Zh, Matematika A3 VIK Villamosmérnök, 2023/24 ősz

(Minden feladat 12 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)

1. Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet és adja meg az $y(1) = 1$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldást!

$$y' = \frac{x^3 + y^2 x}{x^2 y}$$

MO. $u = y/x$ helyettesítéssel: $y = ux$. Ekkor $y' = u'x + u$, ahonnan

$$u'x + u = \frac{1 + u^2}{u} = \frac{1}{u} + u$$

$$u'x = \frac{1}{u} \rightsquigarrow \frac{du}{dx}x = \frac{1}{u} \rightsquigarrow \int u du = \int \frac{1}{x} dx \rightsquigarrow u^2/2 = \ln|x| + C$$

Tehát $y^2 = 2x^2 \ln|x| + 2x^2 C$. A kezdeti feltételből: $1 = 2C$, ahonnan $C = 1/2$.

2. Oldja meg az $x^3 + x - 2y^3 - xy^2 y' = 0$ differenciálegyenletet!

MO. $P(x, y) = x^3 + x - 2y^3$, $Q(x, y) = -xy^2$. Innen $\partial_y P - \partial_x Q = -6y^2 + y^2 = -5y^2$. Az integráló szorzót az $R(x) = (\partial_y P - \partial_x Q)/Q = \frac{5}{x}$ függvény segítségével számítjuk ki éspedig a $\mu(x) = e^{\int R(x)\,dx} = e^{\int \frac{5}{x}\,dx} = x^5$ lesz. Tehát a $x^8 + x^6 - 2x^5 y^3 - x^6 y^2 y' = 0$ egyenletet kell megoldani. Keressük a $\partial_x F = P^*$, $\partial_y F = Q^*$ parciális differenciálegyenlet legalább egy megoldását, ahol $P^*(x, y) = x^8 + x^6 - 2x^5 y^3$, $Q^*(x, y) = -x^6 y^2$

$$F(x, y) = \int -x^6 y^2\, dy = -x^6 y^3/3 + C(x)$$

Behelyettesítve F fenti alakját $\partial_x F = P$-be: $-2x^5 y^3 + C'(x) = x^8 + x^6 - 2x^5 y^3$, ahonnan $C'(x) = x^8 + x^6$ és $C(x) = x^9/9 + x^7/7$, tehát a megoldás: $-x^6 y^3/3 + x^9/9 + x^7/7 = C$.

3. Határozza meg a $v(x, y, z) = (3x^2 z + 2xy^2, 2x^2 y, x^3)$ vektorfüggvény $\Gamma : r(t) = (t^2, 2t, -t)$, $0 \le t \le 1$ görbére vonatkozó vonalmenti integrálját!

MO. A vektormező rotációja nulla:

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3x^2 z + 2xy^2 & 2x^2 y & x^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 0),$$

így az potenciál értékeinek különbsége adja az integrált a végpont és a kezdőpont között. A potenciált az $\partial_x u = 3x^2 z + 2xy^2$, $\partial_y u = 2x^2 y$, $\partial_z u = x^3$ egyenletrendszerből kell meghatároznunk: $u(x, y, z) = x^2 y^2 + x^3 z$, így $\int_\Gamma v dr = u(1, 2, -1) - u(0, 0, 0) = 3 - 0 = 3$.

4. Határozzuk meg a $v(x, y, z) = (-y^2 + 1, xy, z^2 + 4)$ függvénynek az $\Gamma : r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t \le \pi$ félkörvonalra vett integrálját!

MO. A Stokes-tételt alkalmazzuk a felfelé irányított $F : x^2 + y^2 \le 1, 0 \le y, z = 0$ félkörlapra, majd az integrálból kivonjuk az $L : y = 0, z = 0, -1 \le x \le 1$ szakaszra a vektormező vonalintegrálját

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^2 + 1 & xy & z^2 + 4 \end{vmatrix} = (0, 0, 3y)$$

$$\int_{\partial F} v dr = \int_F \operatorname{rot} v \, dA = \int_F (0,0,3y) \, dA = \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{\pi} 3r \sin\varphi \cdot r \, d\varphi dr = [r^3]_0^1 \cdot [-\cos\varphi]_0^\pi = 2.$$

$$\int_L v dr = \int_{x=-1}^{1} (1,0,4) \cdot (1,0,0) dx = \int_{x=-1}^{1} 1 dx = 2$$

Tehát $\int_\Gamma v \, dr = \int_{\partial F} v \, dr - \int_L v \, dr = 0.$

5. Határozzuk meg a $v(x,y,z) = (4x - y, 2yz + e^{xz^2}, 1 - z^2)$ függvény felületmenti integrálját az $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ egyenlőtlenségekkel meghatározott henger *palástjára*!

MO. Gauss-tételt alkalmazzuk, majd kivontjuk a zárt felületre vonatkozó intergálból az alaplapra és a fedőlapra vonatkozó integrált. Az egyenlőtlenségekből: $0 \leq r \leq 1$ és $0 \leq z \leq 1$, ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, legyen V a hengertest. $\operatorname{div} v(x,y,z) = 4 + 2z - 2z = 4$. Tehát

$$\int_{\partial V} v \, dA = \int_V \operatorname{div} v \, dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{1} \int_{r=0}^{1} 4r \, dr dz d\varphi = [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [2r^2]_0^1 \cdot [z]_0^1 = 4\pi.$$

Ha A_1 a fedőlap, felfelé irányítva, azaz $x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$. Ha $r \in A_1$, akkor $v_\perp(r) = (0,0,0)$, így $\int_{A_1} v dA = 0$. Ha A_2 az alaplap, lefelé(!) irányítva, azaz $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$. Ha $r \in A_2$, akkor $v_\perp(r) = (0,0,1)$, így

$$\int_{A_2} v \, dA = \int_{A_2} (0,0,1) \cdot (0,0,-1) \, dA = -\int_{A_2} dA = -|A_2| = -\pi.$$

A P palástra a vektormező integrálja:

$$\int_P v \, dA = \int_{\partial V} v \, dA - \int_{K_1} v \, dA - \int_{K_2} v \, dA = 5\pi.$$

iMSc. *(10 pont)* Bizonyítsa be, hogy ha $u, w : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható skalármezők, akkor $\operatorname{rot}(u \cdot \operatorname{grad} w) = (\operatorname{grad} u) \times (\operatorname{grad} w)$.

MO.

$$(\operatorname{rot}(u \cdot \operatorname{grad} w))_i \overset{\text{EK}}{=} \varepsilon_{ijk} \partial_j (u \cdot \operatorname{grad} w)_k = \varepsilon_{ijk} (\partial_j u) \cdot (\operatorname{grad} w)_k + \varepsilon_{ijk} u \cdot \partial_j \partial_k w =$$

$$= \varepsilon_{ijk} (\operatorname{grad} u)_j \cdot (\operatorname{grad} w)_k + 0 \overset{\text{EK}}{=} ((\operatorname{grad} u) \times (\operatorname{grad} w))_i.$$

Ahol felhasználtuk a Young-tételt az $\sum_{j,k=0}^{3} \varepsilon_{ijk} u \cdot \partial_j \partial_k w = 0$ lépésnél.