2025 Vill. Mat A3 – 1. gyakorlat (1-2 hét)

(Szeparábilis differenciálegyenlet, kezdeti érték probléma.)

Szeparábilis (szétválaszható változójú): $g(y) \cdot y' = f(x)$.
A megoldás: $\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx \rightsquigarrow \ \Psi(y) = \Phi(x) + C$.

1. Oldja meg az alábbi **differenciálegyenleteket!**
(Azaz keressen olyan $F(x, y) = C$ függvényegyenletet-sereget, amely ekvivalens a d.e.-tel!)

$$\text{a) } y^4 y' = \sin x, \quad \text{b) } (2xy + 2x)y' = \ln x, \quad \text{c) } x^2 y' = 1 + y^2$$

Megoldás:

a) Az egyenlet szétválasztható változójú ($y' = \frac{dy}{dx}$): $y^4 \frac{dy}{dx} = \sin x$

$$\int y^4 dy = \int \sin x dx$$

$$\frac{y^5}{5} = -\cos x + C$$

Ez az általános megoldás implicit alakja. (Aki szeretné, az implicit általános megoldás: $y = \sqrt[5]{-5\cos x + C_1}$.) **b)** Szétválasztható:

$$(y+1)\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{2x}$$

Rendezzük és integráljuk:

$$\int (y+1)dy = \int \frac{\ln x}{2x} dx$$

A bal oldal integrálja: $\frac{(y+1)^2}{2}$. A jobb oldal integrálásához a helyettesítéses integrálás formuláját használjuk, $(\ln x)' = 1/x$ Az általános megoldás implicit alakja:

$$\frac{(y+1)^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{4} + C$$

c) Az egyenlet szétválasztható:

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x^2}$$

Integráljuk mindkét oldalt:

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int x^{-2} dx$$

$$\arctan(y) = -\frac{1}{x} + C$$

2. Oldja meg az alábbi **kezdeti érték problémákat!**
(Azaz keressen olyan $F(x,y)=0$ függvényegyenletet, amely ekvivalnes a d.e.-tel azzal a kezdeti feltétellel, hogy adott x_0, y_0-ra $F(x_0,y_0)=0$)

$$\text{a) } y' = x^4\cos^2 y \qquad a1)\quad y(0)=\frac{\pi}{4}, \quad a2)\quad y(0)=\frac{\pi}{2},$$

$$\text{b) } y' = (y^2-1)\sin x \qquad b1)\quad y(0)=2, \quad b2)\quad y(0)=1$$

Megoldás:

a) $y' = x^4\cos^2 y$. Szétválasztjuk a változókat azzal a feltétellel, hogy $\cos y \neq 0$, ebben az esetben ugyanis kapjuk, hogy $y = \frac{\pi}{2} + k$, ahol k egész. Ez utóbbi valóban megoldás, mert konstans és a d.e. bal oldala is nulla lesz, éspedig az úgy nevezett szinguláris megoldás, mert az alábbi általános megoldásban nem lesz olyan C, amely visszaadja ezt az eredményt. Szeparálva amikor lehet:

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int x^4 dx \rightsquigarrow \tan y = \frac{x^5}{5} + C$$

a1) Kezdeti feltétel: $y(0)=\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow x = x_0 = 0, y = y_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{0^5}{5} + C \rightsquigarrow 1 = C$$

A partikuláris megoldás:

$$\tan y = \frac{x^5}{5} + 1.$$

a2) Kezdeti feltétel: $y(0)=\frac{\pi}{2}$. Ennek pont a szinguláris megoldás felel meg: $y(x)=\frac{\pi}{2}$.
b) $y' = (y^2-1)\sin x$. Szétválasztjuk a változókat, feltéve, hogy $y \neq \pm 1$. $y \equiv \pm 1$ esetén

ugyanis konstans, szinguláris megoldásokat kapunk.

