13-14. hét: Differenciálegyenlet-rendszerek és Laplace-transzformáció

1. Inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Emlékeztető (Az állandó variálása mátrixos alakban):
Adott az $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b}(t)$ inhomogén rendszer.

1. Először megoldjuk a homogén részt ($\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$), meghatározzuk a sajátértékeket és sajátvektorokat. Ebből felírjuk a $\Psi(t)$ **alapmegoldás-mátrixot** (fundamentális mátrix), melynek oszlopai a lineárisan független homogén megoldások.
2. Az inhomogén megoldást $\underline{x}_{inh} = \Psi(t) \cdot \underline{c}(t)$ alakban keressük.
3. A $\underline{c}(t)$ ismeretlen vektor deriváltjára megoldandó egyenletrendszer:

$$\Psi(t) \cdot \dot{\underline{c}}(t) = \underline{b}(t)$$

   Ebből $\dot{\underline{c}}(t)$-t kifejezzük (Gauss-eliminációval vagy Ψ^{-1}-gyel), majd integráljuk.

1. Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszereket! A mátrix sajátértékei valósak és különbözőek.

a) **(Órai)** Polinom típusú gerjesztés:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + t \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 \end{cases}$$

b) **(Házi)** Exponenciális gerjesztés:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Laplace-transzformáció alkalmazása

2. Oldja meg a következő kezdeti érték feladatokat Laplace-transzformációval! Figyelje meg a parciális törtekre bontás típusait!

a) **Lineáris nevezők:** (A nevezőben csupa elsőfokú, valós tényező van)

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$$

b) **Vegyes (elsőfokú és magasabb fokú) nevezők:**

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

c) **Másodrendű nemvalós tényezők:** (A nevezőben irreducibilis kvadratikus tagok)

$$y'' + 9y = 10\cos(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

3. Rendszerek megoldása Laplace-szal ("Trükkös" módszerek)

3. Oldja meg az alábbi rendszereket! *Tipp az a) és b) feladathoz:* A rendszer szimmetriája miatt érdemes az egyenleteket összeadni, illetve kivonni egymásból. Ha Laplace-transzformálás után adjuk össze őket, a konstansok kieshetnek, így nullára redukált egyenletet kaphatunk.

a) **Szép eset (redukció nullára):**

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -2$$

b) **Hasonló rendszer, általánosabb feltétellel:**

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 3x + 2y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 4$$

c) **Aszimmetrikus eset (hagyományos úton):**

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

Megoldások

1. feladat: Inhomogén rendszerek

1a) Megoldás: A mátrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Sajátértékek:** $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \Rightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 3) = 0$. Tehát $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3$.
- **Sajátvektorok:** $\lambda_1 = 5 \Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\lambda_2 = -3 \Rightarrow \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- **Alapmegoldás mátrix:** $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-3t} \\ e^{5t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}$.
- **Inhomogén rész ($\Psi\underline{\dot{c}} = \underline{b}$):**

$$\begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-3t} \\ e^{5t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Cramer-szabállyal vagy inverzzel megoldva ($\det \Psi = -2e^{2t}$):

$$\dot{c}_1 = \frac{1}{2}te^{-5t}, \quad \dot{c}_2 = \frac{1}{2}te^{3t}$$

  Integrálás (parciálisan): $c_1 = -\frac{1}{10}e^{-5t}(t + \frac{1}{5}), \quad c_2 = \frac{1}{6}e^{3t}(t - \frac{1}{3})$.

- **Végeredmény:** $\underline{x} = c_1\underline{v}_1 e^{5t} + c_2\underline{v}_2 e^{-3t} + \underline{x}_{inh}$. $\underline{x}_{inh} = \begin{pmatrix} -t/15 - 4/75 \\ -4t/15 + 1/75 \end{pmatrix}$.

1b) HF Megoldás: Sajátértékek: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$. $\Psi(t) = \begin{pmatrix} 3e^{4t} & e^{-t} \\ 2e^{4t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$. $\dot{c}_1 = \frac{1}{5}e^{t}, \dot{c}_2 = \frac{2}{5}e^{6t}$. $x_{inh} = \begin{pmatrix} \frac{11}{30}e^{5t} \\ \frac{7}{30}e^{5t} \end{pmatrix}$.

