1. gyakorló vizsga-zh, Matematika A3 VIK Villamosmérnök

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)

1. Oldja meg az alábbi differenciálegyenletrendszert!

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) + 3x_2(t) + 4t \end{cases}$$

MO. Legyen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{b}(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4t \end{smallmatrix}\right)$. A karakterisztikus egyenlet $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4\lambda = 0$, amiből a sajátértékek $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 4$. A két $A - \lambda I$ elfajuló mátrix:

$$A - \lambda_1 I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix}\right) \qquad A - \lambda_2 I = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -3 \end{smallmatrix}\right)$$

sajátvektorok rendre: $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ és $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Az alapmátrix:

$$\Psi(t) = \left[\begin{bmatrix} 1 \cdot e^{0t} \\ -1 \cdot e^{0t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \cdot e^{4t} \\ 3 \cdot e^{4t} \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 1 & e^{4t} \\ -1 & 3e^{4t} \end{bmatrix}$$

A homogén megoldás: $\mathbf{x}_h(t) = \Psi(t) \cdot \mathbf{C}$, ahol $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$. Inhomogén megoldást $\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{c}(t)$ alakban feltételezve, a megoldandó egyenlet:

$$\Psi(t)\,\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{b}(t)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{4t} & 0 \\ -1 & 3e^{4t} & 4t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 4e^{4t} & 4t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{4t} & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \\ 0 & e^{4t} & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \\ 0 & 1 & te^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$\dot{c}_1(t) = -t \rightsquigarrow c_1(t) = -\frac{t^2}{2}, \qquad \dot{c}_2(t) = te^{-4t} \rightsquigarrow c_2(t) = -\frac{1}{4}te^{-4t} - \frac{1}{16}e^{-4t}$$

A teljes megoldás $\mathbf{x}(t) = \Psi(t) \cdot \mathbf{C} + \Psi(t) \cdot \mathbf{c}(t)$, ahol $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^T$ tetszőleges konstans vektor. (Nem kötelező beszorozni, de beszorozva:

$$x_1(t) = C_1 + C_2 e^{4t} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16}, \qquad x_2(t) = -C_1 + 3C_2 e^{4t} + \frac{t^2}{2} - \frac{3t}{4} - \frac{3}{16}\Bigg)$$

2. Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^{2t}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

MO. $\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s)$, $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s)$, $\mathcal{L}\{2e^{2t}\} = \frac{2}{s-2}$

$$s^2 Y(s) - 4sY(s) + 3Y(s) = \frac{2}{s-2} \rightsquigarrow Y(s)(s^2 - 4s + 3) = \frac{2}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s-1)(s-2)(s-3)} \rightsquigarrow \frac{2}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

A számlálók egyenlősége:

$$2 = A(s-2)(s-3) + B(s-1)(s-3) + C(s-1)(s-2)$$

Ha $s = 1$: $2 = A \cdot (-1) \cdot (-2) \rightsquigarrow 2 = 2A \rightsquigarrow A = 1$. Ha $s = 2$: $2 = B \cdot 1 \cdot (-1) \rightsquigarrow 2 = -B \rightsquigarrow B = -2$, Ha $s = 3$: $2 = C \cdot 2 \cdot 1 \rightsquigarrow 2 = 2C \rightsquigarrow C = 1$.

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-3} \rightsquigarrow y(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}$$

3. Számítsa ki a $G : r(t) = (t^3, \sin(\frac{\pi}{2}t^2), t)$, $0 \le t \le 1$ görbére a

$$\mathbf{v}(x,y,z) = (2xy + z, x^2 + z^2, 2yz + x)$$

vektormező integrálját.

