Notes

2021 年 7 月 16 日

1 α 参数与 Feynman 参数

1.1 α 参数

1.1.1 分母

利用 Gamma 函数的定义，对于 $\text{Re}a > 0$，s 为实数且 $s \sim s + i0$ 的情况，有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\alpha\alpha^{a-1}e^{is\alpha} &= \frac{1}{(-is)^a}\int_0^\infty d(-is\alpha)(-is\alpha)^{a-1}e^{is\alpha}\\ &= \frac{1}{(-is)^a}\int_0^{-i\infty(s+0i)} d\lambda\lambda^{a-1}e^{-\lambda}\\ &= \frac{1}{(-is)^a}\int_0^{\infty} d\lambda\lambda^{a-1}e^{-\lambda} = \frac{\Gamma(a)}{(-is)^a}\end{aligned} \tag{1}$$

即

$$\frac{1}{(s+i0)^a} = \frac{(-i)^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \alpha^{a-1}e^{is\alpha}d\alpha \tag{2}$$

注意在 (1) 中红色标记的积分围道在变化后 λ^a 取主值（即 $\arg\lambda = 0$），这需要围道变化之前的 λ^a 也取主值（即 $-\pi/2 < \arg\lambda < \pi/2$[1]），即 $(-is)^a$ 取主值。为得到 (2) 式，需将 $(-is)^a \to (-i)^a s^a$，我们想让 $(-i)^a$ **永远取主值**，容易证明这对于 s 为实数的情况正好相当于 s^a 按 $(s+i0)^a$ 取主值来理解。

按照 V.A. Smirnov 的经验，很多情况下传播子分母取相反的符号

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i0} \to -\frac{1}{-p^2 + m^2 - i0}$$

会使得结果更加自然。我们对 $s \sim s - i0$ 的情况重新得到 (2) 式的类似：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\alpha\alpha^{a-1}e^{-is\alpha} &= \frac{1}{(is)^a}\int_0^\infty d(is\alpha)(is\alpha)^{a-1}e^{-is\alpha}\\ &= \frac{1}{(is)^a}\int_0^{i\infty(s-0i)} d\lambda\lambda^{a-1}e^{-\lambda}\\ &= \frac{1}{(is)^a}\int_0^{\infty} d\lambda\lambda^{a-1}e^{-\lambda} = \frac{\Gamma(a)}{(is)^a}\end{aligned} \tag{3}$$

[1] 对于任意复数 z，主值区间选为 $-\pi < \arg z \le \pi$（注意这个等号），选这个主值区间的好处是**除了负实数以外**，均有 $1/z^a \equiv z^{-a} = (1/z)^a$，若 z 为负数，则有 $z^{-a} = (1/z)^a e^{-2i\pi a}$。另外，选择任意的主值区间，都有 $z^a z^b = z^{a+b}$，但 $(z^a)^b \overset{?}{=} z^{ab}$，$z^a w^a \overset{?}{=} (zw)^a$ 都是不一定的。

$$\frac{1}{(s-i0)^a}=\frac{i^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \alpha^{a-1}e^{-is\alpha}d\alpha \tag{4}$$

同样的讨论，$(is)^a\to i^a s^a$，我们想让 i^a 取主值，可以证明 s^a 刚好按 $(s-i0)^a$ 取主值理解。

(1)(2) 式与 (3)(4) 式之间简单地以 $i\leftrightarrow -i$ 相互对应。

1.1.2 分子

对于关于 $s=(s_1,s_2,\ldots)$ 的多项式 $Z(s)$，有

$$Z(s)=Z\left(\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial u}\right)e^{2iu\cdot s}\Big|_{u=0}$$

(显然)。这个操作的目的是将 s 转移到 e 指数上去，方便做关于 s 的积分。

1.2 Feynman 参数

在 α 参数下，做换元 $\alpha_l=\eta\alpha'_l$，其中 $\sum_l\alpha'_l=1$，取 $\alpha'_1,\cdots,\alpha'_{L-1},\eta$ 为独立变量。$\alpha_L=\eta\left(1-\sum_{l=1}^{L-1}\alpha'_l\right)$，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\left(\prod_l d\alpha_l\right)f(\alpha)\\
=&\int_0^\infty d\eta\int_0^1\left(\prod_{l=1}^{L-1}d\alpha'_l\right)\begin{vmatrix}\frac{\partial\alpha_1}{\partial\alpha'_1} & \cdots & \frac{\partial\alpha_L}{\partial\alpha'_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial\alpha'_{L-1}} & \cdots & \frac{\partial\alpha_L}{\partial\alpha'_{L-1}}\\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial\eta} & \cdots & \frac{\partial\alpha_L}{\partial\eta}\end{vmatrix} f(\eta\alpha')\Big|_{\alpha'_L=1-\sum_{l=1}^{L-1}\alpha'_l}\\
=&\int_0^\infty d\eta\int_0^1\left(\prod_l d\alpha'_l\right)\delta\left(\sum_l\alpha'_l-1\right)f(\eta\alpha')\begin{vmatrix}\eta & \cdots & 0 & -\eta\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \eta & -\eta\\ \alpha'_1 & \cdots & \alpha'_{L-1} & 1-\sum_{l=0}^{L-1}\alpha'_l\end{vmatrix}\\
=&\int_0^\infty d\eta\cdot\eta^{L-1}\int_0^1\left(\prod_l d\alpha_l\right)\delta\left(\sum_l\alpha_l-1\right)f(\eta\alpha)
\end{aligned}\tag{5}$$

