaren Zweipole erhalten wir zusammenfassend die in Abb.15 tabellierten Ergebnisse.

	Zeitverhalten		Frequenzverhalten	
		Wirkwiderstand **R**	Blindwiderstand **X**	Phasen-verschiebung **φ**
ohmscher Widerstand	$U_R(t) = R\, I_R(t)$	R	0	0
ideale Spule (Induktivität)	$U_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt}$	0	ωL	90°
Kondensator (Kapazität)	$U_C(t) = \frac{1}{C} \int I_C(t)\, dt$	0	$-\frac{1}{\omega C}$	-90°

Abb.14: **Zeit- und Frequenzverhalten elementarer Zweipole.**

Der Ohmsche Widerstand hat einen reinen Wirkwiderstand, während Spule und Kondensator reine Blindwiderstände sind, die eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung verursachen.

V) MESSTECHNIK

Die Eigenschaften eines Zweipols werden vollständig beschrieben durch Angabe des Scheinwiderstandes $|Z| = \frac{U_0}{I_0}$, sowie der durch ihn hervorgerufenen Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung.

Der Scheinwiderstand kann entweder direkt mit entsprechenden Messgeräten (siehe unten 1.) aus dem Quotienten der Effektivwerte für Spannung und Strom bestimmt werden oder mit Hilfe des Oszilloskops aus den jeweiligen Amplitudenwerten. Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom kann mit dem Oszilloskop aus der Zeitverschiebung der beiden Kurven bestimmt werden:
$\Delta\varphi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360° \;\; [grad]$ (im Bogenmaß: $\Delta\varphi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 2\pi \;\; [rad]$).

1. Oszilloskop

Um die zeitlichen Verläufe von Signalen sichtbar zu machen, kann man ein **Elektronenstrahl-Oszilloskop** ('analoges' Oszilloskop) verwenden. Dieses besteht aus einer Elektronenstrahlröhre mit Leuchtschirm (Braunsche Röhre) sowie verschiedenen Einheiten zur Ablenkung des Elektronenstrahls.
Die von einer Glühkathode emittierten frei beweglichen Elektronen werden gebündelt und in Richtung Leuchtschirm beschleunigt, wo sie beim Aufprall einen Leuchtpunkt erzeugen (Abb. 15).

Der Elektronenstrahl durchläuft zwei senkrecht zueinanderstehende Plattenpaare. Dabei erfährt er waagrechte und senkrechte Ablenkungen, die proportional zur Spannung sind, die an den Plattenpaaren anliegt. Üblicherweise legt man die Messgröße an die vertikal ablenkenden Platten (y-Richtung) und schließt an die horizontal ablenkenden Platten (x-Richtung) eine periodische, proportional mit der Zeit ansteigende (Sägezahn-)Spannung an. Dadurch entsteht auf dem Leuchtschirm eine Abbildung des zeitlichen Verlaufes der an den Y-Platten anliegenden Spannung. Durch geeignete Synchronisation ('Triggerung') der X- und Y-Spannungen kann von einem periodischen Signal ein stehendes Bild erzeugt werden.

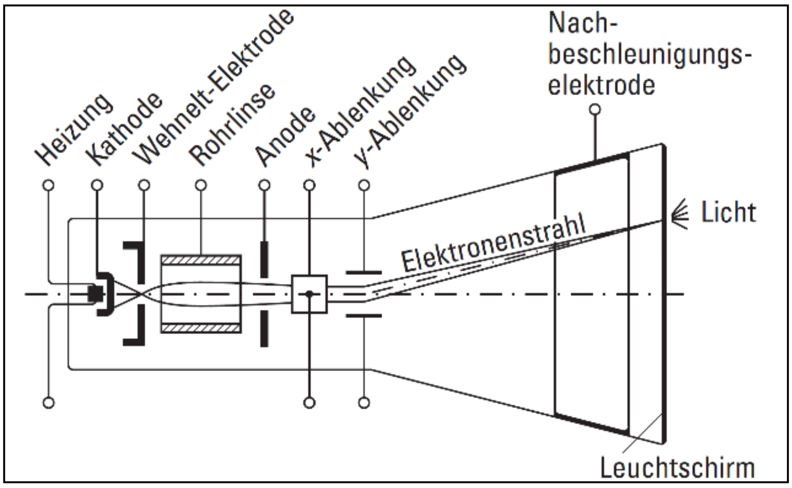


Abb. 15: Schematische Darstellung von Komponenten und Funktion eines Analog-Oszilloskops
(Quelle: Wilhelm Raith, Elektromagnetismus, Lehrbuch der Experimentalphysik 2, 9. Aufl Berlin: de Gruyter, 2006, S.700)

Die gleichzeitige Messung und Darstellung zweier Signale erfolgt mit einem Zweikanal-Oszilloskop. Es werden dann alternierend zwei verschiedene Spannungssignale (von den Eingängen ‚Kanal 1' bzw. ‚Kanal 2') an die vertikal ablenkenden Platten angelegt. Da der Wechsel zwischen beiden Signalen schneller erfolgt als unsere Wahrnehmung folgen kann, können somit zwei Signale (quasi-) simultan angezeigt und miteinander verglichen werden (wichtig zur Ermittlung der Phasenverschiebung zwischen zwei Signalen).