MO. A vektormező konzervatív, ha $\mathrm{rot}\mathbf{v}(x,y,z) \equiv \mathbf{0}$: Legyen $\mathbf{v} = (2xy + z, x^2 + z^2, 2yz + x)$. A rotáció kiszámítása:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xy+z & x^2+z^2 & 2yz+x \end{vmatrix} = (2z - 2z, 1 - 1, 2x - 2x) = (0,0,0)$$

Mivel a rotáció nullvektor, létezik u potenciál, melyre fennáll az alábbi parciális differenciálegyenlet-rendszer:

$$(1)\ \partial_x u = 2xy + z, \quad (2)\ \partial_y u = x^2 + z^2, \quad (3)\ \partial_z u = 2yz + x$$

Integráljuk az egyenleteket a megfelelő változók szerint parametrikusan:

$$(1) \rightsquigarrow u(x,y,z) = \int (2xy + z)\,dx = x^2y + xz + C_1(y,z)$$

$$(2) \rightsquigarrow u(x,y,z) = \int (x^2 + z^2)\,dy = x^2y + yz^2 + C_2(x,z)$$

$$(3) \rightsquigarrow u(x,y,z) = \int (2yz + x)\,dz = yz^2 + xz + C_3(x,y)$$

Innen a potenciálfüggvény:

$$u(x,y,z) = x^2y + yz^2 + xz + C$$

Az integrál a Newton–Leinbiz-tétellel számolható ki. A görbe kezdő és végpontja: $P_1(t = 0) = (0,0,0)$, $P_2(t = 1) = (1,1,1)$. Ahonnan $\int\limits_G v dr = u(1,1,1) - u(0,0,0) = 3$.

4. Számítsa ki az $(1;0;0)$-ból az $(1;1;0)$-ba, majd onnan a $(0;1;0)$-ba menő L töröttvonalra a $v(x,y,z) = (3xy^2 + 3; -x^2y; 2z + x^2)$ vektorfüggvény integrálját!

MO. Stokes-tétellel. Legyen $T = \{(x,y,0) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ az egységnégyzet az xy-síkban, $(0,0,1)$ normálissal. $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = (0, -2x, -8xy)$ és $(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_\perp = -8xy$. Ekkor a zárt négyzetvonalra:

$$\oint\limits_{\partial T} \mathbf{v}\,dr = \iint\limits_T \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,dA = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 -8xy\,dxdy = -8 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = -2.$$

A lezáró szakaszok $L_3 = [(0,1,0),(0,0,0)]$ és $L_4 = [(0,0,0),(1,0,0)]$. L_3-on $x = 0$ és $dx = 0$, így $\mathbf{v}_\parallel \cdot dr = v_2 dy = (-0^2y)dy = 0$. Az integrál: $\int_{L_3} \mathbf{v}\,dr = 0$. L_4-en $y = 0$ és $dy = 0$, így $\mathbf{v}_\parallel \cdot dr = v_1 dx = (3x \cdot 0^2 + 3)dx = 3dx$. Az integrál:

$$\int\limits_{L_4} \mathbf{v}\,dr = \int\limits_0^1 3\,dx = 3.$$

A keresett L töröttvonal az $A(1,0,0) \to B(1,1,0) \to C(0,1,0)$ utat járja be. A zárt görbe iránya az óramutató járásával ellentétes, így a Stokes-tétel alapján:

$$\int_L \mathbf{v}\,dr = \oint_{\partial T} \mathbf{v}\,dr - \int_{L_3} \mathbf{v}\,dr - \int_{L_4} \mathbf{v}\,dr = -2 - 0 - 3 = -5.$$

5. Számítsa ki annak a háromszög alapú egyenes hasábnak a kifelé irányított *palástjára* a $v(x,y,z) = (3x+z; x-3y; 4z^3)$ vektorfüggvény felületi integrálját, amelynek alapja a $(0;0;0),(1;0;0),(0;1;0)$ háromszög, fedőlapja pedig a $(0;0;1/2),(1;0;1/2),(0;1;1/2)$ háromszög.