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \sin x\, dx$$

A bal oldalt parciális törtekre bontjuk: $\frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{1/2}{y-1} - \frac{1/2}{y+1}$.

$$\int \left(\frac{1/2}{y-1} - \frac{1/2}{y+1}\right) dy = \int \sin x\, dx$$

$$\frac{1}{2}(\ln|y-1| - \ln|y+1|) = -\cos x + C \rightsquigarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = -2\cos x + C_1$$

b1) Kezdeti feltétel: $y(0)=2$.

$$\ln\left|\frac{2-1}{2+1}\right| = -2\cos(0) + C_1 \rightsquigarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -2 + C_1 \rightsquigarrow C_1 = 2 - \ln 3$$

A partikuláris megoldás:

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = -2\cos x + 2 - \ln 3.$$

b2) Kezdeti feltétel: $y(0)=1$. Az $y(x)\equiv 1$ konstans függvény megoldása az egyenletnek ($y'=0$ és $(1^2-1)\sin x = 0$), és kielégíti a kezdeti feltételt. A megoldás:

$$y(x) \equiv 1.$$

(Egzakt differenciálegyenlet)

$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ (vagy archaikus jelöléssel: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$) **egzakt**, ha van olyan $F(x,y) = C$ egyenlet, amelyre az teljesül, hogy $\partial_x F = P$ és $\partial_y F = Q$. Ekkor $F(x,y) = C$ megoldása az egyenletnek. (Az egzaktság szükséges és elégséges feltétele egy egyszeresen összefüggő tartományon, hogy ott $\partial_x Q \equiv \partial_y P$ teljesüljön, de az alábbiak mind egzaktak és ezért elég az előbbi parciális differenciál-egyenlet-rendszer alapján megkeresni a megoldásukat.)

3. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

$$\text{a) } (2xy + e^x)dx + \left(x^2 + \frac{1}{y}\right)dy = 0, \quad \text{b) } (7x^6y^5 - \sin x)dx + \left(5x^7y^4 + \frac{1}{y^2+1}\right)dy = 0$$

Megoldás:

a) Legyen $P(x,y) = 2xy + e^x$ és $Q(x,y) = x^2 + \frac{1}{y}$. Ellenőrizzük az egzaktság feltételét:

$$\partial_y P = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + e^x) = 2x \quad \text{és} \quad \partial_x Q = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + \frac{1}{y}\right) = 2x$$

Mivel $\partial_y P = \partial_x Q$, az egyenlet egzakt. Keressük az $F(x,y)$ függvényt, mint az

$$\begin{cases} \partial_x F = P \\ \partial_y F = Q \end{cases}$$

parciális differenciálegyenlet megoldását!

$$\partial_x F = P(x,y) \rightsquigarrow F(x,y) = \int (2xy + e^x)dx = x^2y + e^x + C(y)$$

Ezt behelyettesítve a második egyenéletbe:

$$\partial_y F = x^2 + C'(y) = Q(x,y) = x^2 + \frac{1}{y} \rightsquigarrow C'(y) = \frac{1}{y}$$

$$C(y) = \int \frac{1}{y}dy = \ln|y|$$

A megoldás $F(x,y) = C$:

$$x^2y + e^x + \ln|y| = C$$

b) Legyen $P(x,y) = 7x^6y^5 - \sin x$ és $Q(x,y) = 5x^7y^4 + \frac{1}{y^2+1}$. Egzaktság ellenőrzése:

$$\partial_y P = 35x^6y^4 \quad \text{és} \quad \partial_x Q = 35x^6y^4$$

Az egyenlet egzakt.

$$\partial_x F = P(x,y) \rightsquigarrow F(x,y) = \int (7x^6y^5 - \sin x)dx = x^7y^5 + \cos x + C(y)$$

Deriválás y szerint:

$$\partial_y F = 5x^7y^4 + C'(y) = Q(x,y) = 5x^7y^4 + \frac{1}{y^2+1} \rightsquigarrow C'(y) = \frac{1}{y^2+1}$$

$$C(y) = \int \frac{1}{y^2+1} dy = \arctan y$$

A megoldás $F(x,y) = C$:

$$x^7 y^5 + \cos x + \arctan y = C$$

4. Oldja meg az alábbi kezdeti érték problémákat!

$$\text{a) } 3x^2 + 2xy^2 + 2x^2 yy' = 0, \qquad y(1) = 1$$

$$\text{b) } x^3 + y^3 y' = 0 \qquad b1) \quad y(0) = 1, \quad b2) \quad y(0) = -1$$

