INF152 Estructuras Discretas

Profesores: R. Astudillo – M. Bugueño
Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Informática – Septiembre 2, 2020.

Nombre: Maximiliano Sepúlveda

Rol: 201973536-5 **Paralelo**: 200

Certamen 1 – Preguntas 3

Esta evaluación tiene como máximo 25 puntos del C1.

a) Se definen dos conjuntos A, B dados por

$$A = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \text{ es impar}, x < 10\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \text{ es primo}\}.$$

Sea C un conjunto definido por $C = A \cap B$, enumere los elementos del conjunto potencia 2^C **[3 pts]**.

Respuesta:

Considerando que **0 es par**, y que **0 y 1 no son primos**, se tienen los siguientes conjuntos:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$$

Por lo tanto, el conjunto C esta dado por:

$$A \cap B = \boxed{C = \{3, 5, 7\}}$$

Entonces, los elementos del conjunto potencia de C serian:

$$\boxed{2^C = \Big\{ \quad \varnothing, \quad \{3\}, \quad \{5\}, \quad \{7\}, \quad \{3,5\}, \quad \{3,7\}, \quad \{5,7\}, \quad \{3,5,7\} \quad \Big\}}$$

En total, 2^C tiene $2^{|C|}$ elementos, es decir, $2^3 = \boxed{8}$. ■

---

b) Sean A, B dos conjuntos arbitrarios y sean $2^A, 2^B$ sus respectivos conjuntos potencias. Demuestre que

$$A \subseteq B \implies 2^A \subseteq 2^B \quad \textbf{[8 pts]}$$

Respuesta:

Formalizacion:

Se definen las siguientes proposiciones para la demostración directa $p \implies q$:

- $p : A \subseteq B$
- $q : 2^A \subseteq 2^B$

Demostración:

Según la definición de subconjuntos:

$$A \subseteq B \iff \forall x\,(x \in A \implies x \in B)$$

Quiere decir que "todos los elementos de A están en B". Por lo tanto, se puede concluir que:

$$\boxed{A \cap B = A}$$

Como todos los elementos de A están dentro de B, todos los subconjuntos posibles de A también van a estar dentro de B, es decir:

$$\boxed{2^A \subseteq B}$$

Luego, por propiedades de los conjuntos potencia, estos siempre contienen al conjunto completo como tal, es decir:

$$\boxed{A \subseteq 2^A} \text{ y } \boxed{B \subseteq 2^B}$$

Si juntamos todas las conclusiones, tenemos que:

$$\boxed{(A \subseteq 2^A) \land (2^A \subseteq B) \land (B \subseteq 2^B) \implies (A \subseteq 2^A \subseteq B \subseteq 2^B)}$$

Conclusión:

Se puede notar como 2^A esta contenido en B, y éste a su vez esta contenido en 2^B. Por lo tanto, se puede concluir que:

$$\boxed{2^A \subseteq 2^B}$$

$\therefore$ La implicancia es cierta. ■

c) Sea $f : A \to A$ una función biyectiva, demuestre que $f \circ f : A \to A$ también es biyectiva. [**12 pts**]

Respuesta:

Formalización:

Se definen las siguientes proposiciones para la demostración directa $p \implies q$:

Sea una funcion $f : A \to A$

- $p : f$ es biyectiva
- $q : f \circ f$ es biyectiva

Demostración:

Si consideramos que f es biyectiva, significa que es inyectiva y sobreyectiva.

Es decir que, segun la definicion de inyectividad, cumple que:

1) $\forall x, y \in A \Big((f(x) = f(y)) \implies (x = y) \Big)$

Si consideramos $\boxed{x = f(a)}$ e $\boxed{y = f(b)}$, entonces se tiene que:

$$\Big(f(f(a)) = f(f(b)) \Big) \implies \Big(f(a) = f(b) \Big) \implies (a = b)$$

Por transitividad de la implicancia, se concluye que:

$$\boxed{\Big(f(f(a)) = f(f(b)) \Big) \implies (a = b)}$$

$\therefore$ Teniendo en cuenta que $\boxed{(f \circ f)(x) = f(f(x))}$, entonces $f \circ f$ es **inyectiva**.

Y ahora, si consideramos que es sobreyectiva, segun su definicion, cumple que:

2) $\forall y \in A, \exists x \in A \Big(y = f(x) \Big)$

Consideremos entonces que uno de los resultados de f es $a \in A$. Si es sobreyectiva, quiere decir que debe existir algun valor $b \in A$ tal que al evauarlo en f resulte en a.

$$\boxed{\forall a \in A, \exists b \in A \Big(f(b) = a \Big)}$$

Y a su vez, deberia haber un valor $x \in A$ tal que al evaluarlo en f resulte en b.

$$\boxed{\exists x \in A \Big(f(x) = b \Big)}$$

Juntando las conclusiones, entonces se tiene:

$$\forall a \in A, \exists b, x \in A \Big((f(x) = b) \land (f(b) = a) \Big)$$

Como b ya se define, y existe, entonces se puede reducir a:

$$\boxed{\forall a \in A, \exists x \in A \Big(f(f(x)) = a \Big)}$$

$\therefore$ Teniendo en cuenta que $\boxed{(f \circ f)(x) = f(f(x))}$, entonces $f \circ f$ es **sobreyectiva**.

Conclusión:

Como se demostró que $f \circ f$ es inyectiva y sobreyectiva, se puede concluir finalmente que $f \circ f$ es biyectiva. ∎