1. Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad b)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\arctan^2 n}{(n^2+1)} \qquad c)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$$

MO. a) $\cos\left(\frac{1}{n}\right)\to 1$, mert $\cos(0)=1$ és cos folytonos, így $(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\not\to 0$, tehát a *divergencia kritérium* miatt a sor nem konvergens. (A divergenciakritérium: ha $\sum a_n$ konv., akkor $a_n\to 0$.) b) $f(g(n))\cdot g'(n)$ alakú, ezért láthatóan az *integrálkritérium* célra vezet. A helyettesítéses integrál formulájával:

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot(\arctan x)^2dx=\left[\frac{(\arctan x)^3}{3}\right]_0^{\infty}=\frac{(\pi/2)^3}{3},\text{ így konv.}$$

tehát a sor is konvergens. c) Hatvány, tehát gyökkritériummal:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}}=\left(\frac{n-2}{n}\right)^n=\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n\to e^{-2}<1$$

tehát konvergens.

2. Egészítsük ki az alábbi mátrix sajátvektorait úgy, hogy ortogonális bázist alkossanak és térjünk át az új koordinátarendszerre! Mi az áttérés mátrixa, mi az új bázisban a mátrix alakja?

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

MO. Az $A-\lambda I$ mátrix:

$$\begin{bmatrix}1-\lambda&0&0\\0&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{bmatrix}$$

Tehát a karakterisztikus egyenlet: $\det(A-\lambda I)=0\rightsquigarrow(1-\lambda)\cdot(\lambda^2-1)=0\rightsquigarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-1$. A sajátvektorok:

$$\lambda=-1\rightsquigarrow\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}}_{r=2;\ 3-2=1}\rightsquigarrow s_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix};\lambda=-1\rightsquigarrow\underbrace{\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}}_{r=2;\ 3-2=1}\rightsquigarrow s_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Tehát, bár az 1 sajátérték algebrai multiplicitása 2, a hozzá tartozó sajátaltér 1 dimenziós, azaz a geometriai multiplicitása 1. A sajátvektorok merőlegesek, a rájuk merőleges egyik új vektor: $(1,0,0)$, ezért az új merőleges vektorrandszer V, amit érdemes blokkonként invertálni:

$$V=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\to V^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&1/2\\0&-1/2&1/2\end{bmatrix}$$

Tehát

$$V^{-1}AV=\begin{bmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\1/2&0&-1\end{bmatrix}$$

3. Adjunk meg a térbeli $z = y$ egyenletű síkra tükröző leképezés 101-edik hatványának sajátvektorait, sajátértékeit! Diagonalizáljuk ortogonálisan, ha lehet!

MO. Mivel tükrözés, ezért $A^{101} = A$. A leképezés mátrixa a sztenderd bázisban az i,j,k vektorok képei mint oszlopvektorok egy mátrixba gyűjtve:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A ortogonálisan diagonalizálható, mert szimmetrikus

$$\lambda = -1 \rightsquigarrow \underset{r=1;\ 3-1=2}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}} \rightsquigarrow s_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda = -1 \rightsquigarrow \underset{r=2;\ 3-2=1}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \rightsquigarrow s_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az első és az utolsó vektor $\sqrt{2}$ hosszú, ezért az ortogonális áttérőmátrixhoz ezeket normálni kell:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Tehát

$$D = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Adjunk meg olyan U unitér mátrixot, amivel az alábbi A mátrix esetén $U^{-1}AU$ diagonális, ha van ilyen!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

MO.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -i \\ 0 & i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -i \\ i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = (1-\lambda)\lambda(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda = 1, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \underset{\text{"SMART"}}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \overset{s_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{bmatrix} \underset{\text{"SMART"}}{\to} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{bmatrix} \overset{s_2}{\begin{bmatrix} x \\ 1 \\ i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Így x-re az egyenlet: $-x + 0 \cdot 1 + 2 \cdot i = 2i$

$$\lambda = 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{"SMART"}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} s_3 \\ \begin{bmatrix} x \\ -1 \\ i \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Így x-re az egyenlet: $x + 0 \cdot 1 + 2 \cdot i = 2i$ A sajátvektorok egy $V = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2i & 2i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & i & i \end{smallmatrix}\right]$. Ezek nem merőlegesek egymásra, ezért nem diagonalizálhatók unitéren, de diagonalizálhatók, a diagonális: $\operatorname{diag}(1; 2; 0)$

5. Határozza meg az $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$ integrál értékét 0,01 pontossággal!

MO. Mivel a Taylor-sor a konvergenciatartományán belüli kompakt intervallumon egyenletesen konvergens, ezért a szumma felcserélhető az integrállal:

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx = \int\limits_0^1 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \ldots dx = [x]_0^1 - \frac{1}{3}[x^3]_0^1 + \frac{1}{2! \cdot 5}[x^5]_0^1 - \frac{1}{3! \cdot 7}[x^7]_0^1 \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2! \cdot 5} - \frac{1}{3! \cdot 7} + \frac{1}{4! \cdot 9} \ldots$$

ez utóbbi egy Leibniz-sor, ezért az első elhagyott tag abszolút értéke felülbecsüli a részletösszeg eltérését az összegtől, így:

$$\left| 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2! \cdot 5} - \frac{1}{3! \cdot 7} - \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx \right| \le \frac{1}{4! \cdot 9} < \frac{1}{100}$$

6. Igazak-e az alábbi állítások?

6.1. Ha A az x tengelyre tükrözés mátrixa a síkon, B a 30°-os forgatás mátrixa, akkor $AB = BA$.

6.2. Ha A invertálható és (λ, v) sajátpárja A-nak, ahol nem $\lambda \neq 0$, akkor $(1/\lambda, Av)$ sajátpárja A^{-1}-nek.

6.3. Ha (f_n) egyenletesen konvergens minden $0 < p < 1$-ra a $[p, 1]$-en, akkor a $(0, 1]$-en is egyenletesen konvergens.

MO. 6.1. Hamis. Az $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ vektorral $BA\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = AB\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

6.2. Igaz. Ha (λ, v) sajátpárja A-nak, azaz $Av = \lambda v$ (másként: $\frac{1}{\lambda}Av = v$), akkor $(1/\lambda, Av)$ sajátpárja A^{-1}-nek, mert $A^{-1}Av = v = \frac{1}{\lambda}Av$.

6.3. Hamis. Legyen $f_n = \sqrt[n]{.}$ a nemnegatívokon. f_n nem egyenletesen konvergens a $(0, 1]$-en, mert az $x_n = 1/n^n$ sorozat olyan, hogy $|f_n(x_n) - f(x_n)| = |1/n - 1| \to 1 \neq 0$, míg f_n a $[p, \infty)$-n egyenletesen konvergál, mert $|f_n(x) - 1| \le |\sqrt[n]{p} - 1| \to 0$, ha $x \in [p, 1]$.

iMSc. Igazolja, hogy ha $U \in \mathbf{C}^{n \times n}$ unitér, akkor minden $z \in \mathbf{C}^n$-re $||Uz||_2 = ||z||_2$, ahol $||z||_2 = \sqrt{\langle z \mid z \rangle}$.

MO. $U^*U = UU^* = I$, ha U unitér. $||w||_2^2 = \langle w \mid w \rangle = w^*w$, ahol az utóbbi szorzat a mátrixszorzás, így

$$||Uz||_2^2 = (Uz)^*(Uz) = z^*U^*Uz = z^*z = ||z||_2^2$$