1. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket! Alkalmazza az $u = ax + by$ helyettesítést!

a) $y' = (x + y)^2 - 1$

Megoldás:

Alkalmazzuk az $u = x + y$ helyettesítést. Ezt x szerint deriválva: $u' = 1 + y'$, amiből $y' = u' - 1$. Helyettesítsük be ezeket az eredeti egyenletbe:

$$u' - 1 = u^2 - 1$$
$$u' = u^2$$

Ez egy szétválasztható (szeparábilis) differenciálegyenlet u-ra:

$$\frac{du}{dx} = u^2 \implies \frac{du}{u^2} = dx$$

Integráljuk mindkét oldalt:

$$\int u^{-2} du = \int dx \implies -u^{-1} = x + C$$

$$-\frac{1}{u} = x + C$$

Most helyettesítsünk vissza $u = x + y$-t:

$$-\frac{1}{x + y} = x + C$$

Amiből az y-ra explicit megoldás:

$$y = -x - \frac{1}{x + C}$$

Megjegyzés: Az $u = 0$, azaz $y = -x$ esetet külön kell vizsgálni, mert ott nullával osztanánk. Behelyettesítve $y' = -1$-et az eredeti egyenletbe: $-1 = (x - x)^2 - 1 = -1$, ami igaz. Tehát $y(x) = -x$ is egy (szinguláris) megoldás.

b) $y' = \sqrt{y - 2x}$

Megoldás:

Alkalmazzuk az $u = y - 2x$ helyettesítést. Ezt deriválva: $u' = y' - 2$, amiből $y' = u' + 2$. Behelyettesítve az egyenletbe:

$$u' + 2 = \sqrt{u}$$
$$u' = \sqrt{u} - 2$$

Ez is szétválasztható, feltéve, hogy $\sqrt{u} - 2 \neq 0$:

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{u} - 2 \implies \frac{du}{\sqrt{u} - 2} = dx$$

A bal oldali integrál megoldásához vezessük be a $w = \sqrt{u}$ helyettesítést, ekkor $u = w^2$ és $du = 2wdw$:

$$\int \frac{2w}{w-2}dw = \int \frac{2(w-2)+4}{w-2}dw = \int \left(2 + \frac{4}{w-2}\right)dw$$
$$= 2w + 4\ln|w-2|$$

Visszahelyettesítve $w = \sqrt{u}$-t, majd integrálva a jobb oldalt is, kapjuk:

$$2\sqrt{u} + 4\ln|\sqrt{u} - 2| = x + C$$

Végül visszaírjuk az eredeti változókat ($u = y - 2x$):

$$2\sqrt{y-2x} + 4\ln|\sqrt{y-2x} - 2| = x + C$$

Ez a megoldás implicit alakban. Megjegyzés: A $\sqrt{u} - 2 = 0$, azaz $u = 4$ eset szinguláris megoldást ad. $y - 2x = 4 \implies y = 2x + 4$. Behelyettesítve $y' = 2$-t: $2 = \sqrt{(2x+4) - 2x} = \sqrt{4} = 2$. Tehát $y(x) = 2x + 4$ is megoldás.

2. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $xyy' = x^2 + y^2$

Megoldás:

Ez egy homogén fokszámú differenciálegyenlet. Osszuk el az egyenletet x^2-tel (feltéve $x \neq 0$):

$$\frac{y}{x}y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Alkalmazzuk az $u = y/x$ helyettesítést, amiből $y = ux$ és $y' = u'x + u$.

$$\begin{aligned} u(u'x + u) &= 1 + u^2 \\ u'ux + u^2 &= 1 + u^2 \\ u'ux &= 1 \\ u\frac{du}{dx}x &= 1 \end{aligned}$$

Szétválasztva a változókat:

$$u\,du = \frac{1}{x}dx$$

Integrálva:

$$\int u\,du = \int \frac{1}{x}dx \implies \frac{u^2}{2} = \ln|x| + C$$

Visszahelyettesítve $u = y/x$-et:

$$\frac{(y/x)^2}{2} = \ln|x| + C \implies y^2 = 2x^2(\ln|x| + C)$$

b) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$

Megoldás:

