2025 Vill. Mat A2 – 4. gyakorlat

(Determinánsok, inh. er.)

1. Legyen $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$ és $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ olyan, hogy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$. Igazoljuk, hogy

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}) + \{\boldsymbol{x}_0\}$$

Az a valós paraméter mely értékeire lesz az alábbi egyenletrendszereknek megoldása? Amikor van, írjuk fel a megoldáshalmazt $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}) + \{\boldsymbol{x}_0\}$ alakban!

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \textbf{hf.: } \boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & b \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

2. Az a valós paraméter mely értékeire invertálhatóak az alábbi mátrixok és amikor igen, mi az inverzük?

$$\text{a)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{hf.: } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$a = 0$ esetén számoljuk ki az inverzet az $A^{-1} = \mathrm{adj}A/\det A$ képlettel is, ahol $\mathrm{adj}A$ az **előjeles aldeterminánsmátrix transzponáltja**!

3. Adjuk meg az alábbi A mátrix sajátvektorait és sajátértékeit! Adjuk meg az A mátrix alakját a $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(-1,1,1)$ vektorokból álló C bázisban (pontosabban az $x \mapsto Ax$ leképezés C-beli mátrixát)!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét! (Ismétlés SZA-ból.)

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{d)}\ \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} \qquad \textbf{Hf.: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \textbf{Hf.: } \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{n\times n}$$