



## **Trabalhos 2 e 3 - Simulação de Sistemas por meio do Método de Runge-Kutta**

**Professor:**

- **Dr. Luiz Antonio Maccari Junior.**

**Aluno:**

- **Mozart Fiorini Monteschio 18150371.**

**Modelagem e Simulação de Processos - BLU 3501**

**Blumenau  
2020/1**

# Introdução

Neste relatório será desenvolvido a resolução de dois trabalhos da matéria Modelagem e Simulação de Processos BLU 3501.

Todos os códigos utilizados em ambos os trabalhos 2 e 3 foram desenvolvidos por mim, e serão entregues para o Professor junto com este relatório, mas ambos estarão disponíveis em meu diretório do GitHub caso ocorra de dar algum erro de compilação. Todos os códigos serão enviados para o repositório após o período de entrega do trabalho 11 Dec 2020, 18:00h para evitar que peguem meus códigos e copiem. Segue o link do repositório: <https://github.com/mozartmonteschio/TrabalhoDeModelagem>

O objetivo deste relatório será mostrar os nossos conhecimentos sobre as aulas práticas e teóricas onde iremos juntar toda a parte de modelagem com as simulações dos sistemas desenvolvendo os códigos em MatLab para fazer as simulações dos métodos numéricos e comandos, como por exemplo: Lsim, Método de Runge-Kutta 2º e 4º ordem, Método de Euler.

O primeiro trabalho proposto pelo Professor é o Trabalho 2 onde devemos fazer a resolução de um circuito mecânico rotacional. Primeiro fazemos o D.C.L para encontrarmos as equações que descrevem os sistemas, e com essas equações podemos responder as perguntas feitas pelo mesmo.

Peço que o Professor que ao analisar as imagens aplique o zoom em seu computador para melhor visualização, mas como já dito ali em cima, todos os códigos individuais para cada método serão entregues junto com este relatório, possibilitando a execução do código para melhor análise.

Também lhe será entregue o documento com a tabela de valores de erros pedido na alternativa F do trabalho 2, para melhor visualização, a tabela foi criado no programa LibreOffice Calc, caso ocorra erro na abertura do arquivo, por ser softwares diferentes, irei disponibilizar a tabela em um link online. Segue o link com a tabela online: <https://1drv.ms/x/s!AIEIEv4Ax8AnDj30kMJi1hiOI2Z?e=MkWCnu>

Já para o Trabalho 3 nos é proposto pelo Professor a resolução de um circuito mecânico rotacional, conhecido como Pêndulo simples. Iremos seguir os mesmo passos iniciais do Trabalho 2 onde faremos o D.C.L para encontrarmos as equações que descrevem os sistemas, e com essas equações podemos responder as perguntas feitas pelo mesmo. Para esse exercício o Professor nos diz que o sistema é não linear, logo para resolvê-lo devemos linearizar todo o sistema.

# Trabalho 2

## II. TRABALHO 2

1) Dado o sistema abaixo com os parâmetros da tabela realize as seguintes tarefas:

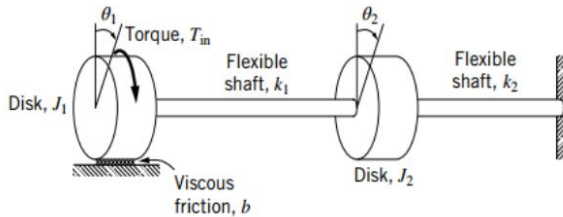


Figura 1: Sistema rotacional.

Parâmetros		
Momento de Inércia 1	$J_1$	1 Kg.m <sup>2</sup>
Momento de Inércia 2	$J_2$	2 Kg.m <sup>2</sup>
Constante da mola 1	$k_1$	3 N.m/rad
Constante da mola 2	$k_2$	0,5 N.m/rad
Coefficiente de atrito viscoso	$b$	0,25 N.m/rad
Fontes		
Torque	$T_{in}(t) = 10.\text{sen}(t)$ N.m	

Tabela I: Parâmetros do sistema

Figura 1.1 Enunciado do exercício.

Para a resolução do Trabalho 2 o primeiro passo que devemos fazer é o D.C.L (Diagrama de corpo livre) para definir quais as forças estão atuando em cada corpo do sistema, com mostrado na figura a seguir 1.2, como isso podemos encontrar as equações que definem no sistema.

D.L.C

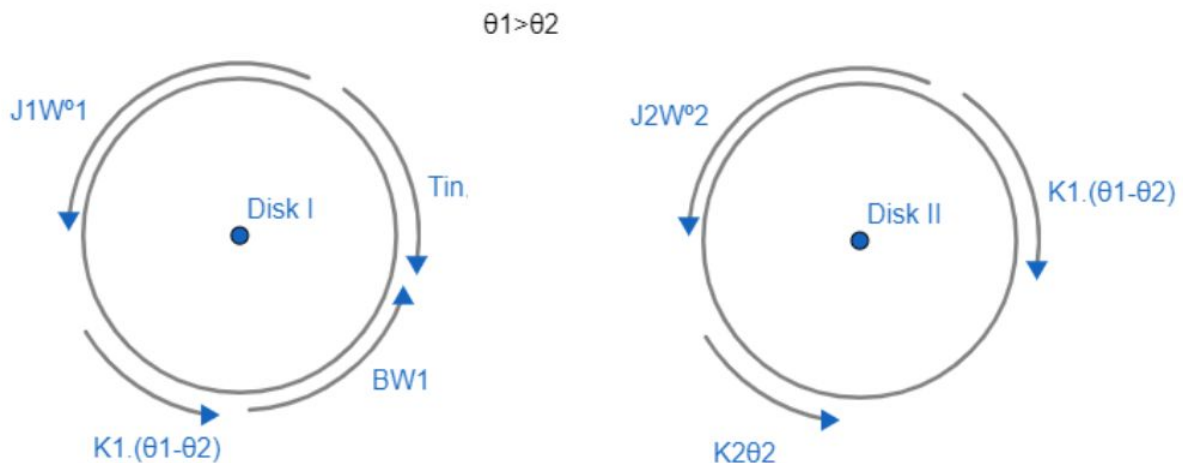


Figura 1.2 Diagrama de Corpo Livre.

Equações obtidas através do D.C.L:

Como as equações precisam ser digitadas no arquivo, iremos substituir o W(Ponto) por W°, e theta(ponto) por theta°, com mostrado na imagem de legenda a seguir:

$$\dot{W} = W^\circ \quad / \quad \dot{\theta} = \theta^\circ$$

Figura 1.3 Legenda.

$$W^o1 = 1/J1(-BW1 - K1\theta1 + K1\theta2 + T_{in})$$

$$\begin{aligned} \text{Eq.III)} \quad & J_2 W^2 + K_{202} - K_{101} + K_{102} = 0 \\ & \therefore \\ & W^2 = 1/J_2 (K_{101} - K_{202} - K_{102}) \end{aligned}$$

Com as equações encontradas podemos montar as matrizes de Espaço de Estados:

Matriz A						Matriz B			
W°1		-B1/J1	-K1/J1	0	K1/J1	W1		1/J1	
θ°1		1	0	0	0	θ1		0	
W°2	=	0	K1/J2	0	-(K1+K2)/J2	W2	+	0	*
θ°2		0	0	1	0	θ2		0	[Tin]

	Matriz C	Matriz D
01	0 1 0 0	W1
	=	01
02	0 0 0 1	W2 +[0]D
		02

J1 = 1;  
J2 = 2;  
K1 = 3;  
K2 = 0.5;

```

b=0.25;
%% Parâmetros de simulação
to = 0;
tf = 30;
dt = 0.01;
t = [to:dt:tf];
N = numel(t);
%%Equações do Sistema
u = @(t) 10*sin(t);
u = u(t);
A = [-b/J1 -K1/J1 0 K1/J1; 1 0 0 0; 0 K1/J2 0 -(K1+K2)/J2; 0 0 1 0];
B = [1/J1; 0; 0; 0];
C = [0 1 0 0; 0 0 0 1];
D = [0; 0];

```

#### a) Simule o sistema utilizando o comando lsim:

Nesta alternativa o Professor nos pede para executar o comando lsim, após parametrizar todo o sistema, e definir suas matrizes de Espaços de Estados com o comando sys, executamos o comando lsim. O resultado deste comando será utilizado como parâmetro de comparação com os outros métodos para que se possa achar o erro dos mesmos.

```

%% Montando Espaços de Estado%%
sys = ss(A,B,C,D);
sys = minreal(sys);
%-----

%%Comando Lsim%%
y_lsim =lsim(sys,u,t);
na = size(t,2);
%-----

```

Figura 1.4.3 Trecho do código para comando Lsim

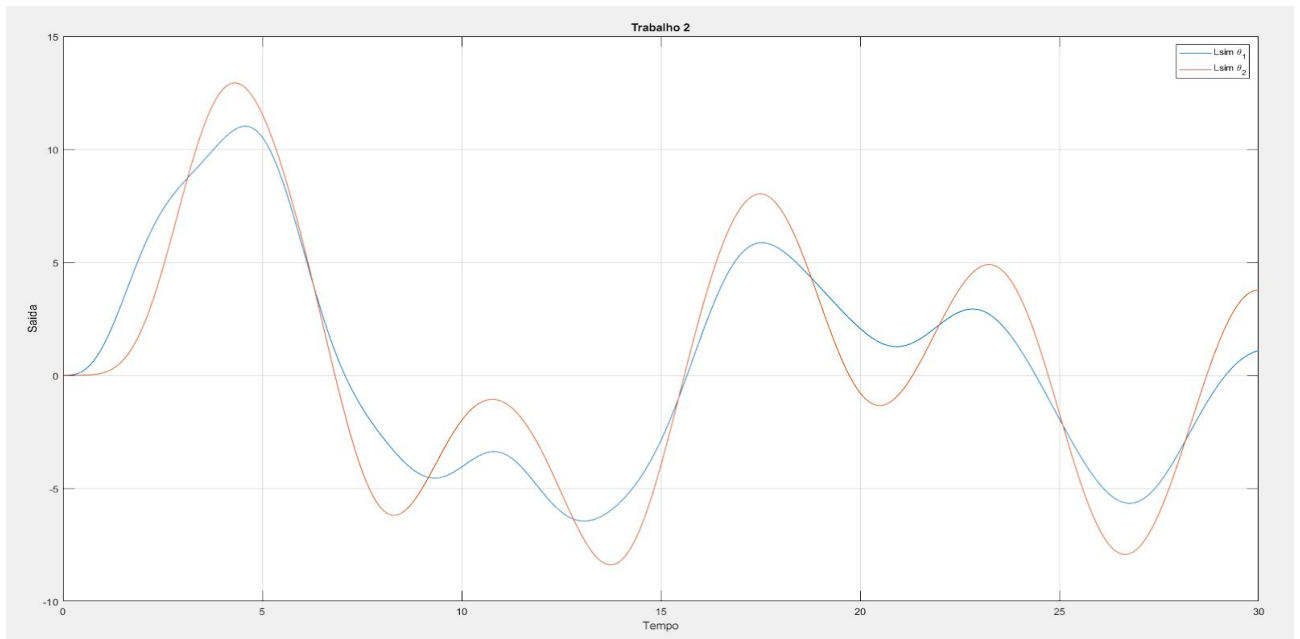


Figura 1.4.1 Gráfico Comando Lsim

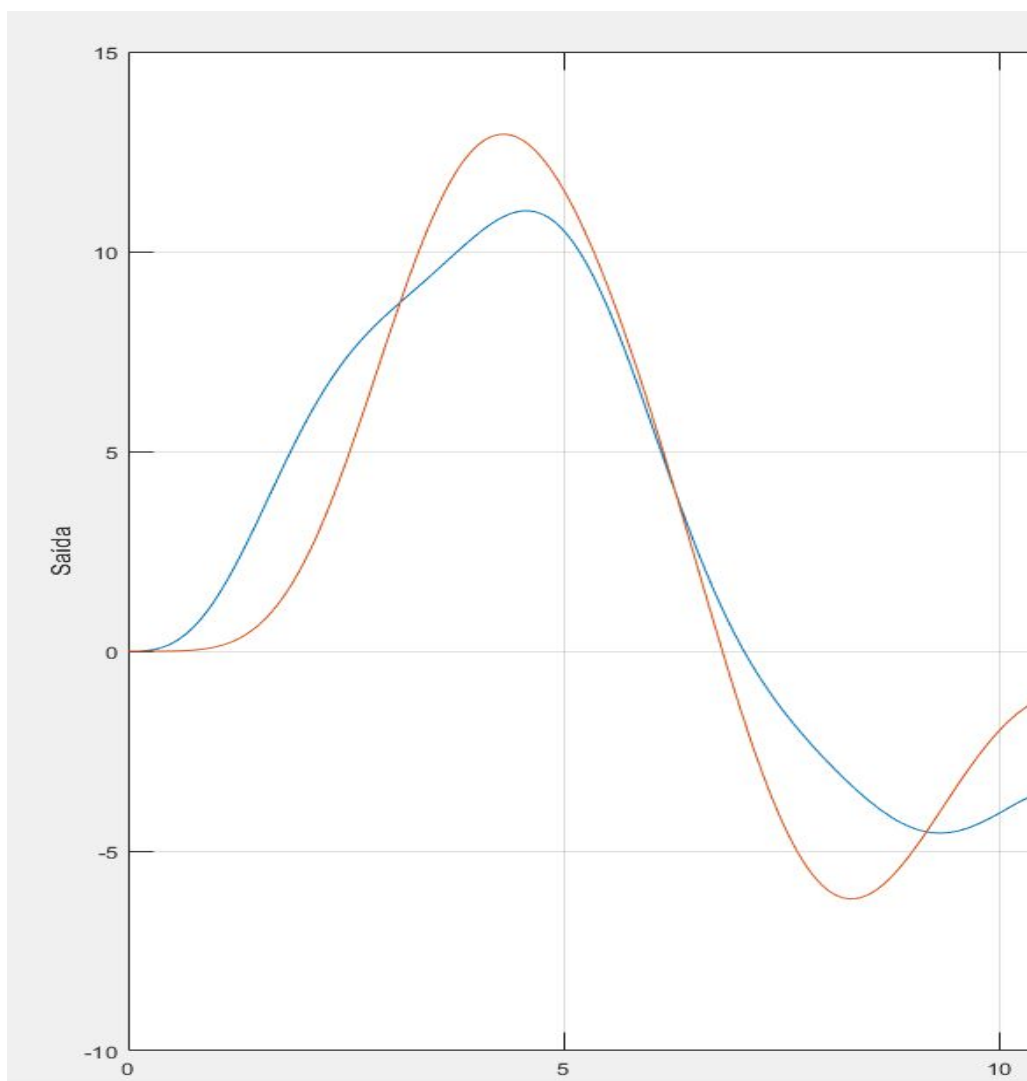


Figura 1.4.2 Gráfico Comando Lsim com zoom

## b) Simule o sistema pelo método de Euler:

Nesta alternativa o Professor nos pede para executar o método numérico de Euler.

