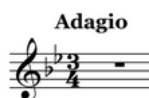


2023 Vill. Mat A2 – 7. gyakorlat
(Egyenletes konvergencia, hatványsorok)



1. Mi az (f_n) függvénysorozat f határfüggvénye és egyenletesen konvergens-e az I intervallumokon? Ha igen, és integrálhatók is, akkor számoljuk ki a $\lim \int_I f_n$ határértékeket!

$$\forall x \in I : r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{u}_I f; \exists \varepsilon > 0, \exists (x_n) \in I^{\mathbf{N}} : r_n(x_n) \geq \varepsilon \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{u}_I f;$$

$$f_n \in C(I) \ \& \ f_n \xrightarrow{u}_I f \Rightarrow f \in C(I)$$

a) $f_n(x) = e^{-x^n}$, $I = [0, \infty)$, $(0, \infty)$, $[p, \infty)$, $p > 0$; b) $f_n(x) = \frac{n^2 x^4}{n^2 x^2 + 1}$, $I = (-\infty, \infty)$, $(-1, 1)$

HF a) $f_n(x) = x^n$, $I = (-1, 1]$, $(-1, 1)$, $[-p, p]$, $0 < p < 1$; b) $f_n(x) = \frac{n}{n x^2 + 1}$, $I = (0, \infty)$, $(1, \infty)$

2. Hol konvergensek az alábbi hatványsorok és az adott intervallumon egyenletesen konvergensek-e?

Szükséges kritérium: $\sum_{k=0}^n f_k \xrightarrow{u}_I \sum f_n \Rightarrow f_n \xrightarrow{u}_I 0$

Weierstrass-féle M-próba: $\forall x \in I : |f_n(x)| \leq M_n \ \& \ \sum_{n=0}^{\infty} M_n \in \mathbf{R} \Rightarrow \sum_{k=0}^n f_k \xrightarrow{u}_I \sum f_n$

Leibniz-kritérium: $a_n \searrow 0 \ \& \ a_n > 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \in \mathbf{R}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}; I = [-1, 1]$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; I = [-p, p], \mathbf{R}, 0 < p$

HF $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; I = [-p, p], 0 < p < 1$

3. Mi az alábbi hatványsorok konvergenciasugara és konvergenciatartománya?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (x-1)^n$

4. Fejtsük hatványsorba az alábbi függvényeket a u pont körül!

a) $\frac{1}{1+x^2}$, $u = 0$ b) $\frac{x^2}{1+x}$, $u = 0$ c) $\frac{1}{x}$, $u = 1$ d) $x^2 + 3$, $u = -1$

HF a) $\frac{x}{1-x^4}$, $u = 0$ b) $x^2 + 2x + 1$, $u = 1$

iMSc. Egyenletesen konvergens-e a $(0, 1)$ intervallumon a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ sor? (Fogalmazzuk meg sorozatokkal, hogy mivel jellemezhető, hogy egy függvénysor nem egyenletesen konvergens. Felhasználhatjuk a Cauchy-kritériumot is: $\|\sum_{k=0}^m f_k - \sum_{k=0}^n f_k\| \rightarrow 0 \iff \sum f_n$ egy. konv., $m = 2^{N+1}$ és $n = 2^N$ jó ötlet szokott lenni.)