Megoldás:

a) Átírva: $(3x^2 + 2xy^2)dx + (2x^2 y)dy = 0$. $P(x,y) = 3x^2 + 2xy^2$ és $Q(x,y) = 2x^2 y$.

$$\partial_y P = 4xy \quad \text{és} \quad \partial_x Q = 4xy \rightsquigarrow \text{egzakt.}$$

$$\partial_x F = 3x^2 + 2xy^2 \rightsquigarrow F(x,y) = \int (3x^2 + 2xy^2)dx = x^3 + x^2 y^2 + C(y)$$

$$\partial_y F = 2x^2 y + C'(y) = Q(x,y) = 2x^2 y \implies C'(y) = 0 \implies C(y) = K$$

Az általános megoldás: $x^3 + x^2 y^2 = C$. Helyettesítsük be a $y(1) = 1$ feltételt:

$$1^3 + 1^2 \cdot 1^2 = C \implies C = 2$$

A partikuláris megoldás:

$$x^3 + x^2 y^2 = 2.$$

b) Átírva: $x^3 dx + y^3 dy = 0$. Ez az egyenlet egzakt (és szeparábilis is). $\partial_y(x^3) = 0$ és $\partial_x(y^3) = 0$, tehát egzakt. Közvetlenül integrálhatunk:

$$\int x^3 dx + \int y^3 dy = K \rightsquigarrow \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} = K$$

Az általános megoldás: $x^4 + y^4 = C$. **b1)** Kezdeti feltétel: $y(0) = 1$.

$$0^4 + 1^4 = C \implies C = 1$$

A partikuláris megoldás:

$$x^4 + y^4 = 1.$$

b2) Kezdeti feltétel: $y(0) = -1$.

$$0^4 + (-1)^4 = C \implies C = 1$$

A partikuláris megoldás:

$$x^4 + y^4 = 1.$$

iMSc. Oldja meg az $y' = \sqrt[3]{y}, \quad y(0) = 0$ kezdeti érték problémát! Hány megoldása van?

Megoldás:

A kezdeti érték problémának **végtelen sok** megoldása van.

1. **Triviális megoldás:** A $y(x) \equiv 0$ függvény egyértelműen megoldás, hiszen $y' = 0$ és $\sqrt[3]{0} = 0$, és teljesíti a $y(0) = 0$ kezdeti feltételt.

2. **Megoldás a változók szétválasztásával:** Ha $y \neq 0$, az egyenletet szétválaszthatjuk:

$$\frac{dy}{y^{1/3}} = dx \rightsquigarrow \int y^{-1/3} dy = \int dx$$

$$\frac{y^{2/3}}{2/3} = x + C \rightsquigarrow \frac{3}{2} y^{2/3} = x + C$$

A $y(0) = 0$ feltételt behelyettesítve:

$$\frac{3}{2} \cdot 0^{2/3} = 0 + C \rightsquigarrow C = 0$$

Így $\frac{3}{2}y^{2/3} = x$, amiből $y^{2/3} = \frac{2}{3}x$. Ebből $y^2 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3$. Ez két további megoldást ad $x \geq 0$ esetén (és $y = 0$ ha $x < 0$):

$$y(x) = \left(\frac{2x}{3}\right)^{3/2} \quad \text{és} \quad y(x) = -\left(\frac{2x}{3}\right)^{3/2}$$

3. **További megoldások:** A triviális és a fenti két megoldás "összeragasztásával" végtelen sok további megoldás konstruálható. Bármely $a \geq 0$ konstansra a következő függvények szintén megoldások:

$$y_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a \\ \pm\left(\frac{2(x-a)}{3}\right)^{3/2} & \text{ha } x \geq a \end{cases}$$

Ezek a függvények mind megoldásai a differenciálegyenletnek és eleget tesznek a $y(0) = 0$ feltételnek.

Miért nem egyértelmű a megoldás? A megoldás nem-egyértelműségének oka az, hogy a $f(x, y) = \sqrt[3]{y}$ függvény nem Lipschitz-folytonos az y változójában a $y = 0$ környezetében. A Picard–Lindelöf-tétel egyértelműségi feltétele ($\partial_y f$ korlátossága) nem teljesül, mivel $\partial_y f = \frac{1}{3}y^{-2/3}$, ami $y \to 0$ esetén végtelenhez tart.