2025 Vill. Mat A3 – 3. gyakorlat

(Vonalmenti és ívhossz szerinti integrál)

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

$$\int_G v dr = \int_{t=t_1}^{t_2} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$$

a) $\int_G v dr = ?$, ahol $v = (x^2 + y^2, y, z)$, G a $(1, 0, 0)$ ponttól az $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ pontig az $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ görbe íve.

Megoldás:

1. lépés: A paramétertartomány meghatározása. A kezdőpont $r(t_1) = (1, 0, 0)$, ami akkor teljesül, ha $\cos t_1 = 1$, $\sin t_1 = 0$ és $t_1 = 0$. Ebből $t_1 = 0$. A végpont $r(t_2) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$, ami akkor teljesül, ha $\cos t_2 = 0$, $\sin t_2 = 1$ és $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Ebből $t_2 = \frac{\pi}{2}$. A paramétertartomány tehát $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

2. lépés: Az $r(t)$ deriváltjának ($\dot{r}(t)$) kiszámítása.

$$r(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{r}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

3. lépés: A v vektormező behelyettesítése az $r(t)$ mentén. A $v(x, y, z) = (x^2 + y^2, y, z)$ vektormezőbe behelyettesítjük a görbe koordinátáit: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = t$.

$$v(r(t)) = (\cos^2 t + \sin^2 t, \sin t, t) = (1, \sin t, t)$$

4. lépés: A $v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)$ skaláris szorzat kiszámítása.

$$\begin{aligned} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) &= (1, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) \\ &= 1 \cdot (-\sin t) + \sin t \cdot \cos t + t \cdot 1 \\ &= -\sin t + \sin t \cos t + t \end{aligned}$$

5. lépés: Az integrál kiszámítása.

$$\begin{aligned} \int_G v dr &= \int_0^{\pi/2} (-\sin t + \sin t \cos t + t) dt \\ &= \left[\cos t + \frac{\sin^2 t}{2} + \frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{2} + \frac{(\pi/2)^2}{2} \right) - \left(\cos 0 + \frac{\sin^2 0}{2} + \frac{0^2}{2} \right) \\ &= \left(0 + \frac{1^2}{2} + \frac{\pi^2/4}{2} \right) - (1 + 0 + 0) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8} - 1 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) $\int_G v dr = ?$, ahol $v = (xy, yz, zx)$, G a $(0,0,0)$ ponttól az $(1,1,1)$ pontig az $r(t) = (t, t^2, t^3)$ görbe íve.

Megoldás:

1. lépés: A paramétertartomány meghatározása. Kezdőpont: $r(t_1) = (t_1, t_1^2, t_1^3) = (0,0,0) \implies t_1 = 0$. Végpont: $r(t_2) = (t_2, t_2^2, t_2^3) = (1,1,1) \implies t_2 = 1$. A paramétertartomány tehát $t \in [0,1]$.

2. lépés: Az $\dot{r}(t)$ kiszámítása.

$$r(t) = (t, t^2, t^3) \quad \implies \quad \dot{r}(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

3. lépés: A v vektormező behelyettesítése az $r(t)$ mentén. A $v(x,y,z) = (xy, yz, zx)$ mezőbe helyettesítjük: $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^3$.

$$v(r(t)) = (t \cdot t^2, t^2 \cdot t^3, t^3 \cdot t) = (t^3, t^5, t^4)$$

4. lépés: A $v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)$ skaláris szorzat kiszámítása.

$$\begin{aligned} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) &= (t^3, t^5, t^4) \cdot (1, 2t, 3t^2) \\ &= t^3 \cdot 1 + t^5 \cdot 2t + t^4 \cdot 3t^2 \\ &= t^3 + 2t^6 + 3t^6 = t^3 + 5t^6 \end{aligned}$$

5. lépés: Az integrál kiszámítása.

$$\begin{aligned} \int_G v dr &= \int_0^1 (t^3 + 5t^6) dt \\ &= \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1^4}{4} + \frac{5 \cdot 1^7}{7} \right) - (0) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{7 + 20}{28} = \frac{27}{28} \end{aligned}$$

c) $\int_G v dr = ?$, ahol $v = (x^3, y^2, z)$, G a $(0,0,1)$ ponttól az $(1,1,-1)$ pontig az $\{(x,y,z) \mid x = y, z = 1 - x^2 - y^2\}$ görbe íve.

