2. vizsga-zh, Matematika A3 VIK Villamosmérnök, 2023/24 ősz

(Minden feladat 12 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)

1. **a)** Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet! **b)** Adja meg azt a partikuláris megoldást, amelyik teljesíti az $y(0) = -2$ kezdeti feltételt! **c)** Előáll-e az általános megoldás valamely $y_1(x)$ és $y_2(x)$ függvénnyel $y(x) = cy_1(x) + y_2(x)$ alakban, ahol c tetszőleges valós szám?

$$y' - xy = x$$

MO. *Változó szeparálással* $y' = x(y+1)$ alakban:

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1) \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int x\,dx$$

$\ln|y+1| = x^2/2 + C$ továbbá az $y = 0$ szinguláris megoldás, tehát egy új konstanssal $y = -1 + ce^{x^2/2}$. *Lineáris egyenletként.* A homogén egyenlet általános megoldása: $y' - xy = 0$-ből $\ln|y| = x^2/2 + C \rightsquigarrow |y| = e^{x^2/2+C}$, ahonnan egy új $c \in \mathbf{R}$ konstanssal: $y = ce^{x^2/2}$. Az integrálási konstans variálásával az inhomogén megoldást $y = c(x)e^{x^2/2}$ alakban keressük:

$$c'(x)e^{x^2/2} + c(x)e^{x^2/2}x - c(x)e^{x^2/2}x = x \rightsquigarrow c'(x)e^{x^2/2} = x \rightsquigarrow c(x) = -\int(-x)e^{-x^2/2} = -e^{-x^2/2}$$

Az egyenlet megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egy partikuláis megoldásának összege: $y = ce^{x^2/2} - e^{-x^2/2}e^{x^2/2} = ce^{x^2/2} - 1$.
b) $c = -1$, c) Igen, mert lineáris: $y_1(x) = e^{x^2/2}$ és $y_2(x) = -1$.

2. Oldja meg az $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 6e^{-t}$ differenciálegyeletet az $y(0) = 1, y'(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett!

MO. Laplace-transzformációval. $s^2Y - s - 3sY + 3 + 2Y = \frac{6}{s+1} \rightsquigarrow (s^2 - 3s + 2)Y - s + 3 = \frac{6}{s+1}$ innen:

$$Y = \frac{\frac{6}{s+1} + s - 3}{s^2 - 3s + 2} =$$

$$= \frac{6}{(s+1)(s^2-3s+2)} + \frac{s-3}{s^2-3s+2} = \frac{6}{(s+1)(s-1)(s-2)} + \frac{(s-3)(s+1)}{(s+1)(s-1)(s-2)} =$$

$$= \frac{6 + (s-3)(s+1)}{(s+1)(s-1)(s-2)}$$

Innen parciális törtekre bontunk:

$$\frac{6 + (s-3)(s+1)}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} = \frac{A(s+1)(s-2) + B(s-1)(s+2) + C(s-1)(s+1)}{(s+1)(s-1)(s-2)}$$

majd $s = 1, s = -1, s = -2$ helyettesítéssel:

$$Y = \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-2} \text{ ahonnan: } y(t) = -e^t + e^{-t} + e^{2t}.$$

3. Számítsa ki a $G : r(t) = (1, \sin t, \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ vonalra a $v(x,y,z) = (3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2)$ függvény integrálját!

MO.

$$\operatorname{rot} v(x,y,z) = \begin{vmatrix} j & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3x^2y^2z & 2x^3yz & x^3y^2 \end{vmatrix} = i(0-0) - j(0-0) + k(0-0) = 0$$

Mivel v rotációja azonosan nulla és mindenhol értelmezett a függvény, ezért van u potenciálja, azaz G a görbe zárt görbére a vonalintegrál: $\int_G v\,dr = u(1,0,1) - u(1,0,1) = 0$.

