INF152 Estructuras Discretas

Profesores: R. Astudillo – M. Bugueño
Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Informática – Octubre 30, 2020.

Nombre: Maximiliano Sepúlveda

Rol: 201973536-5 **Paralelo**: 200

Certamen 2 – Pregunta 1

Esta evaluación tiene como máximo 30 puntos del C2.

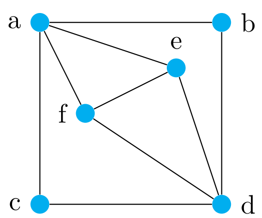


Figura 1: Grafo G1

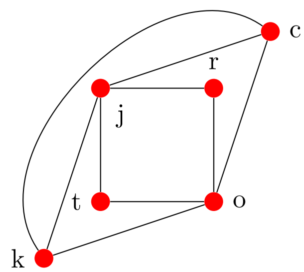


Figura 2: Grafo G2.

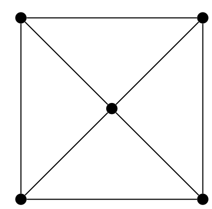


Figura 3: Grafo G3.

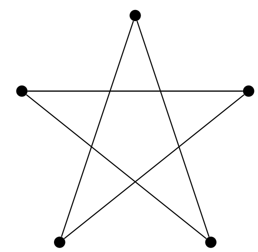


Figura 4: Grafo G4.

a) Considerando los grafos de las Figuras 1 y 2, demuestre que ambas arquitecturas son isomorfas. Denote mapeo entre grafos **a nivel de nodos como a nivel de arcos** justificando debidamente. [**15 puntos**]

Respuesta:

Para demostrar que los grafos $G1$ y $G2$ son isomorfos, es necesario ver las equivalencias de grados de los vértices de cada uno. Para evitar confusiones, se denotara c_1 para el vértice c del grafo $G1$, y c_2 para el vértice c del grafo $G2$.

A continuación, se revisara el isomorfismo a nivel de vértices, para ello, se va a revisar los grados de los grafos:

$G1$	Grado	$G2$	Grado
a	**4**	c_2	3
b	2	k	3
c_1	2	t	2
d	**4**	j	**4**
e	3	r	2
f	3	o	**4**

Se puede notar que si hay una relación entre los grados de cada vértice (en ambos grafos hay 2 vertices de grado 4, hay 2 vertices de grado 3 y 2 vertices de grado 2), por lo tanto, es posible que los grafos si sean isomorfos. A continuación, se va a definir una función ϕ que va a *mapear* los vértices de $G1$ a $G2$:

$$\boxed{\phi(a) = j \quad \phi(b) = r \quad \phi(c_1) = t \quad \phi(d) = o \quad \phi(e) = c_2 \quad \phi(f) = k}$$

Podemos notar que ϕ es biyectiva, por lo tanto, si posee inversa:

$$\boxed{\phi^{-1}(j) = a \quad \phi^{-1}(r) = b \quad \phi^{-1}(t) = c_1 \quad \phi^{-1}(o) = d \quad \phi^{-1}(c_2) = e \quad \phi^{-1}(k) = f}$$

Ahora, para ver el isomorfismo a nivel de arcos, puede ser útil revisar su **matriz de adyacencia**:

$G1$	a	b	c_1	d	e	f
a	0	**1**	**1**	0	**1**	**1**
b	**1**	0	0	**1**	0	0
c_1	**1**	0	0	**1**	0	0
d	0	**1**	**1**	0	**1**	**1**
e	**1**	0	0	**1**	0	**1**
f	**1**	0	0	**1**	**1**	0

$G2$	j	r	t	o	c_2	k
j	0	**1**	**1**	0	**1**	**1**
r	**1**	0	0	**1**	0	0
t	**1**	0	0	**1**	0	0
o	0	**1**	**1**	0	**1**	**1**
c_2	**1**	0	0	**1**	0	**1**
k	**1**	0	0	**1**	**1**	0

Podemos notar a simple vista que ambos poseen los arcos distribuidos de la misma forma.

