2025 Vill. Mat A3 – 1. gyakorlat (1-2 hét)

(Szeparábilis differenciálegyenlet, kezdeti érték probléma.)

Szeparábilis (szétválaszható változójú): $g(y) \cdot y' = f(x)$.
A megoldás: $\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx \rightsquigarrow \Psi(y) = \Phi(x) + C$.

1. Oldja meg az alábbi **differenciálegyenleteket!**
(Azaz keressen olyan $F(x,y) = C$ függvényegyenletet-sereget, amely ekvivalens a d.e.-tel!)

$$\text{a) } y^4 y' = \sin x, \quad \text{b) } (2xy + 2x)y' = \ln x, \quad \text{c) } x^2 y' = 1 + y^2$$

2. Oldja meg az alábbi **kezdeti érték problémákat!**
(Azaz keressen olyan $F(x,y) = 0$ függvényegyenletet, amely ekvivalnes a d.e.-tel azzal a kezdeti feltétellel, hogy adott x_0, y_0-ra $F(x_0, y_0) = 0$)

$$\text{a) } y' = x^4 \cos^2 y \qquad a1) \quad y(0) = \frac{\pi}{4}, \quad a2) \quad y(0) = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{b) } y' = (y^2 - 1)\sin x \qquad b1) \quad y(0) = 2, \quad b2) \quad y(0) = 1$$

(Egzakt differenciálegyenlet)

$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ (vagy archaikus jelöléssel: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$) **egzakt**, ha van olyan $F(x,y) = C$ egyenlet, amelyre az teljesül, hogy $\partial_x F = P$ és $\partial_y F = Q$. Ekkor $F(x,y) = C$ megoldása az egyenletnek. (Az egzaktság szükséges és elégséges feltétele egy egyszeresen összefüggő tartományon, hogy ott $\partial_x Q \equiv \partial_y P$ teljesüljön, de az alábbiak mind egzaktak és ezért elég az előbbi parciális differenciál-egyenlet-rendszer alapján megkeresni a megoldásukat.)

3. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

$$\text{a) } (2xy + e^x)dx + \left(x^2 + \frac{1}{y}\right)dy = 0, \quad \text{b) } (7x^6y^5 - \sin x)dx + \left(5x^7y^4 + \frac{1}{y^2+1}\right)dy = 0$$

4. Oldja meg az alábbi kezdeti érték problémákat!

$$\text{a) } 3x^2 + 2xy^2 + 2x^2yy' = 0, \qquad y(1) = 1$$

$$\text{b) } x^3 + y^3y' = 0 \qquad b1) \quad y(0) = 1, \quad b2) \quad y(0) = -1$$

iMSc. Oldja meg az $y' = \sqrt[3]{y}$, $\quad y(0) = 0$ kezdeti érték problémát! Hány megoldáa van?