

(Kitüntetett alterek, inverz, bázisváltás)



Egy $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ mátrix oszlopai által kifeszített altér $\{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\}$, az \mathbf{A} *oszloptere*. Azon vektorok által kifeszített altér, amelyekel jobbról megszorozva nullát ad eredményül $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$, az \mathbf{A} *nulltere*. A sorai által kifeszített altér pedig a *sortere*. Ha tekintjük az $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m : \mathcal{A}\mathbf{x} := \mathbf{Ax}$ leképezést, akkor \mathbf{A} oszloptere ugyanaz, mint $\text{Im } \mathcal{A} = \{\mathcal{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\}$, azaz \mathcal{A} *képtere*, és a nulltér ugyanaz, mint a $\text{Ker } \mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, azaz \mathcal{A} *magtere*.

1. Adja meg az alábbi mátrixok a) oszlopterének egy bázisát, b) nullterének egy bázisát és c) a sorterének egy bázisát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & -3 & -5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{HF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Az a valós paraméter mely értékeire invertálhatóak az alábbi mátrixok és amikor igen, mi az inverzük?

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{hf.: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ a z tengely körül $+90^\circ$ -kal forgató, és $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ az xy síkra tükröző leképezés mátrixa. Mik az alábbi mátrixok? a) \mathbf{A}^{-1} b) \mathbf{B}^{-1} , c) \mathbf{AB} , d) \mathbf{BA} , e) $\mathbf{A}^{2023} \cdot \mathbf{B}^{2023}$?

4. Idézzük fel, hogy a bázisváltó mátrix: $T_{C \rightarrow B} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]$, ahol $C = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ az új bázis a régi B bázisban. Egy leképezés mátrixa az új bázisban pedig: $[\mathcal{A}]_C = T_{C \rightarrow B}^{-1}[\mathcal{A}]_B T_{C \rightarrow B}$. Alább leképezések sztenderd bázisbeli mátrixát látjuk. Adjuk meg mátrixukat a $C = ((2; 1), (-1; 2))$ bázisban!

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{hf.: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

iMSc. Az $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mátrixok *használók*, ha van olyan $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix, hogy $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \mathbf{B}$. Igazoljuk, hogy a hasonlóság ekvivalenciareláció! Igazak-e? Hasonló mátrixok a) oszloptereinek dimenziója ugyanaz, b) oszlopterei ugyanazok, c) sortereinek dimenziója ugyanaz, d) sorterei ugyanazok?