矩阵理论与方法

复习和总结

内容提要 CONTENTS

复习-第一章

设V是欧氏空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^{k}\right)(x)$，其中$x\in V$

复习-第一章

设V是欧氏空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^{k}\right)(x)$，其中$x\in V$

0、任意找一组基，利用Schmidt正交化方法得到

V的一组标准正交基$e_1,...,e_n$, $x=k_1e_1+...+k_ne_n$, 其中$k_i=(x,e_i)$

0.1、求T在基$e_1,...,e_n$下的矩阵$A_0\Rightarrow T(e_1,...,e_n)=(e_1,...,e_n)A_0$

0.2、其中$A_0=PJP^{-1}$, J是Jordan标准型$\Rightarrow T(e_1,...,e_n)=(e_1,...,e_n)PJP^{-1}$

0.3、$T(e_1,...,e_n)P=(e_1,...,e_n)PJ$

复习-第一章

设V是欧氏空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

1、得到一组新的基$(E_1,\dots,E_n)=(e_1,\dots,e_n)P$,

2、通过坐标变换得到$x=(E_1,\dots,E_n)P^{-1}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=(E_1,\dots,E_n)\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}$

3、T在新基下的矩阵：$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)J$

4、$T(x)=(E_1,\dots,E_n)J\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}\Rightarrow\left(T^k\right)(x)=(E_1,\dots,E_n)J^k\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}$

复习-第一章

例： 设矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 的子空间为

$$V = \{X = (x_{ij})_{2\times 2} \mid x_{11} + x_{12} + x_{21} = 0, x_{ij} \in R\}$$

V中的线性变换为 $T(X) = X + 2X^T$

求$\left(T^3\right)(X), X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in V$

求$\left(T^k\right)(X), \forall X \in V$

复习-第一章

P_{10}例1.8、P_{26}例1.15、P_{32}例1.18、P_{41}例1.23、

P_{49}例1.26、P_{52}例1.28、P_{63}例1.33、P_{72}例1.36

复习-第二章

定义 2.1 如果 V 是数域 K 上的线性空间，且对于 V 的任一向量 $\boldsymbol{x}$，对应一个实值函数 $\|\boldsymbol{x}\|$，它满足以下三个条件：

（1）非负性：当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\| > 0$；当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\| = 0$；

（2）齐次性：$\|a\boldsymbol{x}\| = |a| \, \|\boldsymbol{x}\| \; (a \in K, \boldsymbol{x} \in V)$；

（3）三角不等式：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \; (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V)$.

则称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为 V 上向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数，简称**向量范数**.

复习-第二章

线性空间 C^n，设 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T\in C^n$

1：$\|x\|_1=\sum|\xi_i|$ 是一种向量范数，记为**1-范数**

2：$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ 是一种向量范数，记**2-范数**

3：$\|x\|=\max\limits_i|x_i|$ 是一种向量范数,记为 **∞ -范数**

4：$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad\left(1\le p<\infty\right)$

是一种向量范数，记为*p*-范数或 l_p 范数

复习-第二章

$$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, k > N$时，有

$\forall \|\cdot\|$： $\left\| x^k - x \right\| < \varepsilon$

定理 2.1 设 $\|\boldsymbol{x}\|_\alpha$ 和 $\|\boldsymbol{x}\|_\beta$ 为有限维线性空间 V 的任意两种向量范数(它们不限于 p-范数)，则存在两个与向量 $\boldsymbol{x}$ 无关的正常数 c_1 和 c_2，使得不等式

$$c_1 \|\boldsymbol{x}\|_\beta \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_\alpha \leqslant c_2 \|\boldsymbol{x}\|_\beta \quad (\forall \boldsymbol{x} \in V) \qquad (2.1.9)$$

成立.

复习-第二章

一、矩阵范数的定义与性质

定义 2.3 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，定义一个实值函数 $\|A\|$，它满足以下三个条件

(1) 非负性：当 $A \neq O$ 时，$\|A\| > 0$；当 $A = O$ 时，$\|A\| = 0$；

(2) 齐次性：$\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$ $(\alpha \in \mathbf{C})$；

(3) 三角不等式：$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$ $(B \in \mathbf{C}^{m\times n})$.

(4) 相容性：

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\| \quad (B \in \mathbf{C}^{n\times l}) \tag{2.2.1}$$

则称 $\|A\|$ 为 A 的**矩阵范数**.