行列式的计算方法是将前 $L-1$ 列加到最后一列。

1.3 Cheng-Wu 定理

如果像上面那样令 $\alpha_l=\eta\alpha'_l$，但其中 $\sum_{l\in\nu}\alpha'_l=1$，即只取 $\alpha_l,l=1,\ldots,L$ 的一部分做归一化。那么可取 $\alpha'_{l\in\bar\nu},\alpha'_{l\in\nu-\{l_0\}},\eta$ 作为独立变量，$\alpha_{l_0}=\eta\left(1-\sum_{l\in\nu-\{l_0\}}\alpha'_l\right)$，

$$\int_0^\infty\left(\prod_l d\alpha_l\right)f(\alpha)$$

$$
= \int_0^\infty d\eta \left(\prod_{l\in\bar{\nu}} d\alpha'_l\right) \int_0^1 \left(\prod_{l\in\nu-\{l_0\}} d\alpha'_l\right) \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha_{l\in\bar{\nu}}}{\partial\alpha'_{l\in\bar{\nu}}} & \cdots & \frac{\partial\alpha_{l\in\nu-\{l_0\}}}{\partial\alpha'_{l\in\bar{\nu}}} & \cdots & \frac{\partial\alpha_{l_0}}{\partial\alpha'_{l\in\bar{\nu}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\alpha_{l\in\bar{\nu}}}{\partial\alpha'_{l\in\nu-\{l_0\}}} & \cdots & \frac{\partial\alpha_{l\in\nu-\{l_0\}}}{\partial\alpha'_{l\in\nu-\{l_0\}}} & \cdots & \frac{\partial\alpha_{l_0}}{\partial\alpha'_{l\in\nu-\{l_0\}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\alpha_{l\in\bar{\nu}}}{\partial\eta} & \cdots & \frac{\partial\alpha_{l\in\nu-\{l_0\}}}{\partial\eta} & \cdots & \frac{\partial\alpha_{l_0}}{\partial\eta} \end{vmatrix} f(\eta\alpha')\Big|_{\alpha'_{l_0}=1-\sum_{l\nu-\{l_0\}}\alpha'_l}
$$

$$
= \int_0^\infty d\eta \left(\prod_{l\in\bar{\nu}} d\alpha'_l\right) \int_0^1 \left(\prod_{l\in\nu} d\alpha'_l\right) \delta\left(\sum_{l\in\nu}\alpha'_l - 1\right) f(\eta\alpha') \begin{vmatrix} \eta & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \eta & \cdots & -\eta \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha'_{l\in\bar{\nu}} & \cdots & \alpha'_{l\in\nu-\{l_0\}} & \cdots & 1-\sum_{l\in\nu-\{l_0\}}\alpha'_l \end{vmatrix}
$$

$$
= \int_0^\infty d\eta \cdot \eta^{L-1} \left(\prod_{l\in\bar{\nu}} d\alpha_l\right) \int_0^1 \left(\prod_{l\in\nu} d\alpha_l\right) \delta\left(\sum_{l\in\nu}\alpha_l - 1\right) f(\eta\alpha) \tag{6}
$$

行列式的计算方法是将 $l\in\nu-\{l_0\}$ 列加到最后一列。

可以看到，(6) 式与 (5) 式的区别**仅**在于 δ 函数中求和所包含的 α_l 不同，以及不在 δ 函数中出现的 α_l，其积分区间为 $(0,+\infty)$。

1.4 圈动量积分前变为 Feynman 参数

记 $a\equiv\sum_l a_l$，$s_l\sim s_l+i0$，

$$
\begin{aligned}
\prod_l \frac{1}{s_l^{a_l}} &= (-i)^a \int_0^\infty \prod_l d\alpha_l \frac{1}{\Gamma(a_l)} \alpha_l^{a_l-1} e^{is_l\alpha_l} \\
&= (-i)^a \int_0^\infty d\eta\cdot\eta^{L-1} \int_0^1 \prod_l d\alpha_l \delta\left(\sum_l \alpha_l - 1\right) \frac{1}{\Gamma(a_l)} \eta^{a-L} \alpha_l^{a_l-1} e^{is_l\eta\alpha_l} \\
&= (-i)^a \int_0^1 \prod_l d\alpha_l \delta\left(\sum_l \alpha_l - 1\right) \frac{1}{\Gamma(a_l)} \alpha_l^{a_l-1} \int_0^\infty d\eta\cdot\eta^{a-1} e^{is_l\eta\alpha_l} \\
&= (-i)^a \int_0^1 \prod_l d\alpha_l \delta\left(\sum_l \alpha_l - 1\right) \frac{1}{\Gamma(a_l)} \alpha_l^{a_l-1} \frac{\Gamma(a)}{(-i)^a\left(\sum_l \alpha_l s_l\right)^a} \\
&= \int_0^1 \left(\prod_l d\alpha_l\right) \delta\left(\sum_l \alpha_l - 1\right) \frac{\Gamma(a)}{\prod_l \Gamma(a_l)} \frac{\prod_l \alpha_l^{a_l-1}}{\left(\sum_l \alpha_l s_l\right)^a}
\end{aligned}
$$

即得到费曼参数化。但现在我们**不用**这种方法，而是用下面的办法。

1.5 圈动量积分后变为 Feynman 参数

在 α 参数下也可以先计算圈动量的积分。设 $k_i, i=1,\ldots,h$ 为圈动量，$q_i, i=1,\ldots,n$ 为外线动量，则每条内线 l 上的动量为

$$
r_l = \sum_{i=1}^h e_{il}k_i + \sum_{i=1}^n d_{il}q_i
$$

其中的系数按如下方式理解：从费曼图中选定一棵树，以及一条外线 q_j 作为根，k_i 为不在树上的边的动量，如果边 l 在边 k_i 与树所围成的圈（是唯一的）中，则 $e_{il}=\pm1$，否则为 0；如果边 l 在外线 q_i 到根 q_j 的路径（是唯一的）上，则 $d_{il}=\pm1$，否则 $d_{il}=0$。

$$\begin{aligned}F_\Gamma(q;d) &= \int dk\prod_l\frac{Z_l(r_l)}{[Q_l(k;q)]^{a_l}}\\ &= \int dk\prod_l Z_l\left(\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial u_l}\right)e^{2i\sum_l u_l\cdot r_l}\Big|_{u_l=0}\frac{(-i)^a}{\prod_l\Gamma(a_l)}\int_0^\infty\prod_l d\alpha_l\alpha_l^{a_l-1}e^{i\sum_l Q_l\alpha_l}\\ &= \frac{(-i)^a}{\prod_l\Gamma(a_l)}\prod_l Z_l\left(\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial u_l}\right)\Big|_{u_l=0}\int_0^\infty\prod_l d\alpha_l\alpha_l^{a_l-1}\int dke^{iQ(k;q,\alpha,u)}\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $Q_l\sim Q_l+i0, Q\sim Q+i0$。如果 Q_l 是关于内线动量 r_l 的缩并式的二次型（即不包含 $(q\cdot r)(q\cdot r)$ 这样的项），那么 Q 也是关于圈动量 k 的这样的二次型：

$$Q(k;q,\alpha,u)=\sum_{ij}A_{ij}(\alpha)k_i\cdot k_j+\sum_i b_i(q;\alpha,u)\cdot k_i+c(q;\alpha,u)$$