2. feladat: Laplace IVP

2a) $Y(s)(s^2 - s - 6) - s(1) - (-1) - 8 = 0 \Rightarrow Y(s)(s-3)(s+2) = s + 7$. Parciális törtek: $Y(s) = \frac{s+7}{(s-3)(s+2)} = \frac{2}{s-3} - \frac{1}{s+2}$. **Megoldás:** $y(t) = 2e^{3t} - e^{-2t}$.

2b) Transzformálva: $(s-2)^2 Y(s) - 1 = \frac{2}{s-2}$. Rendezve: $Y(s) = \frac{2}{(s-2)^3} + \frac{1}{(s-2)^2}$. Vissza-transzformálva ($1/s^n \to t^{n-1}/(n-1)!$ eltolással): **Megoldás:** $y(t) = t^2e^{2t} + te^{2t}$.

2c) Transzformálva: $(s^2+9)Y(s) - s = \frac{10s}{s^2+4}$. $Y(s) = \frac{10s}{(s^2+4)(s^2+9)} + \frac{s}{s^2+9}$. Az első tag felbontása: $\frac{2s}{s^2+4} - \frac{2s}{s^2+9}$. Összesítve: $Y(s) = \frac{2s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+9}$. **Megoldás:** $y(t) = 2\cos(2t) - \cos(3t)$.

3. feladat: Laplace rendszerek

3a) Egyenletek összege: $(\dot{x} + \dot{y}) = 3(x + y)$. Kezdeti feltétel összege: $x(0) + y(0) = 2 + (-2) = 0$. Laplace: $s(X + Y) - 0 = 3(X + Y) \Rightarrow (s-3)(X+Y) = 0$. Mivel ez minden s-re igaz, így $X(s) + Y(s) = 0$, azaz $y(t) = -x(t)$. Visszahelyettesítve az első egyenletbe: $\dot{x} = x + 2(-x) = -x$. Megoldás: $x(t) = 2e^{-t}$, és $y(t) = -2e^{-t}$.

3b) Összeg: $\dot{u} = 5u$ (ahol $u = x + y$), $u(0) = 5 \Rightarrow u(t) = 5e^{5t}$. Különbség: $\dot{v} = -v$ (ahol $v = x - y$), $v(0) = -3 \Rightarrow v(t) = -3e^{-t}$. $x = (u+v)/2 = 2.5e^{5t} - 1.5e^{-t}$. $y = (u-v)/2 = 2.5e^{5t} + 1.5e^{-t}$.

3c)

$$sX - 1 = X - 2Y \tag{1}$$
$$sY - 1 = X + 4Y \tag{2}$$

Kifejezzük $X(s)$-et a második egyenletből:

$$X = sY - 4Y - 1 = (s-4)Y - 1 \tag{3}$$

Ezt behelyettesítjük az első egyenlet rendezett alakjába ($(s-1)X = -2Y + 1$):

$$\begin{aligned}(s-1)\left[(s-4)Y - 1\right] &= -2Y + 1\\ (s^2 - 5s + 4)Y - s + 1 &= -2Y + 1\\ (s^2 - 5s + 4)Y + 2Y &= s\\ (s^2 - 5s + 6)Y &= s\end{aligned}$$

Kifejezzük $Y(s)$-t és parciális törtekre bontjuk (a nevező gyökei 2 és 3):

$$Y(s) = \frac{s}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} \tag{4}$$

Az együtthatók meghatározása ($s = A(s-3) + B(s-2)$):

- $s = 2 \rightsquigarrow 2 = -A \rightsquigarrow A = -2$
- $s = 3 \rightsquigarrow 3 = B \rightsquigarrow B = 3$

Tehát a transzformált alak és az inverz transzformált:

$$Y(s) = -\frac{2}{s-2} + \frac{3}{s-3} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{y(t) = -2e^{2t} + 3e^{3t}} \tag{5}$$

Maga az X:

$$\begin{aligned}X(s) &= (s-4)Y(s) - 1 = (s-4)\frac{s}{(s-2)(s-3)} - 1\\ X(s) &= \frac{s^2 - 4s - (s^2 - 5s + 6)}{(s-2)(s-3)} = \frac{s-6}{(s-2)(s-3)}\end{aligned}$$

Parciális törtekre bontás ($s - 6 = C(s-3) + D(s-2)$):

- $s = 2 \rightsquigarrow -4 = -C \rightsquigarrow C = 4$
- $s = 3 \rightsquigarrow -3 = D \rightsquigarrow D = -3$

Tehát:

$$X(s) = \frac{4}{s-2} - \frac{3}{s-3} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{x(t) = 4e^{2t} - 3e^{3t}} \tag{6}$$