Megoldás:

1. lépés: A görbe paraméterezése és a tartomány meghatározása. A görbe az $x = y$ sík és a $z = 1 - x^2 - y^2$ paraboloid metszete. Legyen a paraméter $t = x$. Ekkor $y = t$ is igaz. Helyettesítsük be ezeket z egyenletébe: $z = 1 - t^2 - t^2 = 1 - 2t^2$. A görbe paraméteres alakja tehát: $r(t) = (t, t, 1 - 2t^2)$.

Kezdőpont: $(0,0,1) \implies (t_1, t_1, 1 - 2t_1^2) = (0,0,1) \implies t_1 = 0$. Végpont: $(1,1,-1) \implies (t_2, t_2, 1 - 2t_2^2) = (1,1,-1) \implies t_2 = 1$. A paramétertartomány tehát $t \in [0,1]$.

2. lépés: Az $\dot{r}(t)$ kiszámítása.

$$r(t) = (t, t, 1 - 2t^2) \quad \implies \quad \dot{r}(t) = (1, 1, -4t)$$

3. lépés: A v vektormező behelyettesítése az $r(t)$ mentén. A $v(x,y,z) = (x^3, y^2, z)$ mezőbe helyettesítjük: $x(t) = t$, $y(t) = t$, $z(t) = 1 - 2t^2$.

$$v(r(t)) = (t^3, t^2, 1 - 2t^2)$$

4. lépés: A $v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)$ skaláris szorzat kiszámítása.

$$\begin{aligned} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) &= (t^3, t^2, 1 - 2t^2) \cdot (1, 1, -4t) \\ &= t^3 \cdot 1 + t^2 \cdot 1 + (1 - 2t^2)(-4t) \\ &= t^3 + t^2 - 4t + 8t^3 = 9t^3 + t^2 - 4t \end{aligned}$$

5. lépés: Az integrál kiszámítása.

$$\begin{aligned} \int_G v dr &= \int_0^1 (9t^3 + t^2 - 4t) dt \\ &= \left[\frac{9t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{4t^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{3} - 2\right) - (0) \\ &= \frac{27 + 4 - 24}{12} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

HF) Legyen adott a $v = (2xy + z, x^2, x)$ vektormező. d1) Számítsa ki a $\int_G v\, dr$ vonalintegrált, ahol G a $(0,0,0)$ pontot az $(1,1,1)$ ponttal összekötő egyenes szakasz! d2) Számítsa ki a $\int_H v\, dr$ vonalintegrált, ahol H az $r(t) = (t^3, t, t^5)$ görbe íve a $(0,0,0)$ és $(1,1,1)$ pontok között!

Megoldás d1):

1. lépés: A görbe paraméterezése. A $(0,0,0)$ pontból az $(1,1,1)$ pontba mutató egyenes szakasz paraméterezése: $r(t) = (0,0,0) + t \cdot ((1,1,1) - (0,0,0)) = (t, t, t)$, ahol $t \in [0,1]$.

2. lépés: $\dot{r}(t)$ kiszámítása: $\dot{r}(t) = (1,1,1)$.

3. lépés: Behelyettesítés: $x = t, y = t, z = t$.

$$v(r(t)) = (2(t)(t) + t, t^2, t) = (2t^2 + t, t^2, t)$$

4. lépés: Skaláris szorzat:

$$v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) = (2t^2 + t, t^2, t) \cdot (1,1,1) = 2t^2 + t + t^2 + t = 3t^2 + 2t$$

5. lépés: Integrálás:

$$\int_G v dr = \int_0^1 (3t^2 + 2t) dt = \left[t^3 + t^2\right]_0^1 = 1^3 + 1^2 - 0 = 2$$

Megoldás d2):

1. lépés: A paramétertartomány meghatározása. A görbe $r(t) = (t^3, t, t^5)$. Kezdőpont: $(0,0,0) \implies t = 0$. Végpont: $(1,1,1) \implies t = 1$. A tartomány $t \in [0,1]$.

