Árboles Binarios de Búsqueda

Análisis de Algoritmos

Semestre 2, año 2019

¿Por que es importante buscar?

- Todas las aplicaciones necesitan buscar información.
- Tenemos grandes cantidades de datos, que están en constante crecimiento.
  - La Web pesa aproximadamente 8ZB ($ZB = 10^{21} Byte$).

Tablas de Símbolos

- Asocia pares (llave, valor).
- Vector caso particular (llave = indice, valor = contenido).
- Convenciones:
  - Solo un valor esta asociado a una llave.
  - Si se busca insertar un nodo con una llave ya existente, el nuevo valor lo reemplaza.
  - Borrado Lazy vs Borrado Eager.

Ejemplos:

Aplicación	Propósito	Llave	Valor
Diccionario	Buscar un término.	Palabra.	Definición.
Índice de Libro	Buscar una página.	Palabra.	Lista de páginas.
Cuentas Bancarias	Procesar una transacción.	Número de cuenta.	Detalles de la transacción.
Búsqueda en la Web	Buscar páginas Web.	Palabras claves (Keywords).	Lista de páginas

Estructuras de Datos

- Árboles Binarios de Búsqueda.
- Árboles de Búsqueda Balanceados.
  - Árbol 2-3.
  - Árbol Rojo-Negro.
- Tabla Hash.

Pros y Contras de diferentes estructuras de datos

Estructura	Pros	Contras
Lista enlazada	Buena para tablas de símbolos pequeñas.	Malo para tablas de símbolos grandes.
Arreglo ordenado	Óptimo en búsqueda y espacio.	Inserción lenta.
Árbol Binario de Búsqueda (BST)	Facil de implementar, inserción óptima.	Sin garantía de espacio (referencias).
Árbol Rojo-Negro	Óptimo en búsqueda e inserción.	Uso de espacio (referencias).
Tabla Hash	Búsqueda e inserción rápida.	Espacio y cálculo del valor hash.

Árboles Binarios de Búsqueda

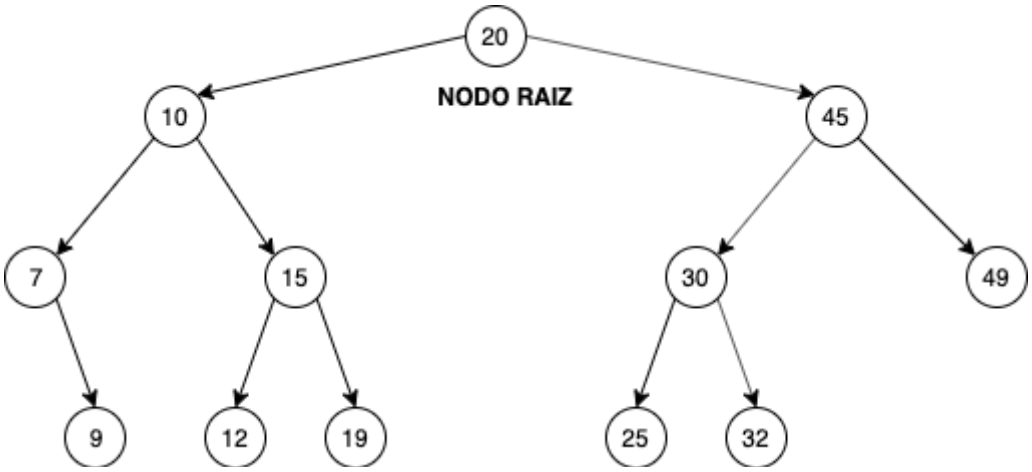
- Árbol binario:
  - Apuntado por solo un nodo (**nodo padre**).
  - Apunta como máximo a otros dos nodos (**nodos hijos**).
- Sub-árbol izquierdo: elementos menores.
- Sub-árbol derecho: elementos mayores.

El Árbol Binario de Búsqueda (BST, *Binary Search Tree*), es un tipo particular de árbol binario que satisface las condiciones básicas de estos, es decir, cada elemento es apuntado solo por un nodo, llamado **nodo padre** y apunta como máximo a otros dos nodos, llamados **nodos hijos**. De manera genérica, podemos decir que cada puntero apunta a un árbol binario.