其中 $A_{ij}(\alpha)$ 为 $h\times h$ 阶矩阵，矩阵元是 α 的线性齐次函数。

利用著名的高斯积分（$a\in\mathbb{R}$，$\mathbf{A}$ 为实对称矩阵）

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}dxe^{iax^2} &= \int_{-\infty\sqrt{-ia}}^{+\infty\sqrt{-ia}}\frac{dy}{\sqrt{-ia}}e^{-y^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{-ia}}\int_{-\infty}^{+\infty}dye^{-y^2}=\sqrt{\frac{i\pi}{a}}\\ &= \begin{cases}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{i\pi/4} & a>0\\ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-a}}e^{-i\pi/4} & a<0\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $\sqrt{\bullet}$ 取主值（即 $a>0$ 时 $\arg\sqrt{-ia}=-\frac{\pi}{4}$，$a<0$ 时 $\arg\sqrt{-ia}=\frac{\pi}{4}$）[a]。

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}d\boldsymbol{x}\exp i\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+c\right)\\ =&\int_{-\infty}^{+\infty}d\boldsymbol{x}\exp i\left[\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}\right)-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}+c\right]\\ =&\int_{-\infty}^{+\infty}d\boldsymbol{y}\exp i\left[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}+c\right]\\ =&e^{i\pi(p-q)/4}\sqrt{\frac{\pi^n}{|\det\mathbf{A}|}}\exp i\left[-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}+c\right]\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{y}=\mathbf{O}\left(\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}\right)$，实正交矩阵 $\mathbf{O}$ 将 $\mathbf{A}$ 对角化：$\mathbf{OAO}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Lambda}$，$(p,q)$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的惯性指数。

[a] 如果 $\sqrt{\bullet}$ 不取主值，积分围道转回实轴时变为从 $+\infty$ 积到 $-\infty$，翻转过来会出个负号，与 $\sqrt{\bullet}$ 非主值产生的负号相抵消，结果是一样的。

矩阵 $\mathbf{A}=A_{ij}(\alpha)\times_{\text{kron.}}g_{\mu\nu}$，因此 $|\det\mathbf{A}|=|\det A_{ij}|^d|\det g_{\mu\nu}|^h=|\det A_{ij}|^d$，$(p,q)=\begin{cases}(h,(d-1)h) & A_{ij}\text{正定}\\((d-1)h,h) & A_{ij}\text{负定}\end{cases}$，$n=dh$，$\mathbf{A}^{-1}=A_{ij}^{-1}\times_{\text{kron.}}g^{\mu\nu}$ 可得

$$\int dk\exp iQ(k;q,\alpha,u)=e^{\pm_1 i\pi(2-d)h/4}\pi^{dh/2}|\det A_{ij}|^{-d/2}\exp i\left(-\frac{1}{4}A_{ij}^{-1}b_i\cdot b_j+c\right)$$

其中 $\pm_1$ 分别对应 A_{ij} 正定和负定。(7) 式对于分子平庸（$Z=1$）的情况，有：

$$\begin{aligned}F_\Gamma(q;d)&=\frac{(-i)^a e^{\pm_1 i\pi(2-d)h/4}\pi^{dh/2}}{\prod_l\Gamma(a_l)}\int_0^\infty\prod_l d\alpha_l\alpha_l^{a_l-1}|\det A_{ij}|^{-d/2}\exp\left[-i\left(\frac{1}{4}A_{ij}^{-1}b_i\cdot b_j-c\right)\right]\\&=\cdots\int_0^\infty d\eta\cdot\underline{\eta^{L-1}}\int_0^1\left(\prod_l d\alpha_l\right)\delta\left(\sum_l\alpha_l-1\right)\underline{\eta^{a-L}}\alpha_l^{a_l-1}\underline{\eta^{-dh/2}}|\det A_{ij}|^{-d/2}\underline{\exp\left[-i\eta Q'(q,\alpha)\right]}\\&=\cdots\int_0^1\left(\prod_l d\alpha_l\right)\delta\left(\sum_l\alpha_l-1\right)|\det A_{ij}|^{-d/2}\left(\prod_l\alpha_l^{a_l-1}\right)\underline{\int_0^\infty d\eta\cdot\eta^{a-dh/2-1}\exp\left[-i\eta Q'(q,\alpha)\right]}\\&=\frac{(-i)^a e^{\pm_1 i\pi(2-d)h/4}\pi^{dh/2}}{\prod_l\Gamma(a_l)}\int_0^1\left(\prod_l d\alpha_l\right)\delta\left(\sum_l\alpha_l-1\right)\\&\quad\times|\det A_{ij}|^{-d/2}\left(\prod_l\alpha_l^{a_l-1}\right)\underline{\frac{\Gamma(a-dh/2)}{(\pm_2 i)^{a-dh/2}\left[\pm_2 Q'(q,\alpha)\right]^{a-dh/2}}}\\&=i^{-a\pm_1(h-dh/2)\mp_2(a-dh/2)}\pi^{dh/2}\frac{\Gamma(a-dh/2)}{\prod_l\Gamma(a_l)}\int_0^1\left(\prod_l d\alpha_l\right)\delta\left(\sum_l\alpha_l-1\right)\frac{|\det A_{ij}|^{-d/2}\prod_l\alpha_l^{a_l-1}}{\left[\pm_2 Q'(q,\alpha)\right]^{a-dh/2}}\end{aligned}\tag{8}$$

上式中的 $\pm_2$ 是可以随意选择的。由于 $Q\sim Q+i0$，其 $+i0$ 贡献到 c 中，而 Q' 中的是 $-c$，因此 $Q'\sim Q'-i0$，下划线的分母本来是 $(iQ')^{a-dh/2}$ 取主值，而分解后的 $(\pm_2 i)^{a-dh/2}$ 取主值，则 $[\pm_2 Q'(q,\alpha)]^{a-dh/2}$ 刚好按 $[\pm_2(Q'(q,\alpha)-i0)]^{a-dh/2}$ 取主值理解。