O método de Euler consiste em aproximar o termo derivativo por uma equação de diferenças

Para a resolução desta questão optei por usar o método de Euler Explícito, como mostrado na figura 1.5.1.

```
%Euler
x0=[0; 0; 0; 0];
x = zeros(4, N);
moz = zeros(2, N);
x(:, 1) = x0;
for k = 1:N-1
    moz(:, k) = C * x(:, k) + D * entrada_u(k * dt);
    x(:, k + 1) = (eye(4) + dt * A) * x(:, k) + dt * B * entrada_u(k * dt);
end
```

Figura 1.5.1 Trecho Método de Euler

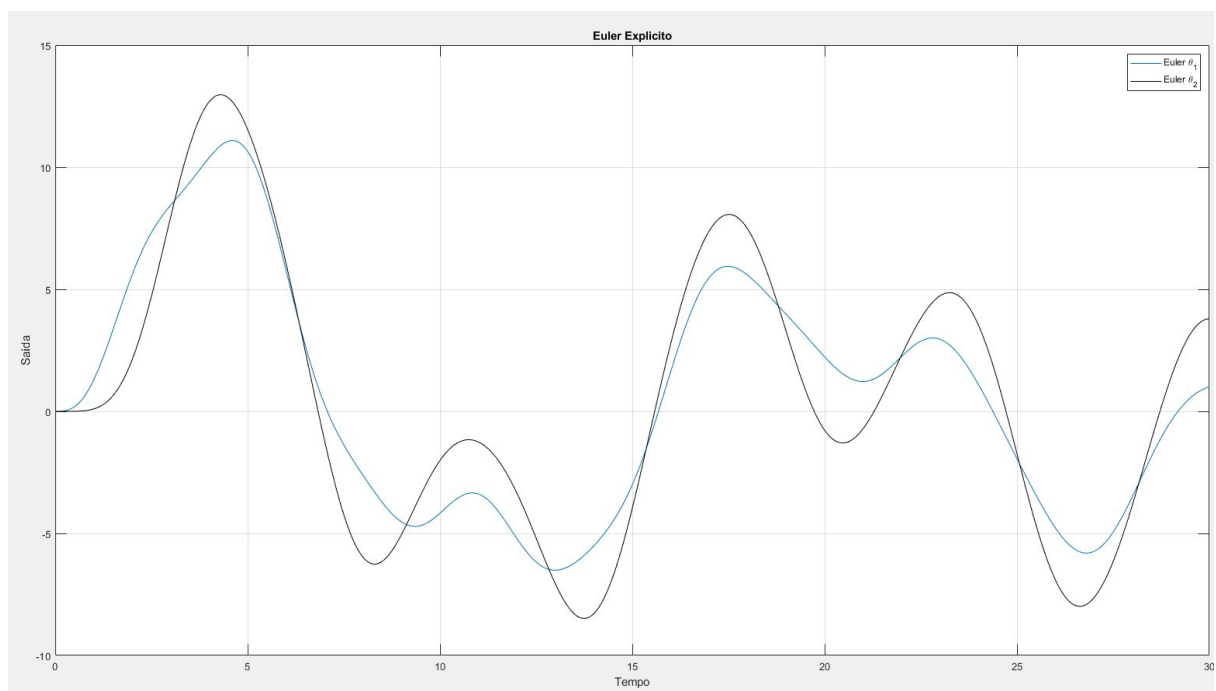


Figura 1.5.2 Gráfico Método de Euler Explícito

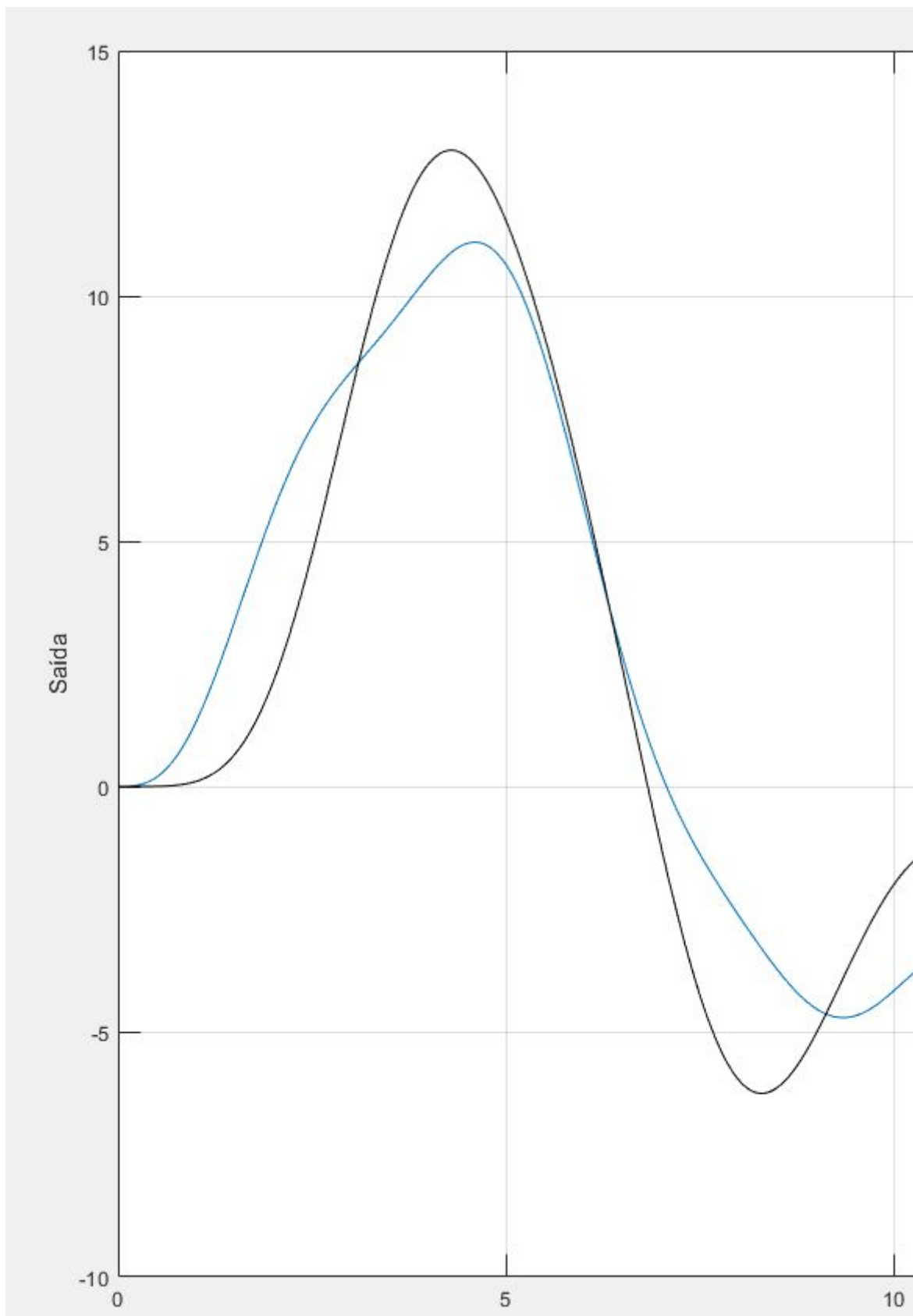


Figura 1.5.3 Gráfico Método de Euler Explícito com zoom



Como o passo que usamos para as simulações foram um bem pequeno  $dt = 0,01$  este método numérico em comparação aos outros apresentados mais adiante e em relação ao Lsim, se mostrou bem preciso, mas caso o passo for um número maior do que o aplicado este método apresenta muitos erros, como mostrado na figura 1.5.4 Para demonstrar esse erro foi utilizado um passo de  $dt = 0.1$ . As linhas em azul representam o método de Euler Explícito. Então podemos afirmar que quanto menor o valor de  $dt$  maior a precisão do método.

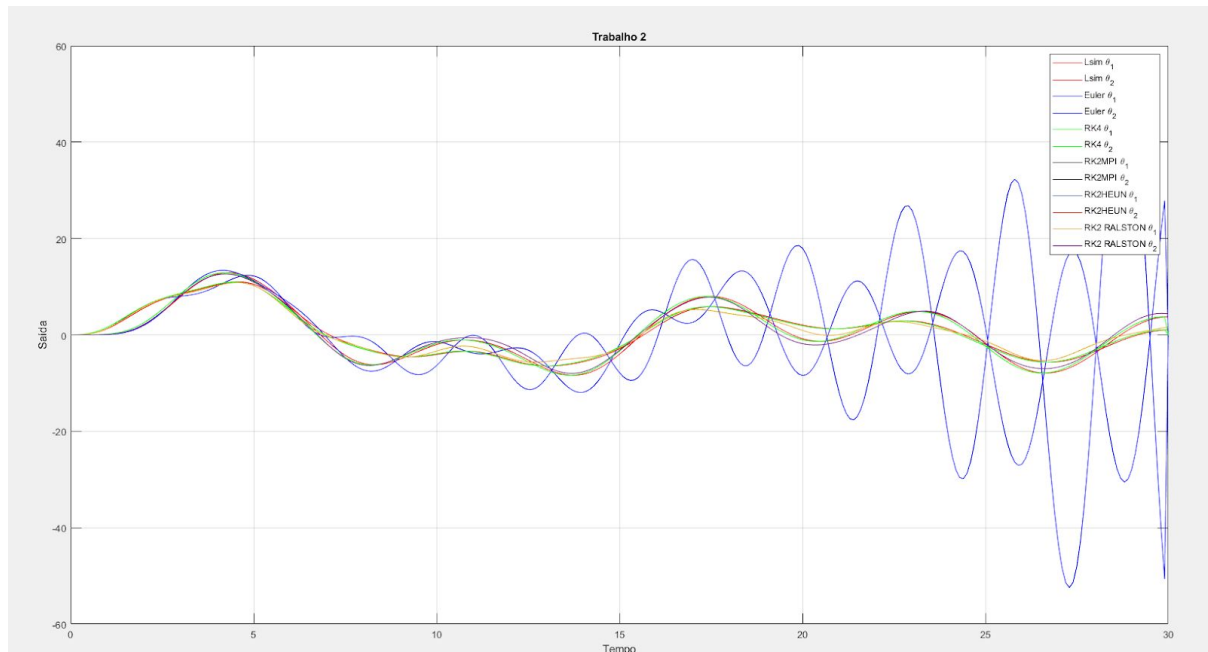


Figura 1.5.4 Gráfico Método de Euler Explícito  $dt = 0,1$

### c) Simule o sistema pelos três métodos de Runge-Kutta de segunda ordem;

Nesta alternativa o Professor nos pede para executar os 3 métodos de Runge-Kutta de segunda ordem que são:

- Método do Ponto Intermediário;
- Método de Heun;
- Método do Ralston.

Para resolver esses 3 métodos precisamos primeiro encontrar equações para descrever o sistema, como mostrado na figura 1.6.1

```

% RK2 Metodo do Ponto Intermediario
x = zeros(2,length(t)); %pre alocação t1,w1
x(:,1)=[0; 0]; % Condições iniciais t1,w1
x2 = zeros(2,length(t)); % pre alocação t2,w2
x2(:,1)=[0; 0]; % Condições iniciais t2,w2
for k=1:length(t)
    Vin(k) = u(t(k)); % Armazenamento do vetor de entrada
    m11(k) = x(2,k); %tetal
    m12(k) = x2(2,k); %teta2
    m13(k) = -b/J1*x(2,k)-K1/J1*x(1,k)+K1/J1*x2(1,k)+u(t(k)/J1); %w1
    m14(k) = K1/J2*x(1,k) - K2/J2*x2(1,k) - K1/J2*x2(1,k); %w2
    m21(k) = x(2,k)+dt*p*m13(k); %W1 + dt*p*m13
    m22(k) = x2(2,k)+dt*p*m14(k); %teta 2
    m23(k) = (-b/J1*x(2,k)+dt*p*m13(k))-(K1/J1*x(1,k)+dt*p*m11(k))+(K1/J1*x2(1,k)+dt*p*m12(k))+u(t(k)+p*dt/J1);
    m24(k) = (K1/J2*x(1,k)+dt*p*m11(k)) - (K2/J2*x2(1,k)+dt*p*m12(k)) - (K1/J2*x2(1,k)+dt*p*m12(k));
    x(1,k+1) = x(1,k)+dt*(a1*m11(k)+a2*m21(k)); %tetal
    x(2,k+1) = x(2,k)+dt*(a1*m13(k)+a2*m23(k)); %w1
    x2(1,k+1) = x2(1,k)+dt*(a1*m12(k)+a2*m22(k)); %teta2
    x2(2,k+1) = x2(2,k)+dt*(a1*m14(k)+a2*m24(k)); %w2
end

```

Figura 1.6.1 Equações para os métodos de RK2

Com essas equações definidas podemos calcular os 3 métodos de RK2 sendo que apenas precisamos alterar os parâmetros (P, A1, A2)

### Método do Ponto Intermediário:

Este método baseia-se na predição da derivada em um ponto médio do intervalo entre um ponto e outro. Esta derivada é utilizada para o valor final da aproximação da curva em  $(k + 1)$ , ou seja, este método funciona pegando a função do sistema e fazendo uma previsão da derivada meio ponto a frente do ponto anterior, e utiliza esta derivada estimada do ponto intermediário para encontrar o passo completo a frente.