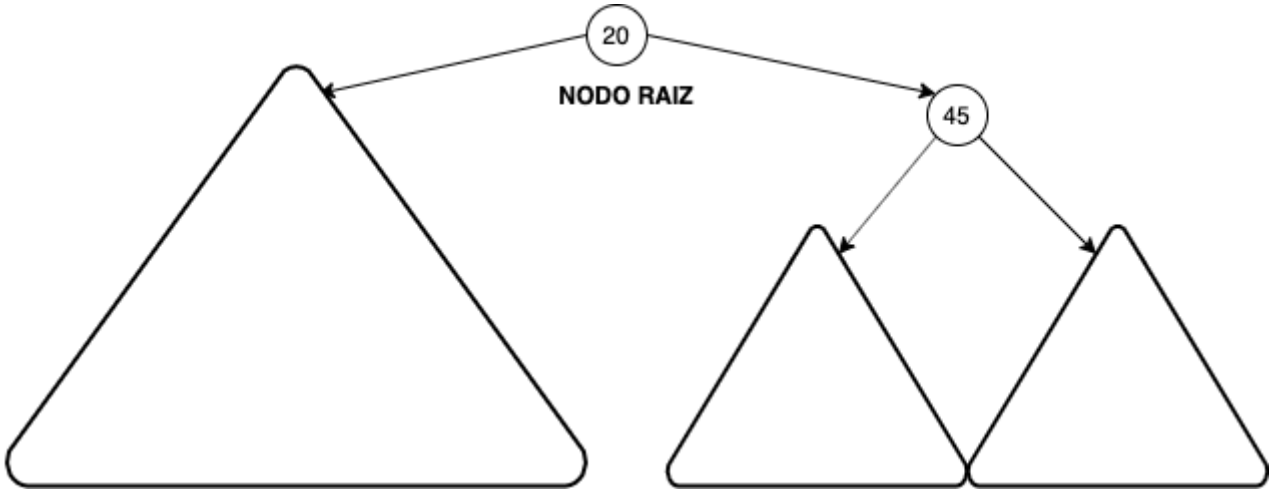
En el BST además se cumple la condición que: las llaves del sub-árbol izquierdo son menores que la llave de su **nodo padre** y las llaves del sub-árbol derecho son mayores que la llave de su **nodo padre**. La llave es dependiente del criterio de búsqueda que se establezca para cada nodo, para un mismo set de datos se pueden generar tantos BST diferentes como criterios existan.

Ejemplo: Si deseamos buscar alumnos, podemos ordenarlos (llaves) por RUT, o por apellido, o por número de mátricula, etc. y cada criterio generará un BST diferente.

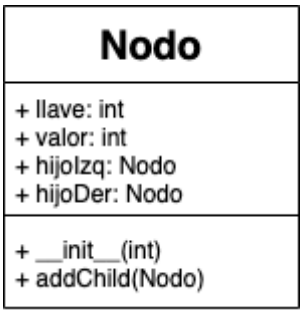
Árboles Binarios de Búsqueda



Árboles Binarios de Búsqueda



Nodo árbol binario



In [ ]:
```
class Nodo:
    def __init__(self, llave, valor):
        self.llave=llave
        self.valor=valor
        self.hijoIzq=None
        self.hijoDer=None

    def addChild(self, new_nodo):
        pass
```

In [ ]:
```
# Funciones complementarias, no se ven en las slides

# Indica el formato de retorno cuando se invoca str()
def __str__(self):
    return "Tree[%i]=%i"%(self.llave,self.valor)

Nodo.__str__=__str__

# Imprimir el arbol visual-friendly
def printTree(self, lvl=0, whoami="root"):
    print(" "*5*lvl+whoami+":"+str(self))
    if(self.hijoIzq != None):
        self.hijoIzq.printTree(lvl+1, "izq")
    if(self.hijoDer != None):
        self.hijoDer.printTree(lvl+1, "der")

Nodo.printTree=printTree
```

Búsqueda e Inserción

- Búsqueda:
  - Condiciones de término.
    - **HIT**: encuentra el nodo.
    - **MISS**: llega a un enlace vacio.

Búsqueda e Inserción

- Inserción:
  - Condiciones de inserción.
    - Cuando se hace **HIT** el valor es reemplazado.
    - Cuando se hace **MISS** la llave y el valor crean un nuevo nodo en esa posición.
- Mejor y Peor Caso

Como vimos previamente, el principio de orden es parte estructural de un BST, por esto el recorrido para una búsqueda esta guiado por este principio. De esta manera, si la llave buscada es menor que la del nodo actual, el recorrido continúa por el hijo izquierdo, y si es mayor por el hijo derecho. Si en algún momento encontramos la llave buscada, diremos que hemos echo **HIT** con la llave. En caso contrario, si llegamos hasta la base del árbol, encontrandonos con una rama nula, diremos que hemos echo **MISS** con la llave.

