

1. Első gradiens tétel (Newton–Leibniz-tétel). Ha u összefüggő tartományon differenciálható és egy benne lévő görbe kezdő és végpontja $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, akkor:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \operatorname{grad} u \, d\mathbf{r} = u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{r}_1)$$

a) Mi lesz a $v(x, y, z) = (2xy+z^3, 2y+x^2, 3xz^2)$ vektormező intergálja a $[(0, 0, 0), (1, 2, -1)]$ irányított egyenes szakaszra?

b) Mi lesz az $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, 0, R \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$ ($R > 0$) görbére az integrálja a $\mathbf{v}(r) = r|r^4|$ vektormezőnek?

2. Stokes-tétel:

$$\int_F \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \iint_{\partial F} \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{f}$$

a) Számítsa ki a $v(x, y, z) = (-yx^2, xy^2, z)$ vektorfüggvény görbementi integrálját az $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi$ ($R > 0$) félkör mentén!

HF) Számítsa ki a $v(x, y, z) = (xy, -xy, z^2)$ vektorfüggvény görbementi integrálját az $(1, 0, 0)$ pontból a $(0, 1, 0)$ pontba menő szakasz esetén.

3. Gauss-tétel:

$$\int_F \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \iint_{\partial F} \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{f}$$

Határozzuk meg az alábbi vektormezők integrálját az adott felület mentén!

a) $v(r) = r$, origú csúcsPontú, z temgelyű M magasságú kúp palástja.

b) $v(r) = |r|^2 r$, $F : |r| = R > 0$, $x, y \geq 0$ ($\int_F \mathbf{v} \, d\mathbf{A} = ?$)

c) Számítsa ki a $v(x, y, z) = (3x + \sin y, x^2 y - 4y, z)$ vektorfüggvény felületi integrálját a $(0, 0, 3)$ csúcsPontú, $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 9$ feltételekkel adott alaplapú egyenes kifelé irányított palástjára!

HF) $v(x, y, z) = (y^2, z^4, x + 2z)$, $H : x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 1$, kifelé irányítva a térfogatból