Gyakorló 2. zh A, Matematika A2, VIK Villamosmérnök, 2025. tavasz

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)

1. *(5+5)* Adja meg a $\partial_x f$, $\partial_y f$ parciális derivált függvényeket és állapítsa meg, hogy hol folytonosak, ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (0,0) \end{cases}$$

MO. A nullában:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3\cdot 0}{x^2+0^2} - 0}{x-0} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

és

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{0^3\cdot y}{0^2+y^2} - 0}{y-0} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0.$$

f a nullán kívül parciálisan deriválható függvényekből van összetéve az ezt megőrző módon, ezért parciálisan deriválható. Deriváltjai:

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \partial_y f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ezek viszont folytonosak a nullán kívül, mert folytonosokból van összetéve az ezt megőrző módokon. A nullabeli folytonossággal a következők ekvivalensek: $\lim_{(0,0)} \partial_x f = \partial_x f(0,0)$ és $\lim_{(0,0)} \partial_y f = \partial_y f(0,0)$, ezeket kell ellenőrizni. A polárkoordináta áttérés mindkét esetben célra vezet:

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^4 y + 3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \right| = \lim_{r\to 0} r \left| \cos^4\varphi \sin\varphi + 3\cos^2\varphi \sin^3\varphi \right| = 0$$

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| = \lim_{r\to 0} r \left| \cos^5\varphi - \cos^3\varphi \sin^2\varphi \right| = 0$$

hiszen a $\varphi(x,y)$ korlátos függvényeit szorozzuk az $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ nullában nullához tartó függvénnyel, azaz mindkét parciális derivált folytonos a nullában is.

2. Határozza meg az $f(x,y) = x^3 - y^2 - 3x^2$ függvény lokális szélsőértékeinek helyeit és hogy ezek milyen típusú szelsőértékek! Van-e f-nek nyeregpontja?

MO. Az elsőderivált próba szerint, ha az (x,y) belső pontban szélsőértéke vagy nyeregpontja van a deriválható függvénynek, akkor $\nabla f(x,y) = [0;0]$. Eszerint

$$[3x^2 - 6x; -2y] = [0;0]$$

azaz teljesül az I. $3x^2 - 6x = 0$ és II. $-2y = 0$ egyenletrendszer. Innen I. $x(3x-6) = 0$, II. $y = 0$. Ezt megoldva két stacionárius pont van: $P_1 = (0;0)$, $P_2 = (2;0)$.
Az elégségesség vizsgálatához a Hesse-mátrixot kell vizsgálni:

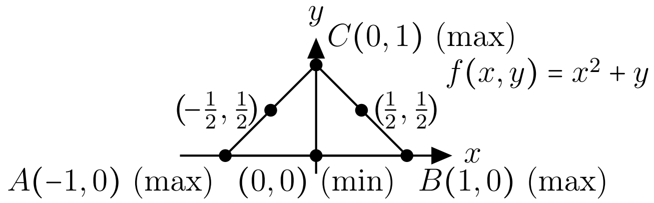
$$\mathrm{H}^f(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{yx} f \\ \partial_{xy} f & \partial_y f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

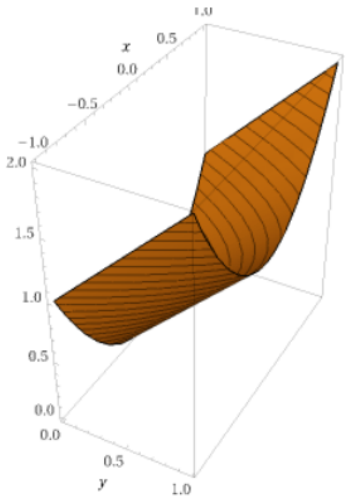
$P_1(0;0)$ esetén $\mathrm{H}^f(0,0) = \left[\begin{smallmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]$, azaz mindkét sajátérték negatív, azaz a másodrendű közelítés: $f(x,y) = -(6x^2 + 2y^2) + \varepsilon(x,y)\cdot(x^2+y^2)$, vagyis a függvénynek itt lokális maximuma van, mert kimozdulva a 0-ból csak lefelé vezet az út. Vagy a Sylvester-féle jellemzéssel: $\partial_{xx} f(0,0) = -6 < 0$, $\det \mathrm{H}^f(0,0) = 12 > 0$, azaz negatívval kezdve felváltva előjelet váltanak a főminorok ezért a lokális

maximum van ott.
$P_2(2;0)$ esetén $\mathrm{H}^f(2,0) = \left[\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]$, a sajátértékek ellenkező előjelűek, azaz x irányban minimuma, y irányban maximuma van a metszetfüggvényeknek, ezért itt nyeregpont van. Vagy a kétváltozós függvényre vonatkozó második derivált próba szerint $\det \mathrm{H}^f(2,0) = -12 < 0$, azaz nyeregpontja van a függvénynek itt.

3. Hol és milyen abszolút szélsőértéke van az $A(-1;0), B(1;0), C(0;1)$ csúcsok által meghatározott zárt háromszöglapon az $f(x,y) = x^2 + y$ függvénynek?

