Vektorkalkulus azonosságok Einstein-féle szummációs konvencióval

1. Koordináta reprezentációk és definíciók

Einstein-féle összegzési jelölésmódnak nevezzük, amikor nem írjuk ki a szummát és az összegző indexet úgy ismerjük fel, hogy duplán szerepel a kifejezésben.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i b_i \rightsquigarrow a_i b_i$$

EK jelöli, amikor áttérünk szumma spórolós indexes jelölésre (Einstein-féle szummációs konvencióra), és a ꓘƎ jelöli, amikor visszatérünk a vektor-jelölésre.

$$\mathbf{ab} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \overset{\text{EK}}{=} a_i b_i \overset{\text{ꓘƎ}}{=} \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \mathbf{ab}$$

- **parciális derivált:** $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_{x_i}$
- **Kronecker-delta:** $\delta_{ij} \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$
- **Levi-Civita-szimbólum:** $\varepsilon_{ijk} \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1, & \text{ha } (i,j,k) \text{ páros permutációja } (1,2,3)\text{-nak} \\ -1, & \text{ha } (i,j,k) \text{ páratlan permutációja } (1,2,3)\text{-nak} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$

vektor művelet	**vektoros**	**nablás**	**koo. repr.**	**EK-n belül**
skalárszorzat	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$		$\sum_{i=1}^{3} u_i v_i$	$u_i v_i$
vektorszorzat (i-edik komp.)	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i$		$\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_j v_k$	$\varepsilon_{ijk} u_j v_k$
gradiens (i-edik komp.)	$(\operatorname{grad} u)_i$	$(\nabla u)_i$	$\partial_i u$	$\partial_i u$
divergencia	$\operatorname{div} \mathbf{v}$	$\nabla \cdot \mathbf{v}$	$\sum_{i=1}^{3} \partial_i v_i$	$\partial_i v_i$
rotáció (i-edik komp.)	$(\operatorname{rot} \mathbf{v})_i$	$(\nabla \times \mathbf{v})_i$	$\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$	$\varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$
Laplace-operátor (skalár)	Δu	$(\nabla \cdot \nabla) u$	$\sum_{i=1}^{3} \partial_i \partial_i u$	$\partial_i \partial_i u$

Legfontosabb számolási trükkök

1. **szummázás δ-ra** $\sum\delta$: $\sum_{i=1}^{3} v_i\delta_{ij} = \cancel{\sum_{i=1}^{3}} v_{\cancel{i}j}\cancel{\delta_{ij}} = v_j$
2. **antiszimmetria:** $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$
3. **permutáció invariancia:** $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$
4. **ε-δ azonosság:** $\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ EK-n belül: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$
5. **Young-tétel:** $\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f$ (másodrendű parc. deriv.-ak szimmetrikussága kétszer folyt. diff. f esetében)
6. **Az identitás függvény Jacobi-mátrixa:** $J^{id}_{ji} = \partial_i x_j = \delta_{ij}$

---

2. Azonosságok

1. Hossz gradiense: $\boxed{\operatorname{grad}|\mathbf{r}| = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}}$, ha $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$

$$(\operatorname{grad}|\mathbf{r}|)_i \overset{\text{EK}}{=} \partial_i(|\mathbf{r}|) \overset{|\mathrm{r}|\text{ def.}}{=} \partial_i(x_k x_k)^{1/2} \overset{\text{külső fv. der.}}{=} \frac{1}{2}(x_k x_k)^{-1/2}\cdot\partial_i(x_k x_k)$$

$$\overset{\text{belső fv. der.}}{=} \frac{1}{2|\mathbf{r}|}\cdot(\delta_{ik}x_k + x_k\delta_{ik}) \overset{\sum\delta}{=} \frac{1}{2|\mathbf{r}|}\cdot(x_i + x_i) = \frac{1}{2|\mathbf{r}|}\cdot(2x_i) = \frac{x_i}{|\mathbf{r}|} \overset{\reflectbox{EK}}{=} \frac{r_i}{|\mathbf{r}|}$$

2. Helyvektor rotációja: $\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{r} = \mathbf{0}}$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{r})_i \overset{\text{EK}}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j r_k \overset{\mathrm{r}\text{ def.}}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j x_k \overset{\mathrm{J}^{\mathrm{id}}\text{ der.}}{=} \varepsilon_{ijk}\delta_{jk} \overset{\sum\delta}{=} \varepsilon_{ijj} \overset{\varepsilon\text{ def.}}{=} 0$$

3. Skalár-vektor szorzat divergenciája: $\operatorname{div}(u\mathbf{v}) = (\operatorname{grad} u)\cdot\mathbf{v} + u(\operatorname{div}\mathbf{v})$

$$\operatorname{div}(u\mathbf{v}) \overset{\text{EK}}{=} \partial_i(uv_i) \overset{\text{szorzat der.}}{=} (\partial_i u)v_i + u(\partial_i v_i) \overset{\reflectbox{EK}}{=} (\operatorname{grad} u)\cdot\mathbf{v} + u(\operatorname{div}\mathbf{v})$$