Para o cálculo do RK2 Método do Ponto Intermediário os parâmetros utilizados são os mostrados na figura 1.6.2

```

% RK2 Metodo do Ponto Intermediario
a1 = 0;
a2 = 1;
p = 1/2;
x = zeros(2,length(t)); %pre alocação t1,w1
x(:,1)=[0; 0]; % Condições iniciais t1,w1
x2 = zeros(2,length(t)); % pre alocação t2,w2
x2(:,1)=[0; 0]; % Condições iniciais t2,w2

```

Figura 1.6.2 parâmetros RK2 Ponto Intermediário

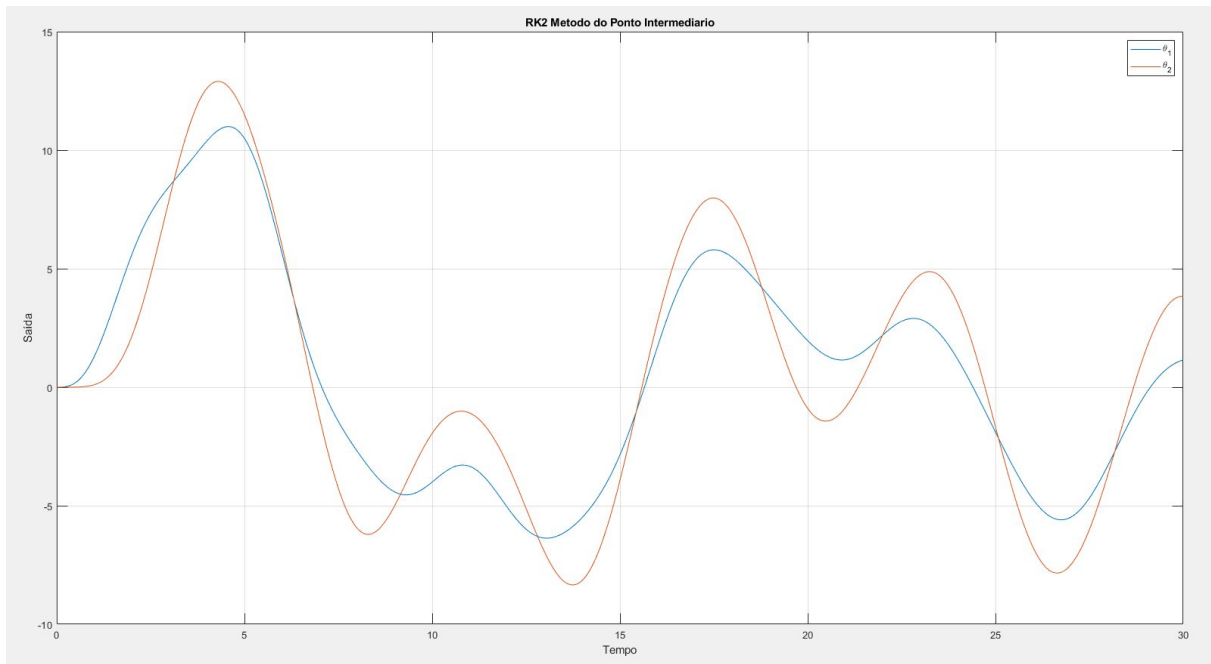


Figura 1.6.3 Gráfico Método RK2 Ponto Intermediário

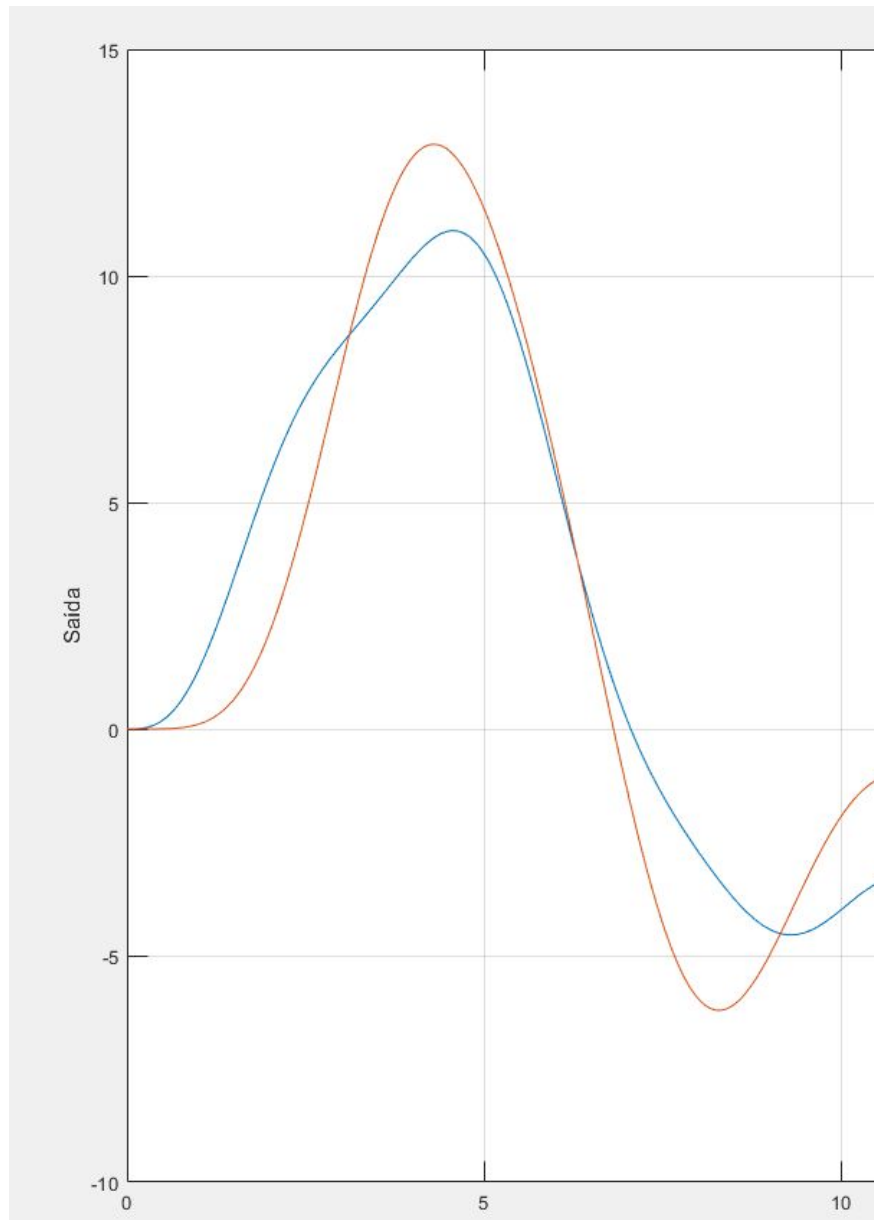


Figura 1.6.4 Gráfico Método RK2 Ponto Intermediário zoom

### RK2 Método de Heun:

A diferença deste método de Heun para o anterior do Ponto intermediário, é que neste ele faz a previsão de um passo inteiro a frente e não de meio passo como visto anteriormente, e calcula os valores de  $m_1$  e  $m_2$ , e depois se calcula a média entre os 2 resultados para achar o ponto futuro.

Para o cálculo do RK2 Heun os parâmetros utilizados são os mostrados na figura 1.7.1.1

```
a1= 1/2;  
a2 = 1/2;  
p  = 1;
```

Figura 1.7.1.1 parâmetros RK2 Heun

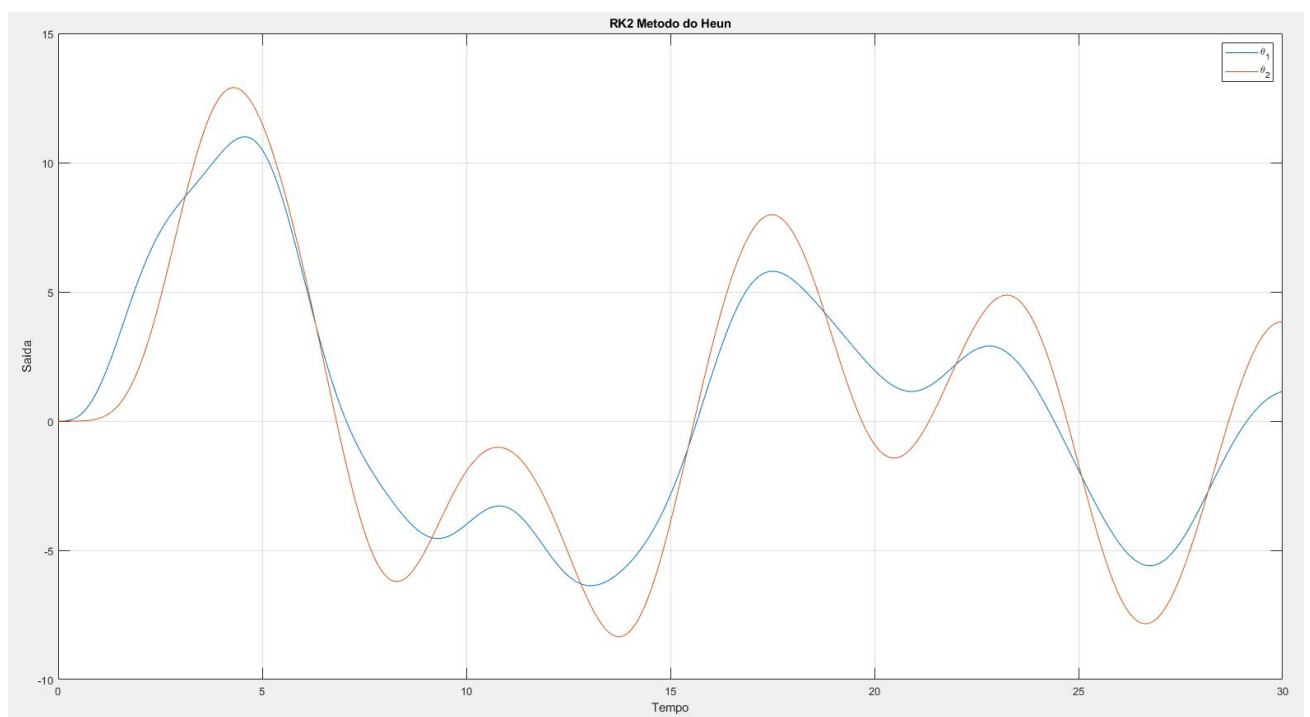


Figura 1.7.1 Gráfico Método RK2 Heun

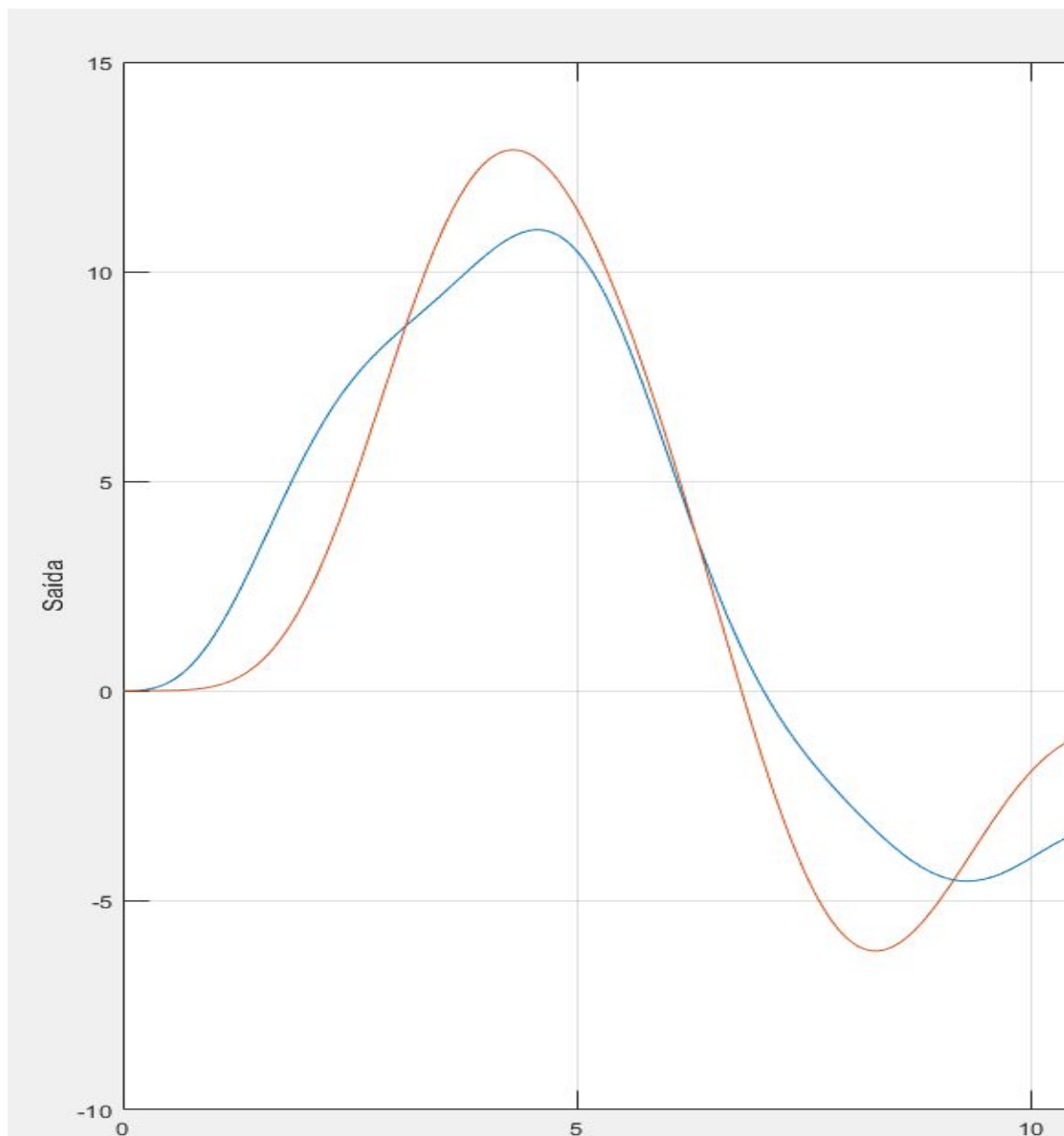


Figura 1.7.2 Gráfico Método RK2 Heun zoom

### **RK2 Método do Ralston:**

Em comparação aos métodos de Ponto e Intermediário e Heun o método de Ralston utiliza um valor de três quartos de passo a frente.

