3. vizsga-zh, Matematika A3 VIK Villamosmérnök, 2023/24 ősz

(Minden feladat 12 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)

1. **a)** Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet! **b)** Adja meg azt a partikuláris megoldást, amelyik teljesíti az $y(0) = -1$ kezdeti feltételt! **c)** Előáll-e az általános megoldás valamely $y_1(x)$ és $y_2(x)$ függvénnyel $y(x) = cy_1(x) + y_2(x)$ alakban, ahol c tetszőleges valós szám?

$$y' = y^3 e^{-x}$$

MO. Változó szeparálással.

$$\frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x} \rightsquigarrow \int y^{-3}\, dy = \int e^{-x}\, dx$$

$\frac{y^{-2}}{-2} = -e^{-x} + C$, továbbá az $y = 0$ szinguláris megoldás. b) $C = e - \frac{1}{2}$. c) Nem, nem lineáris.

2. Oldja meg az $\dot{x}_1(t) = x_1(t) + 3x_2(t)$; $\dot{x}_2(t) = 3x_1(t) + x_2(t)$ differenciálegyenletrendszert az $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$ kezdeti feltételek mellett!

MO. Laplace-transzformációval. $sX_1(s) - 1 = X_1(s) + 3X_2(s)$; $sX_2(s) + 1 = 3X_1(s) + X_2(s)$ összeadva a kettőt: $s(X_1 + x_2) = 4(X_1 + X_2) \rightsquigarrow (s-4)(X_1 + X_2) = 0$. Ez minden s-re fenn kell, hogy álljon, így $X_2 = -X_1$. Tehát $sX_1 - 1 = X_1 - 3X_1 \rightsquigarrow X_1(s+2) = 1 \rightsquigarrow X_1 = \dfrac{1}{s+2}$, $x_1(t) = e^{-2t}$, $x_2(t) = -e^{-2t}$.

3. Számítsa ki az $L : r(t) = (t^2, \cos(\frac{\pi}{2}t^2), 0)$, $0 \le t \le 1$ görbére a $v(x, y, z) = (-y, x, z)$ függvény integrálját!

MO.

$$\operatorname{rot} v(x,y,z) = \begin{vmatrix} j & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & z \end{vmatrix} = (0,0,2)$$

A $[(1,0,0),(0,0,0)]$, $[(0,0,0),(0,1,0)]$, L szakaszokkal lezárt A tartományra a rotáció integrálja:

$$\int_{\partial A} v\, dr = \int_A \operatorname{rot} v\, dA = \int_0^1 \int_0^{\cos(\frac{\pi}{2}x)} -2dydx = \int_0^1 -2\cos(\frac{\pi}{2}x)dx =$$

$$= \frac{-4}{\pi}\int_0^1 \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{-4}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{-4}{\pi}$$

A negatív előjel azért van, mert az A felület a $(0,0,-1)$ normálissal van irányítva úgy, hogy a perem L darabja ugyanolyan irányítású legyen, mint az A felület kompatibilisan irányított ∂A határa. A tengelyeken a vektormező merőleges a tengelyekre, ezért ott a vonalintegrál nulla. Így a görbére a vonalintegrál $\frac{-4}{\pi}$.

4. Számítsa ki az $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$ egyenletekkel meghatározott felületek által határolt kúp kifelé irányított palástjára a $v(x,y,z) = (4x, -2y, z)$ vektorfüggvény felületi integrálját!

MO. Az A alaplapra: $v(x,y,1) = (4x,-2y,1)$, $\iint_A v\, dA = \iint_A (4x,-2y,1)(0,0,1)dxdy = \iint_A 1dxdy = \pi$. A teljes ∂V felszínre a Gauss-tételből:

$$\oiint_{\partial V} v\, dA = \iiint_V \operatorname{div} v\, dV = \iiint_V 3\, dV = 3\cdot|V| = 3\frac{\pi}{3} = \pi.$$

Így

$$\iint\limits_P v\,dA = \oiint\limits_{\partial V} v\,dA - \iint\limits_A v\,dA = \pi - \pi = 0.$$

5. (3+3+3+3)

a) Mennyi az $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, v(r) = r$ vektorfüggvény felületi integrálja a $(0,0,1)$-gyel irányított, $x^2+y^2 \le R^2$, $z = H$ által definiált körlapra? $(R, H > 0)$

b) Hol értelmes és ott mennyi $\operatorname{div} r|r|^6 =$?

c) Mi az $F(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2}$ függvény inverz Laplace-transzformáltja?

d) Mi az $y'' = -y$ differenciálegyenlet azon megoldása, amelyik eleget tesz az $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ kezdeti feltételeknek?

MO. a) Ha r végpontja a körlapon van, akkor $v = r$ miatt a v normálisra eső vetülete mindig $v_\perp = H$, így $\iint_A v dA = \iint_A v_\perp |dA| = \iint_A H|dA| = H|A| = H \cdot R^2\pi$.

b) 0-ban definíció szerint nulla. Azon kívül, $\operatorname{div} r|r|^6 = |r|^6 \operatorname{div} r + r \operatorname{grad} |r|^6 = 3|r|^6 + r\frac{r}{|r|}6|r|^5 = 9|r|^6$.

c) Parciális törtékre bontva, majd átalakítva: $\frac{s+1+1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{0!}{(s+1)^{0+1}} + \frac{1!}{(s+1)^{1+1}} \rightsquigarrow f(t) = e^{-t} + te^{-t}$.

d) Harmonikus rezgőmozgás hely-idő függvénye, megfelelő kezdeti feltételekkel: $y = -\sin x$.

iMSc. Számítsa ki a $v : \mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^3, r \mapsto -\dfrac{r}{|r|^3}$ vektorfüggvény divergenciáját és az $|r| = R > 0$ kifelé irányítt gömbfelületre az integrálját!

MO. A ponttöltés tere, ezért a divergenciája nulla, ahol a függvény értelmezett. A fluxus: $-\oiint_A \frac{1}{R^2}|dA| = -\frac{1}{R^2}\oiint_A |dA| = -4\pi R^2 \frac{1}{R^2} = -4\pi$.