ZH 2. gyakorló A3

*(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)*

**1.** Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet és adjuk meg az $y(1) = 0$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldást!

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}e^{y^2/x^2}$$

**MO.** $u = y/x$ helyettesítéssel: $ux = y \rightsquigarrow u'x+u = y'$. Ekkor $u'x+u = u+\frac{1}{u}e^{u^2} \rightsquigarrow u'x = \frac{1}{u}e^{u^2}$. Változók szétválasztásával: $x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}e^{u^2} \rightsquigarrow \int ue^{-u^2}du = \int \frac{1}{x}\,dx \rightsquigarrow -\frac{1}{2}e^{u^2} = \ln|x| + C \rightsquigarrow -\frac{1}{2}e^{(y/x)^2} = \ln|x| + C$. Az $y(1) = 0$ kezdeti feltételnek az $-\frac{1}{2}e^{(y/x)^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}$ egyenlet által meghatározott megoldás felel meg.

**2.** Oldjuk meg az $(xy^3 + xy\cos x) + (2x^2y^2 + 2x\sin x + 2\cos x)y' = 0$ differenciálegyenletet!

**MO.** $P(x, y) = xy^3 + xy\cos x$ és $Q(x, y) = 2x^2y^2 + 2x\sin x + 2\cos x$. Ellenőrizzük az egzaktságot $\partial_y P = 3xy^2 + x\cos x$, $\partial_x Q = 4xy^2 + 2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x = 4xy^2 + 2x\cos x$: nem egzakt.

$$S(y) = \frac{\partial_y P - \partial_x Q}{P} = -\frac{1}{y}$$

$\mu(y) = e^{-\int S(y)\,dy} = e^{\int \frac{1}{y}\,dy} = e^{\ln|y|} = y$. (Feltehetjük $y > 0$). Az új egyenlet: $(xy^4+xy^2\cos x)+(2x^2y^3+2xy\sin x+2y\cos x)y' = 0$, ami már egy egzakt egyenlet. Keressük azt az $F(x, y)$ potenciálfüggvényt, amelyre $\partial_x F = xy^4+xy^2\cos x$, $\partial_y F = 2x^2y^3+2xy\sin x+2y\cos x$. Ahonnan: $\frac{1}{2}x^2y^4+y^2(x\sin x+\cos x) = C$.

**3.** Határozzuk meg a $v(x, y, z) = (yz + e^x, xz + 4y^3, xy + 2z)$ vektormező $G : r(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \le t \le 1$ görbére vonatkozó integrálját!

**MO.** $\operatorname{rot}\mathbf{v} = (0, 0, 0)$, igy a vektormező potenciálos. A feladat megoldásához ezért a vonalintegrálokra vonatkozó Newton-Leibniz-tételt (gradiens-tételt) alkalmazzuk. Potenciálfüggvény: keressük azt az $F(x, y, z)$ függvényt, amelyre: $\partial_x F = yz+e^x$ $\partial_y F = xz+4y^3$ $\partial_z F = xy+2z$ A potenciálfüggvényt soronként integrálva: $F(x, y, z) = xyz+e^x+y^4+z^2$. Az integrál: $F(1, 1, 1)-F(0, 0, 0) = 3+e-1 = 2+e$

**4.** Határozzuk meg a $v(x, y, z) = (1 - y^2x, yx^2, 2z)$ vektormező $L : r(t) = (2t, 2 - 2t, 0)$, $0 \le t \le 1$ görbére vonatkozó integrálját!

**MO.** $\operatorname{rot}\mathbf{v} = (0, 0, 4xy)$, tehát érdemes a Stokes-tételt alkalmazni. A $T = \{(x, y, 0) \mid 0 \le y \le 2 - x, 0 \le x \le 2\}$ háromszöglap pereme: $\partial T = L_1 + L + L_2$, ahol $L_1 : \mathrm{r}(t) = (0, t, 0), 0 \le t \le 2$ az $y$ tengelyen található peremszakasz, $L_2 : \mathrm{r}(t) = (2 - t, 0, 0), 0 \le t \le 2$ az $x$ tengelyen található peremszakasz. A perem irányítása a $z$ tengely pozitív irányából visszanézve negatív, ezért ha a $(0, 0, 1)$-gyel irányítjuk a $T$-t, akkor a körintegrál a rotáció integráljának ellenkezője lesz. $L_1$ mentén a vektormező: $\mathbf{v}(0, y, 0) = (1, 0, 0)$, így: $\int_{L_1} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{2}(1, 0, 0)\cdot\begin{pmatrix}0\\dt\\0\end{pmatrix} = 0$. Az $L_2$ mentén a vektormező: $\mathbf{v}(x, 0, 0) = (1, 0, 0)$, így: $\int_{t=0}^{2}(1, 0, 0)\cdot\begin{pmatrix}-dt\\0\\0\end{pmatrix} = \int_{t=0}^{2} -1dt = -2$.