Para o cálculo do RK2 Ralston os parâmetros utilizados são os mostrados na figura 1.8.1.1

```
a1 = 1/3;
a2 = 2/3;
p  = 3/4;
```

Figura 1.8.1.1 parâmetros RK2 Ralston

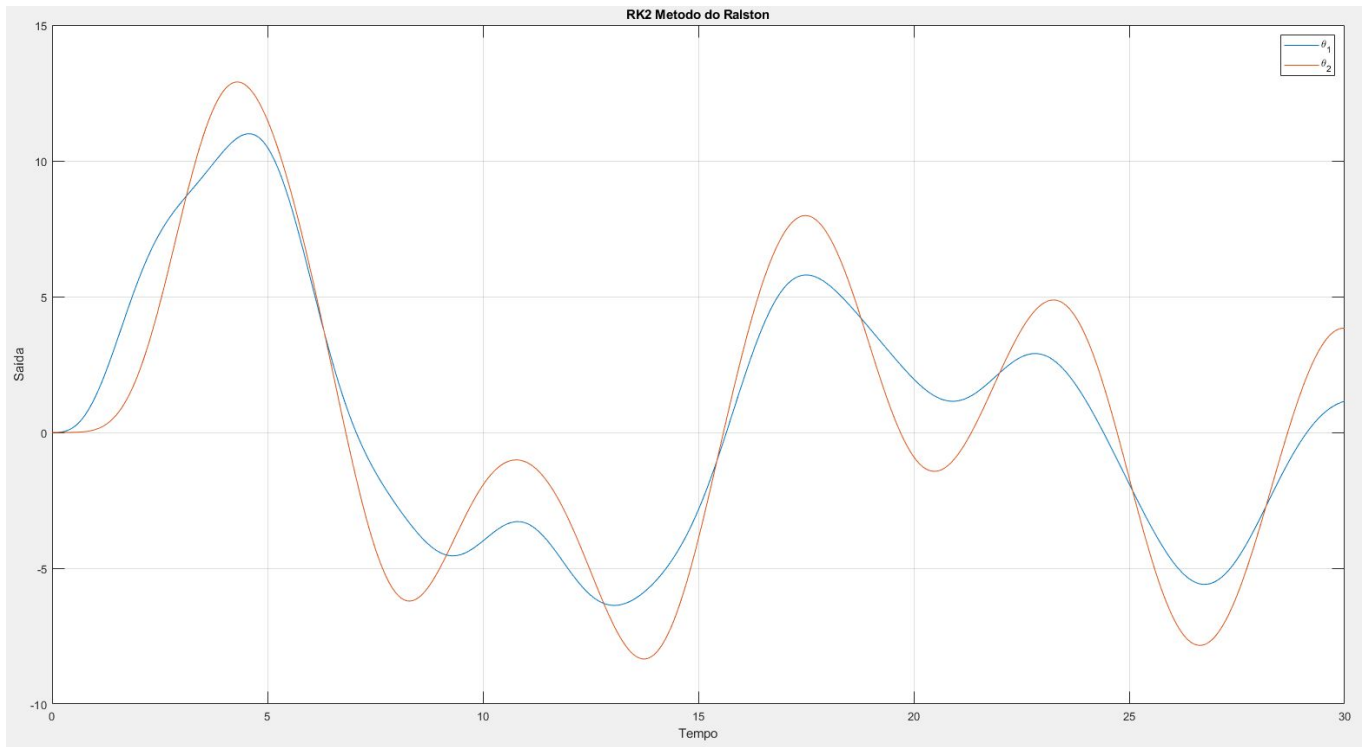


Figura 1.8.2 Gráfico Método RK2 Ralston

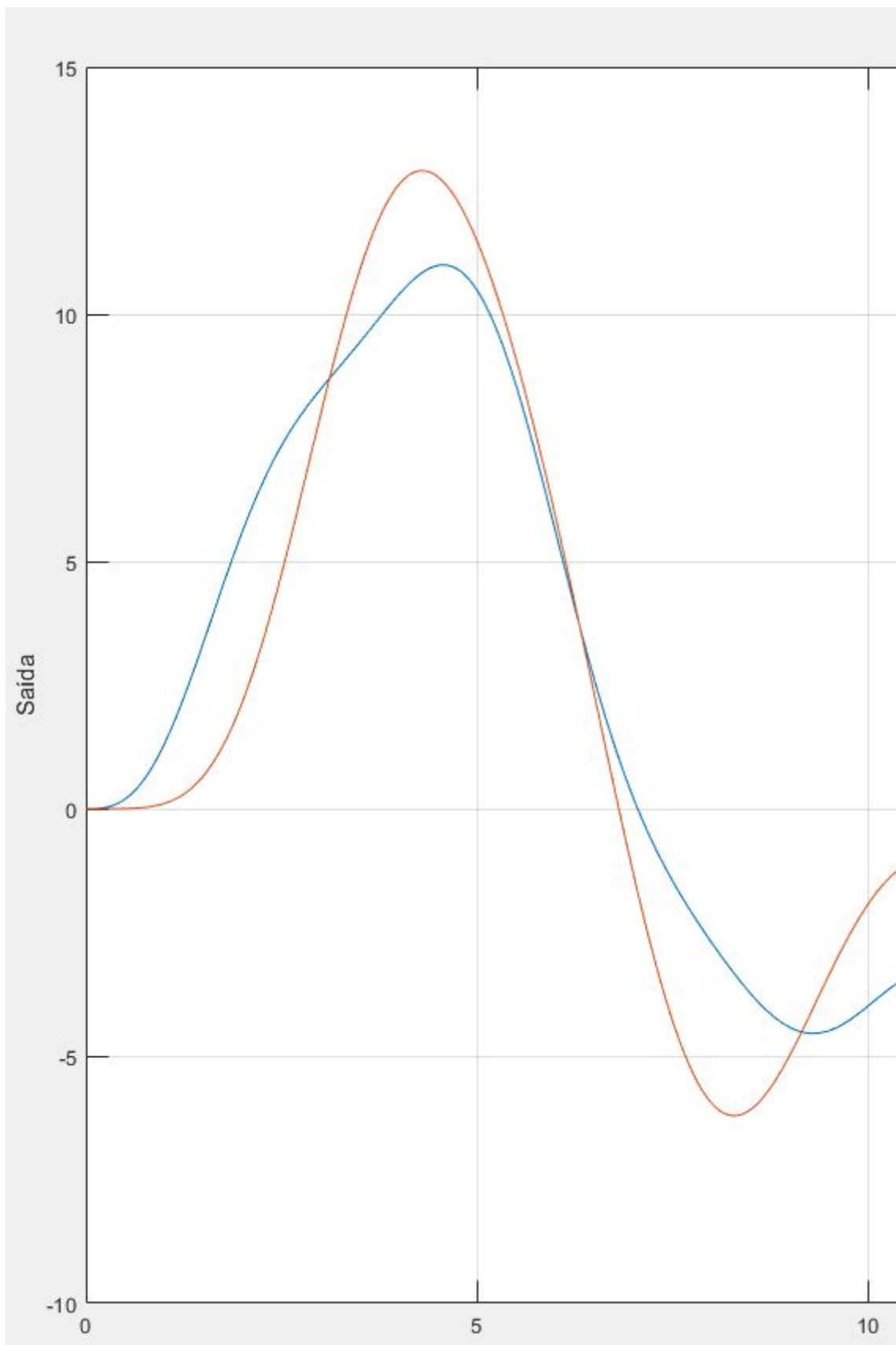


Figura 1.8.3 Gráfico Método RK2 Ralston zoom



**d) Simule o sistema por meio do método de Runge-Kutta de quarta ordem;**

O método de Runge-Kutta de Ordem 4 pega o valor da derivada atual e mais três previsões intermediárias para se obter o valor da inclinação da reta final.

Nesta alternativa o Professor nos pede para executar o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem.

```
%RK4
m0=[0; 0; 0; 0];
m = zeros(4, N);
art = zeros(2, N);
m(:, 1) = m0;
for k = 1:N-1
    art(:, k) = C * m(:, k) + D * entrada_u(dt * k);
    m1 = A * m(:, k) + B * entrada_u(dt * k);
    m2 = A * (m(:, k) + dt/2 * m1) + B * entrada_u(dt * (k + 1/2));
    m3 = A * (m(:, k) + dt/2 * m2) + B * entrada_u(dt * (k + 1/2));
    m4 = A * (m(:, k) + dt * m3) + B * entrada_u(dt * (k + 1));
    m(:, k + 1) = m(:, k) + dt * (m1/6 + m2/3 + m3/3 + m4/6);
end
```

Figura 1.9.1 Trecho do código para comando RK4

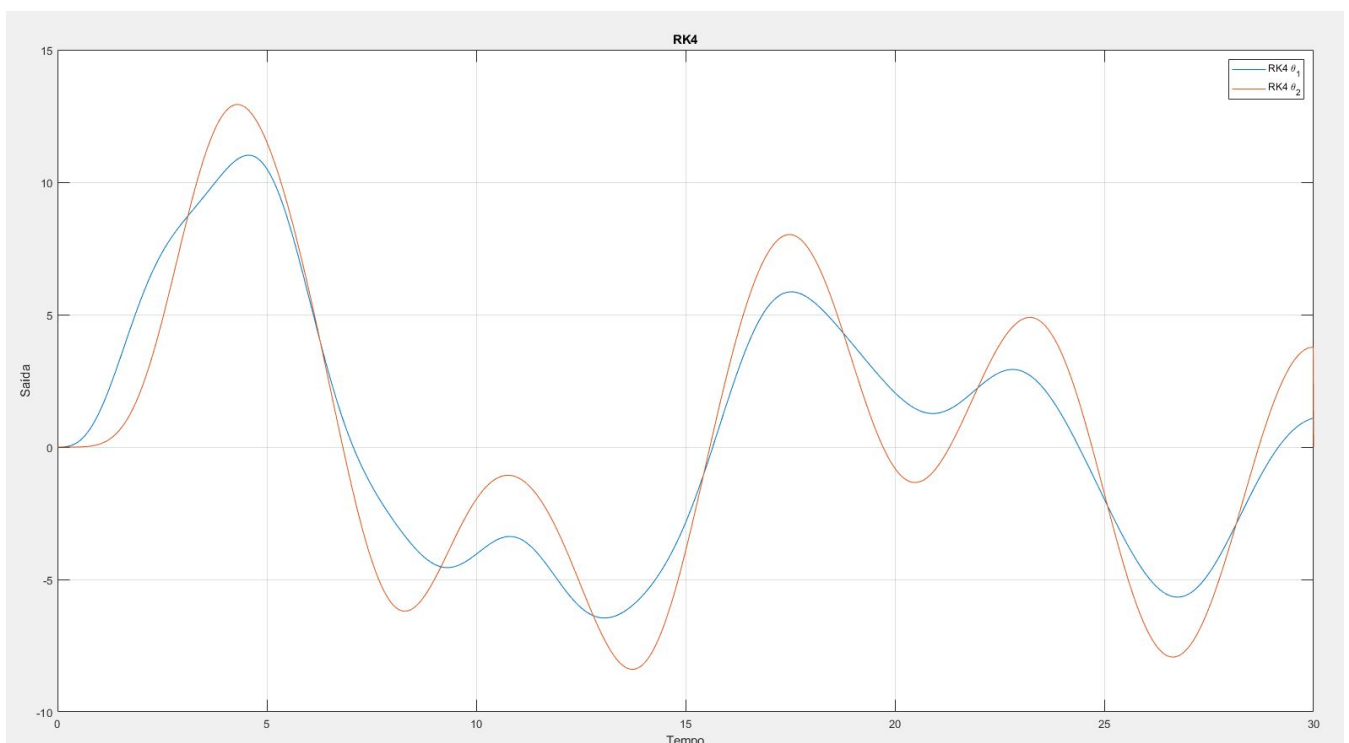


Figura 1.9.2 Gráfico Método RK4

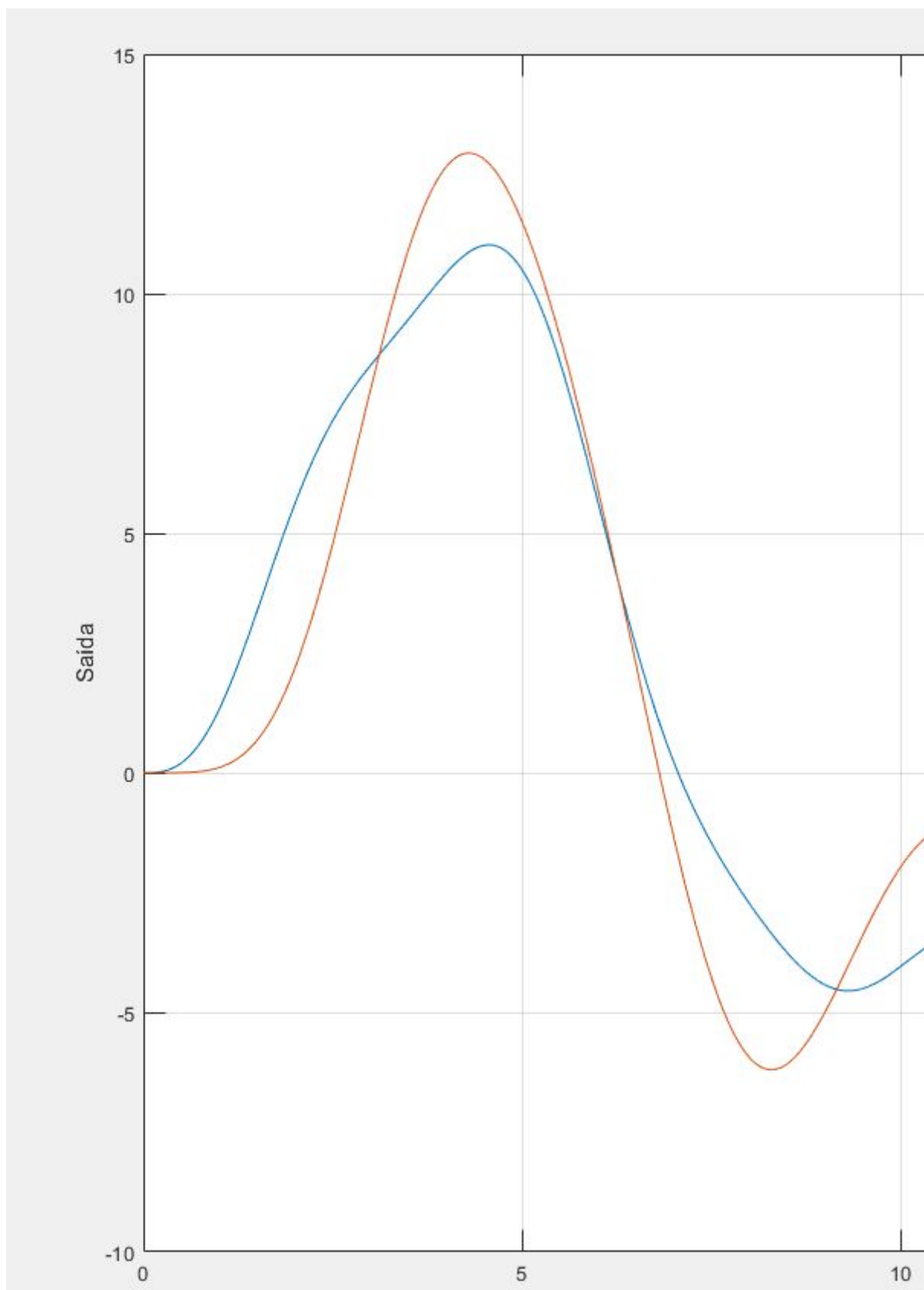


Figura 1.9.3 Gráfico Método RK4 zoom

**e) Compare todos os resultados anteriores em um mesmo gráfico;**

Nesta alternativa o Professor nos pede para juntar a saída de todos os métodos anteriores em um único gráfico para que possamos compará-los, como é possível ver nas imagens 1.10.2, 1.10.3 e 1.10.4, os métodos são realmente muito parecido.

```
%%Plotando os Resultados em um unico grafico%%
plot(t,y_lsim,'z');          %%Plotando Lsim
hold on                     %%"Trava" o primeiro grafico para se plotar os outros por cima
plot(t,mot,'b')             %%Plotando Euler Explícito
plot(t,art,'g')             %%Plotando RK4
plot(t,x(1,1:end-1),'k')    %%Plotando RK2 Metodo do Ponto Intermediario
plot(t,x2(1,1:end-1),'k')   %%Plotando RK2 Metodo do Ponto Intermediario
plot(t,mot(1,1:end-1))      %%Plotando RK2 Metodo do Heun
plot(t,mot2(1,1:end-1))     %%Plotando RK2 Metodo do Heun
plot(t,mfm(1,1:end-1))      %%Plotando RK2 Metodo do Ralston
plot(t,mfm2(1,1:end-1))     %%Plotando RK2 Metodo do Ralston
title('Trabalho 2')         %%Titulo do grafico
ylabel('Saída')             %%Declarando nome do eixo Y
xlabel('Tempo')             %%Declarando nome do eixo X
legend('Lsim \theta_1','Lsim \theta_2','Euler \theta_1','Euler \theta_2','RK4 \theta_1','RK4 \theta_2','RK2MPI \theta_1','RK2MPI \theta_2','RK2HEUN \theta_1','RK2HEUN \theta_2','RK2 RALSTON \theta_1','RK2 RALSTON \theta_2')
grid                        %%Coloca "Rede" atras do grafico,
```