MO. Alaplap: $T_1 : ((0,0,0),(1,0,0),(0,1,0))$, itt $z=0$, így $\mathbf{v}(x,y,0) = (3x, x-3y, 0)$. Mivel T_1 kifelé mutató normálisa $(0,0,-1)$, a merőleges komponens $v_\perp = (3x, x-3y, 0)\cdot(0,0,-1) = 0 \rightsquigarrow \iint_{T_1} \mathbf{v}\,dA = 0$.
Fedőlap: T_2: $((0,0,1/2),(1,0,1/2),(0,1,1/2))$, itt $z = 1/2$, így $\mathbf{v}(x,y,1/2) = (3x+1/2, x-3y, 4(1/2)^3) = (3x+1/2, x-3y, 1/2)$. A kifelé mutató normális $(0,0,1)$, a merőleges komponens $v_\perp = 1/2$. Mivel ez a lapon konstans:

$$\iint_{T_2} \mathbf{v}\,dA = \iint_{T_2} v_\perp\,|dA| = \frac{1}{2}\cdot \text{Terület}(T_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

A Gauss-tételből a hasáb zárt V térfogatának ∂V felszínére az integrál ($\operatorname{div}\mathbf{v} = 3-3+12z^2 = 12z^2$):

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{v}\,dA = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV = \iiint_V 12z^2\,dV = \int_0^{1/2}\left(\iint_{T(z)} 12z^2\,dxdy\right)dz$$

Mivel a háromszög keresztmetszet területe minden z magasságban $1/2$:

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{v}\,dA = \int_0^{1/2} 12z^2\cdot\frac{1}{2}\,dz = \int_0^{1/2} 6z^2\,dz = [2z^3]_0^{1/2} = \frac{1}{4}.$$

Tehát a palástra (P) az integrál a teljes fluxus és a két lap különbsége:

$$\iint_P \mathbf{v}\,dA = \oiint_{\partial V} \mathbf{v}\,dA - \iint_{T_1} \mathbf{v}\,dA - \iint_{T_2} \mathbf{v}\,dA = \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{4} = 0.$$

6. *(4+3+3)* **a)** Ha $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ differenciálható függvény és $\operatorname{rot} v \equiv 0$, akkor v konstans.
b) Ha $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, akkor $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u \equiv 0$.
c) Melyik lineáris a következő differenciálegyenletek közül: **c1)** $y'y = 3$, **c2)** $y'x = 3$, **c3)** $(y')^2 = xy$

MO. a) Hamis. $v(r) = r \not\equiv 0$ esetén $\operatorname{rot} v \equiv 0$, mert $\operatorname{grad}\frac{|r|^2}{2} = r$, lévén, r potenciálos.
b) Igaz, a Young-tétel miatt. c) **c1)** $y'y = 3$: **nem lineáris**, mert az ismeretlen függvény (y) és deriváltja (y') szorzata szerepel benne. **c2)** $y'x = 3$: **lineáris**, mert felírható $y' = \frac{3}{x}$ alakban, az együtthatók csak x-től függnek. **c3)** $(y')^2 = xy$: **nem lineáris**, mert a derivált négyzeten szerepel ($(y')^2$).

iMSc. Mi az $c^2y'' = -y$ egyenlet azon kétszer differenciálható megoldása, amely eleget tesz az $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ kezdeti feltételeknek, ahol c tetszőleges valós paraméter?

MO. A $c^2y'' + y = 0$ másodrendű lineáris homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete $c^2r^2 + 1 = 0$. Ha $c \neq 0$, a karakterisztikus egyenlet gyökei tiszta képzetesek: $r_{1,2} = \pm\frac{i}{|c|}$. Az általános megoldás:

$$y(t) = A\cos\left(\frac{t}{|c|}\right) + B\sin\left(\frac{t}{|c|}\right)$$

A kezdeti feltételek behelyettesítése: $y(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0 \rightsquigarrow A = 0$, $y'(t) = \frac{B}{|c|}\cos\left(\frac{t}{|c|}\right) \rightsquigarrow y'(0) = \frac{B}{|c|} = -1 \rightsquigarrow B = -|c|$, $c \neq 0$ esetén tehát

$$y(t) = -|c|\sin\left(\frac{t}{|c|}\right)$$

Ha $c = 0$, akkor az egyenlet $0 = -y$ alakra redukálódik, amiből $y(t) = 0$. Ez nem teljesíti az $y'(0) = -1$ feltételt, így ekkor nincs megoldás.