La inserción recibe una llave y un valor comportandose de manera similar, pero con un proposito diferente. En este caso si hacemos un **HIT**, corresponde reemplazar el valor del nodo actual por el nuevo valor otorgado. Un **MISS** en el caso de la inserción nos índica que hemos encontrado el punto donde un nuevo nodo debe ser creado.

Mejor caso

El mejor caso de un BST se produce cuando como resultado obtenemos un *árbol perfectamente balanceado*. En este caso las operaciones de inserción y búsqueda tienen tiempos asociados de $O(\lg N)$. Esto es importante, porque muchas de las mejoras al BST tradicional, buscan mantener el balance en el árbol, para poder asegurar tiempos. Ejemplos de esto lo vemos en los árboles AVL, 2-3, Rojo-Negro, etc.

Peor Caso

El peor caso se produce cuando debemos recorrer los N nodos para llegar a una hoja, algo parecido a una lista enlazada que ocupa más espacio al tener una estructura más compleja. Sin embargo, un árbol generado aleatoriamente siempre estará mas cerca del caso $O(\lg N)$ que del caso $O(N)$.

Buscar una llave

In [ ]:
```
def buscar(self, llave_buscada):
    if(self.llave == llave_buscada):
        return str(self)
    elif(llave_buscada < self.llave and self.hijoIzq == None):
        return False
    elif(llave_buscada < self.llave):
        return self.hijoIzq.buscar(llave_buscada)
    elif(llave_buscada > self.llave and self.hijoDer == None):
        return False
    elif(llave_buscada > self.llave):
        return self.hijoDer.buscar(llave_buscada)

Nodo.buscar = buscar
```

Agregar nuevo nodo

In [ ]:
```
def addChild(self, new_nodo):
    if(self.llave == new_nodo.llave):
        self.valor = new_nodo.valor
        del new_nodo
        return False
    elif(new_nodo.llave < self.llave and self.hijoIzq == None):
        self.hijoIzq = new_nodo
        return True
    elif(new_nodo.llave < self.llave):
        return self.hijoIzq.addChild(new_nodo)
    elif(new_nodo.llave > self.llave and self.hijoDer == None):
        self.hijoDer = new_nodo
        return True
    elif(new_nodo.llave > self.llave):
        return self.hijoDer.addChild(new_nodo)

Nodo.addChild = addChild
```

Demo

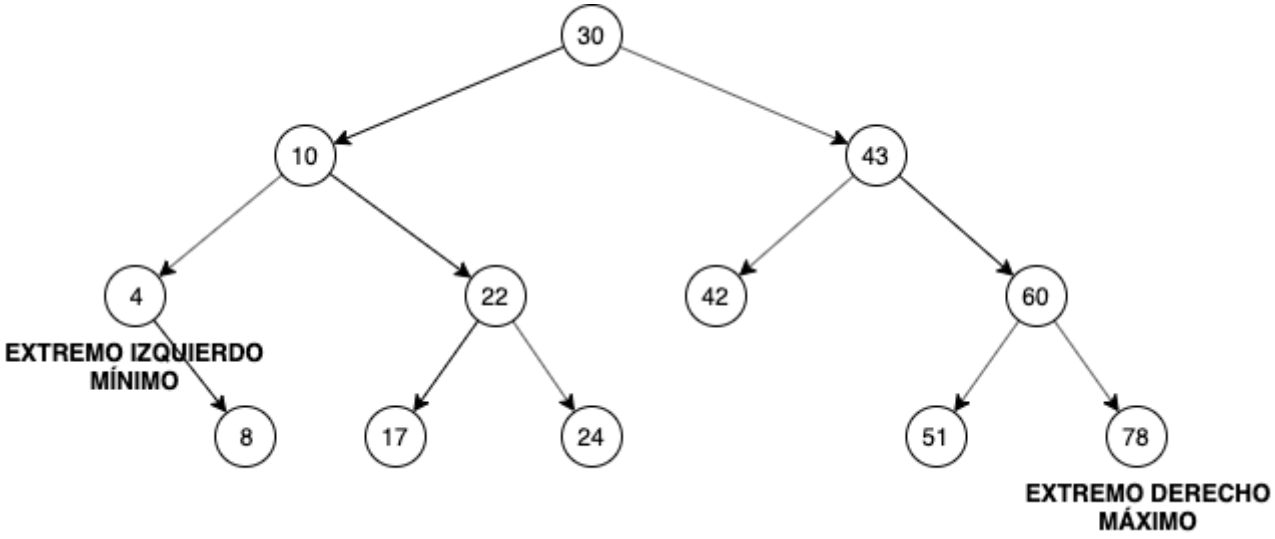
In [ ]:
```

```

Operaciones básicas de un BST

- Mínimo y máximo
- Piso y techo (floor and ceiling)
- Borrar mínimo y máximo (delete min and delete max)
- Borrar llave