Figura 1.10.1 Trecho do código para plotar todos os grafico juntos

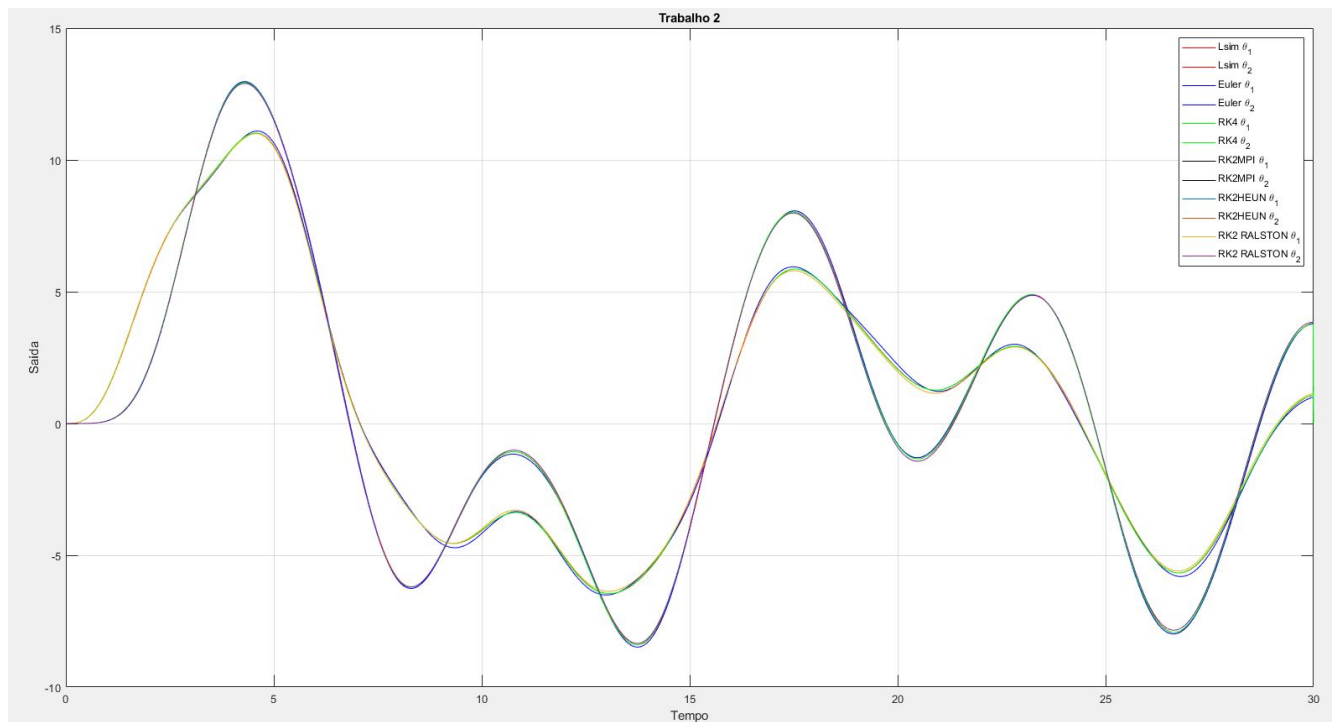


Figura 1.10.2 Gráficos

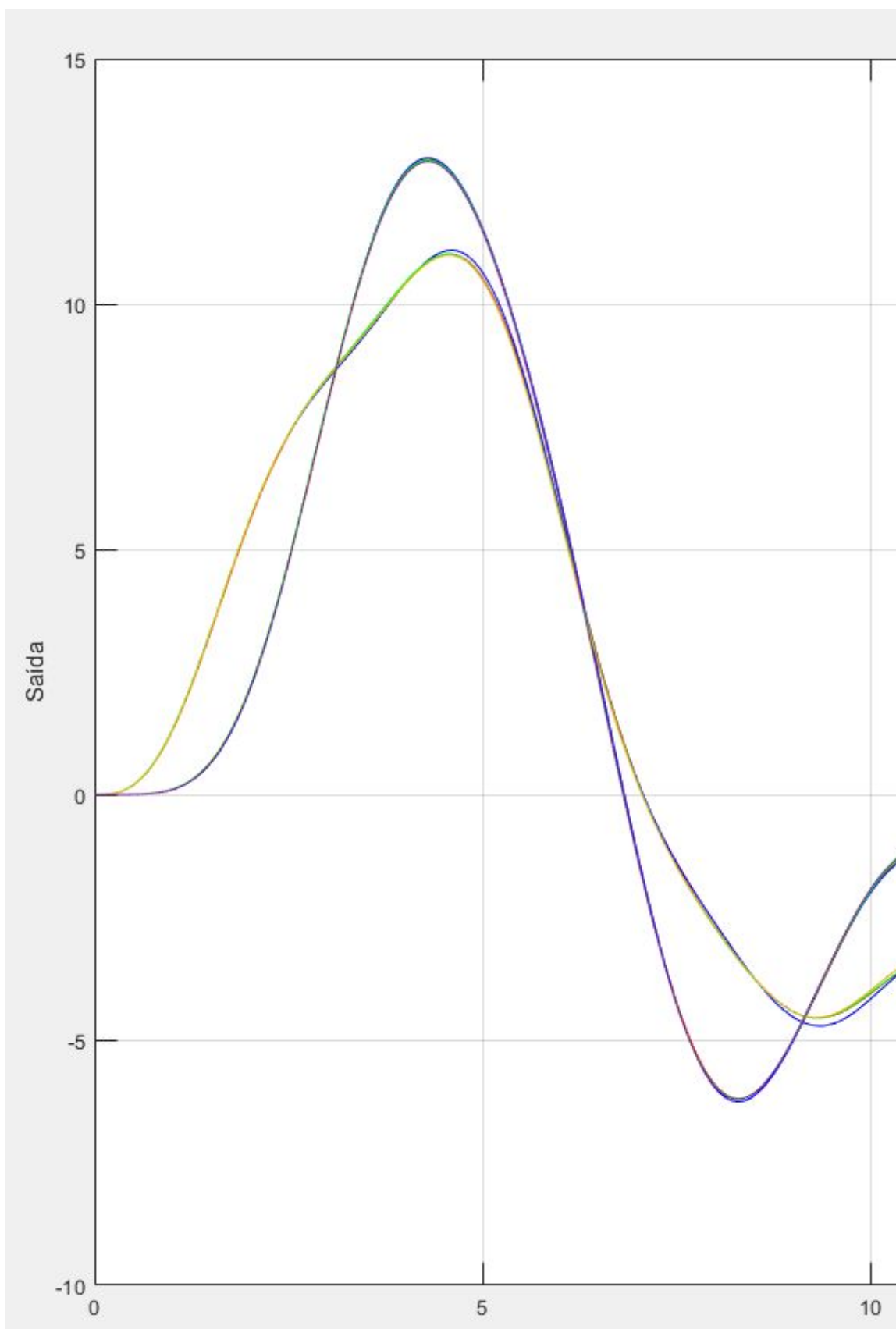


Figura 1.10.3 Gráficos zoom

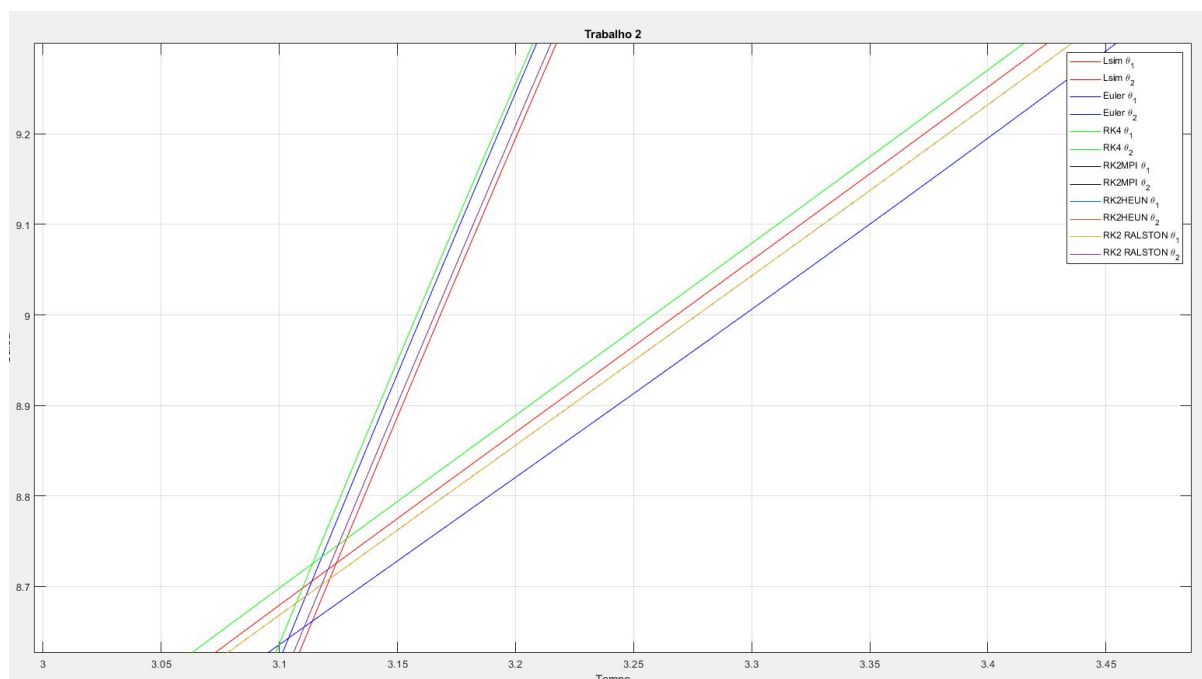


Figura 1.10.4 Gráficos zoom+

**f) Crie uma tabela com o erro para os primeiros 10 pontos de cada método. Entre todos os métodos qual possui menor erro? Entre os métodos de segunda ordem qual possui menor erro?**

Nesta alternativa o Professor nos pede para compararmos os 10 primeiros pontos para todos os métodos utilizados nas questões anteriores e descobriremos qual método possui o menor erro no geral e qual dos 3 métodos de RK2 é o mais preciso.

Primeiro para obter os 10 pontos devemos executar as funções no Matlab, como o passo utilizado é muito pequeno  $dt = 0,01$  se pegássemos os apenas os 10 primeiros pontos a precisão do nosso resultado seria insatisfatória, pois para algumas funções os 2 3 primeiros pontos de 10 eram 0, para resolver isso pegamos os 10 primeiros pontos, mas com um espaçamento maior, o critério para todos os pontos foram (1:10:100), ou seja, do ponto 1 até o ponto 100 com um espaçamento de 10 em 10.

Todos os valores foram jogados nas tabelas, tanto os 10 primeiros pontos para  $\theta_1$  quanto para  $\theta_2$ .

O Professor nos pede para se calcular o erro, como não foi explícito que se calculasse o erro através da resposta analítica, o nosso parametro de comparação para todos os métodos serão as saídas do comando Lsim, tanto para  $\theta_1$  quanto para  $\theta_2$ .



TABELA DE VALORES PARA 01							
Métodos							
Ponto	Lsim	Euler	Erro	RK4	Erro	MÉTODOS	ERRO CRESCENTE
1	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	Euler	0,001672637990798
2	0,00165298232960	0,00163958355138	0,00001339877822	0,00214711499683	0,00049413266723	RK4	0,011254456554601
3	0,01306352030259	0,01306526272299	0,00000174242040	0,01500397022875	0,00194044992616	RK2 Ponto Intermediário	0,001943567705132
4	0,04338321837349	0,04348007081320	0,00009685243971	0,04764111336780	0,00425789499431	RK2 Heun	0,001940054988525
5	0,10079046377538	0,10113331767681	0,00034285390143	0,10812341928699	0,00733295551161	RK2 Ralston	0,001941817092737
6	0,19219139823957	0,19301347806811	0,00082207982854	0,20321646171711	0,01102506347755		
7	0,32298031436812	0,32459908168620	0,00161876731808	0,33815336937340	0,01517305500528		
8	0,49686860711216	0,49967746921581	0,00280886210366	0,51647099209638	0,01960238498422		
9	0,71578820976783	0,72023813087368	0,00444992110585	0,73992097300708	0,02413276323925		
10	0,97987203320632	0,98644393521842	0,00657190201210	1,00845789894673	0,02858586574041		
Media dos Erros			0,001672637990798		0,011254456554601		
TABELA DE VALORES PARA 01							
Métodos							
Ponto	Lsim	RK2 Ponto Intermediário	Erro	RK2 Heun	Erro	RK2 Ralston	Erro
1	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000
2	0,00165298232960	0,00164461596050	0,00000836636910	0,00164459828265	0,00000838404695	0,00164460735347	0,00000837497613
3	0,01306352030259	0,01310788226887	0,00004436196628	0,01310773085690	0,00004421055431	0,01310780752477	0,00004428722218
4	0,04338321837349	0,04360952058881	0,00022630221532	0,04360900437468	0,00022578600119	0,04360926463082	0,00022604625733
5	0,10079046377538	0,10139287313382	0,00060240935844	0,10139165796175	0,00060119418637	0,10139226928313	0,00060180550775
6	0,19219139823957	0,19342060865335	0,00122921041378	0,19341827301659	0,00122687477702	0,19341944648311	0,00122804824354
7	0,32298031436812	0,32513025470200	0,00214994033388	0,32512630855600	0,00214599418787	0,32512828943278	0,00214797506466
8	0,49686860711216	0,50025900632929	0,00339039921713	0,50025291212557	0,00338430501341	0,50025596933871	0,00338736222655
9	0,71578820976783	0,72074401758493	0,00495580781710	0,72073521259105	0,00494700282322	0,72073962756428	0,00495141779645
10	0,97987203320632	0,98670091256663	0,00682887936030	0,98668883150122	0,00681679829490	0,98669488683911	0,00682285363278
Media dos Erros			0,001943567705132		0,001940054988525		0,001941817092737