对于 $Q_l\sim Q_l-i0$ 的情况，无需重复上面的讨论，只需在 (8) 式中令 $i\to -i$ 即可：

$$F_\Gamma(q;d)=i^{a\mp_1(h-dh/2)\pm_2(a-dh/2)}\pi^{dh/2}\frac{\Gamma(a-dh/2)}{\prod_l\Gamma(a_l)}\int_0^1\left(\prod_l d\alpha_l\right)\delta\left(\sum_l\alpha_l-1\right)\frac{|\det A_{ij}|^{-d/2}\prod_l\alpha_l^{a_l-1}}{\left[\pm_2 Q'(q,\alpha)\right]^{a-dh/2}}\tag{9}$$

这里 $[\pm_2 Q'(q,\alpha)]^{a-dh/2}$ 应按 $[\pm_2(Q'(q,\alpha)+i0)]^{a-dh/2}$ 取主值理解。

对于欧氏空间的情况，有 $\pm_1(2-d)h\to\pm_1 dh$，最后得到前面的因子为 $i^{-a\pm_1 dh/2\mp_2(a-dh/2)}$（$Q\sim Q+i0$），$i^{a\mp_1 dh/2\pm_2(a-dh/2)}$（$Q\sim Q-i0$）。

综上，对于分子平庸的情况，只需按照如下步骤：

$$Q(k;q,\alpha)=\sum_l Q_l\alpha_l\to\begin{cases}A_{ij}\\b_i\\c\end{cases}\to\begin{cases}Q'(q,\alpha)=\frac{1}{4}A_{ij}^{-1}b_i\cdot b_j-c\\\det A_{ij}\end{cases}\to\text{(8)(9)式}$$

进行计算即可。

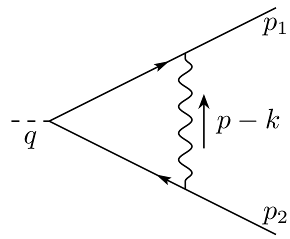

图 1: Example 1

1.6 Partial Fractions

Partial fractions 分解方法能帮助我们将一些传播子化成更简单的形式：

$$\frac{1}{(x+x_1)^{a_1}(x+x_2)^{a_2}}=\sum_{i=0}^{a_1-1}\begin{pmatrix}a_2-1+i\\a_2-1\end{pmatrix}\frac{(-1)^i}{(x_2-x_1)^{a_2+i}(x+x_1)^{a_1-i}}+\sum_{i=0}^{a_2-1}\begin{pmatrix}a_1-1+i\\a_1-1\end{pmatrix}\frac{(-1)^{a_1}}{(x_2-x_1)^{a_1+i}(x+x_2)^{a_2-i}}$$

证明：数学归纳法。（只在 a_1,a_2 为非负整数时成立）

2 例子

下面这些例子 [2] 我只算了 strategy of regions 展开的领头阶，对于例 2 的 hard region，只算出了 J_+ 部分。所有在文中没有出现的计算过程，**均可在我的程序“AP&IBP.nb”中找到**。

2.1 单圈顶角积分

见图1。运动学：$p_1^2=p_2^2=m^2$。定义 $p=(p_1-p_2)/2$，注意这里圈动量 k 选取具有技巧性。圈积分为

$$\begin{aligned}I_1&\equiv\int\frac{[dk]}{\left[(p_1-p+k)^2-m^2\right]\left[(p_2+p-k)^2-m^2\right](p-k)^2}\\&=\int\frac{[dk]}{(k^2+q\cdot k+q^2/4-m^2)(k^2-q\cdot k+q^2/4-m^2)(p-k)^2}\end{aligned}$$

其中 $[dk]\equiv e^{\epsilon\gamma_E}d^dk/\left(i\pi^{d/2}\right)$, $d=4-2\epsilon$。定义 $y\equiv m^2-q^2/4=p^2$, $\hat{y}=y/q^2$,

$$I_1=\int\frac{[dk]}{(k^2+q\cdot k-y)(k^2-q\cdot k-y)(p-k)^2}$$

现考虑质心系 $q=(q_0,\mathbf{0})$，在阈值以上附近，有 $y<0$（注意），$|y|\ll q$（q 有时也用来表示 $\sqrt{q^2}=q_0$，后面比较 scale 的时候将绝对值省去不写）。以 $\lambda\sim\sqrt{y}/q\ll1$ 做为展开参数，可以按圈动量 k 相对于 q 的不同 scale 将积分区域话分成几个区域。一般地，这种方法可以不只是考虑 k 而是 k 的某个函数相对于 q 是小量，这样可以得出很多区域，但大多数区域的贡献都是 0。在本例中，除了接下来要考虑几个区域外其余的贡献均为 0（我还不知道怎么证）。

注意：在划分好区域后，每个区域内（事实上，必须）将被积函数按相应的 λ 幂次做展开，但积分区域是不变的（还是整个动量空间!）。关于这一点，应该这么理解，首先“物理地”划分区域其实是需要设置 cut-off Λ 的，Λ 应介于两个 scale 之间，这样在两个区域中就可以安全地做 λ 展开了（不用担心超出收敛域），这样展开后积分的结果包含两个部分：A 部分，Λ 有关部分，形式是若干 $\Lambda^{a+b\epsilon}$ 的和；B 部分，Λ 无关部分，只是 ϵ 的函数。现在 strategy of region 这个方法要我们算全空间的积分，就是说要令 $\Lambda \to 0$ or ∞（取决于 cut-off 的性质），这时的A 部分就会变成 $\Lambda^{\text{pos}} \xrightarrow{\Lambda\to 0} 0$ or $\Lambda^{\text{neg}} \xrightarrow{\Lambda\to\infty} 0$ 而消失掉。你可能要问了，也有可能会有 $\Lambda^{\text{pos}} \xrightarrow{\Lambda\to\infty} \infty$ 之类的情况啊，在这种情况下如果按正常方式理解其实即使维数正规化的积分也是发散的，不过这没关系，我们可以将 ϵ 解析延拓到所有 Λ^{pos} 都变成 Λ^{neg} 为止，这样再取全空间积分（$\Lambda \to \infty$）A 部分就变为 0 了，最后积分的结果实际上只包含B 部分，而由于B 部分的解析（半纯）性，再把 ϵ 取回原来的值就能得到原来的B 部分[2]。总之这一波操作下来全空间积分的结果正好就只包含B 部分，而A 部分被扔掉了。下面是要点：各个区域的带 cut-off 的积分结果加起来，A 部分本来就是相互抵消的，这是因为所有区域加起来本来就不会依赖 cut-off Λ。因此，我们对各个区域算出B 部分，再将B 部分加起来，和算带 cut-off 的积分再加起来结果是一样的（但单取某一部分算的结果不一样）。最后再提一下，对于无标度积分，其结果中B 部分就为 0，而A 部分就包含刚刚提到的 $\Lambda^{\text{pos}} \xrightarrow{\Lambda\to\infty} \infty$ 这样的项，这就是为什么它们看起来发散却被当作 0 的原因。以上只是我的一种理解，不是证明（有限区域的维数正规化就有点 subtle，解析正规化 $a_i \to \lambda_i$ 可能会好些）。

