ZH Gyakorló A3

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)

1. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet és adjuk meg az $y(0) = 1$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldást!

$$y' = \frac{\cos x \cdot (1 + \sin^3 x)}{(y+1) \cdot e^{2y}}$$

MO. A változók szétválasztásával:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot (1 + \sin^3 x)}{(y+1) \cdot e^{2y}} \rightsquigarrow \int (y+1) \cdot e^{2y}\, dy = \int \cos x \cdot (1 + \sin^3 x)\, dx$$

Az elsőt parciális integrálással ($\int Fg = FG - \int fG$, $F(y) = y + 2$, $g(y) = e^{2y}$ szereposztásban) $\int (y+1) \cdot e^{2y}\, dy = (y+1) \cdot \frac{1}{2} e^{2y} - \int \frac{1}{2} e^{2y}\, dy = (y+1) \cdot \frac{1}{2} e^{2y} - \frac{1}{4} e^{2y}$. A másikat helyettesítéses integrálással. A külső függvény: $1 + \vartheta^3$, aminek az integrálja $\vartheta + \dfrac{\vartheta^4}{4}$, innen: $\int \cos x \cdot (1 + \sin^3 x)\, dx = \sin x + \frac{1}{4} \sin^4 x + C$. Tehát az általános megoldás: $(y+1) \cdot \frac{1}{2} e^{2y} - \frac{1}{4} e^{2y} = \sin x + \frac{1}{4} \sin^4 x + C$. A kezdeti feltétel által kiválasztott integrálási állandó: $\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 = \frac{1}{4} e^2 = C$.

2. Oldjuk meg az $x^4 + xy^3 + \sin x + x^2 y^2 y' = 0$ differenciálegyenletet!

MO. $P(x,y) = x^4 + xy^3 + \sin x, Q(x,y) = x^2 y^2$. Innen $\partial_y P - \partial_x Q = 3xy^2 - 2xy^2 = xy^2$. Az integráló szorzót az $R(x) = (\partial_y P - \partial_x Q)/Q = \frac{1}{x}$ függvény segítségével számítjuk ki éspedig a $\mu(x) = e^{\int R(x)\, dx} = e^{\int \frac{1}{x}\, dx} = x$ lesz az. Tehát a $x^5 + x^2 y^3 + x \sin x + x^3 y^2 y' = 0$ egyenletet kell megoldani. Keressük a $\partial_x F = P$, $\partial_y F = Q$ parciális differenciálegyenlet legalább egy megoldását:

$$F(x,y) = \int x^5 + x^2 y^3 + x \sin x\, dx = x^6/6 + x^3 y^3/3 + \int x \sin x\, dx = \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{3} x^3 y^3 - x \cos x + \sin x + C(y)$$

hiszen $\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x$. Behelyettesítve F fenti alakját $\partial_y F = Q$-be:$x^3 y^2 + C'(y) = x^3 y^2$, ahonnan $C(y) =$ konstans, tehát a megoldás: $\frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{3} x^3 y^3 - x \cos x + \sin x = C$.

3. Határozzuk meg a $v(x,y,z) = (x^2, y^4, z^2)$ vektormező $G : r(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$, $0 \le t \le \pi$ görbére vonatkozó integrálját!

MO. Az $\int_G v dr = \int_{t_1}^{t_2} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$ formulát alkalmazzuk.

$$\int_G v dr = \int_0^\pi (\cos^2 t, \sin^4 t, (2t)^2) \cdot (-\sin t, \cos t, 2) dt = \int_0^\pi (\cos^2 t, \sin^4 t, (2t)^2) \cdot (-\sin t, \cos t, 2) dt =$$

$$= \int_0^\pi -\sin t \cos^2 t + \cos t \sin^4 t + 8t^2 dt = [\frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{1}{5} \sin^5 t + \frac{8}{3} t^3]_0^\pi = 8\pi^3/3 - 2/3$$

4. Határozzuk meg a $\mathbf{v}(x,y,z) = (-xy + 1, yz, z^2)$ vektormező $K : \mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t, 0)$, $0 \le t \le \pi/2$ körnegyedre vonatkozó integrálját!

MO. $\operatorname{rot} \mathbf{v} = (-y, 0, x)$, tehát érdemes a Stokes-tételt alkalmazni. A $T = \{(x,y,0) \mid x^2 + y^2 \le R^2, x, y \ge 0\}$ negyedkör pereme: $\partial T = K + L_1 + L_2$, ahol $L_1 : \mathrm{r}(t) = (0, 1-t, 0), 0 \le t \le R$ az y tengelyen található peremszakasz, $L_2 : \mathrm{r}(t) = (t, 0, 0), 0 \le t \le R$ az x tengelyen található peremszakasz. Ez utóbbiakra a vektormező integrálja a következő. L_1 mentén a vektormező: $\mathbf{v}(0,y,0) = (1,0,0)$, így: $\int_{L_1} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{R}(1,0,0)\cdot\left(\begin{smallmatrix}0\\-dt\\0\end{smallmatrix}\right) = 0$. Az L_2 mentén a vektormező: $\mathbf{v}(x,0,0) = (1,0,0)$, így: $\int_{t=0}^{R}(1,0,0)\cdot\left(\begin{smallmatrix}dt\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = \int_{t=0}^{R} 1dt = R$.