Figura 1.11.1 Tabela de erro para 01

TABELA DE VALORES PARA 02							
Métodos							
Ponto	Lsim	Euler	Erro	RK4	Erro	MÉTODOS	ERRO CRESCENTE
1	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	Euler	0,000717433771078
2	0,00000124309768	0,00000069090586	0,00000055219182	0,00000186361455	0,00000062051687	RK4	0,000815470423879
3	0,00003945229974	0,00003021301172	0,00000923928803	0,00004927552596	0,00000982322621	RK2 Ponto Intermediário	0,012894405083195
4	0,00029632311343	0,00024978299911	0,00004654011432	0,00034533206055	0,0000490894712	RK2 Heun	0,012894410294078
5	0,00123173525592	0,00108783055348	0,00014390470245	0,00138379705845	0,00015206180253	RK2 Ralston	0,012894407660985
6	0,003697839118074	0,00335789688806	0,00033994229268	0,00406090285026	0,00036306366953		
7	0,00902730641898	0,00835159982600	0,00067570659298	0,00976073293174	0,00073342651276		
8	0,01909062421844	0,01790117988785	0,00118944433059	0,02040921330368	0,00131858908523		
9	0,03631887871783	0,03440766489998	0,00191121381785	0,03849332208258	0,00217444336475		
10	0,06369018533265	0,06083239095258	0,00285779438006	0,06704385244643	0,00335366711379		
Media dos Erros			0,000717433771078		0,000815470423879		
TABELA DE VALORES PARA 02							
Métodos							
Ponto	Lsim	RK2 Ponto Intermediário	Erro	RK2 Heun	Erro	RK2 Ralston	Erro
1	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000
2	0,00000124309768	0,00000002525612	0,00000121784156	0,00000002525590	0,00000121784178	0,00000002525602	0,00000121784166
3	0,00003945229974	0,00000107426259	0,00003837803716	0,00000107425173	0,00003837804802	0,00000107425740	0,00003837804235
4	0,00029632311343	0,00000867676108	0,00028764635234	0,00000867666789	0,00028764644554	0,00000867671583	0,00028764639759
5	0,00123173525592	0,00003741084372	0,00119432441221	0,00003741042832	0,00119432482760	0,00003741084047	0,00119432461545
6	0,003697839118074	0,00011526665008	0,00358257253065	0,00011526534312	0,00358257383762	0,00011526600772	0,00358257317302
7	0,00902730641898	0,00028776276689	0,00873954385209	0,00028775945665	0,00873954696233	0,00028776113510	0,00873954528388
8	0,01909062421844	0,00062175705314	0,01846886716530	0,00062174982507	0,01846887439337	0,00062175348254	0,01846887073590
9	0,03631887871783	0,00120889774689	0,03510998097094	0,00120888357966	0,03510999513817	0,00120889073741	0,03510998798042
10	0,06369018533265	0,00216866546295	0,06152151986969	0,00216863988629	0,06152154544635	0,00216865279306	0,06152153253959
Media dos Erros			0,012894405083195		0,012894410294078		0,012894407660985

Figura 1.11.2 Tabela de erro para 02

Para acharmos os erros, fizemos os seguintes passos (Saída 01 de Lsim - Saída 01 para qualquer método) e (Saída 02 de Lsim - Saída 02 para qualquer método). Repetimos esse passo para os 10 pontos e ao fim tiramos a média destes erros somando o resultado dos 10 pontos e dividindo por 10.

Feito esses passos para todos os métodos observamos que o método com menor erro é o método de Euler, como mostrado nas imagens a seguir Figura 1.11.3 e 1.11.4.

Mas como possuímos conhecimento adquirido nas aulas práticas sabemos que esse resultado não é o esperado pois esta descrito no Lab6 do Professor Dr. Luiz Antonio Maccari: "Os métodos de Runge-Kutta apresentam menor erro que o Método de Euler para um mesmo passo. Contudo isto vem às custas de uma maior demanda computacional". Acreditamos que esse erro ocorreu por não utilizarmos a resposta analítica como parametro e sim a saída de Lsim. Então dentre todos os métodos apresentados aqui o com maior precisão e menor erro deveria ser o RK4, que em nosso trabalho ficou em segundo lugar

MÉTODOS	ERRO CRESCENTE
Euler	0,001672637990798
RK4	0,011254456554601
RK2 Ponto Intermediário	0,001943567705132
RK2 Heun	0,001940054988525
RK2 Ralston	0,001941817092737

Figura 1.11.3 Tabela da ordem dos erro para  $\theta_1$

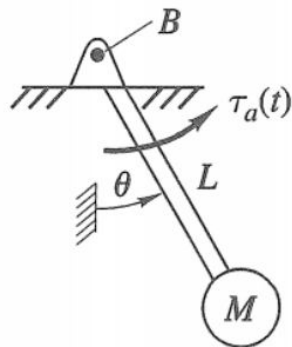
MÉTODOS	ERRO CRESCENTE
Euler	0,000717433771078
RK4	0,000815470423879
RK2 Ponto Intermediário	0,012894405083195
RK2 Heun	0,012894410294078
RK2 Ralston	0,012894407660985

Figura 1.11.4 Tabela da ordem dos erro para  $\theta_2$

E para encerrar esta alternativa percebemos também pela a tabela de erros que o método de RK2 mais preciso entre os 3 testados é o Método de Ponto Intermediário, para ambos os  $\theta$  o erro ao comparar com a saída de Lsim foi menor para este método, e isso ocorre porque, como explicado logo acima nas alternativas anteriores, o método de RK2 Ponto Intermediário faz a previsão do próximo ponto fazendo uma derivada estimada meio passo a frente do atual, já o RK2 Heun utiliza um passo inteiro a frente e depois tira a média das 2 derivadas, e o RK2 Ralston utiliza um valor de três quartos de passo a frente.

# Trabalho 3

1) Dado o sistema abaixo:



Parâmetros		
Massa do pêndulo	$M$	1 Kg
Coefficiente de atrito viscoso	$B$	0.5 N.m/rad
Comprimento do pêndulo	$L$	0,5 m
Torque de entrada	$\tau_a$	0 N.m
Aceleração da gravidade	$g$	10 m.s <sup>-2</sup>

Tabela II: Parâmetros do sistema

Figura 2: Sistema não linear.

Figura 2.1 Enunciado do exercício.

**D.L.C**

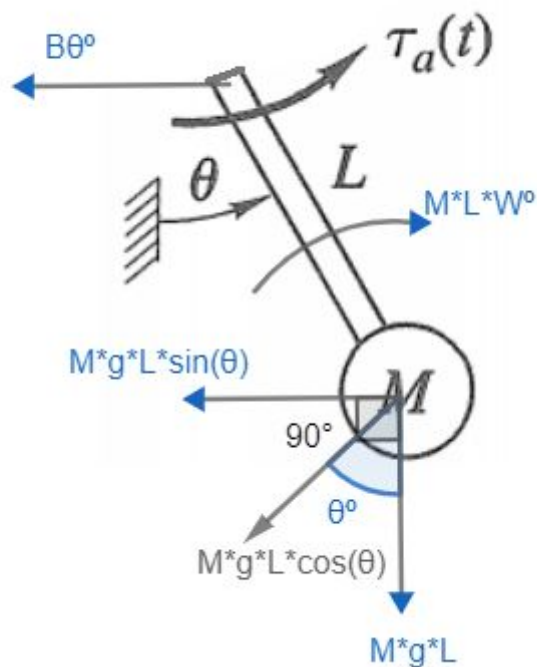


Figura 2.2 Diagrama de Corpo Livre.

Para a resolução do Trabalho 2 o primeiro passo que devemos fazer é o D.C.L (Diagrama de corpo livre) para definir quais as forças estão atuando em cada corpo do sistema, como mostrado na figura a seguir 1.2, como isso podemos encontrar as equações que definem no sistema.

Como as equações precisam ser digitadas no arquivo, iremos substituir o W(Ponto) por  $W^\circ$ , e  $\theta$ (ponto) por  $\theta^\circ$ , com mostrado na imagem de legenda a seguir:



$$\dot{W} = W^o \quad / \quad \dot{\theta} = \theta^o$$

Figura 2.3 Legenda.

Equações obtidas através do D.C.L:

$$\text{Eq.I)} \quad ML^2 W^o + BW + MgL \sin(\theta) = Ta(t)$$

$$\therefore \\ W^o = 1/ML^2 [-MgL \sin(\theta) - BW + Ta(t)]$$

$$\text{Eq.II)} \quad \theta^o = W$$

Agora iremos aplicar as equações do ponto de equilíbrio para acharmos os valores de  $\bar{\theta}$ . No ponto de equilíbrio o valor das derivadas é igual a 0, logo temos:

$$\theta = \bar{\theta} + \Delta\theta(t)$$

$$W(t) = \bar{W} + \Delta W(t)$$

$$Ta(t) = \bar{Ta} + \Delta Ta(t)$$

$$W = 0$$

$$0 = -g \sin(\bar{\theta})/L + \bar{Ta}/ML^2 - B(0)/ML^2$$

$$g \sin(\bar{\theta})/L = \bar{Ta}/ML^2$$

$$\sin(\bar{\theta}) = \bar{Ta}/MgL$$

$$\therefore$$

$$\text{Eq.III)} \quad \bar{\theta} = \arcsin(\bar{Ta}/MgL)$$

Após encontrar a equação no ponto de equilíbrio Eq.III podemos partir para a linearização do sistema.

$$\bar{\theta} = 0 \quad \text{Condição inicial}$$

$$MLW^o + BW + MgL \sin(\theta) - Ta(t) = 0$$

$$\theta = \theta_0 + \theta \delta$$

$$\theta \delta = \theta - \theta_0$$

$$Ta(t) = \bar{Ta}(t) + \delta Ta(t)$$

$$ML^2(\ddot{\theta}_0 + \delta \ddot{\theta}) + B(\dot{\theta}_0 + \delta \dot{\theta}) + MgL\sin(\theta_0 + \delta \theta) = T_a(t) + \delta T_a(t)$$

$$ML^2 \delta \ddot{\theta} + B \delta \dot{\theta} + MgL\sin(\theta_0 + \delta \theta) = T_a(t) + \delta T_a$$

Agora iremos aplicar Taylor para linearizar

$$F_L(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0)$$

$$F_L(t) = MgL\sin(\theta_0) + MgL\cos(\theta_0)(\theta - \theta_0)$$

$$F_L(t) = MgL\theta \delta$$

Com o sistemas linearizado podemos montar nossas matrizes de espaços de estados para resolver as questões

$$ML^2 \delta \ddot{\theta} + B \delta \dot{\theta} + MgL\theta \delta = 0$$

$$\delta \dot{\theta} = \delta W$$

$$\delta W = (g\theta \delta)/L - (BW \delta) / ML^2$$

**a) Simule a resposta a entrada nula para o sistema não linear utilizando o método de Euler. Utilize como passo  $T_s = 1$  ms e como condições iniciais: deslocamento angular  $\theta_0 = 3\pi/4$  rad e velocidade angular  $\dot{\theta}_0 = 0$  rad/s.**

Nesta alternativa o Professor nos pede para utilizarmos o Método de Euler no sistema não linear.

