PótZh, Matematika A3 VIK Villamosmérnök, 2023/24 ősz

(Minden feladat 12 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)

1. Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet és adja meg az a) $y(1) = 1$ és a b) $y(1) = 0$ kezdeti feltételeknek eleget tevő megoldásokat!

$$y' = \frac{y^4}{1+x^2}$$

MO. Szeparálással az általános megoldás: $\int y^{-4}dy = \int \frac{1}{1+x^2}dx \rightsquigarrow -\frac{1}{3}y^{-3} = \arctan x + C$. A szinguláris megoldás: $y \equiv 0$, ami a b) feltételnek eleget tevő megoldás és az a) esetén, ha $y(1) = 1$, akkor $C = -\frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}$.

2. Oldja meg az $x^2 - y^2 + x - 2xyy' = 0$ differenciálegyenletet!

MO. $P(x,y) = x^2 - y^2$, $Q(x,y) = -2xy$. Innen $\partial_y P - \partial_x Q = 0$, tehát az egyenlet egzakt. Keressük az $\partial_x F = x^2 - y^2 + x$, $\partial_y F = -2xy$ parciális differenciálegyenlet legalább egy megoldását.

$$F(x,y) = \int -2xy\,dy = -xy^2 + C(x)$$

Behelyettesítve F fenti alakját $\partial_x F = P$-be: $-y^2 + C'(x) = x^2 - y^2 + x$, ahonnan $C'(x) = x^2 + x$ és $C(x) = x^3/3 + x^2/2$, tehát a megoldás: $-xy^2 + x^3/3 + x^2/2 = C$.

3. Határozza meg a $v(x,y,z) = (ze^x \sin y, ze^x \cos y, e^x \sin y)$ vektorfüggvény $\Gamma : r(t) = (t, \frac{\pi}{2}t, 2t)$, $0 \le t \le 1$ görbére vonatkozó vonalmenti integrálját!

MO. A vektormező rotációja nulla:

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ ze^x \sin(y) & ze^x \cos(y) & e^x \sin(y) \end{vmatrix} = (0,0,0),$$

így az potenciál értékeinek különbsége adja az integrált a végpont és a kezdőpont között. A potenciált az $\partial_x u = ze^x \sin y$, $\partial_y u = ze^x \cos y$, $\partial_z u = e^x \sin y$ egyenletrendszerből kell meghatároznunk: $u(x,y,z) = ze^x \sin y$, így $\int_\Gamma v dr = u(1, \frac{\pi}{2}, 2) - u(0,0,0) = 2e^1 - 0 = 2e$.

4. Határozzuk meg a $v(x,y,z) = (-y,x,z)$ függvénynek az $L = [(1,0,0),(0,1,0)]$ egyenes szakaszra vett integrálját!

MO. A Stokes-tételt alkalmazzuk a felfelé irányított $T = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,0))$ háromszöglapra, majd kivonjuk ebből a $L_1 = [(0,0,0),(0,1,0)]$ és $L_2 = [(0,1,0),(0,0,0)]$ szakaszokra vonatkozó interált.

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & z \end{vmatrix} = (0,0,2)$$

$$\int_{\partial T} v dr = \int_T \operatorname{rot} v\, dA = \int_T (0,0,2)\, dA = 2|T| = 1.$$

$$\int_{L_1} v dr = \int_{x=0}^{1} (0,x,0)\cdot(1,0,0)dx = 0, \qquad \int_{L_2} v dr = \int_{y=1}^{0} (-y,0,0)\cdot(0,1,0)dx = 0$$

Tehát $\int_\Gamma v\,dr = \int_{\partial T} v\,dr - \int_{L_1} v\,dr - \int_{L_1} v\,dr = 1.$

5. Határozzuk meg a $v(x,y,z) = (2x - \sin y, 2yz + e^{x^2}, 1 - z^2)$ függvény felületmenti integrálját az $x^2 + y^2 \le 1$, $0 \le z \le 1$ egyenlőtlenségekkel meghatározott henger *palástjára*!

MO. Gauss-tételt alkalmazzuk, majd kivontjuk a zárt felületre vonatkozó intergálból az alaplapra és a fedőlapra vonatkozó integrált. Az egyenlőtlenségekből: $0 \le r \le 1$ és $0 \le z \le 1$, ahol $r = \sqrt{x^2+y^2}$, legyen V a hengertest. $\operatorname{div} v(x,y,z) = 2 + 2z - 2z = 2$. Tehát

$$\int_{\partial V} v\,dA = \int_V \operatorname{div} v\,dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{1}\int_{r=0}^{1} 2r\,drdzd\varphi = [\varphi]_0^{2\pi}\cdot[r^2]_0^1\cdot[z]_0^1 = 2\pi.$$

Ha A_1 a fedőlap, felfelé irányítva, azaz $x^2+y^2 \le 1, z = 1$. Ha $r \in A_1$, akkor $v_\perp(r) = (0,0,0)$, így $\int_{A_1} vdA = 0$. Ha A_2 az alaplap, lefelé(!) irányítva, azaz $x^2+y^2 \le 1, z = 0$. Ha $r \in A_2$, akkor $v_\perp(r) = (0,0,1)$, így

$$\int_{A_2} v\,dA = \int_{A_2} (0,0,1)\cdot(0,0,-1)\,dA = -\int_{A_2} dA = -|A_2| = -\pi.$$

A P palástra a vektormező integrálja:

$$\int_P v\,dA = \int_{\partial V} v\,dA - \int_{K_1} v\,dA - \int_{K_2} v\,dA = 3\pi.$$

iMSc. *(10 pont)* Bizonyítsa be, hogy ha $v:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$, $u:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ differenciálható mezők, akkor $\operatorname{rot}(uv) = u(\operatorname{rot} v) - v\times(\operatorname{grad} u)$.

MO.

$$\operatorname{rot}(uv)_i \overset{\text{EK}}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j u v_k = \varepsilon_{ijk}(\partial_j u)v_k + \varepsilon_{ijk}u\partial_j v_k \overset{\text{EK}}{=} [(\operatorname{grad} u)\times v]_i + u[\operatorname{rot} v]_i =$$
$$= [u(\operatorname{rot} v) - v\times(\operatorname{grad} u)]_i$$