2.1.1 Hard region & soft region

首先显而易见的是下面这两个区域

$$\begin{aligned} \text{hard:}\ & k_0 \sim q,\ \mathbf{k} \sim q \\ \text{soft:}\ & k_0 \sim \sqrt{y} \sim \lambda q,\ \mathbf{k} \sim \sqrt{y} \sim \lambda q \end{aligned}$$

在 hard region 中，积分按 $y \ll q^2 \sim k^2$ 展开

$$I_1^h = \int \frac{[dk]}{(k^2 + q\cdot k)(k^2 - q\cdot k)\, k^2}$$

通过程序算得

$$I_1^h = -e^{\epsilon\gamma_{\mathrm{E}}} \frac{2^{1+2\epsilon}}{(q^2)^{1+\epsilon}} \frac{\Gamma(\epsilon)}{1+2\epsilon}$$

在 soft region 中，有 $k_0 \sim \sqrt{y}$, $\mathbf{k} \sim \sqrt{y} \Rightarrow k^2 - y \ll q\cdot k$，依此展开

$$I_1^s = \int \frac{[dk]}{(q\cdot k)(-q\cdot k)(p-k)^2} = 0$$

其中上式对 k 做平移 $k \to k + p$ 可化为无标度积分，因此为 0。

2.1.2 Potential region

对于 $q_0 k_0 \sim y$ 即 $k_0 \sim y/q \sim \lambda^2 q$，而 $\mathbf{k} \sim \lambda q$ 的情况，这时 $k^2 - y \sim q\cdot k$，因此 soft region 的展开方式失效。这时需要单独分出一个 potential region，按 $k_0 \sim y/q \ll \sqrt{y}$ 展开

$$\frac{1}{k^2 \pm q\cdot k - y} = \frac{1}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 \pm q_0 k_0 - y} = \frac{1}{-\mathbf{k}^2 \pm q_0 k_0 - y} + \cdots$$

[2] 但如果不能算出关于 ϵ 的精确表达式，只能算出 ϵ 展开的前几项，则做不了解析延拓。

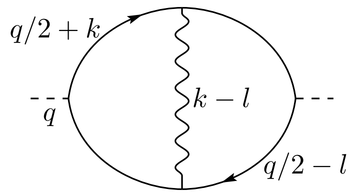

图 2: Example 2

$$\frac{1}{(p-k)^2} = \frac{1}{k_0^2 - (\mathbf{p}-\mathbf{k})^2} = \frac{1}{-(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2} + \cdots$$

得到（对 k_0 积分，两个极点分别在围道的两侧，任取其中一个极点的留数即可，不过要注意围道的方向）

$$\begin{aligned} I_1^p &= \int \frac{[dk]}{(-\mathbf{k}^2 + q_0 k_0 - y)(-\mathbf{k}^2 - q_0 k_0 - y)\left[-(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2\right]} \\ &= -\int \frac{e^{\epsilon\gamma_{\mathrm{E}}} d^{d-1}k}{i\pi^{d/2}} 2\pi i \frac{1}{(-2\mathbf{k}^2 - 2y)(-q_0)(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2} \\ &= \frac{-1}{q} e^{\epsilon\gamma_{\mathrm{E}}} \int \frac{d^{d-1}k}{\pi^{d/2-1}} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + y)(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2} \end{aligned} \tag{10}$$

由程序计算得

$$I_1^p = e^{\epsilon\gamma_{\mathrm{E}}} \frac{-ie^{-i\pi\epsilon}}{q} (-y)^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}{2\epsilon}$$

其中 $(-y)^{-\frac{1}{2}-\epsilon} = (-y-i0)^{-\frac{1}{2}-\epsilon} = (-1-i0)^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(y+i0)^{-\frac{1}{2}-\epsilon} = ie^{i\pi\epsilon}y^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$，取主值。

$$I_1^p = e^{\epsilon\gamma_{\mathrm{E}}} \frac{1}{qy^{1/2+\epsilon}} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}{2\epsilon}$$

2.1.3 其他区域

如果按各个传播子的 pole：$(p_{1,2}-p+k)^2 - m^2, (p-k)^2 \sim y$ or y^2/q^2 or 0 之类的情况划分区域，实际上和上面的各区域是交叉的，即上面各区域都可能传播子取到 pole，在本例中这些 pole 对应的区域给出的贡献将化为无标度积分，因而为 0。

2.1.4 精确解

见程序。

2.2 两圈两点积分

如图2所示，其中 q, y 的定义与例 1 一致，k, l 分别为左边和右边的圈动量：

$$I_2 = \int \frac{[dk][dl]}{(k^2 + q\cdot k - y)(k^2 - q\cdot k - y)(l^2 + q\cdot l - y)(l^2 - q\cdot l - y)(k-l)^2}$$

可按圈动量的 hard($k \sim q$),soft($k \sim \lambda q$),potential($k_0 \sim \lambda^2 q, \mathbf{k} \sim \lambda q$),ultra-soft($k_0 \sim \lambda^2 q, \mathbf{k} \sim \lambda^2 q$) 来划分区域，其中圈动量可以是除了上述 k, l 外的别的选取方式，这就有很强的任意性。但最后非零的只有少数几个区域。

2.2.1 Hard-hard region

此区域中按 $y \ll q^2 \sim k^2 \sim l^2$ 展开：

$$I_2 = \int \frac{[dk]\,[dl]}{(k^2 + q\cdot k)\,(k^2 - q\cdot k)\,(l^2 + q\cdot l)\,(l^2 - q\cdot l)\,(k-l)^2}$$

通过 partial fractions 分解，可将分母化成（理论见1.6节，实现方法见程序）

$$J_{\pm}\left(q; a_1, \ldots, a_5\right) = \int \frac{[dk]\,[dl]}{(-k^2)^{a_1}\,(-l^2)^{a_2}\left[-(k-l)^2\right]^{a_3}\left[-(k^2+q\cdot k)\right]^{a_4}\left[-(l^2 \pm q\cdot l)\right]^{a_5}}$$