$\therefore$ Los grafos $G1$ y $G2$ son isomorfos. ■

b) Considerando los grafos de las Figuras 3 y 4, demuestre o refute que los dibujos se pueden realizar sin levantar el lápiz ni doblar la hoja ni repetir trazos. [**8 puntos**].

Respuesta:

Para que un grafo pueda dibujarse sin levantar el lápiz ni repetir trazos, éste debe poseer al menos un **camino de Euler** o un **circuito de Euler**.

Para que un grafo posea un camino de Euler, éste debe poseer **exactamente dos vertices de grado impar**. Para que sea un circuito de Euler, éste debe poseer **todos sus vertices con grado par**.

Considerando lo anterior, se puede ver que $G3$ posee mas de 2 vertices con grado impar, y no todos sus vertices son de grado par; es decir, no es ninguna de las dos, no posee ni un camino ni un circuito euleriano.

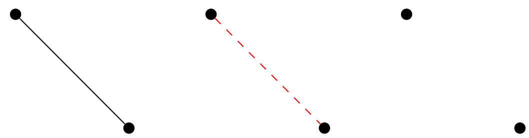
Ahora si revisamos $G4$, todos sus vertices son de grado par, es decir, que si existe un circuito de Euler, por lo tanto, si se puede dibujar sin levantar el lápiz ni repetir trazos.

$\therefore$ Con las condiciones dadas, $G3$ no se puede dibujar, pero si se puede con $G4$. ■

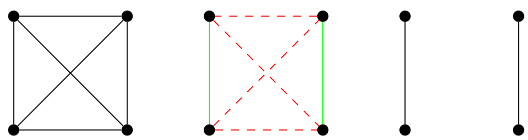
c) Para $n \geq 2$ par, ¿Cuál es la cantidad mínima de arcos que deben quitarse de un grafo completo K_n para obtener exactamente dos componentes conexas con $\frac{n}{2}$ vértices cada una? Escriba dicha cantidad como una función de n. [**7 puntos**].

Respuesta:

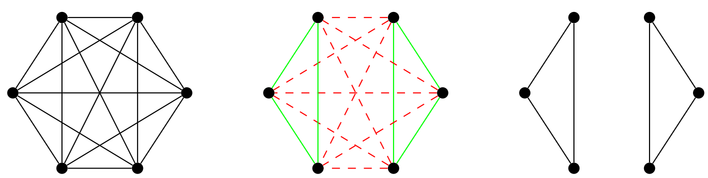
Como estamos hablando de grafos completos, las componentes conexas que se pueden formar al eliminar **la minima cantidad de arcos** también deberían ser grafos completos, pero con la condición de que sea la mitad de vertices. En otras palabras, séase un grafo completo K_n, las dos componentes conexas del grafo completo deberían ser dos grafos $K_{n/2}$.

$K_2 =$ 

Se quitó **1 arco**. Quedaron 2 grafos disjuntos K_1.

$K_4 =$ 

Se quitaron **4 arcos**. Quedaron 2 grafos disjuntos K_2.

$K_6 =$ 

Se quitaron **9 arcos**. Quedaron 2 grafos disjuntos K_3.

De esa forma, sucesivamente, se tiene la siguiente tabla de datos:

n	$f(n)$
2	1
4	4
6	9
8	16
10	25
$\vdots$	$\vdots$

Se puede notar como la mitad de n, al elevarlo al cuadrado da el resultado. Considerando n una cantidad par ≥ 2 que representa la cantidad de vertices de un grafo completo K_n, se tiene que la cantidad de arcos mínimo a eliminar para separar el grafo en dos grafos $K_{n/2}$ esta dada por la función:

$$\boxed{f(n) = \left(\frac{n}{2}\right)^2}$$