2025 Vill. Mat A2 – 12. gyakorlat

(függvénykompozíció deriváltja, implicit függvény térel, inverz függvény tétel, Taylor-közelítés)

Legyen $g : \mathbf{R}^n \supset\!\!\to \mathbf{R}^m$, $f : \mathbf{R}^m \supset\!\!\to \mathbf{R}^k$, $u \in \int \mathrm{Dom}(f \circ g)$, $g \in \mathrm{Diff}(u)$, $f \in \mathrm{Diff}(g(u))$. Ekkor

$$J^{f\circ g}(u) = J^f(g(u)) \cdot J^g(u)$$

$$g : \mathbf{R} \supset\!\!\to \mathbf{R}^m,\ f : \mathbf{R}^m \supset\!\!\to \mathbf{R} \text{ esetén } (f \circ g)'(u)\,dt = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f)(g(u)) \cdot g'(u)_i\,dt$$

1. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját kompozícióként!

a) $f(x,y) = x^3+y^2,\quad g(t) = (\cos t, \sin t)$ b) $f(x,y) = (x^2+y, e^x+\ln y), g(u,v,w) = (uv+w, u^2-vw)$

HF) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 - xz - z,\quad g(t) = (\sin t, \cos t, e^t)$

Implicitfüggvény tétel (– a z változó kifejezése az $F(x,y,z) = 0$ egyenletből).
$F \in C^1(\mathbf{R}^3 \supset\!\!\to \mathbf{R})$, $u = (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{int}\,\mathrm{Dom}(F)$, $F(u) = 0$, és $\partial_z F(u) \neq 0$
$\Rightarrow$ létezik $U \ni (x_0, y_0)$ és $V \ni z_0$ környezet és egyetlen $f : U \to V$ függvény, hogy $f(x_0, y_0) = z_0$, és minden $\forall (x,y) \in U : F(x,y,f(x,y)) = 0$. f diffható (x_0, y_0)-ban, és

$$\partial_x f(x_0,y_0) = -\frac{\partial_x F(u)}{\partial_z F(u)} \qquad \partial_y f(x_0,y_0) = -\frac{\partial_y F(u)}{\partial_z F(u)}$$

2. a) Van-e $(x,y) \to z$ implicit függvénye az alábbi függvénynek és ha igen mik a deriváltjai az $(1,1,1)$ pont körül?

$$F(x,y,z) = x^2y + yz^2 + zx^2 - 3 = 0$$

b) Van-e $x \to y$ implicit függvénye az alábbi függvénynek és ha igen mik a deriváltjai az $(1,1)$ pont körül?

$$F(x,y) = x^3y + xy^4 - 2 = 0$$

HF) $F(x,y) = 3x^2 + y^2 - 2xy - 3x + 1 \quad (1,1)$

Inverzfüggvény.
Implicit deriválással fejezze ki az alábbi függvények inverzének deriváltját!

3. a) $y = \tan x$, b) $y = e^x$

4. Számítsa ki az alábbi integrálok értékét! Ha az $f(x,y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pont egy környezetében léteznek és folytonosak a legalább másodrendű parciális deriváltjai, akkor az $f(x,y)$ függvény az (x_0,y_0) pont körül közelíthető a másodrendű Taylor-polinomjával, $T_2(x,y;x_0,y_0)$, melynek alakja:

$$\begin{aligned}T_2(x,y;x_0,y_0) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\right.\\ &\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)\end{aligned}$$

A Taylor-tétel szerint $f(x,y) = T_n(x,y;x_0,y_0) + R_n(x,y;x_0,y_0)$, ahol R_n a Taylor-formula n-edrendű maradéktagja. A feladatban $n = 2$.

Feladat:

Írja fel az $f(x,y) = e^{x-y}\ln(1+x+y)$ függvény másodrendű Taylor-polinomját az $(x_0,y_0) = (0,0)$ pont körül! Ehhez számítsa ki $f(0,0)$, $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, $f''_{xx}(0,0)$, $f''_{xy}(0,0)$, és $f''_{yy}(0,0)$ értékeit, majd helyettesítse be őket a Taylor-polinom képletébe.