复习-第二章

定理： 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ ，则

（1）列和范数： $\|A\|_1=\max_j\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\right\}$

（2）谱范数： $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1},\lambda_1=\max\left\{\lambda\left(A^H A\right)\right\}$

（3）行和范数： $\|A\|_\infty=\max_i\left\{\sum_{j=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\right\}$

复习-第二章

三、矩阵的谱半径及其性质

矩阵 $A \in C^{n\times n}$ 的谱半径在特征值估计、广义逆矩阵、数值分析以及数值代数等理论的建树中，都占有极其重要的地位．现论述如下．

定义 2.5 设 $A \in C^{n\times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，称

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| \tag{2.3.3}$$

为 A 的谱半径．

定理9: $\forall A \in C^{n\times n}, \forall \|\cdot\|_M$ ，有 $\rho(A) \le \|A\|_M$

复习-第二章

$P_{85}1$、$P_{92}1$、P_{32}例1.18、P_{95}例2.10、

复习-第三章

- 矩阵序列
- 矩阵级数
- 矩阵函数

复习-第三章

■ 矩阵序列

定理1：设 $A^{(k)}, A \in C^{m\times n}$，则

（1）$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \iff \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \left\|A^{(k)}\right\| = 0$

（2）$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A \iff \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \| A^{(k)} - A \| = 0$

定义：若 $A_{n\times n}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{k} = 0_{n\times n}$，称$A$为收敛矩阵

定理2：A为收敛矩阵 $\iff \rho(A) < 1$

复习-第三章

■ 矩阵级数

幂级数： 对函数 $f(z)=\sum c_k z^k, (|z|<r)$ 方阵 $A_{n\times n}$,

构造矩阵幂级数 $f(A)=\sum c_k A^k$

定理6： （1） $\rho(A)<r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k$ 绝对收敛

（2） $\rho(A)>r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k$ 发散

复习-第三章

■ 矩阵函数

1 待定系数法

2 数项级数求和法

3 对角形法

4 Jordan标准型法

复习-第三章

函数矩阵的导数

$$A'(t)=\left(a_{ij}'(t)\right)_{m\times n}$$

函数矩阵的积分

$$\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau=\left(\int_{t_0}^{t}a_{ij}(\tau)d\tau\right)_{m\times n}$$

复习-第三章

函数矩阵对矩阵的导数

定义:设 $X=\left(\xi_{ij}\right)_{m\times n}, f_{kl}(X)=f_{kl}\left(\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1n},\cdots,\xi_{m\times n}\right)$

$$F=\begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{r1} & \cdots & f_{rs} \end{bmatrix},\qquad \frac{\partial F}{\partial \xi_{ij}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial \xi_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{1s}}{\partial \xi_{ij}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{r1}}{\partial \xi_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{rs}}{\partial \xi_{ij}} \end{bmatrix},$$

定义 $\dfrac{dF}{dX}=\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \xi_{11}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial \xi_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_{m1}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial \xi_{mn}} \end{bmatrix}$

- 可表示为

$$\frac{dF}{dX}=\left(\frac{1}{dX}\right)\otimes dF$$

复习-第三章

P_{100}例3.1、P_{105}1、P_{109}例3.5

复习-第四章

1、LU分解

2、QR分解

3、满秩分解

4、SVD分解

复习-第四章

$$A = LU$$

定义**4.1** 如果n阶矩阵A能够分解为一个下三角矩阵L和一个上三角矩阵U的乘积，则称其为三角分解或LU分解。如果方阵A可分解成$A=LDU$,其中L为一个单位下三角矩阵，D为对角矩阵，则称A可作LDU分解。

复习-第四章

定义4.6 如果实(复)非奇异矩阵$\boldsymbol{A}$能够化成正交(酉)矩阵$\boldsymbol{Q}$与实(复)非奇异上三角矩阵$\boldsymbol{R}$的乘积,即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR} \tag{4.2.7}$$

则称式(4.2.7)为$\boldsymbol{A}$的 **QR 分解**.

满秩分解

目的：对 $A\in C_r^{m\times r}(r\geq 1)$, 求 $F\in C_r^{m\times r}$，及 $G\in C_r^{m\times r}$ 使 $A=FG$

分解原理：

$$\mathrm{rank}A=r\Rightarrow A\xrightarrow{行}\text{阶梯形}\,B=\begin{pmatrix}G\\O\end{pmatrix}:\quad G\in \mathrm{C}_r^{r\times n}$$

$$\Rightarrow \exists\text{有限个初等矩阵之积}\,P_{m\times m},\mathrm{st.}PA=B$$

$$\Rightarrow A=P^{-1}B=\left(F_{m\times r}\,\middle|\,S_{m\times(m-r)}\right)\begin{pmatrix}G\\O\end{pmatrix}=FG:\quad F\in \mathrm{C}_r^{m\times r}$$

复习-第四章

定理 4.16 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}_r^{m\times n}(r>0)$，则存在 m 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{V}$，使得

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \tag{4.4.4}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$，而 $\sigma_i(i = 1, 2, \cdots, r)$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的全部非零奇异值.

复习-第四章

P_{133}例4.1、P_{146}例4.6、P_{156}例4.10

P_{162}例4.14

复习-第六章

广义逆矩阵$\mathbf{A}^+$

- **基于满秩分解：设$A\in C_r^{m\times n}$，$A=BC$为满秩分解，即$B\in C_r^{m\times r}$，$C\in C_r^{r\times n}$，则**

$$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

- **基于奇异值分解：设$A\in C_r^{m\times n}$，其奇异值分解 $A=UDV^H$，即有$A=U_r\Delta V_r^H$， $\Delta=\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$，则**

$$A^+= V_r\Delta^{-1}U_r^H$$

复习-第六章

P_{244}例6.10

课程结束，谢谢大家！

祝大家考出好成绩！