2025. vill. mat A3 – Differenciálegyenletek

(Elsőrendű lineáris, Állandó együtthatós másodrendű: próbafüggvény módszer, rezonancia)

1. Elsőrendű, függvényegyütthatós lineáris differenciálegyenletek.
Oldja meg az alábbi $y' + p(x)y = q(x)$ típusú egyenleteket az állandó variálásának módszerével!

a) $y' + 2xy = x$ *(Helyettesítéses integrálás: $t = x^2$)*

b) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ *(Helyettesítéses integrálás: $t = \ln x$)*

c) $y' - \frac{1}{x}y = x \ln x$ *(Parciális integrálás)*

HF) $y' + y = xe^{-x}$ *(Parciális integrálás)*

2. Másodrendű, állandó együtthatós inhomogén egyenletek (Nincs rezonancia).
Keressen partikuláris megoldást próbafüggvény-módszerrel, majd írja fel az általános megoldást!

a) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$ *(Exponenciális gerjesztés)*

b) $y'' + 4y = 5\cos(x)$ *(Trigonometrikus gerjesztés)*

c) $y'' - y' - 2y = 4x^2 - 2$ *(Polinom gerjesztés)*

HF) $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$

3. Másodrendű egyenletek külső rezonanciával.
Határozza meg a megoldást a megfelelő rezonanciás próbafüggvény alkalmazásával!

a) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{2x}$ *(Egyszeres gyök egybeesése)*

b) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$ *(Kétszeres gyök egybeesése)*

c) $y'' + 9y = \sin(3x)$ *(Trigonometrikus rezonancia)*

HF) $y'' + y = \cos(x)$

4. Szorzat típusú gerjesztések (Polinom × Exp/Trig).
Írja fel a megfelelő próbafüggvény alakját, majd oldja meg az egyenleteket!

a) $y'' - y = xe^{2x}$ *(Polinom és exponenciális szorzata)*

b) $y'' - 3y' + 2y = x\sin x$ *(Polinom és trigonometrikus szorzata)*

c) $y'' - 2y' + y = xe^{x}$ *(Szorzat rezonanciával)*

HF) $y'' + y = x\cos x$ *(Szorzat rezonanciával)*

iMSc. Igazolja, hogy ha $y_1(x)$ és $y_2(x)$ alaprendszert alkotnak (megoldásai) az $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ homogén egyenletnek, akkor a Wronski-determinánsukra teljesül a $W(y_1, y_2)(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$ összefüggés (Abel-Liouville formula).
Segítség a levezetéshez:

(1) Írja fel a Wronski-determinánst: $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

(2) Deriválja le W-t x szerint (ügyeljen a szorzatderiválásra).

(3) A kapott kifejezésben a második deriváltak (y_1'', y_2'') helyére helyettesítse be az eredeti differenciálegyenletből kifejezett alakot (pl. $y_1'' = -py_1' - qy_1$).

(4) Az egyszerűsítések után egy szétválasztható változójú diff. egyenletet kap W-re $(W' = -pW)$, amit már meg tud oldani.

Megoldásvázlat – 2025. vill. mat A3

1. Elsőrendű, függvényegyütthatós $(y' + p(x)y = q(x))$

Módszer: $y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$, majd $y_p = c(x)e^{-\int p(x)dx}$, ahol $c'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$.

a) $y' + 2xy = x$.

- Homogén: $y_h = Ce^{-x^2}$.
- Variálás: $c'(x) = xe^{x^2}$. Helyettesítés: $u = x^2, du = 2xdx$.
- Integrál: $c(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$.
- **Megoldás:** $y = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$.

b) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

- Homogén: $y_h = \frac{C}{x}$.
- Variálás: $c'(x) = \frac{1}{1+\ln^2 x}$. Helyettesítés: $t = \ln x \implies \int \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(\ln x)$.
- **Megoldás:** $y = \frac{1}{x}\left(C + \arctan(\ln x)\right)$.

c) $y' - \frac{1}{x}y = x\ln x$.

- Homogén: $y_h = Cx$.
- Variálás: $c'(x) = \ln x$. Parciális int: $\int 1 \cdot \ln x\, dx = x\ln x - x$.
- **Megoldás:** $y = Cx + x^2\ln x - x^2$.

2. Másodrendű állandó eh. – Nincs rezonancia

a) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$.

- Karakterisztikus gyökök: $r_{1,2} = 1, 2$.
- Próbafüggvény: $y_p = Ae^{3x}$. Behelyettesítve: $A(9 - 9 + 2) = 2 \implies 2A = 2 \implies A = 1$.
- **Megoldás:** $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + e^{3x}$.

b) $y'' + 4y = 5\cos x$.

