2025 Vill. Mat A2 – 10. gyakorlat

(Parciális derivált, gradiensmátrix, másodrendű deriváltak, Hesse-mátrix)

1. *(Parciális deriváltak (két- és háromváltozós))* Számítsa ki minden változó szerint az elsőrendű parciális deriváltakat az alábbi függvényeknél:

a) $f(x,y) = x^2 \sin y + y^3 \cos x$, b) $g(x,y,z) = xyz + x^2 + y \sin(yz)$, c) $h(x,y) = \sin(x^2 \ln xy)$

hf. Legyen $f(x,y,z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$. Számítsa ki az elsőrendű parciális deriváltakat.

2. *(Gradiensmátrix és iránymenti derivált)* Legyen $f(x,y) = x^2y + y^2$. Számítsa ki:

- a gradiensvektort: $\nabla f(x,y)$,
- az iránymenti deriváltját a $(1,2)$ pontban a $\mathbf{v} = (3,4)$ irányban, mint a $\partial_v f(u) = [\nabla f(u)] \cdot \frac{v}{||v||}$ skaláris szorzatot!

hf. Legyen $f(x,y,z) = xyz + x^2y$. Számítsa ki az iránymenti deriváltját a $(1,1,1)$ pontban a $\mathbf{v} = (1,-1,1)$ irányban.

3. *(Másodrendű parciális deriváltak)* Számítsa ki a másodrendű parciális deriváltakat:

$$f(x,y) = x^2y + y^3 \sin(x)$$

hf. Számítsa ki a következő függvény összes másodrendű parciális deriváltját:

$$f(x,y,z) = xyz + x^2$$

4. *(Hesse-mátrix)* Számítsd ki a következő függvények Hesse-mátrixát:

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2, \qquad g(x,y) = x^2 - y^2$$

hf. Számítsa ki az alábbi háromváltozós függvény Hesse-mátrixát:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz$$

iMSc. Számítsa ki az

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

függvény nullabeli Hesse-mártixát; idézze fel a parciális derivált definícióját!