Mit einem Oszilloskop können nur Spannungen gemessen werden. Ströme müssen deswegen indirekt über Spannungsabfälle an bekannten Widerständen bestimmt werden (siehe Aufgabe 2).

Inzwischen wird statt des 'analogen' Oszilloskops oft ein **digitales Oszilloskop** eingesetzt.
Hier wird das analoge Spannungssignal mit einem Analog-Digital-Wandler digitalisiert, anschließend prozessiert und auf einem Bildschirm dargestellt. Das Digital-Oszilloskop hat einige Vorteile: Durch die elektronische Verarbeitung des Signals können mathematische Operationen vorgenommen werden, das Signal kann einfach charakterisiert bzw. analysiert werden und die Bildschirm-Darstellung ist flexibler, so können z.B. mehrere dargestellte Signale durch Farben unterschieden werden.

Die Bedienelemente sind meist dem analogen Oszilloskop nachempfunden, mit einer Vielzahl zusätzlicher Funktionen, was die Bedienung teilweise etwas unübersichtlicher macht.

VI) AUFGABENSTELLUNG

Der Versuch dient neben den primären Messaufgaben auch dem Erlernen des Umgangs mit dem analogen und digitalen Oszilloskop

1. Signaldarstellung mit dem Analog-Oszilloskop

Der Betreuer wird Sie zunächst mit der Bedienung des Analog-Oszilloskops vertraut machen und anschließend ein Signal unbekannter Form, Frequenz und Amplitude an den Eingang anlegen.
Suchen Sie die passende Einstellung von Spannungs- und Zeitskala und charakterisieren Sie das Signal (Signalform, Spannungsamplitude, Periodendauer). Skizzieren Sie im Protokoll das Signal und geben Sie die Messwerte für Spannungsamplitude und Frequenz mit dem zugehörigen Größtfehler an. Für welche Einstellungen des Oszilloskops bekommen Sie die genauesten Daten?

2. Impedanzmessung an Widerstand, Kondensator und Spule

Machen Sie sich nun mit dem Digital-Oszilloskop vertraut und verwenden Sie dieses im Folgenden.

Da mit einem Oszilloskop nur Spannungen gemessen werden können, müssen wir in den Stromkreis (Abb.16) einen zusätzlichen Messwiderstand R_m zur Bestimmung der Stromstärke einfügen. Bei bekanntem Widerstand kann aus der gemessenen Spannung U_2 der Strom, der durch den Zweipol fließt, berechnet werden.

Bauen Sie zunächst die Schaltung nach Abb.16 auf und setzen Sie zum Test der Schaltung einen ohm'schen Widerstand als Zweipol ein (Frequenz 1 kHz). Entspricht die Phasenverschiebung Ihrer Erwartung ?

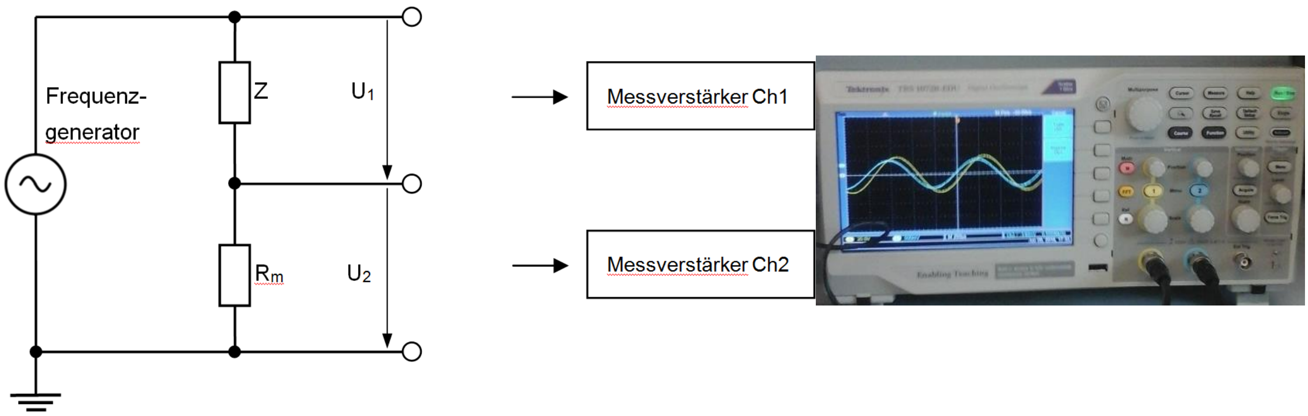


Abb.16: Schaltbild zur Impedanzmessung

Machen Sie sich klar, welche der beiden Kurven auf dem Bildschirm des Oszilloskops den Strom durch den Zweipol bzw. die an ihm abfallende Spannung repräsentiert.

