

# 13-14. hét: Differenciálegyenlet-rendszerek és Laplace-transzformáció

## 1. Inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

**Emlékeztető (Az állandó variálása mátrixos alakban):**

Adott az  $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}(t)$  inhomogén rendszer.

1. Először megoldjuk a homogén részt ( $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ ), meghatározzuk a sajátértékeket és sajátvektorokat. Ebből felírjuk a  $\Psi(t)$  **alapmegoldás-mátrixot** (fundamentális mátrix), melynek oszlopai a lineárisan független homogén megoldások.
2. Az inhomogén megoldást  $\underline{x}_{inh} = \Psi(t) \cdot \underline{c}(t)$  alakban keressük.
3. A  $\underline{c}(t)$  ismeretlen vektor deriváltjára megoldandó egyenletrendszer:

$$\Psi(t) \cdot \dot{\underline{c}}(t) = \underline{b}(t)$$

Ebből  $\dot{\underline{c}}(t)$ -t kifejezzük (Gauss-eliminációval vagy  $\Psi^{-1}$ -gyel), majd integráljuk.

1. Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszereket! A mátrix sajátértékei valósak és különbözőek.

a) **(Órai)** Polinom típusú gerjesztés:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + t \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 \end{cases}$$

b) **(Házi)** Exponenciális gerjesztés:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2. Laplace-transzformáció alkalmazása

2. Oldja meg a következő kezdeti érték feladatokat Laplace-transzformációval! Figyelje meg a parciális törtekre bontás típusait!

a) **Lineáris nevezők:** (A nevezőben csupa elsőfokú, valós tényező van)

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$$

b) **Vegyes (elsőfokú és magasabb fokú) nevezők:**

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

- c) **Másodrendű nemvalós tényezők:** (A nevezőben irreducibilis kvadratikus tagok)

$$y'' + 9y = 10 \cos(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

### 3. Rendszerek megoldása Laplace-szal ("Trükkös" módszerek)

3. Oldja meg az alábbi rendszereket! *Tipp az a) és b) feladathoz:* A rendszer szimmetriája miatt érdemes az egyenleteket összeadni, illetve kivonni egymásból. Ha Laplace-transzformálás után adjuk össze őket, a konstansok kieshetnek, így nullára redukált egyenletet kaphatunk.

- a) **Szép eset (redukció nullára):**

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -2$$

- b) **Hasonló rendszer, általánosabb feltétellel:**

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 3x + 2y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 4$$

- c) **Aszimmetrikus eset (hagyományos úton):**

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

# Megoldások

## 1. feladat: Inhomogén rendszerek

1a) Megoldás: A mátrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

• Sajátértékek:  $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \Rightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 3) = 0$ . Tehát  $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3$ .

• Sajátvektorok:  $\lambda_1 = 5 \Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  $\lambda_2 = -3 \Rightarrow \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

• Alapmegoldás mátrix:  $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-3t} \\ e^{5t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}$ .

• Inhomogén rész ( $\Psi \dot{\underline{c}} = \underline{b}$ ):

$$\begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-3t} \\ e^{5t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cramer-szabállyal vagy inverzzel megoldva ( $\det \Psi = -2e^{2t}$ ):

$$\dot{c}_1 = \frac{1}{2}te^{-5t}, \quad \dot{c}_2 = \frac{1}{2}te^{3t}$$

Integrálás (parciálisan):  $c_1 = -\frac{1}{10}e^{-5t}(t + \frac{1}{5})$ ,  $c_2 = \frac{1}{6}e^{3t}(t - \frac{1}{3})$ .

• Végeredmény:  $\underline{x} = c_1 \underline{v}_1 e^{5t} + c_2 \underline{v}_2 e^{-3t} + \underline{x}_{inh}$ .  $\underline{x}_{inh} = \begin{pmatrix} -t/15 - 4/75 \\ -4t/15 + 1/75 \end{pmatrix}$ .

1b) HF Megoldás: Sajátértékek:  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$ .  $\Psi(t) = \begin{pmatrix} 3e^{4t} & e^{-t} \\ 2e^{4t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$ .  $\dot{c}_1 = \frac{1}{5}e^t, \dot{c}_2 = \frac{2}{5}e^{6t}$ .  $\underline{x}_{inh} = \begin{pmatrix} \frac{11}{30}e^{5t} \\ \frac{7}{30}e^{5t} \end{pmatrix}$ .

## 2. feladat: Laplace IVP

2a)  $Y(s)(s^2 - s - 6) - s(1) - (-1) - 8 = 0 \Rightarrow Y(s)(s - 3)(s + 2) = s + 7$ . Parciális törtek:  $Y(s) = \frac{s+7}{(s-3)(s+2)} = \frac{2}{s-3} - \frac{1}{s+2}$ . Megoldás:  $y(t) = 2e^{3t} - e^{-2t}$ .

