

Függvényterek (is)



1. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek (\mathbf{R}^4 -ben és \mathbf{R}^3 -ban)? (Emlékezzünk vissza arra, hogy a Gauss-elimináció (természetesen) az oszlopok közötti lineáris kapcsolatokat megőrzi és hogy a lineáris függetlenség ekvivalens egy lineáris egyenletrendszer megoldásával.) Használjuk a redukált lépcsős alakokat!

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \quad Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{hf.: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Mik $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ -ben a lineáris műveletek? Lineárisan függetlenek-e az alábbi halmazok? Előállítják-e lineárisan a g_1 , g_2 , g_3 függvényeket? (Függvénytérben a lineáris műveletek a pontonkénti műveletek.)

$$\{\sin 2x, \cos 2x, e^x\}, \quad g_1(x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad g_2(x) = \cos^2 x + \sin^2 x, \quad g_3(x) = e^{x-3}$$

$$\text{hf. } \left\{ 1, x^2, \frac{1}{1+x^2} \right\}, \quad g_1(x) = \frac{2x^2+3}{1+x^2}, \quad g_2(x) = \frac{x^4-1}{1+x^2}, \quad g_3(x) = \frac{2x+3}{1+x^2}$$

3. Idézzük fel a lineáris altér fogalmát és az ezzel ekvivalens tulajdonságokat! Zártak-e az alábbi halmazok a(z \mathbf{R} -beli) skalárral szorzásra és a pontonkénti összeadásra? Adjunk szabatos indoklást! ($a < b$)

a) $B[a, b]$ (korlátos függvények), b) $M[a, b]$ (monoton függvények)

c) $\{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid \text{felülről korlátos függvények}\}$, d) $R[a, b]$ (integrálható függvények)

hf. a) $\{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{Z}\}$ (egész értékű függvények) b) $\text{Diff}[a, b]$ (deriválható függvények)

iMSc. Definiáljuk (\mathbf{R}^n -ben) két altér metszetét és összegét! Melyek igazak az alábbiak közül (kvantumlogika)? Ha H, K és L két altér \mathbf{R}^n -ben, akkor

1. $H + H = H$

2. $H \cap K = \emptyset$

3. $H \cap \mathbf{R}^n = H$

4. $H + \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n$

5. $H \cap (K + L) = H \cap K + H \cap L$