2. lépés: $\dot{r}(t)$ kiszámítása: $\dot{r}(t) = (3t^2, 1, 5t^4)$.

3. lépés: Behelyettesítés: $x = t^3, y = t, z = t^5$.

$$v(r(t)) = (2(t^3)(t) + t^5, (t^3)^2, t^3) = (2t^4 + t^5, t^6, t^3)$$

4. lépés: Skaláris szorzat:

$$\begin{aligned} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) &= (2t^4 + t^5, t^6, t^3) \cdot (3t^2, 1, 5t^4) \\ &= (2t^4 + t^5)(3t^2) + t^6(1) + t^3(5t^4) \\ &= 6t^6 + 3t^7 + t^6 + 5t^7 = 7t^6 + 8t^7 \end{aligned}$$

5. lépés: Integrálás:

$$\int_H v dr = \int_0^1 (7t^6 + 8t^7) dt = \left[t^7 + t^8\right]_0^1 = 1^7 + 1^8 - 0 = 2$$

Megjegyzés a HF feladathoz: Érdemes észrevenni, hogy a d1) és d2) részben az integrál értéke ugyanaz (2) lett, annak ellenére, hogy két teljesen különböző úton integráltunk ugyanazon kezdő- és végpont között. Ennek az az oka, hogy a $v = (2xy + z, x^2, x)$ vektormező **konzervatív** (gradiensmező), azaz a vonalintegrálja független az úttól, csak a kezdő- és végponttól függ.

2. Számítsuk ki az alábbi görbeív hosszát és térjünk át ívhosszparaméterezésre is!

$$s = \int_G |dr| = \int_{t=t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt, \quad s = s(t) = \int_{t'=t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2(t') + \dot{y}^2(t') + \dot{z}^2(t')}\, dt'$$

$\rightsquigarrow t = t(s) \rightsquigarrow r(t(s))$. Deriváljuk le az ívhosszparaméterezést s szerint!

a) $r(t) = (5\sin t, 5\cos t, 12t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Megoldás:

1. Derivált: Először deriváljuk a megadott $r(t)$ görbét a t paraméter szerint.

$$\dot{r}(t) = (5\cos t, -5\sin t, 12)$$

Most számítsuk ki a deriváltvektor hosszát:

$$\begin{aligned} |\dot{r}(t)| &= \sqrt{(5\cos t)^2 + (-5\sin t)^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{25\cos^2 t + 25\sin^2 t + 144} \\ &= \sqrt{25(\cos^2 t + \sin^2 t) + 144} = \sqrt{25 \cdot 1 + 144} = \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

2. Ívhossz: A teljes görbeív hossza a $[0, 2\pi]$ intervallumon:

$$S = \int_0^{2\pi} |\dot{r}(t)| dt = \int_0^{2\pi} 13\, dt = [13t]_0^{2\pi} = 26\pi$$

3. Áttérés ívhosszparaméterezésre: Az ívhosszfüggvényt $t_0 = 0$ kezdőponttal írjuk fel:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{r}(t')| dt' = \int_0^t 13\, dt' = 13t$$

Ebből kifejezzük t-t az s függvényében: $t(s) = \frac{s}{13}$. Most behelyettesítjük ezt az eredeti $r(t)$ egyenletbe, hogy megkapjuk az $r(s)$ ívhossz-paraméterezett görbét:

$$r(s) = \left(5\sin\left(\frac{s}{13}\right), 5\cos\left(\frac{s}{13}\right), 12\left(\frac{s}{13}\right)\right)$$