Mínimo y máximo

En un BST el elemento más a la izquierda es el elemento *mínimo*. Este elemento no necesariamente se encuentra en el último nivel, ya que por construcción si giramos hacia la derecha, los valores van creciendo. Análogamente, el elemento en el extremo derecho es el *máximo*.



Mínimo

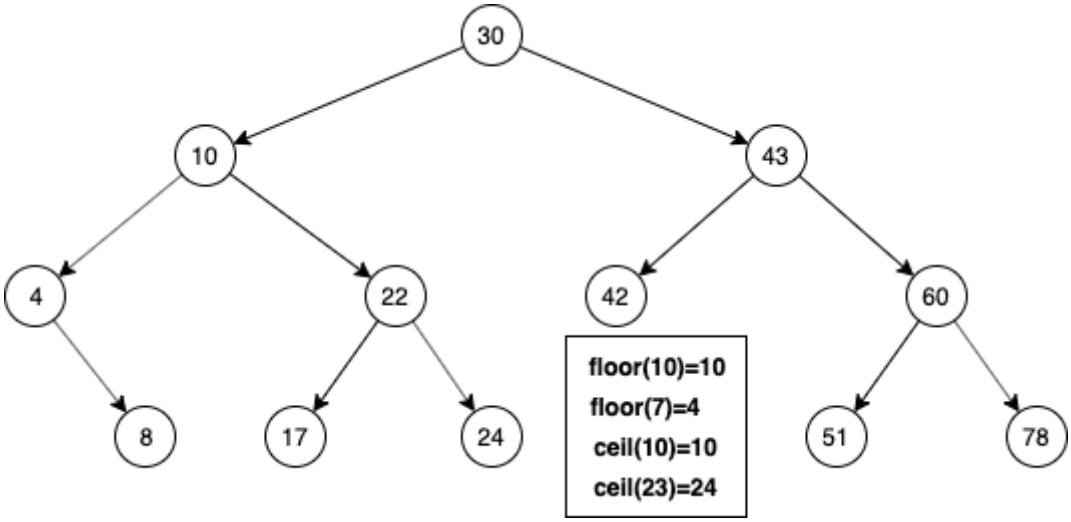
In [ ]:
```
def minimo(self):
    if(self.hijoIzq != None):
        return self.hijoIzq.minimo()
    else:
        return "min:"+str(self)

Nodo.minimo = minimo
```

Máximo

In [ ]:
```
def maximo(self):
    if(self.hijoDer != None):
        return self.hijoDer.maximo()
    else:
        return "max:"+str(self)

Nodo.maximo = maximo
```

Piso y techo

La función piso (floor) recorre el árbol buscando la llave entregada, si la encuentra retorna el valor, sino retorna el valor de la llave inmediatamente inferior. De manera análoga, la función techo (ceil) retorna el valor si encuentra la llave entregada, sino retorna el valor de la llave inmediatamente superior.



Piso (floor)

In [ ]:
```
def floor(self, llave_buscada):
    if(self.llave == llave_buscada):
        return self.llave
    elif(llave_buscada < self.llave and self.hijoIzq == None):
        return False if self.llave > llave_buscada else self.llave
    elif(llave_buscada < self.llave):
        prev_llave = self.hijoIzq.floor(llave_buscada)
        prev_llave = self.llave if prev_llave == False else prev_llave
        return False if prev_llave > llave_buscada else prev_llave
    elif(llave_buscada > self.llave and self.hijoDer == None):
        return False if self.llave > llave_buscada else self.llave
    elif(llave_buscada > self.llave):
        prev_llave = self.hijoDer.floor(llave_buscada)
        prev_llave = self.llave if prev_llave == False else prev_llave
        return False if prev_llave > llave_buscada else prev_llave

Nodo.floor = floor
```

Techo (ceil)