$$\oint\limits_{\partial T} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \iint\limits_{T} \operatorname{rot}\mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \iint\limits_{T} (0, 0, 4xy)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\dxdy\end{pmatrix} = \iint\limits_{T} 4xy\;dxdy = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2-x} 4xy\;dydx = 8/3$$

$$\int_L \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \oint_{\partial T} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} - \int_{L_1} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} - \int_{L_2} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = -\frac{8}{3} - 0 + 2 = -\frac{2}{3}$$

**5.** Határozzuk meg a $v(x,y,z) = (x^2y^2, xy^3, 1)$ vektormező felületmenti integrálját az $(x^2 + y^2)^2 \leq z \leq 1$, $x \geq 0$ egyenlőtlenségek által meghatározott test felszínének görbe kifelé irányított felületdarabjára!

**MO.** Gauss-tétellel. Az egyenlőtlenségből: $r^4 \leq z \leq 1$ és , ahol $r = \sqrt{x^2+y^2}$, legyen ez a $V$ tértartomány. Tudjuk továbbá, hogy $\operatorname{div} v(x,y,z) = 2xy^2 + 3xy^2 = 5xy^2$. Tehát

$$\iiint_{\partial V} v\,df = \iiint_V \operatorname{div} v\,dV =$$

$$= \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r^4}^{1} 5\cos\varphi \sin^2\varphi r^4\,dz\,dr\,d\varphi = \left(\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} 5\cos\varphi\sin^2\varphi d\varphi\right) \cdot \left(\int_{r=0}^{1} \left[zr^4\right]_{z=r^4}^{1}\,dr\right)$$

$$= \cdot \int_{r=0}^{1} r^4 - r^8\,dr$$

$$= \frac{10}{3} \cdot (\frac{1}{5} - \frac{1}{9}).$$

A fedőlapra a vektormező normális irányú komponense $v(x,y,1) = (0,0,1)$, így a felületi integrál $1^2\pi/2 = \pi/2$. Az oldallapra: $v(x,y,1) = (0,0,1)$, aminek a felületre merőleges komponense 0. Így az integrál

$$\frac{10}{3} \cdot (\frac{1}{5} - \frac{1}{9}) - \frac{\pi}{2}.$$

**6.** (4+4+2)

**6.1)** Számítsuk ki az $(-y, x, z)$ vektormező **rotációjának** integrálját az első térnyolcadba eső origó középpontú, egységsugarú kifelé irányított gömbfelületre!

**6.2)** Számítsuk ki $\operatorname{grad}\operatorname{div} r$ értékét az $\mathbf{R}^3$ térben!

**6.3)** Mi az $(R\cos t, R\sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ körvonal ívhossz paraméterezése, ahol $R > 0$?

**MO.** 6.1) $\operatorname{rot}\mathbf{v} = (0,0,2)$, ezért a $z$-vel párhuzamos lapokon 0 az integrál. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, ezért a Gauss-tétel miatt ami bejön alul, az kimegy felül, ezért elég az alaplapra kiszámolni a felületi integrál, felfelé irányítottan. Ez $2 \cdot 1^2\pi/4 = \pi/2$.

6.2) Elsőfokú kifejezések másodrendű deriváltja nulla.

6.3) A kör kerülete $2R\pi$, $(R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R}, 0)$, $0 \leq s \leq 2R\pi$, a $t = s/R$ értékadással visszaadja az eredeti paraméterezést, és közben az $s$ szerinti deriváltja egységvektor: $(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}, 0)$, azaz ívhosszparaméterezés.

**iMSc.** Egyértelmű megoldása van-e az $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}$ egyenletnek, az $(1,0)$ pontban?

**MO.** $u = y/x$ helyettesítéssel: $ux = y \rightsquigarrow u'x + u = y'$. Ekkor $u'x + u = u + \sqrt{u} \rightsquigarrow u'x = \sqrt{u}$. Ennek $u \equiv 0$ megoldása, így $y \equiv 0$ szinguláris megoldás, amely az $y(1) = 0$-nak is megfelelő megoldás. Változók szétválasztásával: $x\frac{du}{dx} = \sqrt{u} \rightsquigarrow \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{1}{x}\,dx \rightsquigarrow 2u^{\frac{1}{2}} = \ln|x| + C \rightsquigarrow \sqrt{y/x} = \frac{1}{2}\ln|x| + c$. Amely $c = 0$-ra szintén eleget tesz a kezdeti feltételnek, azaz nincs egyértelmű megoldás az $(1,0)$-ban.