Ez is homogén fokszámú. Osszunk x-szel ($x \neq 0$):

$$y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$$

Ismét az $u = y/x$ és $y' = u'x + u$ helyettesítést használjuk:

$$u'x + u = e^u + u$$
$$u'x = e^u$$
$$\frac{du}{dx}x = e^u$$

Szétválasztva a változókat:

$$e^{-u}du = \frac{1}{x}dx$$

Integrálva:

$$\int e^{-u}du = \int \frac{1}{x}dx \implies -e^{-u} = \ln|x| + C$$

Visszahelyettesítve $u = y/x$-et:

$$-e^{-y/x} = \ln|x| + C$$

3. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $(x + y^3)dx + xy^2dy = 0$

Megoldás:

Az egyenlet $P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$ alakú, ahol $P = x+y^3$ és $Q = xy^2$. Ellenőrizzük az egzakt feltételt: $\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$ és $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$. Mivel $3y^2 \neq y^2$, az egyenlet nem egzakt. Keressünk multiplikátort. Vizsgáljuk a $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ kifejezést:

$$\frac{1}{xy^2}(3y^2 - y^2) = \frac{2y^2}{xy^2} = \frac{2}{x}$$

Mivel ez csak x-től függ, létezik $\mu(x)$ multiplikátor: $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2$. Szorozzuk be az egyenletet x^2-tel:

$$(x^3 + x^2y^3)dx + x^3y^2dy = 0$$

Ellenőrzés: $\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + x^2y^3) = 3x^2y^2$ és $\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2) = 3x^2y^2$. Az egyenlet egzakt. A megoldás $F(x,y) = C$, ahol $\frac{\partial F}{\partial x} = x^3 + x^2y^3$.

$$F(x,y) = \int (x^3 + x^2y^3)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}y^3 + g(y)$$

Ennek y szerinti deriváltja meg kell, hogy egyezzen az új Q-val:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3y^2 + g'(y) = x^3y^2 \implies g'(y) = 0 \implies g(y) = K$$

A megoldás:

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}y^3 = C$$

b) $(x + xy)dx + x^2dy = 0$

Megoldás:

$P = x + xy$, $Q = x^2$. $\frac{\partial P}{\partial y} = x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$. Nem egzakt. A $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ kifejezés: $\frac{1}{x^2}(x - 2x) = -\frac{1}{x}$. A multiplikátor $\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}$. Szorozva $1/x$-szel ($x \neq 0$):

$$(1 + y)dx + xdy = 0$$

Ellenőrzés: $\frac{\partial}{\partial y}(1+y) = 1$, $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$. Egzakt. A megoldás $F(x,y) = C$, ahol $\frac{\partial F}{\partial y} = x$.

$$F(x,y) = \int xdy = xy + h(x)$$

Deriválva x szerint: $\frac{\partial F}{\partial x} = y + h'(x) = 1 + y \implies h'(x) = 1 \implies h(x) = x$. A megoldás:

$$xy + x = C$$

4. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $x^2y + (x^3 + y^3)y' = 0$

Megoldás:

Átírva: $x^2ydx + (x^3 + y^3)dy = 0$. $P = x^2y$, $Q = x^3 + y^3$. $\frac{\partial P}{\partial y} = x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$. Nem egzakt. Vizsgáljuk a $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ kifejezést:

$$\frac{1}{x^2y}(3x^2 - x^2) = \frac{2x^2}{x^2y} = \frac{2}{y}$$

Mivel ez csak y-tól függ, létezik $\mu(y)$ multiplikátor: $\mu(y) = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln|y|} = y^2$. Szorozzuk be az egyenletet y^2-tel:

$$x^2y^3dx + (x^3y^2 + y^5)dy = 0$$

Ellenőrzés: $\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3) = 3x^2y^2$, $\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2 + y^5) = 3x^2y^2$. Egzakt. $F(x,y) = C$, ahol $\frac{\partial F}{\partial x} = x^2y^3$.

$$F(x,y) = \int x^2y^3dx = \frac{x^3}{3}y^3 + g(y)$$

Deriválás y szerint: $\frac{\partial F}{\partial y} = x^3y^2 + g'(y) = x^3y^2 + y^5 \implies g'(y) = y^5 \implies g(y) = \frac{y^6}{6}$. A megoldás:

$$\frac{x^3y^3}{3} + \frac{y^6}{6} = C$$

b) $x^3ydx + (x^4 - y^4)dy = 0$

Megoldás:

$P = x^3y$, $Q = x^4 - y^4$. $\frac{\partial P}{\partial y} = x^3$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 4x^3$. Nem egzakt. A $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ kifejezés: $\frac{1}{x^3y}(4x^3 - x^3) = \frac{3x^3}{x^3y} = \frac{3}{y}$. A multiplikátor: $\mu(y) = e^{\int \frac{3}{y}dy} = e^{3\ln|y|} = y^3$. Szorozva y^3-nal:

$$x^3y^4dx + (x^4y^3 - y^7)dy = 0$$

Ellenőrzés: $\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^4) = 4x^3y^3$, $\frac{\partial}{\partial x}(x^4y^3 - y^7) = 4x^3y^3$. Egzakt. $F(x,y) = C$, ahol $\frac{\partial F}{\partial x} = x^3y^4$.

$$F(x,y) = \int x^3y^4dx = \frac{x^4}{4}y^4 + g(y)$$

Deriválás y szerint: $\frac{\partial F}{\partial y} = x^4y^3 + g'(y) = x^4y^3 - y^7 \implies g'(y) = -y^7 \implies g(y) = -\frac{y^8}{8}$. A megoldás:

$$\frac{x^4y^4}{4} - \frac{y^8}{8} = C$$

iMSc. Oldja meg az $2x^2y' = 3xy - y^2$, $y(0) = 0$ kezdeti érték problémát! Hány megoldása van a $[0,\infty)$ zárt intervallumon? **Megoldás:**

Átrendezve y'-ra ($x \neq 0$):

$$y' = \frac{3xy - y^2}{2x^2} = \frac{3}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Ez egy homogén fokszámú egyenlet. Az $u = y/x$, $y' = u'x + u$ helyettesítéssel:

$$u'x + u = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}u^2$$
$$u'x = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2 = \frac{u(1-u)}{2}$$

Ez szétválasztható:

$$\frac{2}{u(1-u)}du = \frac{1}{x}dx$$

A bal oldalt parciális törtekre bontjuk: $\frac{2}{u(1-u)} = \frac{2}{u} + \frac{2}{1-u}$. Integráljuk mindkét oldalt:

$$\int\left(\frac{2}{u} + \frac{2}{1-u}\right)du = \int\frac{1}{x}dx$$
$$2\ln|u| - 2\ln|1-u| = \ln|x| + C_1$$
$$\ln\left(\left(\frac{u}{1-u}\right)^2\right) = \ln|x| + C_1$$
$$\left(\frac{u}{1-u}\right)^2 = e^{\ln|x|+C_1} = e^{C_1}|x| = C|x|$$

Helyettesítsünk vissza ($u = y/x$):

$$\left(\frac{y/x}{1-y/x}\right)^2 = \left(\frac{y}{x-y}\right)^2 = C|x|$$

A $[0,\infty)$ intervallumon $|x| = x$, tehát $\frac{y}{x-y} = K\sqrt{x}$ valamilyen K konstanssal. Ebből y-t kifejezve: $y = K\sqrt{x}(x-y) \implies y(1 + K\sqrt{x}) = Kx\sqrt{x} \implies y(x) = \frac{Kx\sqrt{x}}{1+K\sqrt{x}}$.

A kezdeti feltétel $y(0) = 0$. Ezt behelyettesítve a megoldásba: $y(0) = \frac{0}{1+0} = 0$. Ez a feltétel **bármely $K \in \mathbf{R}$ konstans esetén teljesül**.

Vizsgáljuk meg a szeparábilis egyenletből adódó szinguláris megoldásokat is:

1. $u = 0 \implies y/x = 0 \implies y(x) = 0$. Ez kielégíti a kezdeti feltételt.
2. $u = 1 \implies y/x = 1 \implies y(x) = x$. Ez is kielégíti a kezdeti feltételt.

A $K = 0$ eset a $y(x) = 0$ megoldást adja. Tehát a megoldások:

- $y(x) = x$
- $y(x) = \frac{Kx\sqrt{x}}{1+K\sqrt{x}}$ bármely $K \in \mathbf{R}$ konstansra.

Mivel a kezdeti feltételt végtelen sok különböző K értékre kapott megoldás, valamint a $y(x) = x$ megoldás is kielégíti, ezért a kezdeti érték problémának a $[0, \infty)$ intervallumon **végtelen sok megoldása van**.