的线性组合，结果为

$$I_2^h = -\frac{1}{2} J_+\left(q; 1,1,1,1,1\right) - \frac{1}{2} J_-\left(q; 1,1,1,1,1\right)$$

利用 IBP 关系，费曼积分的被积函数在 $\frac{\partial}{\partial p_1}\cdot p_2$（$p_1 \in \{k, l\}, p_2 \in \{k, l, q\}$）的作用下积分为 0，其中计算时用到了：

$$\frac{\partial}{\partial k}\frac{1}{(-k^2)^{a_1}} = \frac{-a_1\,(-2k)}{(-k^2)^{a_1+1}} = \frac{2a_1 k}{(-k^2)^{a_1+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\frac{1}{\left[-(k-l)^2\right]^{a_3}} = \frac{2a_3\,(k-l)}{\left[-(k-l)^2\right]^{a_3+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\frac{1}{\left[-(l^2 \pm q\cdot l)\right]^{a_5}} = \frac{a_5\,(2l+q)}{\left[-(l^2 + q\cdot l)\right]^{a_5+1}}$$

对于 $J_+\left(q; a_1, \ldots, a_5\right)$，我找到了两个有用的关系

$$(d - a_1 - 2a_3 - a_4) = a_1\mathbf{1}^+\left(\mathbf{3}^- - \mathbf{2}^-\right) + a_4\mathbf{4}^+\left(\mathbf{3}^- - \mathbf{5}^-\right) \tag{11}$$

$$(d - a_2 - 2a_3 - a_5) = a_2\mathbf{2}^+\left(\mathbf{3}^- - \mathbf{1}^-\right) + a_5\mathbf{5}^+\left(\mathbf{3}^- - \mathbf{4}^-\right) \tag{12}$$

利用 (11)，可将 a_2, a_3, a_5 之一降到 0，如果 a_3 降到 0，则 k, l 退耦，可分别计算；若 a_5 降到 0，则可先积 l，再积 k；如果 a_2 降到 0，则用 (12) 式的特殊情况（$a_2 = 0$），将 a_3 或 a_4 降到 0，如果 a_3 降为 0，则 k, l 退耦；如果 a_4 降到 0，则可先积 k，再积 l。最后得到结果

$$q^2 J_+\left(q^2, 1,1,1,1,1\right) = -\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{2}{\epsilon} + 4 + 8\log 2 - 4\log q^2\right) - 8\zeta(3) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

对于 $J_-\left(q; a_1, \ldots, a_5\right)$，有递推关系

$$2d - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 - a_4 - a_5 = a_4\mathbf{1}^-\mathbf{4}^+ + a_5\mathbf{2}^-\mathbf{5}^+ \tag{13}$$

$$d - 2a_3 - a_4 = a_4\mathbf{4}^+\left(\mathbf{3}^- + \mathbf{5}^- - 2\mathbf{2}^-\right) \quad (a_1 = 0) \tag{14}$$

$$d - 2a_3 - a_5 = a_5\mathbf{5}^+\left(\mathbf{3}^- + \mathbf{4}^- - 2\mathbf{1}^-\right) \quad (a_2 = 0) \tag{15}$$

利用 (13)，可将 a_1 或 a_2 降为 0。如果 a_1 降为 0，则用 (14) 将 a_2, a_3, a_5 之一降为 0；如果 a_2 降为 0，则用 (15) 将 a_1, a_3, a_4 之一降为 0。最后得到 $J_-\left(0,0,a_3,a_4,a_5\right)$, $J_-\left(0,a_2,0,a_4,a_5\right)$, $J_-\left(a_1,0,0,a_4,a_5\right)$, $J_-\left(0,a_2,a_3,a_4,0\right)$, $J_-\left(a_1,0,a_3,0,a_5\right)$ 的线性组合。其中除了第一个 $J_-\left(0,0,a_3,a_4,a_5\right)$ 以外，都可以将积分分解或者逐次进行计算。对于 $J_-\left(0,0,a_3,a_4,a_5\right)$，[2] 中说可以化成 $J_-\left(0,0,1,1,1\right)$，但我目前还没有找到那个递推式，也不确定需要将 $J_-\left(0,0,1,1,1\right)$ 算到 ϵ 的第几阶（目前只能算到 $\mathcal{O}\left(\epsilon^0\right)$ 阶），故放弃。

2.2.2 Hard-potential region

能被称作 Hard-potential region 的区域不唯一，但贡献非 0 的是下面的这个，它其实是两个区域（$k \leftrightarrow l$），因此带有因子 2。

此区域中 $k \sim q$, $l_0 \sim y/q$, $\mathbf{l} \sim \sqrt{y}$。$k-l \sim k$，因此 k,l 退耦，它们各自分别按 hard, potential 方式展开：

$$I_2^{h-p} = 2\int \frac{[dl]}{\left(-\mathbf{l}^2+q_0 l_0-y\right)\left(-\mathbf{l}^2-q_0 l_0-y\right)} \int \frac{[dk]}{k^2\left(k^2+q\cdot k\right)\left(k^2-q\cdot k\right)}$$

利用与例 1 相同的方法，得到

$$I_2^{h-p} = \frac{8\pi\sqrt{y}}{q^3}\left(\frac{1}{\epsilon}-\ln q^2-\ln y\right)$$

2.2.3 Potential-potential region

在此区域中 $k_0, l_0 \sim \lambda^2 q$, $\mathbf{k},\mathbf{l} \sim \lambda q$。仿照例 1 的 potential region（(10) 式）做展开，

$$I_2^{p-p} = \frac{-1}{q^2}e^{2\epsilon\gamma_E}\int \frac{d^{d-1}k\, d^{d-1}l}{\pi^{d/2-1}\pi^{d/2-1}} \frac{1}{\left(\mathbf{k}^2+y\right)\left(\mathbf{l}^2+y\right)\left(\mathbf{k}-\mathbf{l}\right)^2}$$

算得

$$\begin{aligned}
I_2^{p-p} &= \frac{y^{-2\epsilon}}{q^2}e^{2\epsilon\gamma_E}\frac{\Gamma\left(\epsilon-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\epsilon+\frac{1}{2}\right)}{2\epsilon} \\
&= \frac{\pi^2}{q^2}\left(-\frac{1}{\epsilon}-2+4\ln 2+2\ln y\right)
\end{aligned}$$

