2025 Vill. Mat A2 – 12. gyakorlat

(függvénykompozíció deriváltja, implicit függvény térel, inverz függvény tétel, Taylor-közelítés)

Legyen $g : \mathbf{R}^n \supset\!\!\to \mathbf{R}^m$, $f : \mathbf{R}^m \supset\!\!\to \mathbf{R}^k$, $u \in \operatorname{int}\operatorname{Dom}(f \circ g)$, $g \in \operatorname{Diff}(u)$, $f \in \operatorname{Diff}(g(u))$. Ekkor

$$J^{f\circ g}(u) = J^f(g(u)) \cdot J^g(u)$$

$$g : \mathbf{R} \supset\!\!\to \mathbf{R}^m,\ f : \mathbf{R}^m \supset\!\!\to \mathbf{R} \text{ esetén } (f \circ g)'(u)\,dt = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f)(g(u)) \cdot g'(u)_i\,dt$$

1. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját kompozícióként!

a) $f(x,y) = x^3 + y^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$ b) $f(x,y) = (x^2+y, e^x + \ln y), g(u,v,w) = (uv+w, u^2-vw)$

HF) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 - xz - z$, $g(t) = (\sin t, \cos t, e^t)$

Implicitfüggvény tétel (– a z változó kifejezése az $F(x,y,z) = 0$ egyenletből).
$F \in C^1(\mathbf{R}^3 \supset\!\!\to \mathbf{R})$, $u = (x_0, y_0, z_0) \in \operatorname{int}\operatorname{Dom}(F)$, $F(u) = 0$, és $\partial_z F(u) \neq 0$
$\Rightarrow$ létezik $U \ni (x_0, y_0)$ és $V \ni z_0$ környezet és egyetlen $f : U \to V$ függvény, hogy $f(x_0, y_0) = z_0$, és minden $\forall (x,y) \in U : F(x, y, f(x,y)) = 0$. f diffható (x_0, y_0)-ban, és

$$\partial_x f(x_0, y_0) = -\frac{\partial_x F(u)}{\partial_z F(u)} \qquad \partial_y f(x_0, y_0) = -\frac{\partial_y F(u)}{\partial_z F(u)}$$

2. a) Van-e $(x,y) \mapsto z$ implicit függvénye az alábbi függvénynek és ha igen mik a deriváltjai az $(1,1,1)$ pont körül?

$$F(x,y,z) = x^2 y + yz^2 + zx^2 - 3 = 0$$

b) Van-e $x \mapsto y$ implicit függvénye az alábbi függvénynek és ha igen mik a deriváltjai az $(1,1)$ pont körül?

$$F(x,y) = x^3 y + xy^4 - 2 = 0$$

HF) $F(x,y) = 3x^2 + y^2 - 2xy - 3x + 1 \quad (1,1)$

Inverzfüggvény.
Implicit deriválással fejezze ki az alábbi függvények inverzének deriváltját!

3. a) $y = \tan x$, b) $y = e^x$

4. Ha az $f(x,y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pont egy környezetében léteznek és folytonosak a legalább másodrendű parciális deriváltjai, akkor az $f(x,y)$ függvény az (x_0, y_0) pont körül közelíthető a másodrendű Taylor-polinomjával:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2!}\Big(\partial_{xx} f(x_0,y_0)(x-x_0)^2 +$$

$$+2\partial_{xy} f(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \partial_{yy} f(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big) + \varepsilon(x,y)\big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\big)$$

Írja fel az $f(x,y) = e^{x-y} x^2$ függvény másodrendű közelítését az $(x_0, y_0) = (0,0)$ pont körül!