2025 Vill. Mat A2 – 11. gyakorlat

(szélsőérték, tartományi, vonalmenti, többváltozós integrál)

1. Hol és milyen lokális szélsőértéke van az alábbi függvényeknek?

$$\text{a)}\quad f(x,y) = x^3 + y^2 + xy + 2y, \qquad \text{b)}\quad f(x,y) = y^3 + x^3 + x^2 - 2y^2 - x$$

$$\text{c)}\quad f(x,y) = x^3 + y^2 - xy - y$$

2. Hol és milyen abszolút (globális) szélsőértékei vannak az alábbi függvényeknek a megadott T háromszögtartományon? A háromszög csúcsai: $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (0,2)$.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + y$$

A háromszög csúcsai: $A = (0,0)$, $B = (3,0)$, $C = (0,1)$.

$$\text{HF)}\quad f(x,y) = 3x^2 + y^2 - 2xy - 3x$$

3. Határozza meg Lagrange-multiplikátor módszerrel azokat a pontokat, ahol az $f(x,y)$ függvénynek a $g(x,y) = 0$ feltétel mellett szélsőértéke lehet (stacionárius pontok)! (A szélsőérték típusát nem kell meghatározni.)

a) $f(x,y) = x^2y + y^2x, \quad g(x,y) = y - x^2 = 0$

b) $f(x,y) = x^2 + 4y^2, \quad g(x,y) = xy - 1 = 0$

c) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

4. Számítsa ki az alábbi integrálok értékét!

a) $\int_0^\pi \int_0^1 x\cos(xy)\,dydx, \quad \int_0^1 \int_0^1 xye^{xy^2}\,dydx, \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{yx^3}{1+x^2y^2}\,dydx$

b) $\int_0^\pi \int_0^1 \cos(x)2ye^{y^2}\,dydx, \quad \int_0^2 \int_0^1 x^4\frac{1}{1+y^2}\,dydx, \quad \int_{-1}^1 \int_0^1 \sin(3x)y^7\sin(y^8)\,dydx$

iMSc*. Legyen A egy 2×2-es valós szimmetrikus mátrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ és tekintsük az $f(x,y) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$ kvadratikus alakot, ahol $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Határozza meg $f(x,y)$ szélsőértékeit (maximumát és minimumát) az $x^2 + y^2 = 1$ egységkörön a Lagrange-multiplikátor módszer segítségével! Mutassa meg, hogy a kapott λ Lagrange-multiplikátor(ok) pontosan az A mátrix sajátértékei, és a szélsőértékhelyekhez tartozó (x,y) vektorok a megfelelő sajátvektorok!