

1. Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan^2 n}{(n^2 + 1)} \quad c) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$$

MO. a) $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$, mert $\cos(0) = 1$ és \cos folytonos, így $(-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right) \not\rightarrow 0$, tehát a *divergencia kritérium* miatt a sor nem konvergens. (A divergenciakritérium: ha $\sum a_n$ konv., akkor $a_n \rightarrow 0$.) b) $f(g(n)) \cdot g'(n)$ alakú, ezért láthatóan az *integrálkritérium* célra vezet. A helyettesítéses integrál formulájával:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot (\arctan x)^2 dx = \left[\frac{(\arctan x)^3}{3} \right]_0^{\infty} = \frac{(\pi/2)^3}{3}, \text{ így konv.}$$

tehát a sor is konvergens. c) Hatvány, tehát gyökkritériummal:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n \rightarrow e^{-2} < 1$$

tehát konvergens.

2. Egészítsük ki az alábbi mátrix sajátvektorait úgy, hogy ortogonális bázist alkossanak és térjünk át az új koordinátarendszerre! Mi az áttérés mátrixa, mi az új bázisban a mátrix alakja?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MO. Az $A - \lambda I$ mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Tehát a karakterisztikus egyenlet: $\det(A - \lambda I) = 0 \rightsquigarrow (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1) = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. A sajátvektorok:

$$\lambda = -1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow s_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda = -1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$r=2; 3-2=1 \qquad \qquad \qquad r=2; 3-2=1$

Tehát, bár az 1 sajátérték algebrai multiplicitása 2, a hozzá tartozó sajátaltér 1 dimenziós, azaz a geometriai multiplicitása 1. A sajátvektorok merőlegesek, a rájuk merőleges egyik új vektor: $(1, 0, 0)$, ezért az új merőleges vektorrendszer V , amit érdemes blokkonként invertálni:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Adjunk meg a térbeli $z = y$ egyenletű síkra tükröző leképezés 101-edik hatványának sajátvektorait, sajátértékeit! Diagonalizáljuk ortogonálisan, ha lehet!

MO. Mivel tükrözés, ezért $A^{101} = A$. A leképezés mátrixa a sztenderd bázisban az i, j, k vektorok képei mint oszlopvektorok egy mátrixba gyűjtve:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A ortogonálisan diagonalizálható, mert szimmetrikus

$$\lambda = -1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow s_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda = -1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow s_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$r=1; 3-1=2$ $r=2; 3-2=1$

Az első és az utolsó vektor $\sqrt{2}$ hosszú, ezért az ortogonális áttérőmátrixhoz ezeket normálni kell:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Tehát

$$D = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Adjunk meg olyan U unitér mátrixot, amivel az alábbi A mátrix esetén $U^{-1}AU$ diagonális, ha van ilyen!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

MO.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -i \\ 0 & i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -i \\ i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)\lambda(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda = 1, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{"SMART"}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{"SMART"}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ x \\ 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Így x -re az egyenlet: $-x + 0 \cdot 1 + 2 \cdot i = 2i$

$$\lambda = 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{"SMART"}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -1 \\ i \end{bmatrix} \stackrel{s_3}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Így x -re az egyenlet: $x + 0 \cdot 1 + 2 \cdot i = 2i$ A sajátvektorok egy $V = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 2i \\ 0 & i & i \end{bmatrix}$. Ezek nem merőlegesek egymásra, ezért nem diagonalizálható unitéren, de diagonalizálható, a diagonális: $\text{diag}(1; 2; 0)$

5. Határozza meg az $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ integrál értékét 0,01 pontossággal!

MO. Mivel a Taylor-sor a konvergenciatartományán belüli kompakt intervallumon egyenletesen konvergens, ezért a szumma felcserélhető az integrállal:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \dots dx = [x]_0^1 - \frac{1}{3}[x^3]_0^1 + \frac{1}{2! \cdot 5}[x^5]_0^1 - \frac{1}{3! \cdot 7}[x^7]_0^1 \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2! \cdot 5} - \frac{1}{3! \cdot 7} + \frac{1}{4! \cdot 9} \dots \end{aligned}$$

ez utóbbi egy Leibniz-sor, ezért az első elhagyott tag abszolút értéke felülbecsüli a részletösszeg eltérését az összegtől, így:

$$\left| 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2! \cdot 5} - \frac{1}{3! \cdot 7} - \int_0^1 e^{-x^2} dx \right| \leq \frac{1}{4! \cdot 9} < \frac{1}{100}$$

6. Igazak-e az alábbi állítások?

6.1. Ha A az x tengelyre tükrözés mátrixa a síkon, B a 30° -os forgatás mátrixa, akkor $AB = BA$.

6.2. Ha A invertálható és (λ, v) sajátpárja A -nak, ahol nem $\lambda \neq 0$, akkor $(1/\lambda, Av)$ sajátpárja A^{-1} -nek.

6.3. Ha (f_n) egyenletesen konvergens minden $0 < p < 1$ -ra a $[p, 1]$ -en, akkor a $(0, 1]$ -en is egyenletesen konvergens.

MO. 6.1. Hamis. Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektorral $BA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = AB\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6.2. Igaz. Ha (λ, v) sajátpárja A -nak, azaz $Av = \lambda v$ (másként: $\frac{1}{\lambda}Av = v$), akkor $(1/\lambda, Av)$ sajátpárja A^{-1} -nek, mert $A^{-1}Av = v = \frac{1}{\lambda}Av$.

6.3. Hamis. Legyen $f_n = \sqrt[n]{x}$ a nemnegatívokon. f_n nem egyenletesen konvergens a $(0, 1]$ -en, mert az $x_n = 1/n^n$ sorozat olyan, hogy $|f_n(x_n) - f(x_n)| = |1/n - 1| \rightarrow 1 \neq 0$, míg f_n a $[p, \infty)$ -n egyenletesen konvergál, mert $|f_n(x) - 1| \leq |\sqrt[n]{p} - 1| \rightarrow 0$, ha $x \in [p, 1]$.

iMSc. Igazolja, hogy ha $U \in \mathbf{C}^{n \times n}$ unitér, akkor minden $z \in \mathbf{C}^n$ -re $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$, ahol $\|z\|_2 = \sqrt{\langle z | z \rangle}$.

MO. $U^*U = UU^* = I$, ha U unitér. $\|w\|_2^2 = \langle w | w \rangle = w^*w$, ahol az utóbbi szorzat a mátrixszorzás, így

$$\|Uz\|_2^2 = (Uz)^*(Uz) = z^*U^*Uz = z^*z = \|z\|_2^2$$