

**1.** Első gradiens tétel (Newton–Leibniz-tétel). Ha  $u$  összefüggő tartományon differenciálható és egy benne lévő görbe kezdő és végpontja  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , akkor:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \text{grad } u \, d\mathbf{r} = u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{r}_1)$$

a) Mi lesz a  $v(x, y, z) = (2xy + z^3, 2y + x^2, 3xz^2)$  vektormező intergálja a  $[(0, 0, 0), (1, 2, -1)]$  irányított egyenes szakaszra?

b) Mi lesz az  $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, 0, R \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$  ( $R > 0$ ) görbére az integrálja a  $\mathbf{v}(r) = r|r^4|$  vektormezőnek?

**2.** Stokes-tétel:

$$\int_F \mathbf{v} d\mathbf{r} = \iint_{\partial F} \text{rot } \mathbf{v} \, d\mathbf{f}$$

a) Számítsa ki a  $v(x, y, z) = (-yx^2, xy^2, z)$  vektorfüggvény görbementi integrálját az  $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t, 0)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  ( $R > 0$ ) félkör mentén!

HF) Számítsa ki a  $v(x, y, z) = (xy, -xy, z^2)$  vektorfüggvény görbementi integrálját az  $(1, 0, 0)$  pontból a  $(0, 1, 0)$  pontba menő szakasz esetén.

**3.** Gauss-tétel:

$$\int_F \mathbf{v} d\mathbf{r} = \iint_{\partial F} \text{rot } \mathbf{v} \, d\mathbf{f}$$

Határozzuk meg az alábbi vektormezők integrálját az adott felület mentén!

a  $v(r) = r$ , origú csúcspontú,  $z$  tengelyű  $M$  magasságú kúp palástja.

b)  $v(r) = |r|^2 r$ ,  $F: |r| = R > 0$ ,  $x, y \geq 0$  ( $\int_F \mathbf{v} d\mathbf{A} = ?$ )

c) Számítsa ki a  $v(x, y, z) = (3x + \sin y, x^2 y - 4y, z)$  vektorfüggvény felületi integrálját a  $(0, 0, 3)$  csúcspontú,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 \leq 9$  feltételekkel adott alaplapú egyenes kúp kifelé irányított palástjára!

HF)  $v(x, y, z) = (y^2, z^4, x + 2z)$ ,  $H: x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$ , kifelé irányítva a térfogatból

**4.** Határozza meg a  $v = (x^2 + yz, x^2 + y + z, x^2 + y + z)$  vektormező rotációjának integrálját a következő  $F$  felületre: a  $T$  tetraéder legyen a koordinátasíkok és az  $x + 2y + 2z = 2$  által határolt test,  $F$  legyen ennek felszínéből az utóbbi síklap elhagyásából kapott felület.