2023 Vill. Mat A3 – 3. gyakorlat

(Vonalmenti és ívhossz szerinti integrál, potenciál, differenciáloperátorok)

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\int_G v dr = ?$, ahol $v = (x^3, y^2, z)$, G a $(0,0,1)$ ponttól az $(1,1,0)$ pontig az $\{(x,y,z) \mid x = y, z = 1 - x^2 - y^2\}$ görbe íve.

b) $\int_G v dr = ?$, ahol $v = (x^2 + y^2, y, z)$, G a $(0,0,0)$ ponttól az $(0,0,1)$ pontig az $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ görbe íve.

c) $\int_G v dr = ?$, ahol $v = (xy, yz, zx)$, G a $(0,0,0)$ ponttól az $(1,1,1)$ pontig az $r(t) = (t, t^2, t^3)$ görbe íve.

2. Számítsuk ki az alábbi görbeív hosszát és térjünk át ívhosszparaméterezésre is!

a) $r(t) = (5\sin t, 5\cos t, 12t)$, $t \in [0, 2\pi]$

b) $r(t) = (3e^t \sin t, 3e^t \cos t, 4e^t)$, $t \in [0, \pi]$

3. Döntsük el, hogy potenciálosak-e az alábbi vektormezők és ha igen, határozzuk meg a potenciáljukat és számítsuk ki az integrálokat!

a) $v(r) = |r|^4 r$; $G: \ r(t) = (\cos t, \sin t, \frac{t}{2\pi})$, $t \in [0, 2\pi]$, $\int_G v dr = ?$

b) $v(x,y,z) = (2xy + z^2, x^2 - 2yz, -y^2 + 2xz)$; $G: \ r(t) = (t, -t, 2t)$, $t \in [0,1]$, $\int_G v dr = ?$

4. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét! Figyeljünk a görbe irányítására! $(j = (1,0,0),\ k = (0,0,1))$

a) $v(r) = j \times r$; $K: \ r(t) = (R\cos t, 0, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $R > 0$, $\int_K v dr = ?$

b) $v(r) = \dfrac{k \times r}{|k \times r|^3}$; $F: \ r(t) = (R\sin t, R\cos t, t)$, $t \in [0, \pi]$, $R > 0$, $\int_F v dr = ?$