In [ ]:
```
def ceil(self, llave_buscada):
    if(self.llave == llave_buscada):
        return self.llave
    elif(llave_buscada < self.llave and self.hijoIzq == None):
        return False if self.llave < llave_buscada else self.llave
    elif(llave_buscada < self.llave):
        prev_llave = self.hijoIzq.ceil(llave_buscada)
        prev_llave = self.llave if prev_llave == False else prev_llave
        return False if prev_llave < llave_buscada else prev_llave
    elif(llave_buscada > self.llave and self.hijoDer == None):
        return False if self.llave < llave_buscada else self.llave
    elif(llave_buscada > self.llave):
        prev_llave = self.hijoDer.ceil(llave_buscada)
        prev_llave = self.llave if prev_llave == False else prev_llave
        return False if prev_llave < llave_buscada else prev_llave

Nodo.ceil = ceil
```

Demo

In [ ]:
```
```

Borrar (delete)

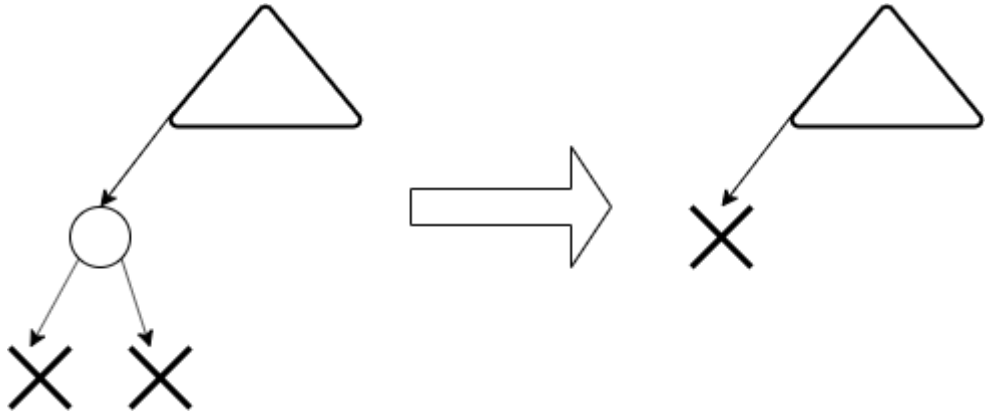
En esta sección consideramos tanto el borrado general de una llave, como el de los valores mínimos y máximos que son casos particulares del primero. El borrado de una llave, recibe la llave a borrar y elimina ese nodo si lo encuentra, sino no hace nada. El borrado del mínimo y el máximo, se posiciona en estos valores y los borra, la diferencia con el borrado general es que este no tiene un caso contrario, pues siempre se encontrará un valor mínimo y uno máximo dentro del árbol.

Otro punto importante a considerar es que un nodo no puede ser simplemente borrado sin revisar a sus hijos, pues estos no pueden ser eliminados también, si este fuera el caso, no sería un borrado sibo una *poda* de un sub-arbol. Para ello se consideran ciertos casos que nos permiten lidiar con este problema.

- Tipos de borrado
  - Borrar llave
  - Borrar mínimo/máximo
- Casos de borrado
  - Nodo sin hijos
  - Nodo con 1 hijo
  - Nodo con 2 hijos