2b) Transzformálva:  $(s - 2)^2 Y(s) - 1 = \frac{2}{s-2}$ . Rendezve:  $Y(s) = \frac{2}{(s-2)^3} + \frac{1}{(s-2)^2}$ . Visszatranszformálva ( $1/s^n \rightarrow t^{n-1}/(n-1)!$  eltolással): Megoldás:  $y(t) = t^2 e^{2t} + t e^{2t}$ .

2c) Transzformálva:  $(s^2 + 9)Y(s) - s = \frac{10s}{s^2+4}$ .  $Y(s) = \frac{10s}{(s^2+4)(s^2+9)} + \frac{s}{s^2+9}$ . Az első tag felbontása:  $\frac{2s}{s^2+4} - \frac{2s}{s^2+9}$ . Összesítve:  $Y(s) = \frac{2s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+9}$ . Megoldás:  $y(t) = 2\cos(2t) - \cos(3t)$ .

## 3. feladat: Laplace rendszerek

3a) Egyenletek összege:  $(\dot{x} + \dot{y}) = 3(x + y)$ . Kezdeti feltétel összege:  $x(0) + y(0) = 2 + (-2) = 0$ . Laplace:  $s(X + Y) - 0 = 3(X + Y) \Rightarrow (s - 3)(X + Y) = 0$ . Mivel ez minden  $s$ -re igaz, így  $X(s) + Y(s) = 0$ , azaz  $y(t) = -x(t)$ . Visszahelyettesítve az első egyenletbe:  $\dot{x} = x + 2(-x) = -x$ . Megoldás:  $x(t) = 2e^{-t}$ , és  $y(t) = -2e^{-t}$ .

**3b)** Összeg:  $\dot{u} = 5u$  (ahol  $u = x + y$ ),  $u(0) = 5 \Rightarrow u(t) = 5e^{5t}$ . Különbség:  $\dot{v} = -v$  (ahol  $v = x - y$ ),  $v(0) = -3 \Rightarrow v(t) = -3e^{-t}$ .  $x = (u + v)/2 = 2.5e^{5t} - 1.5e^{-t}$ .  $y = (u - v)/2 = 2.5e^{5t} + 1.5e^{-t}$ .

**3c)**

$$sX - 1 = X - 2Y \quad (1)$$

$$sY - 1 = X + 4Y \quad (2)$$

Kifejezzük  $X(s)$ -et a második egyenletből:

$$X = sY - 4Y - 1 = (s - 4)Y - 1 \quad (3)$$

Ezt behelyettesítjük az első egyenlet rendezett alakjába ( $(s - 1)X = -2Y + 1$ ):

$$(s - 1)[(s - 4)Y - 1] = -2Y + 1$$

$$(s^2 - 5s + 4)Y - s + 1 = -2Y + 1$$

$$(s^2 - 5s + 4)Y + 2Y = s$$

$$(s^2 - 5s + 6)Y = s$$

Kifejezzük  $Y(s)$ -t és parciális törtekre bontjuk (a nevező gyökei 2 és 3):

$$Y(s) = \frac{s}{(s - 2)(s - 3)} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s - 3} \quad (4)$$

Az együtthatók meghatározása ( $s = A(s - 3) + B(s - 2)$ ):

- $s = 2 \rightsquigarrow 2 = -A \rightsquigarrow A = -2$
- $s = 3 \rightsquigarrow 3 = B \rightsquigarrow B = 3$

Tehát a transzformált alak és az inverz transzformált:

$$Y(s) = -\frac{2}{s - 2} + \frac{3}{s - 3} \rightsquigarrow \mathbf{y(t)} = -2\mathbf{e^{2t}} + 3\mathbf{e^{3t}} \quad (5)$$

Maja az  $X$ :

$$X(s) = (s - 4)Y(s) - 1 = (s - 4)\frac{s}{(s - 2)(s - 3)} - 1$$

$$X(s) = \frac{s^2 - 4s - (s^2 - 5s + 6)}{(s - 2)(s - 3)} = \frac{s - 6}{(s - 2)(s - 3)}$$

Parciális törtekre bontás ( $s - 6 = C(s - 3) + D(s - 2)$ ):

- $s = 2 \rightsquigarrow -4 = -C \rightsquigarrow C = 4$
- $s = 3 \rightsquigarrow -3 = D \rightsquigarrow D = -3$

Tehát:

$$X(s) = \frac{4}{s - 2} - \frac{3}{s - 3} \rightsquigarrow \mathbf{x(t)} = 4\mathbf{e^{2t}} - 3\mathbf{e^{3t}} \quad (6)$$