1. vizsga-zh, Matematika A3 VIK Villamosmérnök, 2023/24 ősz

*(Minden feladat 12 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)*

**1.** **a)** Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet! **b)** Adja meg azt a partikuláris megoldást, amelyik teljesíti az $y(-1) = -1$ kezdeti feltételt! **c)** Előáll-e az általános megoldás valamely $y_1(x)$ és $y_2(x)$ függvénnyel $y(x) = cy_1(x) + y_2(x)$ alakban, ahol $c$ tetszőleges valós szám?

$$y' - \frac{y}{x} = 1$$

**MO.** Pl. $u = y/x$ helyettesítéssel: $u'x + u = u + 1 \rightsquigarrow u' = 1/x$, tehát $u = \ln|x| + C$, ahonnan $y = Cx + x\ln|x|$. b) $C = -1$, c) Igen. $y_1(x) = x$ és $y_2(x) = x\ln|x|$.

**2.** Oldja meg az $y'' - 4y' + 4y = 6te^{2t}$ differenciálegyeletet az $y(0) = 1, y'(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett!

**MO.** Laplace-transzformációval. $s^2Y - s - 4sY + 4 + 4Y = \frac{6}{(s-2)^2} \rightsquigarrow (s^2 - 4s + 4)Y - s + 4 = \frac{6}{(s-2)^2} \rightsquigarrow$ $Y = \frac{1}{s-2} + \frac{-2}{(s-2)^2} + \frac{6}{(s-2)^4} \rightsquigarrow y(t) = y(t) = e^{2t} - 2te^{2t} + t^3e^{2t}$.

**3.** Számítsa ki a $G : r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ vonalra a $v(x, y, z) = (x^3 + 3, x^2y^2 - 1, z^2)$ függvény integrálját!

**MO.** Stokes-tétellel. Legyen $T = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0\}$ az $r(t)$-vel kompatibilisen irányítva, azaz $(0, 0, 1)$ normálissal. $\operatorname{rot} v = (0, 0, 2xy^2)$ és $(\operatorname{rot} v) \perp= (0, 0, 2xy^2) \cdot (0, 0, 1) = 2xy^2$. Ekkor

$$\oint_{\partial T} v\,dr = \int_T \operatorname{rot} v\,dA = \int_T (\operatorname{rot} v)_\perp |dA| = \int_T \operatorname{rot} v\,dA \iint_T 2xy^2\,dxdy =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 2r\cos\varphi r^2 \sin^2\varphi r\,dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 2r^4 \cos\varphi \sin^2\varphi\,dr d\varphi = \left[\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{2}{5}r^5\right]_0^1 = \frac{4}{15}.$$

A lezáró $L = [(0, 1, 0), (0, -1, 0)]$ szakaszon $v_\parallel = (3, -1, 0) \cdot (0, -1, 0) = 1$ mert $L$ az $y$-tengellyel ellentétesen van irányítva, azaz $L$ irányvektora $(0, -1, 0)$, így az integrál:

$$\int_L v\,dr = \int_L v_\parallel\,dr = \int_{-1}^{1} 1\,dy = 2.$$

Tehát

$$\int_G v\,dr = \oint_{\partial T} v\,dr - \int_L v\,dr = -\frac{26}{15}.$$

**4.** Számítsa ki az $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$, $y = 0$, $z = 1 - y$ síkok által határolt háromszög alapú hasáb palástjára a $v(x, y, z) = (3x^2y^2z, -2xy^3z, 2z)$ vektorfüggvény felületi integrálját!

**MO.** Alaplapok: $T_1 : ((0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, erre $v(0, y, z) = (0, 0, 2z) \parallel T_1 \rightsquigarrow \iint_{T_1} v\,dA = \iint_{T_1} v_\perp |dA| = \iint_{T_1} 0|dA| = 0$ ($T_1$ kifelé mutató normálisa $(-1, 0, 0)$, de az integrál nulla). $T_2$: $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1))$, itt $v(1, y, z) = (3y^2z, -2y^3z, 2z) \rightsquigarrow \iint_{T_2} v\,dA = \iint_{T_2} v_\perp |dA| =$

$\int_0^1 \int_0^{1-y} 3y^2 z\, dz dy = \frac{1}{20}$, hiszen $T_2$ kifelé mutató normálisa $(1,0,0)$ és $v_\perp = (3y^2z, -2y^3z, 2z)\cdot(1,0,0) = 3y^2z$. A Gauss-tételből a hasáb zárt $V$ térfogatának $\partial V$ kifelé irányított felszínére az integrál:

$$\oiint_{\partial V} v\, dA = \iiint_V \operatorname{div} v\, dV = \iiint_V 2\, dV = 2 \cdot |V| = 1.$$

Hiszen $\operatorname{div} v = 2$. Tehát a palástra az integrál:

$$\iint_P v\, dA = \oiint_{\partial V} v\, dA - \iint_{T_1} v\, dA - \iint_{T_2} v\, dA = \frac{19}{20}.$$

**5.** (4+4+4) Igazak-e az alábbi állítások?
**a)** Ha $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ differenciálható függvény és $\operatorname{rot} v \equiv 0$, akkor $v$ konstans.
**b)** Ha $v : \mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^3$ differenciálható függvény és $\operatorname{div} v \equiv 0$, akkor $v$ konstans.
**c)** Ha $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, akkor $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u \equiv 0$.

**MO.** a) Hamis. $v(r) = r \not\equiv 0$ esetén $\operatorname{rot} v \equiv 0$, mert $\operatorname{grad} \frac{|r|^2}{2} = r$, lévén, $r$ potenciálos.
b) Hamis. $\operatorname{div}(x, -y, 0) = 1 - 1 + 0 = 0$, de $(x, -y, 0) \not\equiv 0$.
c) Igaz, a Young-tétel miatt.

**iMSc.** Igaz-e, hogy a $\sqrt[3]{y} = y'$, $y(0) = 0$ kezdeti érték feladatnak egyetlen megoldása van?

**MO.** Hamis. $y = 0$ megoldás, de szeparálással az $y(x) = \sqrt{\frac{8}{27}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$ is megoldás.