4. Skalár-vektor szorzat rotációja: $\operatorname{rot}(u\mathbf{v}) = (\operatorname{grad} u)\times\mathbf{v} + u(\operatorname{rot}\mathbf{v})$

$$(\operatorname{rot}(u\mathbf{v}))_i \overset{\text{EK}}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j(uv_k) \overset{\text{szorzat der.}}{=} \varepsilon_{ijk}[(\partial_j u)v_k + u(\partial_j v_k)]$$

$$= \varepsilon_{ijk}(\partial_j u)v_k + \varepsilon_{ijk}u(\partial_j v_k) \overset{\reflectbox{EK}}{=} ((\operatorname{grad} u)\times\mathbf{v})_i + u(\operatorname{rot}\mathbf{v})_i$$

5. Rotáció divergenciája: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) \overset{\text{EK}}{=} \partial_i(\operatorname{rot}\mathbf{v})_i \overset{\text{rot def.}}{=} \partial_i(\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k) = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j v_k \overset{\text{Young-tétel}}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_i v_k =$$

$$= -\varepsilon_{jik}\partial_j\partial_i v_k \overset{\reflectbox{EK}}{=} -\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v})$$

amiből: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0 \rightsquigarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0$

6. Gradiens rotációja: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \mathbf{0}$

$$(\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u))_i \overset{\text{EK}}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j(\operatorname{grad} u)_k \overset{\text{grad def.}}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j(\partial_k u) = \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k u \overset{\text{Young-tétel}}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_k\partial_j u =$$

$$= -\varepsilon_{ikj}\partial_k\partial_j u \overset{\text{EK}}{=} -(\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u))_i$$

amiből: $(\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u))_i + (\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u))_i = 0 \rightsquigarrow (\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u))_i = 0$

7. Rotáció rotációja: $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v}$

$$(\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{v}))_i \overset{\text{EK}}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j(\operatorname{rot}\mathbf{v})_k \overset{\text{rot def.)}}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{klm}\partial_l v_m) = (\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm})\partial_j\partial_l v_m$$

$$\overset{\varepsilon\text{-}\delta\text{ azon.}}{=} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l v_m = (\delta_{il}\delta_{jm}\partial_j\partial_l v_m) - (\delta_{im}\delta_{jl}\partial_j\partial_l v_m)$$

$$\overset{\sum\delta}{=} (\partial_m\partial_i v_m) - (\partial_l\partial_l v_i) \overset{\text{Young-tétel}}{=} \partial_i(\partial_m v_m) - (\partial_l\partial_l)v_i \overset{\text{EK}}{=} (\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v}))_i - (\Delta\mathbf{v})_i$$

---

3. Gyakorló Feladatok (Házik)

Feladat 1: $\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

Igazold: $\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\operatorname{rot}\mathbf{u}) - \mathbf{u}\cdot(\operatorname{rot}\mathbf{v})$

$$\text{Induló lépés: } \operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) \overset{\text{EK}}{=} \partial_i(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_i \overset{\times\text{ def.}}{=} \partial_i(\varepsilon_{ijk}u_j v_k) = \dots$$

(Tipp: szorzat der., majd az ε indexeinek ciklikus cseréje, pl. $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$ és $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$)

Feladat 2: $\operatorname{rot}((\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{v})$

Igazold: $\operatorname{rot}((\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{u})\times\mathbf{v} + (\operatorname{div}\mathbf{u})(\operatorname{rot}\mathbf{v})$

$$\text{Induló lépés: } (\operatorname{rot}((\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{v}))_i \overset{\text{EK}}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j((\operatorname{div}\mathbf{u})v_k) \overset{\text{div def.}}{=} \varepsilon_{ijk}\partial_j((\partial_l u_l)v_k) = \dots$$

(Tipp: Ez a $\operatorname{rot}(u\mathbf{v})$ azonosság, $u = \operatorname{div}\mathbf{u}$ helyettesítéssel.)

Feladat 3: $\operatorname{grad}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ **(Nehezebb)**

Igazold: $\operatorname{grad}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u}\times(\operatorname{rot}\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\operatorname{rot}\mathbf{u})$

$$\text{Induló lépés: } (\operatorname{grad}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}))_i \overset{\text{EK}}{=} \partial_i(u_j v_j) \overset{\text{szorzat der.}}{=} (\partial_i u_j)v_j + u_j(\partial_i v_j) = \dots$$

(Tipp: A jobb oldalt is EK-val, és az ε-δ azonosságot a rotációs tagokra.)