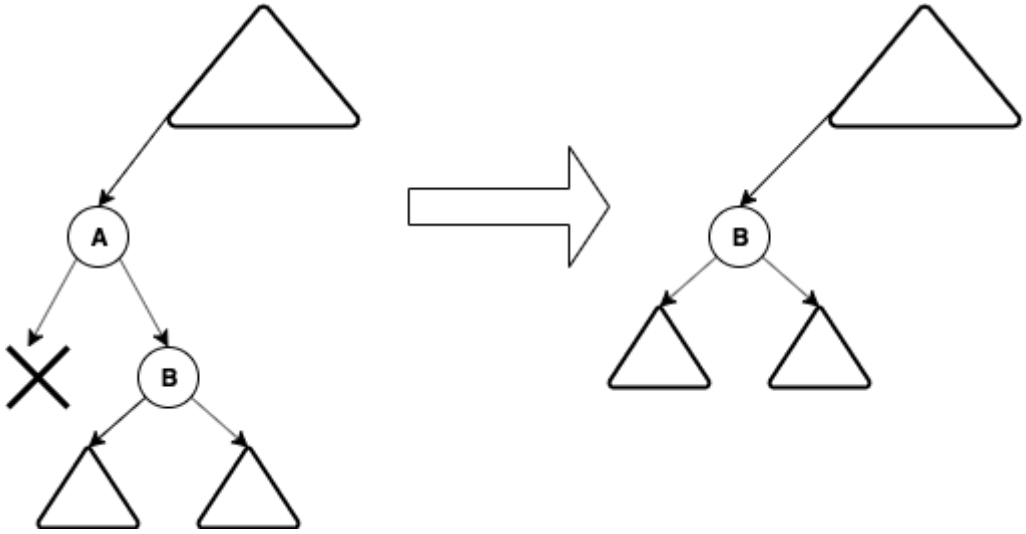
Borrado de un nodo sin hijos

Es el caso mas sencillo, en este caso, el nodo simplemente se elimina del árbol y el enlace del padre del nodo eliminado se deja nulo.



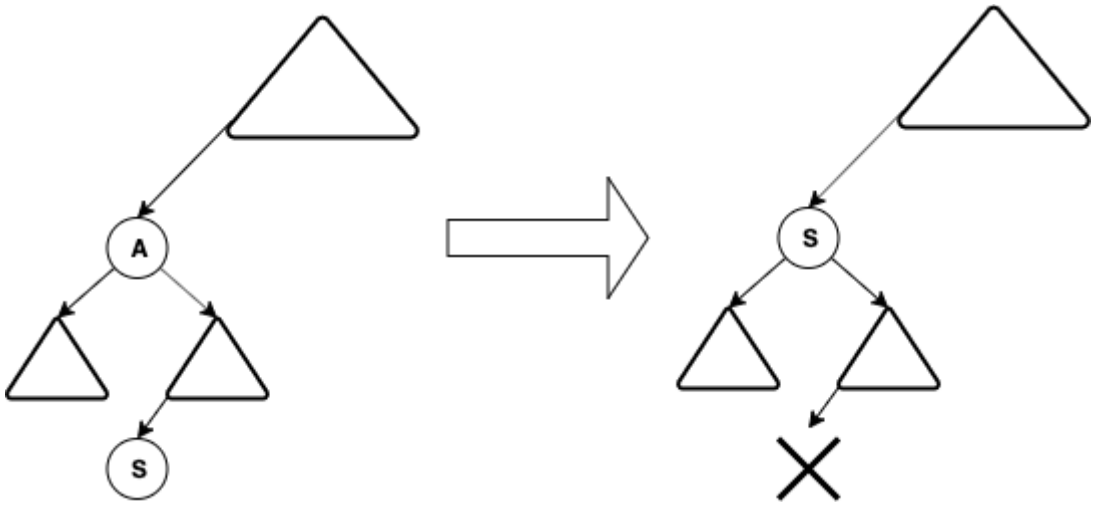
Borrado de un nodo con 1 hijo

Por construcción, permutar el único hijo (ya sea izquierdo o derecho) por la raiz de su sub-árbol mantendrá la restricción básica de un BST. Por esto, eliminamos el nodo solicitado, no sin antes guardar la referencia a su hijo para luego posicionarlo en el lugar del nodo borrado.



Borrado de un nodo con 2 hijos

Para este caso, buscamos el sucesor (S) del nodo a eliminar (A). El nodo S, es el *nodo mínimo* del hijo derecho. Este nodo S no afecta las restricciones ya que es el más cercano a A.



Costo de la búsqueda en diferentes estructuras de datos

Estructura de Datos	**Peor Caso**		**Caso Promedio**	
	Buscar	Insertar	Buscar	Insertar
Búsqueda secuencial	N	N	$N/2$	N
Búsqueda binaria	$\lg N$	N	$\lg N$	$N/2$
BST	N	N	$\lg N$	$\lg N$

Tarea

Para el código presentado, implementar las funciones borrar mínimo (deleteMin), borrar máximo (deleteMax) y borrar llave (deleteKey). Para ello modifique las funciones auxiliares proporcionadas a su conveniencia, sin que ellas afecten el funcionamiento del resto del programa.

Bibliografía

- *Sedgewick, Robert and Wayne, Kevin*, **Algorithms, Fourth edition**, Chapter 3 "Searching".

https://github.com/moyarzunsil/AAlgo.git (https://github.com/moyarzunsil/AAlgo.git)

moyarzunsil@unap.cl (mailto:moyarzunsil@unap.cl)

https://twitter.com/moyarzunsilva (https://twitter.com/moyarzunsilva)