2025 Vill. Mat A2 – 2. gyakorlat

(Belső szorzat, lineáris leképezés mátrixa, mátrixok)

1. Ha $I = [a,b]$ korlátos és zárt intervallum és $f,g : I \to \mathbf{R}$ integrálható valós függvények, akkor az f és g *belső szorzatán* vagy *skaláris szorzatán* az

$$\langle\, f \mid g \,\rangle \overset{\text{def.}}{=} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

műveletet értjük. Számítsuk ki az alábbi szorzatokat!

a) $\langle\, x \mid \sin(2x) \,\rangle \quad I = [0,\pi]$

b) $\langle\, \cos(x^3) \mid x^2 \,\rangle \quad I = [0,1]$

c) $\langle\, \cos x \mid \sin x \,\rangle \quad I = [0,\pi]$

d) $\langle\, \cos 3x \mid \cos 3x \,\rangle \quad I = [0,\pi]$

e) $\langle\, \cos x \mid \cos 3x \,\rangle \quad I = [0,\pi]$

HF*f*) $\langle\, \cos 4x \mid \cos 3x \,\rangle \quad I = [0,\pi]$

HF*g*) $\langle\, \cos 5x \mid \cos 5x \,\rangle \quad I = [0,\pi]$

HF*h*) $\langle\, x^4 \mid \sin(x^5) \,\rangle \quad I = [0,1]$

Használjuk fel a

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$$

trigonometrikus azonosságokat!

2. Tanultuk, hogy egy $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,...), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,...),...$ sztenderd bázisban

$$\begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ [A(\mathbf{e}_1)] & [A(\mathbf{e}_2)] & \dots & [A(\mathbf{e}_n)] \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

ahol $[A(\mathbf{e}_i)]$ szintén a sztenderd bázisban az i-edik bázisvektor A általi képének oszlopmátrixa. Határozza meg az alábbi leképezések mátrixát a sztenderd bázisban!

a) A = 60°-os forgatás a síkon

b) B = tükrözés síkbeli x tengelyre

c) C = merőleges vetítés a síkbeli y tengelyre

d) AB, CA, AC, BC, ABC, BCA

ahol AB a leképezések egymásutánja, mint a $v \mapsto A(B(v))$ függvénykompozíció.

3. Legyen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Melyik igaz?

a) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$, b) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{C}^2$, **hf.:)** $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^2 = \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$

iMSc. Igazoljuk, hogy a $\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, ...\}$ függvényrendszer ortogonális a $[0,2\pi]$ intervallumon, abban az értelmeben, hogy minden $m,n \in \mathbf{Z}^+$-ra $\langle\, \cos mx \mid \cos nx \,\rangle = c \cdot \delta_{mn}$, ahol c egy nem nulla konstans, a belső (skaláris) szorzást a $[0,2\pi]$ intervallumon vesszük és $\delta_{mm} = 1$, és $\delta_{mn} = 0$, ha $n \neq m$ (a Kronecker-féle delta függvény). Igazoljuk, hogy lineárisan független is!