2.2.4 Potential-ultrasoft region

能被称作 Potential-ultrasoft region 的区域不唯一，这里说的只是有非零贡献的。其中 ultrasoft 的动量指的是 $k-l$，而不是 k,l 中的哪一个。因此不妨令 $k \to k+l/2$, $l \to k-l/2$，其中 $\to$ 左边的是旧变量，右边的是新变量，得到的新变量的 scale 为 $k_0 \sim \lambda^2 q$, $\mathbf{k} \sim \lambda q$（potential），$l \sim \lambda^2 q$（ultrasoft）。对新的 k,l 做相应的展开得

$$\begin{aligned}
I_2^{p-us} = \int & \frac{[dk]\,[dl]}{\left(-\mathbf{k}^2+q_0\left(k_0+l_0/2\right)-y\right)\left(-\mathbf{k}^2-q_0\left({\color{red}k_0}+l_0/2\right)-y+ie_1\right)} \\
&\times \frac{1}{\left(-\mathbf{k}^2+q_0\left(k_0-l_0/2\right)-y\right)\left(-\mathbf{k}^2-q_0\left({\color{red}k_0}-l_0/2\right)-y+ie_2\right)\left(l_0^2-\mathbf{l}^2\right)}
\end{aligned}$$

做 k_0, l_0 积分，其中 k_0 取红色部分的 pole 的留数：

$$\begin{aligned}
I_2^{p-us} = & \frac{1}{-q}e^{\epsilon\gamma_E}\int \frac{d^{d-1}k\,[dl]}{i\pi^{d/2}} \frac{\pi i}{2\left(-\mathbf{k}^2-y\right)\left(l_0^2-\mathbf{l}^2+i0\right)\left(q_0 l_0+ie\right)} \\
&\times\left(\frac{1}{-\mathbf{k}^2-q_0 l_0/2-y+i0}-\frac{1}{-\mathbf{k}^2+q_0 l_0/2-y+i0}\right) \\
= & \frac{1}{-q}e^{2\epsilon\gamma_E}\int \frac{d^{d-1}k\, d^{d-1}l}{\pi^{d/2-1}i\pi^{d/2}} \frac{2\pi i}{2\left(-\mathbf{k}^2-y\right)} \\
&\times\left(\frac{(-1)}{2\left|\mathbf{l}\right| q_0\left|\mathbf{l}\right|\left(-\mathbf{k}^2-q_0\left|\mathbf{l}\right|/2-y\right)}+{\color{blue}\frac{(-1)}{\left(-\mathbf{l}^2\right)q_0\left(-\mathbf{k}^2-y\right)}}-\frac{1}{-2\left|\mathbf{l}\right|\left(-q_0\left|\mathbf{l}\right|\right)\left(-\mathbf{k}^2-q_0\left|\mathbf{l}\right|/2-y\right)}\right)
\end{aligned}$$

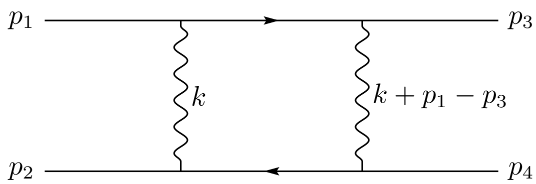

图 3: Example 3

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{q^2} e^{2\epsilon\gamma_E} \int \frac{d^{d-1}k d^{d-1}l}{\pi^{d/2-1}\pi^{d/2-1}} \frac{1}{2\left(-\mathbf{k}^2-y\right)} \left(\frac{1}{\mathbf{l}^2\left(-\mathbf{k}^2-q_0\left|\mathbf{l}\right|/2-y\right)} + {\color{blue}0} + \frac{1}{\mathbf{l}^2\left(-\mathbf{k}^2-q_0\left|\mathbf{l}\right|/2-y\right)}\right) \\
&= \frac{1}{q^2} e^{2\epsilon\gamma_E} \int \frac{d^{d-1}k d^{d-1}l}{\pi^{d/2-1}\pi^{d/2-1}} \frac{1}{\left(\mathbf{k}^2+y\right)\mathbf{l}^2\left(\mathbf{k}^2+q_0\left|\mathbf{l}\right|/2+y\right)} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

其中 $e=e_2-e_1$，假设 $e>0$，其实大于小于 0 无所谓，蓝色部分是 $\mathbf{l}$ 的无标度积分。l_0 积分的前半部分选下半平面（顺时针，有 (-1)），后半部分选上半平面（逆时针）。(16) 式先对 $\mathbf{l}$ 积分再对 $\mathbf{k}$ 积分得到

$$
I_2^{p-us} = \frac{8\pi\sqrt{y}}{q^3}\left(-\frac{1}{\epsilon} - 8 + 10\ln 2 - \ln q^2 + 3\ln y\right)
$$

2.2.5 其他区域

太多了一下分析不完。举例来说像 soft-soft region 这样的

$$
I_2^{s-s} = \int \frac{[dl]\,[dk]}{\left(q\cdot l\right)^2\left(q\cdot k\right)^2\left(l-k\right)^2}
$$

其实是无标度积分。BTW，我不认为在 soft region 下能按 k_0^2 做展开。

2.3 单圈 2 到 2 散射

如图3, 这是个 soft region 有非零贡献的例子。我们令 p,q,y 的定义与例 1 一致，而 $p'=\left(p_3-p_4\right)/2$, $t=\left(p'-p\right)^2$,

$$
I_3 = \int \frac{[dk]}{\left[\left(k+p\right)^2+q\cdot k-y\right]\left[\left(k+p\right)^2-q\cdot k-y\right]k^2\left(k+p-p'\right)^2}
$$

按 k 的 hard,potential,soft,ultrasoft 划分区域。

2.3.1 Hard region

$p,p'\sim\sqrt{y}\ll q\sim k$,

$$
I_3^h = \int \frac{[dk]}{\left[k^2+q\cdot k\right]\left[k+p^2+q\cdot k\right]k^2\left(k+p-p'\right)^2}
$$