$$\oint\limits_{\partial T} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \iint\limits_{T} \operatorname{rot}\mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \iint\limits_{T} (-y,0,x)\cdot\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\dxdy\end{smallmatrix}\right) = \iint\limits_{T} x\,dxdy = \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{R} r\cdot\cos\varphi\cdot r\,drd\varphi =$$

$$= \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_{r=0}^{R} r^2\,dr\right) = \frac{R^3}{3}.$$

$$\int\limits_{K} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \oint\limits_{\partial T} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} - \int_{L_1}\mathbf{v}\,d\mathbf{r} - \int_{L_2}\mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \frac{R^3}{3} - R$$

5. Határozzuk meg a $v(x,y,z) = (\sin(yz)+x, e^{xz^2}+2y, z^2)$ vektormező felületmenti integrálját az $x^2+y^2 \le z \le 1$ egyenlőtlenségek által meghatározott forgúsi paraboloid test kifelé irányított palástjára!

MO. Gauss-tétellel. Az egyenlőtlenségből: $r^2 \le z \le 1$ és , ahol $r = \sqrt{x^2+y^2}$, legyen ez a V tértartomány. Tudjuk továbbá, hogy $\operatorname{div} v(x,y,z) = 1+2+2z = 3+2z$. Tehát

$$\iiint\limits_{\partial V} v\,df = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} v\,dV =$$

$$\begin{aligned}
= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r^2}^{1}(3+2z)r\,dz\,dr\,d\varphi &= \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\right)\cdot\left(\int_{r=0}^{1}\left[3zr+z^2r\right]_{z=r^2}^{1}dr\right)\\
&= (2\pi)\cdot\int_{r=0}^{1}(4r-3r^3-r^5)\,dr\\
&= (2\pi)\cdot\left[2r^2-\frac{3}{4}r^4-\frac{1}{6}r^6\right]_0^1\\
&= 2\pi\cdot\left(2-\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right) = 2\pi\cdot\left(\frac{13}{12}\right) = \frac{13\pi}{6}
\end{aligned}$$

A fedőlapra a vektormező: $v(x,y,1) = (\sin(yz)+x, e^{xz^2}+2y, 1)$, így a felületi integrál:

$$\iint\limits_{F} (\sin(yz)+x, e^{xz^2}+2y, 1)\cdot\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\dxdy\end{smallmatrix}\right) = \iint\limits_{F} dxdy = 1^2\pi$$

Így a palástra az integrál: $\frac{7\pi}{6}$.

6. (4+4+2)

6.1) Legyen $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény. Melyik azonosan nulla?

a) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi$, **b)** $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi$.

6.2) Hol differenciálható $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, r \mapsto |r|^7$? Számítsuk ki $\operatorname{grad}|r|^7$ értékét!

6.3) Mennyi az $(x,y,1)$, ahol $0 \le x,y \le 1$ felfelé irányított négyzetlapra az $(x,y,z) \mapsto (x,y,z)$ vektormező felületi integrálja?

MO. 6.1) a) Nem feltétlenül azonosan nulla, pl. $\operatorname{div}\operatorname{grad} x^2+y^2+z^2 = \operatorname{div}(2x,2y,2z) = 6 > 0$. b) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = 0$ tétel volt.

6.2) Ha $r \neq 0$, akkor az összetett függvény deriváltja miatt: $\operatorname{grad}|r|^7 = 7|r|^6 \cdot (r/|r|) = 7|r|^5 r$. Nullában:

$$\lim_{r\to 0} \frac{|r|^7 - 0 - 0\cdot r}{|r|} = 0$$

így $\operatorname{grad}|r|^7\big|_0 = 0$.
6.3) (x,y,z)-nek a z irányú komponense: z, ami az 1 magasságban 1, és ennek az integrálja a négyzetre: $\int\limits_N 1 dxdy = |N| = 1$.

iMSc. Igazoljuk, hogy ha $v, u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ differenciálhatók, akkor $\operatorname{div}(v\times u) = (\operatorname{rot} v)u - v(\operatorname{rot} u)$

MO.

$$\operatorname{div}(v\times u) \overset{\text{EK}}{=} \partial_i \varepsilon_{ijk} v_j u_k = \varepsilon_{ijk}\partial_i(v_j u_k) = \varepsilon_{ijk}(\partial_i v_j)u_k + \varepsilon_{ijk} v_j(\partial_i u_k) =$$

$$= \varepsilon_{kij}(\partial_i v_j)u_k - \varepsilon_{jik} v_j(\partial_i u_k) = \varepsilon_{kij}(\partial_i v_j)u_k - v_j\varepsilon_{jik}(\partial_i u_k) \overset{\text{EK}}{=} (\operatorname{rot} v)u - v(\operatorname{rot} u).$$