Setzen Sie nun statt des Widerstands einen Kondensator als Zweipol in die Schaltung ein und bestimmen Sie die Phasenverschiebung φ (mit Vorzeichen und Fehlerangabe!) sowie den Scheinwiderstand |Z| und daraus die Kapazität (Frequenz 1 kHz) des Kondensators.

Setzen Sie anschließend eine Spule statt des Kondensators ein (**hier: Frequenz 10 kHz**) und bestimmen Sie die Phasenverschiebung φ (mit Vorzeichen und Fehlerangabe!)

3. Impedanzmessung an einem unbekannten Zweipol

Fügen Sie in Ihre Schaltung (Abb.16) statt des Kondensators einen unbekannten Zweipol ein. Der Betreuer gibt Ihnen dazu einen der sechs im Anhang gezeigten Zweipole.

Charakterisieren Sie den unbekannten Zweipol über einen weiten Frequenzbereich (200 Hz, 400 Hz, 1 kHz, 2 kHz, 4 kHz, 10 kHz, 20 kHz, 40 kHz, 80 kHz). Notieren Sie die Messwerte für die Spannungsamplituden U_1, U_2 im Messprotokoll und tragen Sie diese gleichzeitig in eine Excel-Tabelle auf Ihrem Notebook ein. Lassen Sie mit Hilfe der Tabellenkalkulation jeweils sofort den Scheinwiderstand $|Z|$, die Phasenverschiebung φ sowie die Winkelgeschwindigkeit ω berechnen und tragen Sie diese Werte in folgenden zwei Diagrammen auf:

- Doppellogarithmisch $|Z|$ über ω und
- φ über ω (ω logarithmisch skaliert).

Überlegen Sie bereits während der Messungen anhand der jeweiligen Phasenverschiebung, welche Bauelemente im unbekannten Zweipol enthalten sein müssen.
Überlegen Sie dann anhand des Kurvenverlaufs von Scheinwiderstand und Phasenverschiebung (für niedrige bzw. hohe Frequenzen) welche Bauelemente enthalten sind und wie diese verschaltet sein müssen. Werten Sie die Kurve für den Scheinwiderstand graphisch aus (siehe unten) und ermitteln Sie die Werte für R, L und/oder C.

Hinweis zur graphischen Auswertung:

Die Impedanzkurven der unbekannten Zweipole zeigen bei sehr hohen bzw. sehr niedrigen Frequenzen das Verhalten eines einzelnen Bauelements.
So spielt etwa bei der Serienschaltung von Widerstand und Kondensator bei niedrigen Frequenzen der ohm'sche Widerstand keine Rolle, da der (frequenzabhängige) kapazitive Blindwiderstand hier wesentlich größer ist. Die Schaltung zeigt also für niedrige Frequenzen den Scheinwiderstand $|Z| \approx 1/\omega C$. Für hohe Frequenzen kann dagegen der Kondensator vernachlässigt werden und die Schaltung verhält sich wie ein reiner ohm'scher Widerstand mit dem frequenzunabhängigen Wirkwiderstand R.
In diesen Beispiel kann der ohm'sche Widerstand des unbekannten Zweipols also aus dem konstanten Wert für hohe Frequenzen bestimmt werden. Die Kapazität des Kondensators erhält man grafisch aus dem Schnittpunkt der abfallenden Geraden des Kondensators (doppellogarithmische Darstellung !) für niedrige Frequenz und der Widerstandsgeraden für hohe Frequenz. Am Schnittpunkt der beiden Geraden gilt : $R = 1/\ \omega_S C$. Aus der Frequenz am Schnittpunkt (ω_S) und dem bereits bestimmten ohm'schen Widerstand kann dann die Kapazität berechnet werden.
Analog kann auch bei den anderen Zweipolen verfahren werden.

VII) Anhang: Im Versuch verwendete unbekannte Zweipole

Als Hilfe bei der Identifizierung eines unbekannten Zweipols sind im Folgenden die Schaltbilder der verschiedenen Zweipole wiedergegeben.