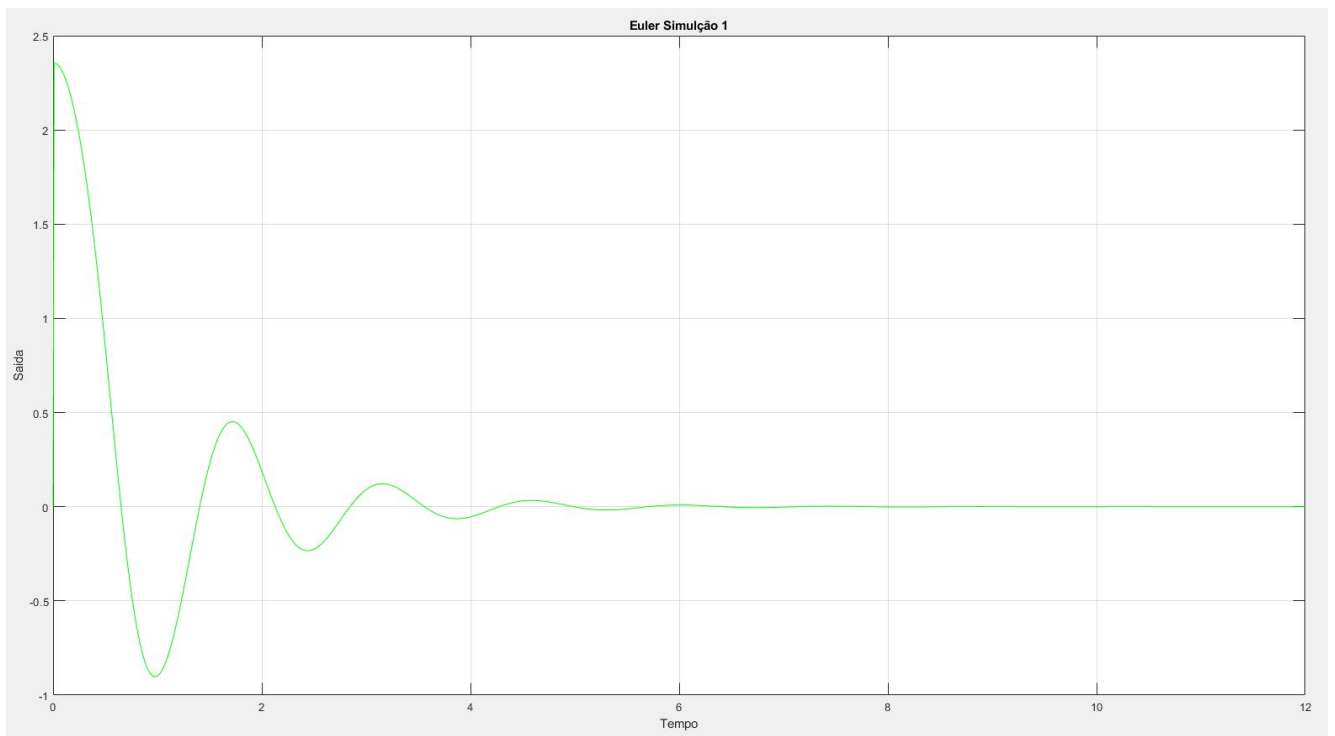


Figura 2.4.1 Gráfico Euler não Linear

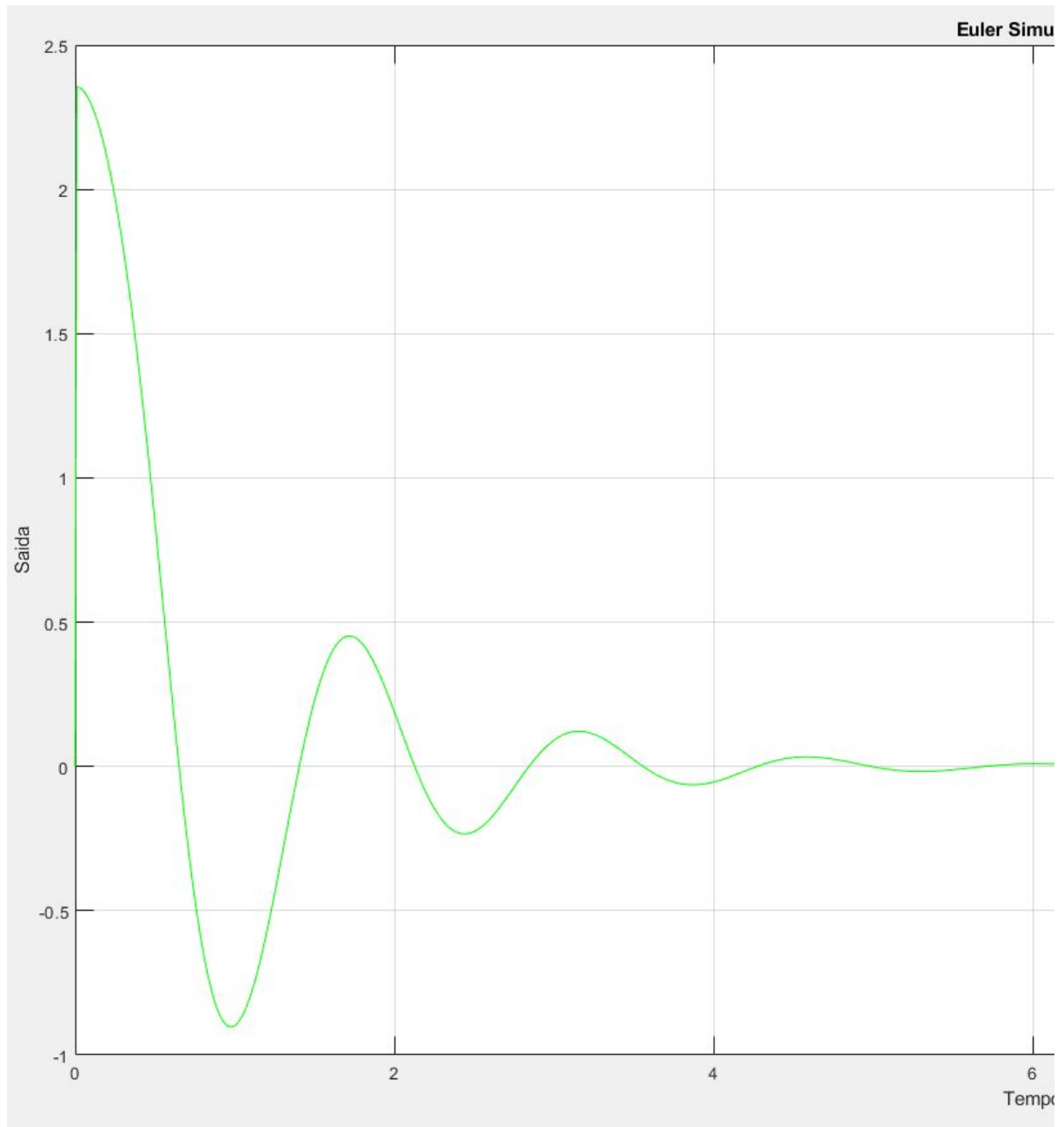


Figura 2.4.2 Gráfico Euler não Linear zoom

```
%Simulacao euler não linear
x(:,1)=xo;
for k=1:na
    m1 = x(1,k);
    m2 = x(2,k);
    x(1, k+1) = m2*dt+m1;
    x(2, k+1) = m2+dt*(-2*m2-20*sin(m1));
    x1(k+1)=x(1, k+1);
end
```

Figura 2.4.3 Trecho código Euler não Linear

**b) Simule o sistema anterior linearizando-o no ponto de operação  $\theta = 0$  e  $\dot{\theta} = 0$ . Utilize novamente o método Euler com as mesmas condições iniciais;**

Nesta alternativa o Professor nos pede para utilizarmos o Método de Euler no sistema linear.

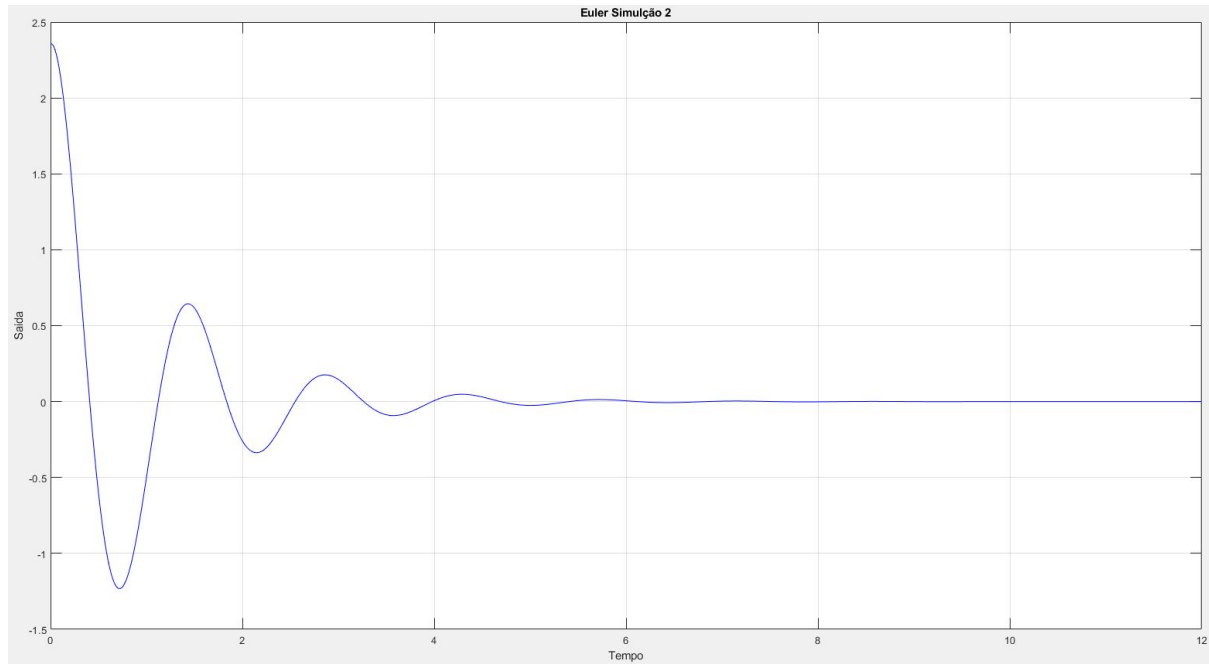


Figura 2.5.1 Gráfico Euler Linear

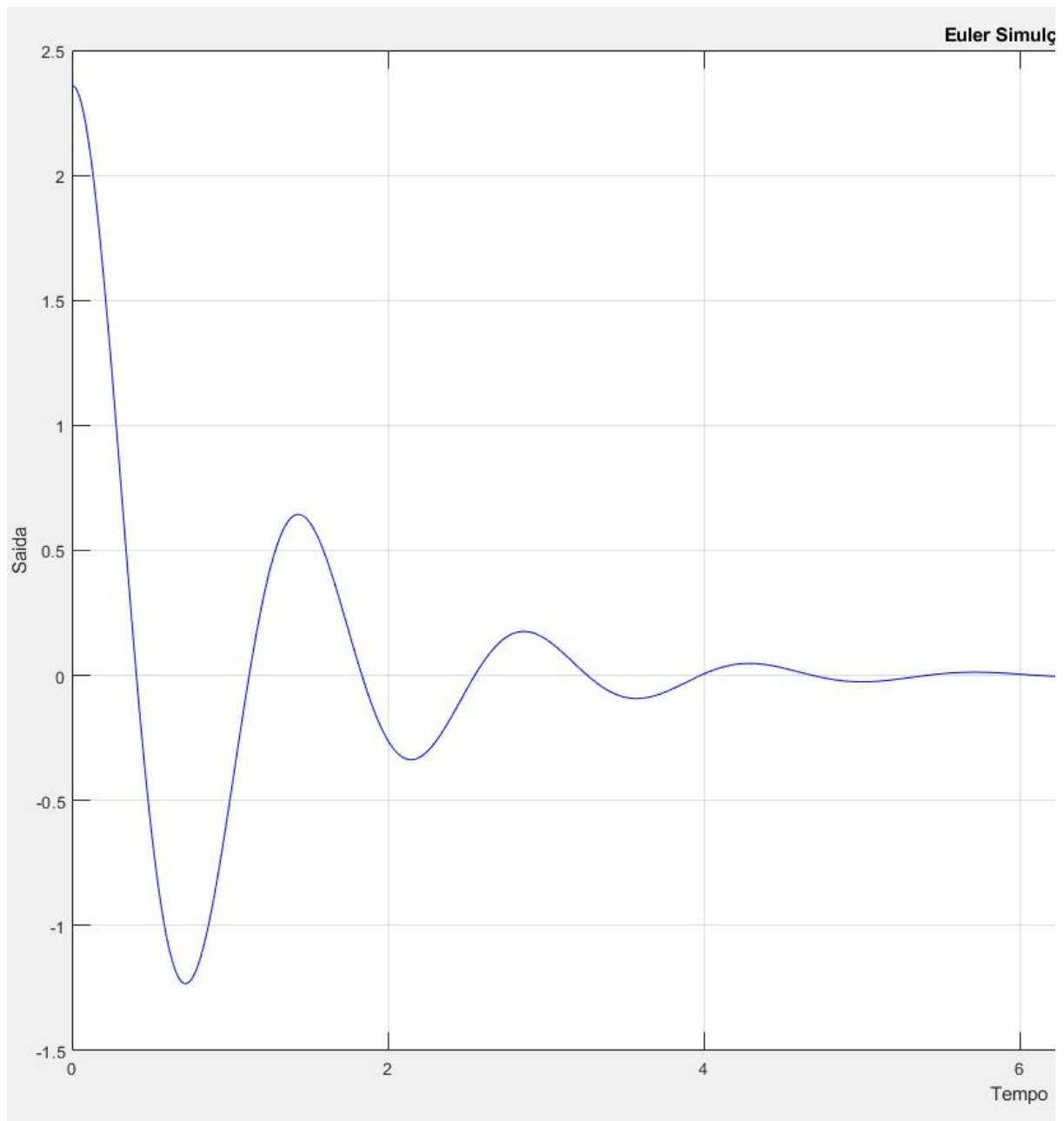


Figura 2.5.2 Gráfico Euler Linear zoom

```
%-----%  
%Simulação euler linear  
u = ones(1,na);  
x2(:,1)=xo;  
for k =1:na  
    x2(:,k+1) = (A*dt + eye(2))*x2(:,k);  
end  
%-----%
```

Figura 2.5.3 Trecho código Euler Linear

**c) Compare a resposta das duas simulações para as condições iniciais  $\theta_0 = 3\pi/4$  rad e  $\dot{\theta}_0 = 0$  rad/s.**

Nesta alternativa o Professor nos pede que comparemos as respostas dos métodos anteriores, e para isso colocamos as duas saídas em um único gráfico para fazer esta comparação.