- Gyökök: $\pm 2i$. (Nincs rezonancia, mert $\omega = 1 \neq 2$).
- Próbafüggvény: $y_p = A\cos x + B\sin x$.
- Behelyettesítve: $(-A + 4A)\cos x + (-B + 4B)\sin x = 5\cos x \implies 3A = 5, B = 0$.
- **Megoldás:** $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{5}{3}\cos x$.

c) $y'' - y' - 2y = 4x^2 - 2$.

- Gyökök: $2, -1$.
- Próbafüggvény: $y_p = Ax^2 + Bx + C$.
- Egyenletrendszer: $-2A = 4 \implies A = -2$; $-2A - 2B = 0 \implies B = 2$; $2A - B - 2C = -2 \implies C = -2$.
- **Megoldás:** $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - 2x^2 + 2x - 2$.

3. Másodrendű állandó eh. – Rezonanciával

a) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{2x}$.

- Gyökök: $2, 3$. (A 2-es egyszeres gyök → x-es szorzó).
- Próbafüggvény: $y_p = Axe^{2x}$.
- Behelyettesítés után: $A(2 \cdot 2 - 5) = 2 \implies -A = 2 \implies A = -2$.
- **Megoldás:** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - 2xe^{2x}$.

b) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.

- Gyökök: $2, 2$. (Kétszeres gyök → x^2-es szorzó).
- Próbafüggvény: $y_p = Ax^2 e^{2x}$.
- Behelyettesítés után (második deriváltból marad tag): $2A = 2 \implies A = 1$.
- **Megoldás:** $y = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x} + x^2 e^{2x}$.

c) $y'' + 9y = \sin 3x$.

- Gyökök: $\pm 3i$. (Rezonancia → x-es szorzó).
- Próbafüggvény: $y_p = x(A\cos 3x + B\sin 3x)$.
- Behelyettesítés után: $6B\cos 3x - 6A\sin 3x = \sin 3x \implies B = 0, A = -1/6$.
- **Megoldás:** $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x - \frac{1}{6}x\cos 3x$.

4. Szorzat típusú gerjesztések

a) $y'' - y = xe^{2x}$.

- Gyökök: ± 1. Nincs rezonancia.
- Próbafüggvény: $y_p = (Ax + B)e^{2x}$.
- $y_p'' - y_p = e^{2x}[(4Ax + 4A + 4B) - (Ax + B)] = e^{2x}[3Ax + (4A + 3B)]$.
- $3A = 1 \implies A = 1/3$. $\quad 4A + 3B = 0 \implies B = -4/9$.
- **Partikuláris:** $y_p = (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})e^{2x}$.

b) $y'' - 3y' + 2y = x\sin x$.

- Gyökök: $1, 2$. Nincs rezonancia.
- Próbafüggvény: $y_p = (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x$.
- Ez egy 4 ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre vezet.
- *Nehézség:* Nagy odafigyelést igénylő algebrai számolás.
- **Eredmény (ellenőrzéshez):** $A = \frac{1}{10}, B = \frac{17}{50}, C = \frac{3}{10}, D = \frac{3}{25}$.

c) $y'' - 2y' + y = xe^x$.

- Gyökök: $1, 1$ (kétszeres). Gerjesztés e^x.
- Rezonancia: A polinomot $(Ax + B)$ szorozni kell x^2-tel.

- Próbafüggvény: $y_p = x^2(Ax+B)e^x = (Ax^3+Bx^2)e^x$.
- Deriválás és behelyettesítés után: $6Ax + 2B = x$.
- $6A = 1 \implies A = 1/6$, $2B = 0 \implies B = 0$.
- **Partikuláris:** $y_p = \frac{1}{6}x^3e^x$.

iMSc Feladat: Abel-Liouville levezetése

1. Definíció: $W = y_1y_2' - y_2y_1'$.
2. Deriválás: $W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1''$.
3. Behelyettesítés ($y'' = -py' - qy$):

$$W' = y_1(-py_2' - qy_2) - y_2(-py_1' - qy_1)$$

$$W' = -p(y_1y_2' - y_2y_1') - q(y_1y_2 - y_2y_1)$$

   A második tag 0, az első tag $-pW$.
4. Diff. egyenlet: $W' = -p(x)W$.
5. Megoldás szétválasztással: $\ln|W| = -\int p(x)dx + C \implies W(x) = C_0e^{-\int p(x)dx}$.