2025 Vill. Mat A3 – 5. gyakorlat

1. Első gradiens tétel (Newton–Leibniz-tétel). Ha u összefüggő tartományon differenciálható és egy benne lévő görbe kezdő és végpontja $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, akkor:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \operatorname{grad} u \, d\mathbf{r} = u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{r}_1)$$

a) Mi lesz a $v(x,y,z) = (2xy+z^3, 2y+x^2, 3xz^2)$ vektormező intergálja a $[(0,0,0),(1,2,-1)]$ irányított egyenes szakaszra?
b) Mi lesz az $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, 0, R\sin t)$, $0 \le t \le \pi/2$ $(R>0)$ görbére az integrálja a $\mathbf{v}(r) = r|r^4|$ vektormezőnek?

2. Stokes-tétel:

$$\int_{\partial F} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \iint_F \mathbf{rot}\,\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$$

a) Számítsa ki a $v(x,y,z) = (-yx^2, xy^2, z)$ vektorfüggvény görbementi integrálját az $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, $0 \le t \le \pi$ $(R>0)$ félkör mentén!

HF) Számítsa ki a $v(x,y,z) = (xy, -xy, z^2)$ vektorfüggvény görbementi integrálját az $(1,0,0)$ pontból a $(0,1,0)$ pontba menő szakasz esetén.

3. Gauss-tétel:

$$\int_{\partial V} \mathbf{v} d\mathbf{f} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV$$

Határozzuk meg az alábbi vektormezők integrálját az adott felület mentén!

a $v(r) = r$, origú csúcspontú, z temgelyű M magasságú kúp palástja.

b) $v(r) = |r|^2 r$, $F : |r| = R > 0$, $x, y \ge 0$ $(\int_F \mathbf{v} d\mathbf{A} = ?)$

c) Számítsa ki a $v(x,y,z) = (3x + \sin y, x^2 y - 4y, z)$ vektorfüggvény felületi integrálját a $(0,0,3)$ csúcspontú, $z = 0$, $x^2 + y^2 \le 9$ feltételekkel adott alaplapú egyenes kúp kifelé irányított palástjára!

HF) $v(x,y,z) = (y^2, z^4, x+2z)$, $H : x^2 + y^2 \le 4, 0 \le z \le 1$, kifelé irányítva a térfogatból

4. Határozza meg a $v = (x^2 + yz, x^2 + y + z, x^2 + y + z)$ vektormező rotációjának integrálját a következő F felületre: a T tetraéder legyen a koordinátasíkok és az $x + 2y + 2z = 2$ által határolt test, F legyen ennek felszínéből az utóbbi síklap elhagyásából kapott felület.