MO. Belül szélsőértéke ott tud csak lenni, ahol $\nabla f(x,y) = [2x;1] = [0,0]$ teljesül. Ilyen pont nincs. Viszont függvény folytonos és a tartomány kompakt, ezért a Weierstrass-tétel miatt biztosan van mindkétféle szélsőértéke. A határvonalon: AB szakasz: $x = t$, $-1 \le t \le 1$, $y = 0$. Itt a függvény: $f(t,0) = t^2$, ennek a 0 pontban minimuma van $f(0,0) = 0$ és a két szélén maximuma: $f(A) = 1 = f(B)$. A BC szakaszon: $x = t$, $0 \le t \le 1$, $y = 0 - x = 1 - t$. $f(t, 1-t) = t^2 + 1 - t$, aminek minimuma van az $f'(t) = 2t - 1 = 0 \rightsquigarrow t = 1/2$ helyen, $f(P) = f(1/2, 1/2) = 3/4$. $f(C) = 1$ pedig a görbén maximum. Az AC szakaszon: $x = t$, $- \le t \le 0$, $y = 1 + x = 1 + t$. $f(t, 1+t) = t^2 + 1 + t$, aminek minimuma van az $f'(t) = 2t + 1 = 0 \rightsquigarrow t = -1/2$ helyen, $f(Q) = f(-1/2, 1/2) = 3/4$. A következő helyek közül kell az abszolút maximumot és minimumot kiválasztani: $f(A) = f(B) = f(C) = 1$, $f(P) = 3/4 = f(Q)$, $f(0) = 0$. Tehát abszolút maximuma A, B, C-ben van, abszolút mimimuma 0-ban.





4. Hol van abszolút minimuma és maximuma az $2x^2 + y^2 = 2$ egyenlet által meghatározott görbén az $f(x,y) = e^{x+y}$ függvénynek?

MO. Mivel a görbe kompakt és a függvény folytonos, biztosan van maximuma és minimuma a görbe mentén a függvénynek. A görbe kezdő és végpontja egyebeesik (zárt), így külön a határokat nem kell megvizsgálni. A függvény stacionárius pontjai a görbe mentén ott vannak, ahol teljesül az

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

egyenlőség valamely λ-ra, ahol $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2$. A Lagrange-egyenletrendszer:

$$\begin{cases} e^{x+y} = \lambda 4x, \\ e^{x+y} = \lambda 2y, \\ 2x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Világos, hogy λ nem nulla, mert ellenkező esetben az első két egyenlet nem teljesül, így $y = 2x$. $2x^2 + 4x^2 = 2$, azaz $x = \pm 1/\sqrt{3}$, ahonnan a két pont: $P_1 = (1/\sqrt{3}; 2/\sqrt{3})$, $P_2 = (-1/\sqrt{3}; -2/\sqrt{3})$. Mivel $f(P_1) = e^{3/\sqrt{3}} > f(P_2) = e^{-3/\sqrt{3}}$, ezért P_1-ben van abszolút maximum és P_2-ben van abszolút minimum.

5. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$$\text{a)} \int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^1 x^3\sin(x^2y)dydx \quad \text{b)} \int_0^2\int_0^1 x^2y^2e^{x^3+y^3}dydx$$

MO. a) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 x^3\sin(x^2y)dydx = \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} x[-\cos(x^2y)]_0^1dx = \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} -x\cos(x^2)+xdx = [\sin(x^2)+x^2/2]_0^{\sqrt{\pi}} = \pi/2$
b) Az integrandus szétesik egy x-től és egy y-tól függő föggvéyn szorzatára, ezezért kivételesen lehet tényezőnként integrálni. $\int\limits_0^2\int\limits_0^1 x^2y^2e^{x^3+y^3}dydx = \int\limits_0^2\int\limits_0^1 x^2e^{x^3}y^2e^{y^3}dydx = \frac{1}{3}\left(\int\limits_0^2 3x^2e^{x^3}dx\right)\cdot \frac{1}{3}\left(\int\limits_0^1 3y^2e^{y^3}dy\right) = \frac{1}{9}(e^2-1)(e-1).$

6. Igazak-e az alábbi állítások?
6.1. Ha $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ parciális deriváltjai mindenhol léteznek, akkor f folytonos.
6.2. Ha $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ folytonos, akkor a parciális deriváltjai mindenhol léteznek.
6.3. Ha $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ parciális deriváltjai mindenhol léteznek és folytonosak, akkor f totálisan differenciálható.

MO.

6.1. Hamis. Ellenpélda: $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$, az origón kívül és $f(0,0) = 0$. Parciális függvényei a nullában: $f(x,0)\equiv 0\equiv f(0,y)$, tehát a parciális deriváltak az origóban nullák, de nem folytonos, mert $f(x,x) = 1/2 \neq 0$.
6.2. Hamis. Ellenpélda: $f(x,y) = |x|$, folytonos, de a 0-ban az x szerinti parciális derivált nem létezik.
6.3. Igaz. Tételből következik, ami volt.

iMSc. Keresse meg Lagrange-multiplikátormódszerrel az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszis $(a,b>0)$ origótól legtávolibb pontjait! **MO.** Az feladattal ekvivalens az $f(x,y) = x^2+y^2$ függvény szélsőértékeit meghatározni az ellipszisen. Az ellipszisvonal kompakt és a f folytonos, így a W.-tétel miatt lesz legtávolabbi és legközelebbi pont is. Az L.-egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 2x = \lambda\frac{2x}{a^2}, \\ 2y = \lambda\frac{2y}{b^2}, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Innen $x(1-\frac{\lambda}{a^2}) = 0$, $y(1-\frac{\lambda}{b^2}) = 0$. Ha $x = 0$, akkor $\lambda = b^2$, és $y = \pm b$, azaz $P_{1,2} = (0,\pm b)$ ha $y = 0$, akkor $\lambda = a^2$ és $x = \pm a$, azaz $Q_{1,2} = (\pm a, 0)$. Ha $a > b$, akkor $Q_{1,2}$ van távolabb, ha $a < b$, akkor $P_{1,2}$ van távolabb, ill. $a = b$ esetén minden pont ugyanolyan távol van az origótól.