

(diff. és folytonos diffhatóság)



1. Totálisan differenciálhatóak-e az alábbi függvények a $(0,0)$ pontban?

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ ha } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & , \text{ ha } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & , \text{ ha } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & , \text{ ha } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{cases}$$

2. Folytonosak-e a parciális deriváltjai az alábbi függvényeknek:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & , \text{ ha } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & , \text{ ha } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^6}} & , \text{ ha } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & , \text{ ha } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

iMSc. A $X \subseteq \mathbf{R}^n$ halmaz korlátos, ha létezik $r > 0$, hogy $X \subseteq B_r(0)$. Igazolja, hogy ha $K \subseteq \mathbf{R}^n$ (topologikusan) kompakt, akkor korlátos is és zárt is.