4. Számítsa ki az $z = 0$, $z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ síkok által határolt négyzet alapú hasáb palástjára a $v(x,y,z) = (y^3 + \sin z, -2yz + e^z, z(z-3))$ vektorfüggvény felületi integrálját!

MO. Alaplapok: $T_1 : ((0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0))$, erre $v(x,y,0) = (y^3,1,0) \perp (0,0,-1)$ $\iint_{T_1} v\,dA = 0$ (T_1 kifelé mutató normálisa $(0,0,-1)$). T_2: $((0,0,3),(1,0,3),(1,1,3),(0,1,3))$, itt $v(x,y,3) = (y^3 + \sin 3, -6y + e^3, 0) \perp (0,0,1)$, hiszen T_2 kifelé mutató normálisa $(0,0,1)$, így $\iint_{T_2} v\,dA = 0$. A Gauss-tételből a hasáb zárt V térfogatának ∂V kifelé irányított felszínére az integrál:

$$\oiint_{\partial V} v\,dA = \iiint_V \operatorname{div} v\,dV = \iiint_V 2\,dV = -3 \cdot |V| = -9.$$

Hiszen $\operatorname{div} v = -3$. Tehát a palástra az integrál:

$$\iint_P v\,dA = \oiint_{\partial V} v\,dA - \iint_{T_1} v\,dA - \iint_{T_2} v\,dA = -9.$$

5. (3+3+3+3)

a) Mennyi az $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, v(r) = r$ vektorfüggvény felületi integrálja az $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$ egyenletű felületekkel határolt henger kifelé irányított palástjára, ahol $H, R > 0$?

b) Mennyi az $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^3, v(r) = \frac{r}{|r|^4}$ vektorfüggvény felületi integrálja az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ egyenletű gömbfelületre, ahol $R > 0$ és a felület a térfogatba *befelé* van irányítva?

c) Mi az $F(s) = \frac{s}{(s-2)^2}$ függvény inverz Laplace-franszformáltja?

d) Mi az $y' = y^3$ differenciálegyenlet azon megoldása, amelyik eleget tesz az $y(0) = -1$ kezdeti feltételnek?

MO. a) Ha r végpontja a paláston van, akkor $v = r$ miatt v normálisra eső vetülete mindig $v_\perp = R$, így $\iint_A v dA = \iint_A v_\perp |dA| = \iint_A R|dA| = R|A| = R \cdot 2R\pi \cdot H = 2\pi R^2 H$.

b) Ha r végpontja a gömbfelületen van, akkor r-nek a normálisra eső vetülete mindig $v_\perp = R/R^3 = 1/R^3$, így $\iint_A v dA = \iint_A v_\perp |dA| = \iint_A -\frac{1}{R^3}|dA| = -\frac{1}{R^3}|A| = -\frac{1}{R^3} \cdot 4R^2\pi = \frac{-4\pi}{R}$.

c) Parciális törtékre bontva, majd átalakítva: $\frac{s}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-2)^2} = \frac{0!}{(s-2)^{0+1}} + 2\frac{1!}{(s-2)^{1+1}} \rightsquigarrow f(t) = e^{2t} + 2te^{2t}$.

d) Szeparálással: $\frac{1}{-2}y^{-2} = x + C$, innen $C = -\frac{1}{2}$.

iMSc. Számítsa ki a $v(r) = \frac{k \times r}{|k \times r|^2}$ vektorfüggvény rotációját, ahol értelmes! ($k = (0,0,1)$)

MO.

$$\operatorname{rot} \frac{k \times r}{|k \times r|^2} = \operatorname{rot}(k \times r)\frac{1}{|k \times r|^2} + (k \times r) \times \operatorname{grad}\frac{1}{|k \times r|^2} = \frac{2k}{|k \times r|^2} + (k \times r) \times \frac{k \times (k \times r)}{|k \times (k \times r)|}\frac{-2}{|k \times r|^3} =$$

$$= \frac{2k}{|k \times r|^2} + \frac{-2k}{|k \times r|^2} = 0$$

vagy komponensekkel felírva.