4. Deriválás s szerint: Végül deriváljuk az $r(s)$ függvényt az ívhossz (s) szerint:

$$\frac{dr}{ds} = \left(\frac{5}{13}\cos\left(\frac{s}{13}\right), -\frac{5}{13}\sin\left(\frac{s}{13}\right), \frac{12}{13}\right)$$

(Ellenőrzésképpen ennek a vektornak a hossza $\sqrt{(\frac{5}{13})^2 + (\frac{-5}{13})^2 + (\frac{12}{13})^2} = \sqrt{\frac{25+25+144}{169}} = 1$, ahogy kell, hiszen, ha útban mérjük az időt, akkor egységnyi idő (út) alatt egységnyi utat (időt) fut be a légy.)

b) $r(t) = (3e^t \sin t, 3e^t \cos t, 4e^t)$, $t \in [0, \pi]$

Megoldás:

1. Derivált: Deriváljuk $r(t)$-t a szorzat-szabály szerint:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= 3e^t \sin t + 3e^t \cos t \\
\dot{y}(t) &= 3e^t \cos t - 3e^t \sin t \\
\dot{z}(t) &= 4e^t
\end{aligned}$$

A derivált négyzete:

$$\begin{aligned}
|\dot{r}(t)|^2 &= (3e^t(\sin t + \cos t))^2 + (3e^t(\cos t - \sin t))^2 + (4e^t)^2 \\
&= 9e^{2t}(\sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t) + 9e^{2t}(\cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t) + 16e^{2t} \\
&= 9e^{2t}(1 + 2\sin t\cos t) + 9e^{2t}(1 - 2\sin t\cos t) + 16e^{2t} \\
&= 9e^{2t} + 9e^{2t} + 16e^{2t} = 34e^{2t}
\end{aligned}$$

Tehát: $|\dot{r}(t)| = \sqrt{34e^{2t}} = \sqrt{34}e^t$.

2. Ívhossz: A teljes görbeív hossza a $[0, \pi]$ intervallumon:

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{34}e^t dt = \sqrt{34}[e^t]_0^{\pi} = \sqrt{34}(e^{\pi} - e^0) = \sqrt{34}(e^{\pi} - 1)$$

3. Áttérés ívhosszparaméterezésre: Az ívhosszfüggvény $t_0 = 0$ kezdőponttal:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{34}e^{t'} dt' = \sqrt{34}[e^{t'}]_0^t = \sqrt{34}(e^t - 1)$$

Kifejezzük e^t-t és t-t az s függvényében:

$$\frac{s}{\sqrt{34}} = e^t - 1 \implies e^t = 1 + \frac{s}{\sqrt{34}} \implies t(s) = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{34}}\right)$$

Behelyettesítjük e^t-t és $t(s)$-t az eredeti görbébe:

$$r(s) = \left(3\left(1+\frac{s}{\sqrt{34}}\right)\sin\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{34}}\right)\right), 3\left(1+\frac{s}{\sqrt{34}}\right)\cos\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{34}}\right)\right), 4\left(1+\frac{s}{\sqrt{34}}\right)\right)$$

4. Deriválás s szerint: A deriválást a láncszabállyal ($\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds}$) a legegyszerűbb elvégezni. Tudjuk, hogy $\frac{ds}{dt} = |\dot{r}(t)| = \sqrt{34}e^t$, így $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{34}e^t}$.

$$\begin{aligned}\frac{dr}{ds} &= \dot{r}(t)\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{34}e^t}(3e^t(\sin t + \cos t), 3e^t(\cos t - \sin t), 4e^t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{34}}(3(\sin t + \cos t), 3(\cos t - \sin t), 4)\end{aligned}$$

Ha ezt teljesen s függvényében akarjuk kifejezni, behelyettesítjük $t(s) = \ln(1+\frac{s}{\sqrt{34}})$-t.

3. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét! Figyeljünk a görbe irányítására! $(k = (0,0,1))$

$$\int_G v dr = \int_G v_t |dr|, \quad \int_G v \times dr = \int_{t_1}^{t_2} v(r(t)) \times \dot{r}(t) dt$$

a) $v(r) = k \times r$; $K:\ r(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, $R > 0$, $\int_K v dr = ?$

Megoldás:

Először felírjuk a $v(r)$ vektormezőt: $r = (x,y,z)$ és $k = (0,0,1)$, így

$$v(r) = k \times r = (0,0,1) \times (x,y,z) = (-y, x, 0)$$

A görbe deriváltja: $\dot{r}(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0)$. Helyettesítsük be a görbe paraméterezését a vektormezőbe: $x(t) = R\cos t, y(t) = R\sin t$.

$$v(r(t)) = (-R\sin t, R\cos t, 0)$$

Számítsuk ki a skaláris szorzatot:

$$v(r(t))\cdot\dot{r}(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0)\cdot(-R\sin t, R\cos t, 0) = R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t = R^2$$

Végül az integrál:

$$\int_K v dr = \int_0^{2\pi} R^2 dt = [R^2 t]_0^{2\pi} = 2\pi R^2$$

b) $v(r) = \dfrac{k \times r}{|k \times r|^3}$; $G:\ r(t) = (R\sin t, R\cos t, t)$, $t \in [0,\pi]$, $R > 0$, $\int_G v dr = ?$

Megoldás:

A vektormező: $k \times r = (-y, x, 0)$ és $|k \times r| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$v(r) = \frac{(-y, x, 0)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

A görbe deriváltja: $\dot{r}(t) = (R\cos t, -R\sin t, 1)$. Helyettesítés a vektormezőbe ($x(t) = R\sin t, y(t) = R\cos t$):

$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t = R^2$$

$$v(r(t)) = \frac{(-R\cos t, R\sin t, 0)}{(R^2)^{3/2}} = \frac{(-R\cos t, R\sin t, 0)}{R^3} = \frac{1}{R^2}(-\cos t, \sin t, 0)$$

A skaláris szorzat:

$$v(r(t))\cdot\dot{r}(t) = \frac{1}{R^2}(-\cos t, \sin t, 0)\cdot(R\cos t, -R\sin t, 1) = \frac{1}{R^2}(-R\cos^2 t - R\sin^2 t) = \frac{-R}{R^2} = -\frac{1}{R}$$

Az integrál:

$$\int_G v dr = \int_0^\pi -\frac{1}{R}dt = \left[-\frac{t}{R}\right]_0^\pi = -\frac{\pi}{R}$$

c) $v(r) = \dfrac{r}{|r|^3}$; $G:\ r(t) = (R\sin t, R\cos t, 0)$, $t \in [0,\pi]$, $R > 0$, $\int_G v \times dr = ?$

Megoldás:

A görbe mentén $|r(t)| = \sqrt{(R\sin t)^2 + (R\cos t)^2 + 0^2} = R$. A vektormező a görbe mentén:

$$v(r(t)) = \frac{r(t)}{|r(t)|^3} = \frac{(R\sin t, R\cos t, 0)}{R^3} = \frac{1}{R^2}(\sin t, \cos t, 0)$$

A görbe deriváltja: $\dot{r}(t) = (R\cos t, -R\sin t, 0)$. Számítsuk ki a vektoriális szorzatot:

$$\begin{aligned}
v(r(t)) \times \dot{r}(t) &= \frac{1}{R^2}(\sin t, \cos t, 0) \times (R\cos t, -R\sin t, 0) \\
&= \frac{R}{R^2}(\sin t, \cos t, 0) \times (\cos t, -\sin t, 0) \\
&= \frac{1}{R}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin t & \cos t & 0 \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{R}\mathbf{k}(\sin t(-\sin t) - \cos t(\cos t)) \\
&= \frac{1}{R}\mathbf{k}(-\sin^2 t - \cos^2 t) = \frac{1}{R}(0, 0, -1) = (0, 0, -1/R)
\end{aligned}$$

Az integrál:

$$\int_G v \times dr = \int_0^\pi (0, 0, -1/R)dt = [(0, 0, -t/R)]_0^\pi = (0, 0, -\pi/R)$$