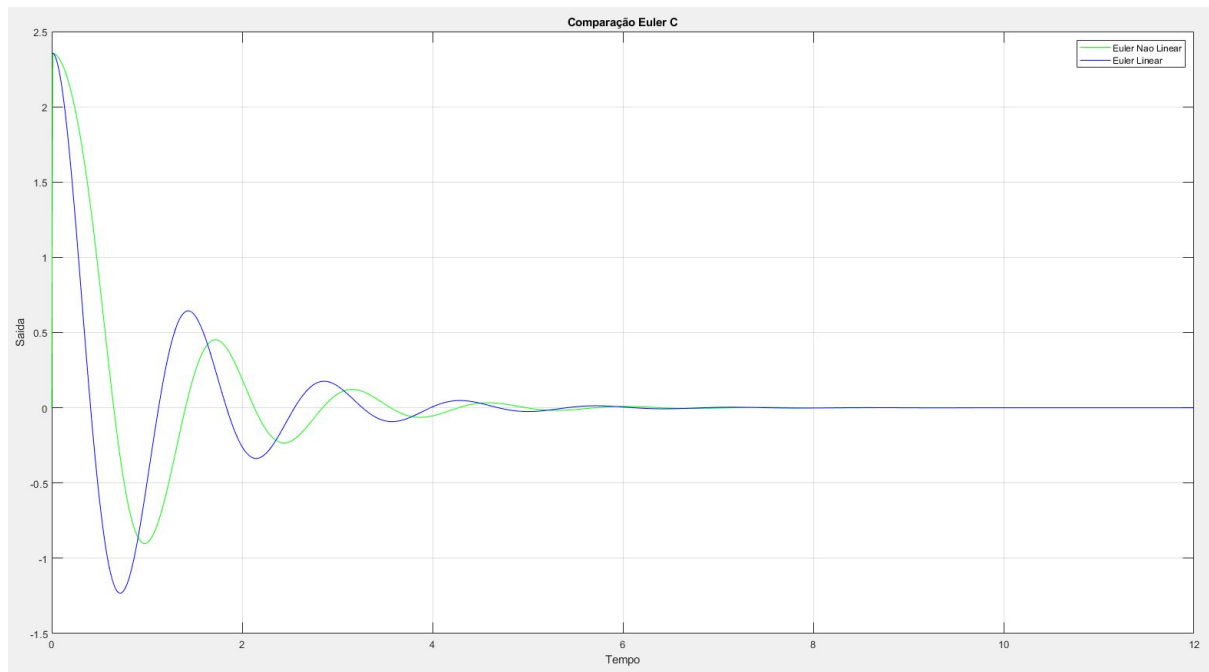


Figura 2.6.1 Gráficos de Euler

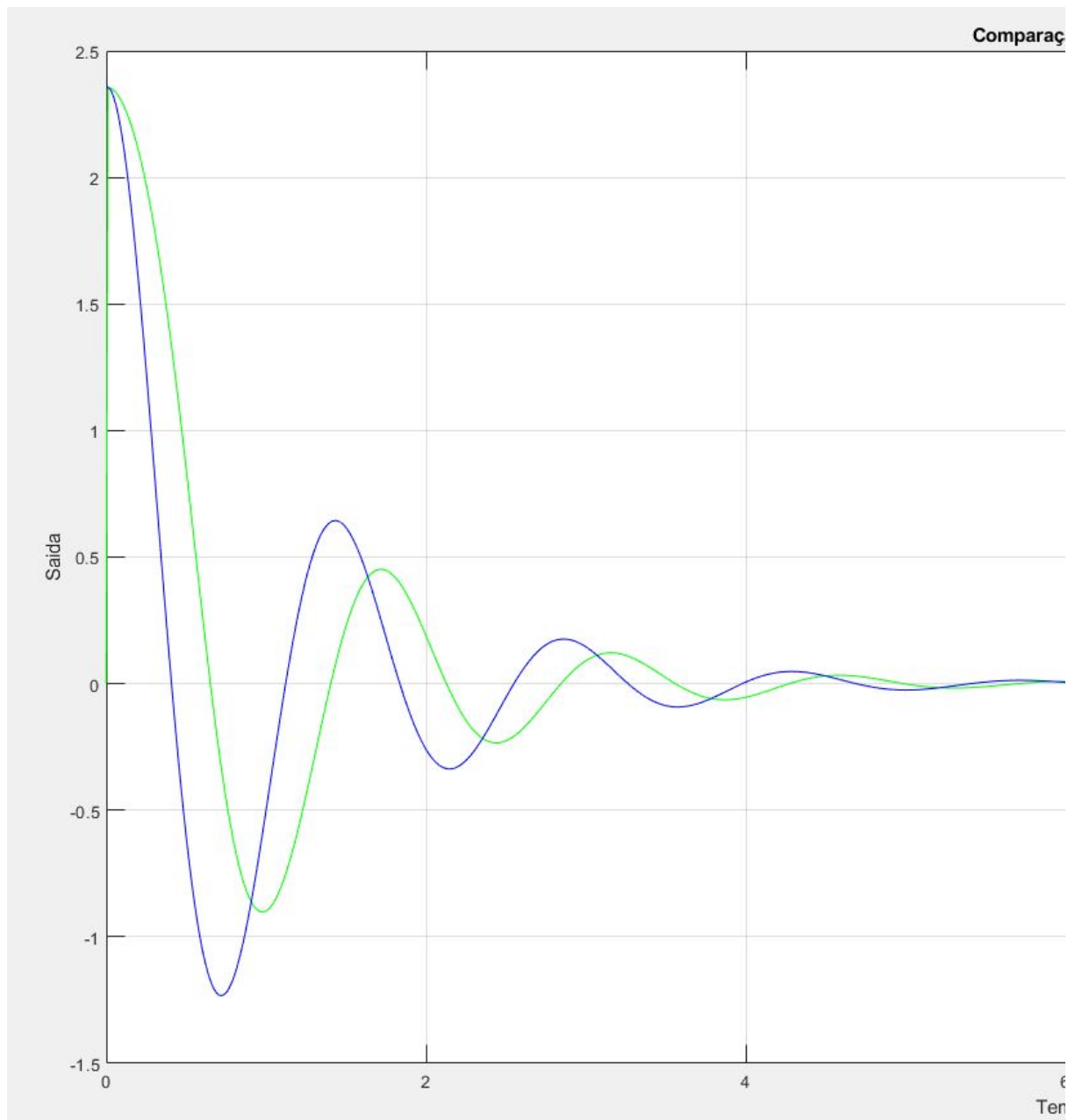


Figura 2.6.2 Gráficos de Euler zoom

Como analisado nas imagens acima podemos perceber que há uma diferença significativa entre os 2 métodos, utilizando  $\theta_0 = 3\pi/4$ .

**d) Compare a resposta das duas simulações para as condições iniciais  $\theta_0 = \pi/4$  rad e  $\dot{\theta}_0 = 0$  rad/s.**

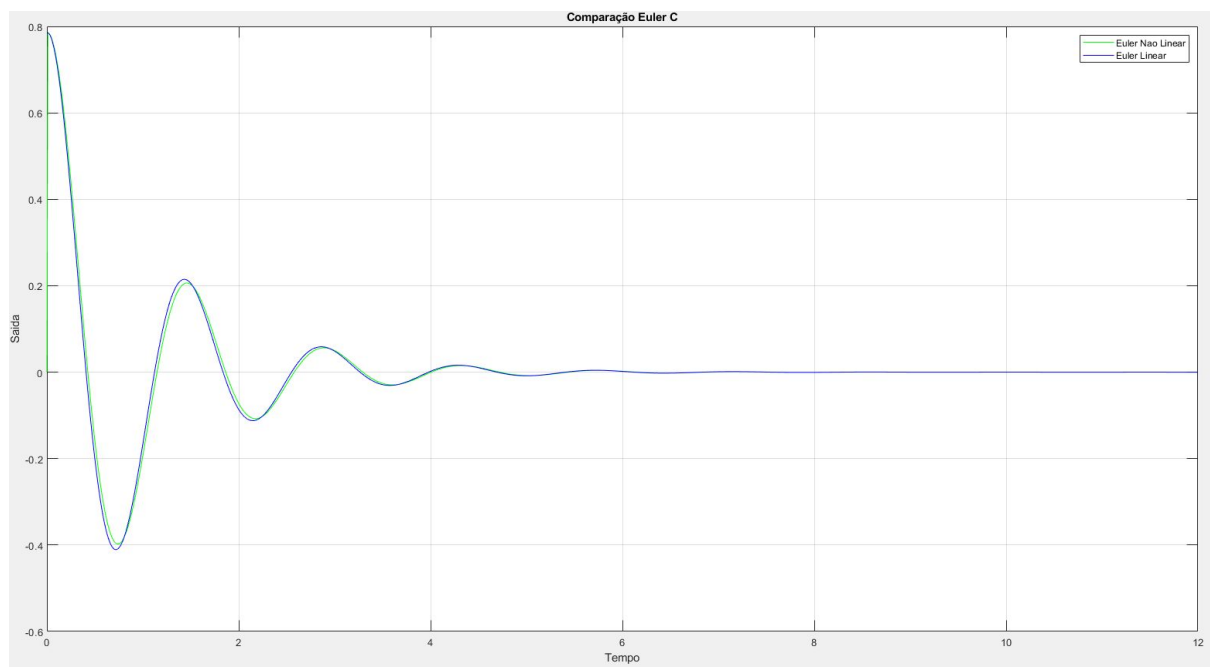


Figura 2.7.1 Gráficos de Euler



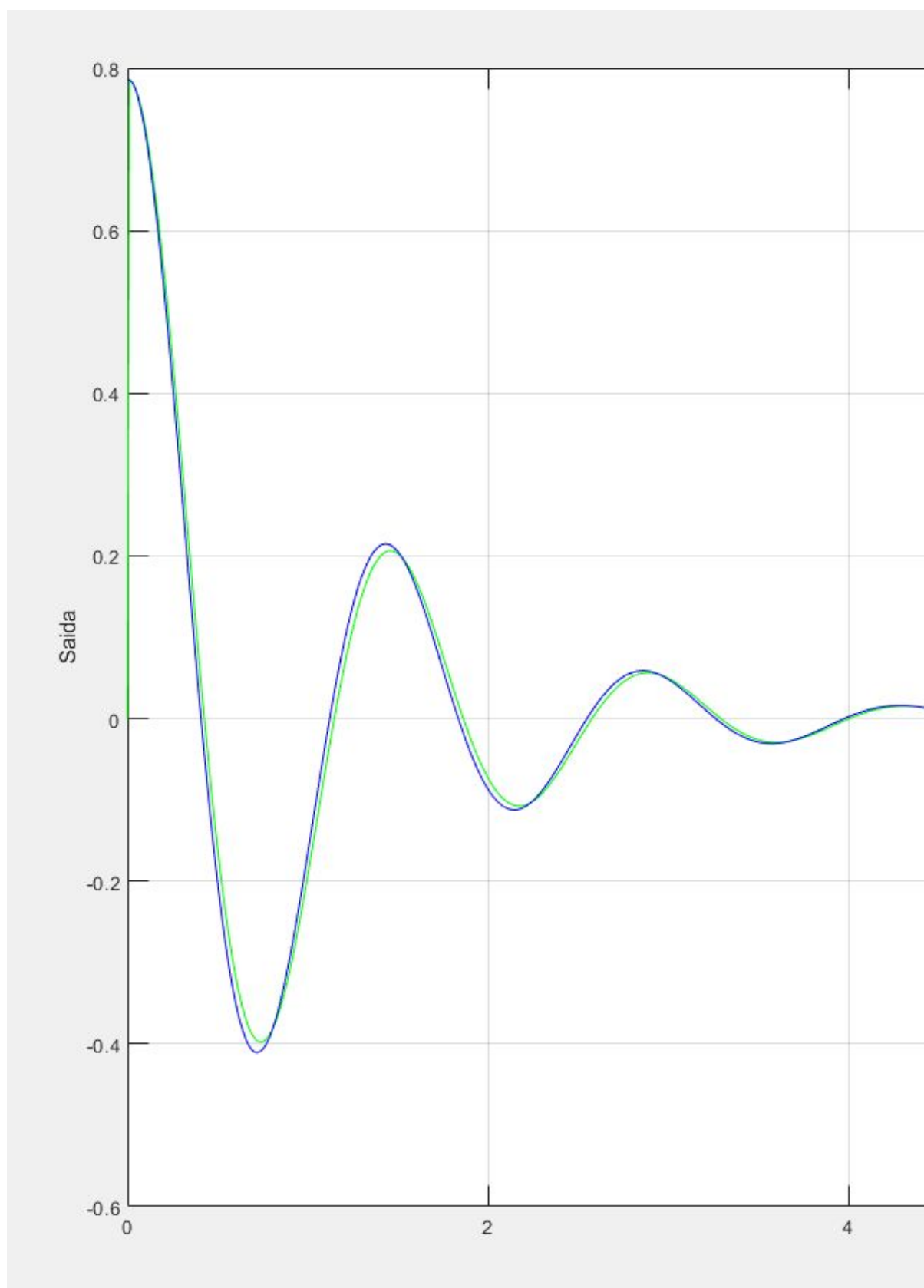


Figura 2.7.2 Gráficos de Euler

Como analisado nas imagens acima podemos perceber que a diferença entre os 2 métodos diminuiu bastante, utilizando  $\theta_0 = \pi/4$  rad.

**e) Comente os resultados obtidos nos itens anteriores. Explique quando e porque existem diferenças.**

Para resolver esta questão iremos pegar os 10 primeiros ponto para ambos os métodos e compará los, iremos fazer isso para as 2 condições iniciais pedidas nas questões anteriores.

Diferença entre os 10 primeiros pontos de ambos os métodos para  $\theta_0 = 3\pi/4$  rad

Pontos	Euler Linear	Euler Não Linear	Diferença
1	2,356194490192345	0	2,35619449019234
2	0	2,356194490192345	2,35619449019234
3	2,356194490192345	2,354780276629972	0,001414213562373
4	-0,471238898038469	2,351980133776473	2,82321903181494
5	2,351482101211960	2,347819781632551	0,003662319579409
6	-0,933053018116169	2,342322475545541	3,27537549366171
7	2,342151571030799	2,335509108123084	0,006642462907715
8	-1,384688377996237	2,327398313192986	3,71208669118922
9	2,328304687250836	2,318006571687019	0,010298115563817
10	-1,825424924642472	2,307348319439125	4,1327732440816

Tabela 1

Diferença entre os 10 primeiros pontos de ambos os métodos para  $\theta_0 = \pi/4$  rad

Pontos	Euler Linear	Euler Não Linear	Diferença
1	0,785398163397448	0	0,785398163397448
2	0	0,785398163397448	0,785398163397448
3	0,785398163397448	0,783983949835075	0,001414213562373
4	-0,157079632679490	0,781183806981576	0,938263439661066
5	0,783827367070653	0,777027454836321	0,006799912234332
6	-0,311017672705389	0,771545988712719	1,08256366141811
7	0,780717190343599	0,764771825726352	0,015945364617247
8	-0,461562792665412	0,756738657423578	1,21830145008899
9	0,776101562416945	0,747481407727576	0,028620154689369
10	-0,608474974880824	0,737036195331584	1,34551117021241

Tabela 2

Comparação entre as diferenças dos métodos de Euler para o sistema Linearizado e não Linear, mudando as condições iniciais.

Pontos	Diferença P/ $\theta_0 = 3\pi/4$	Diferença P/ $\theta_0 = \pi/4$
1	2,35619449019234	0,785398163397448
2	2,35619449019234	0,785398163397448
3	0,001414213562373	0,001414213562373
4	2,82321903181494	0,938263439661066
5	0,003662319579409	0,006799912234332
6	3,27537549366171	1,08256366141811
7	0,006642462907715	0,015945364617247
8	3,71208669118922	1,21830145008899
9	0,010298115563817	0,028620154689369
10	4,1327732440816	1,34551117021241

Tabela 3

Ao analisar todos os valores encontrados e também pela análise dos gráficos fica bem claro que para as condições iniciais igual a  $\theta_0 = 3\pi/4$  rad  $\dot{\theta}_0 = 0$  rad/s a diferença entre o sistema Linearizado e o não Linear é grande, já para condições iniciais menores como por exemplo  $\theta_0 = \pi/4$  rad  $\dot{\theta}_0 = 0$  rad/s essa diferença diminui drasticamente como analisado na comparação da Tabela 3, e essa diferença fica ainda mais clara fazendo a análise gráfica, como visto nas questões anteriores. Essa diferença ocorre porque quando linearizamos o sistema tendemos ao ponto 0, ou seja, quanto mais distante deste ponto 0 forem as condições iniciais, maior vai ser a diferença entre os 2 métodos.

## Conclusão

Com a finalização de ambos os Trabalhos podemos concluir que existem diversas maneiras para se chegar em uma aproximação de curva para a saída de um determinado sistema, e essas maneiras são os métodos numéricos apresentados neste presente relatório.

Com o conhecimento obtido nas aulas ministradas pelo Professor, podemos concluir que o método mais preciso é o RK4 pois ele pega o valor da derivada atual e mais três previsões intermediárias para se obter o valor da inclinação da reta fina, isso faz com que sua precisão na previsão do ponto seja maior que os outros métodos de RK2, e dentre os métodos de RK2 o mais preciso é o Ponto Intermediário pois para fazer a previsão da derivada ele utiliza meio passo, isso aumenta a precisão, e o menos preciso é o RK2 Ralston pois ele pega 3/4 passos a frente para calcular a previsão da derivada.

Também conseguimos concluir que é possível fazer a comparação de 2 sistemas iguais mas um linear e outro não, mas desde que as condições iniciais de ambos forem bem próximos do valor a qual o sistema linearizado tendeu, que nosso caso tendeu a 0, e vimos que se o valor das condições iniciais não tenderem a 0 a aproximação de ambos não ficam próximas.