算得

$$
I_3^h = -\frac{8}{3}\frac{1}{q^2}
$$

2.3.2 Potential region

$k_0 \sim y/q \ll \sqrt{y} \sim p, p', \mathbf{k}$，按 $k_0 \sim \lambda^2 q, \mathbf{k} \sim \lambda q$ 展开，然后仿照 (10) 对 k_0 积分

$$I_3^p = \int \frac{[dk]}{\left[-(\mathbf{k}+\mathbf{p})^2 + q_0 k_0 - y\right]\left[-(\mathbf{k}+\mathbf{p})^2 - q_0 k_0 - y\right](-\mathbf{k}^2)\left[-(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2\right]}$$
$$= \frac{e^{\epsilon\gamma_{\mathrm{E}}}}{q_0}\int \frac{d^{d-1}k}{\pi^{d/2-1}} \frac{1}{\left[(\mathbf{k}+\mathbf{p})^2 + y\right]\mathbf{k}^2(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}$$

算得

$$I_3^p = \frac{\pi}{qt\sqrt{y}}\left(\frac{1}{\epsilon} - \ln(-t)\right)$$

2.3.3 Soft region

$k, p, p' \sim \sqrt{y} \ll q$，按 $k \sim \lambda q$ 展开

$$I_3^s = \int \frac{[dk]}{(+q_0 k_0)(-q_0 k_0)k^2(k+p-p')^2}$$
$$= \frac{-1}{q^2}\int \frac{[dk]}{k_0^2 k^2 (k+p-p')^2}$$

对 k_0 积分，积分实际上是发散的，这是因为 $k_0 = 0$ 的 pole 是 pinched 的，但按照 [2] 它必须被 ignored，你可能好奇它怎么能被 ignored，我的答案是减去一些像

$$\int \frac{[dk]}{k_0^2 \mathbf{k}^2 (\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}$$

这样的关于 k_0 的无标度积分，直到 k_0 regular 为止。总之只需考虑 $k_0 = \pm|\mathbf{k}|, k_0 = \pm|\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'|$ 这样的 pole。不妨选积分围道往上半平面绕，pole 的 $\pm$ 取 $-$，得到

$$I_3^s = \frac{-1}{q^2}\int \frac{e^{\epsilon\gamma_{\mathrm{E}}} d^{d-1}k}{i\pi^{d/2}} 2\pi i \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2(-2|\mathbf{k}|)\left[\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2\right]} + \frac{1}{(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2\left[(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 - \mathbf{k}^2\right](-2|\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'|)}\right)$$
$$= \frac{e^{\epsilon\gamma_{\mathrm{E}}}}{q^2}\int \frac{d^{d-1}k}{\pi^{d/2-1}}\left(\frac{1}{|\mathbf{k}|^3\left[\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + i0\right]} - \frac{1}{|\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^3\left[\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + i0\right]}\right) \tag{17}$$

关于上式两项中为何都取 $+i0$，这里有一个**要点**：如果按照传播子自然的取法，第二项中应该是 $-i0$ 才对，但是我们应该注意到，当 $|\mathbf{k}| \to |\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'|$ 时，pole 趋于 dipole，这时对 k_0 应用留数定理时 pole 处的虚部不能忽略：

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z - z_1 - i\epsilon_1)(z - z_2 - i\epsilon_2)} = \frac{f(z_1 - i\epsilon_1)}{[z_1 - z_2 + i(\epsilon_1 - \epsilon_2)]} + \frac{f(z_2 - i\epsilon_2)}{[z_2 - z_1 - i(\epsilon_1 - \epsilon_2)]}$$
$$= \frac{1}{[z_1 - z_2 + i(\epsilon_1 - \epsilon_2)]}\left[f(z_1 - i\epsilon_1) - f(z_2 - i\epsilon_2)\right]$$
$$= \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2 + i\epsilon} \quad (\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2)$$

可见上式结果的两项中 $i\epsilon$ 同号，倒不一定非要 $\epsilon > 0$，$\epsilon = 0$ 或 $\epsilon < 0$ 也是可以的。

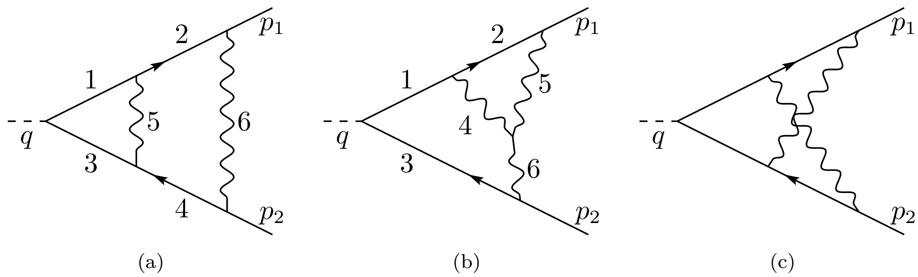

图 4: Example 4

对 (17) 式第二项做变换 $\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'\to-\mathbf{k}$（这不只是平移），得到

$$
\begin{aligned}
I_3^s &= \frac{e^{\epsilon\gamma_E}}{q^2}\int\frac{d^{d-1}k}{\pi^{d/2-1}}\frac{1}{(\mathbf{k}^2)^{3/2}}\left(\frac{1}{\mathbf{k}^2-(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+i0}-\frac{1}{(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2-\mathbf{k}^2+i0}\right)\\
&= \frac{e^{\epsilon\gamma_E}}{q^2}\int\frac{d^{d-1}k}{\pi^{d/2-1}}\frac{1}{(\mathbf{k}^2)^{3/2}}\left(\frac{1}{-2\mathbf{k}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')-(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+i0}+\frac{1}{-2\mathbf{k}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')-(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2-i0}\right)\\
&= \frac{e^{\epsilon\gamma_E}}{q^2}\int\frac{d^{d-1}k}{\pi^{d/2-1}}\frac{1}{(\mathbf{k}^2)^{3/2}}\left(\frac{1}{-2\mathbf{k}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')+t+i0}+\frac{1}{-2\mathbf{k}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')+t-i0}\right)
\end{aligned}
$$

最后得到

$$I_3^s = \frac{4}{q^2 t}\left[-\frac{1}{\epsilon}+\ln(-t)\right]$$

2.4 两圈顶点积分

我就画个图看看（图4）。

A 超几何函数

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 \mathrm{d}x\; x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}$$

有生之年。

B 关于维数正规化，解析正规化，Strategy of regins 的理解

还没有组织好语言，有生之年吧。

参考文献

[1] V. A. Smirnov, Feynman integral calculus, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[2] M. Beneke, V. A. Smirnov, Nucl. Phys. **B**522, (1998), 321-344.