3. HF. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét! ($k = (0, 0, 1)$)

d) $v(r) = |k \times r|^2 \cdot k \times r$; $G: r(t) = (R\sin t, R\cos t, t)$, $t \in [0, \pi]$, $R > 0$, $\int_G v dr = ?$

Megoldás:

1. A vektormező felírása: Először egyszerűsítsük a $v(r)$ kifejezést. Tudjuk, hogy $r = (x, y, z)$ és $k = (0, 0, 1)$.

$$k \times r = (0,0,1) \times (x,y,z) = (-y, x, 0)$$

Ennek a magnitúdó-négyzete:

$$|k \times r|^2 = (-y)^2 + x^2 + 0^2 = x^2 + y^2$$

Tehát a vektormező:

$$v(r) = (x^2 + y^2) \cdot (-y, x, 0)$$

2. Behelyettesítés a görbe mentén: A görbe $r(t) = (R\sin t, R\cos t, t)$, tehát $x(t) = R\sin t$ és $y(t) = R\cos t$. A görbe pontjaiban $x^2 + y^2 = (R\sin t)^2 + (R\cos t)^2 = R^2$. Ezt visszahelyettesítve $v(r)$-be:

$$v(r(t)) = R^2 \cdot (-R\cos t, R\sin t, 0) = (-R^3\cos t, R^3\sin t, 0)$$

3. A görbe deriváltja:

$$\dot{r}(t) = (R\cos t, -R\sin t, 1)$$

4. A skaláris szorzat kiszámítása:

$$\begin{aligned} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) &= (-R^3\cos t, R^3\sin t, 0) \cdot (R\cos t, -R\sin t, 1) \\ &= (-R^3\cos t)(R\cos t) + (R^3\sin t)(-R\sin t) + (0)(1) \\ &= -R^4\cos^2 t - R^4\sin^2 t \\ &= -R^4(\cos^2 t + \sin^2 t) = -R^4 \end{aligned}$$

5. Az integrál kiszámítása:

$$\int_G v dr = \int_0^\pi -R^4 dt = \left[-R^4 t\right]_0^\pi = -R^4(\pi - 0) = -\pi R^4$$

e) $v(r) = r|r|^2$; $G: r(t) = (R\sin t, R\cos t, 0)$, $t \in [0, \pi]$, $R > 0$, $\int_G v \times dr = ?$

Megoldás:

1. A vektormező felírása a görbe mentén: A görbe $r(t) = (R\sin t, R\cos t, 0)$. Számítsuk ki a görbe pontjainak távolság-négyzetét az origótól:

$$|r(t)|^2 = (R\sin t)^2 + (R\cos t)^2 + 0^2 = R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t = R^2$$

Tehát a vektormező a görbe mentén:

$$v(r(t)) = r(t) \cdot |r(t)|^2 = (R\sin t, R\cos t, 0) \cdot R^2 = (R^3\sin t, R^3\cos t, 0)$$

2. A görbe deriváltja:

$$\dot{r}(t) = (R\cos t, -R\sin t, 0)$$

3. A vektoriális szorzat kiszámítása:

$$\begin{aligned}
v(r(t)) \times \dot{r}(t) &= (R^3 \sin t, R^3 \cos t, 0) \times (R\cos t, -R\sin t, 0) \\
&= R^3 \cdot R \cdot (\sin t, \cos t, 0) \times (\cos t, -\sin t, 0) \\
&= R^4 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin t & \cos t & 0 \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} \\
&= R^4 \left(\mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(-\sin^2 t - \cos^2 t)\right) \\
&= R^4 (\mathbf{k}(-1)) = (0, 0, -R^4)
\end{aligned}$$

4. Az integrál kiszámítása:

$$\int_G v \times dr = \int_0^\pi (0,0,-R^4)dt = \left[(0,0,-R^4 t)\right]_0^\pi = (0,0,-R^4\pi) - (0,0,0) = (0,0,-\pi R^4)$$