1. gyakorló vizsga-zh, Matematika A3 VIK Villamosmérnök

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)

1. Oldja meg az alábbi differenciálegyenletrendszert!

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + e^t \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

MO. Legyen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{b}(t) = \left(\begin{smallmatrix} e^t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. A karakterisztikus egyenlet $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$, amiből a sajátértékek $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 3$. A két $A - \lambda I$ elfajuló mátrix rendre:

$$A - \lambda_1 I = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) \qquad A - \lambda_2 I = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$$

sajátvektorok rendre: $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ és $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. A hozzájuk tartozó sajátvektorokkal felírt alapmátrix:

$$\Psi(t) = \left[\begin{bmatrix} 1 \cdot e^{-t} \\ 1 \cdot e^{-t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \cdot e^{3t} \\ -1 \cdot e^{3t} \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

A homogén megoldás: $\mathbf{x}(t) = \Psi(t) \cdot \mathbf{C}$, ahol $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$ általános konstans vektor.
Keressük az inhomogén egyenletrendszere megoldását $\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{c}(t)$ alakban:

$$\Psi(t)\,\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{b}(t)$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} & e^t \\ -e^{-t} & e^{3t} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} & e^t \\ 0 & 2e^{3t} & e^t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} & e^t \\ 0 & e^{3t} & \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & \frac{1}{2}e^t \\ 0 & e^{3t} & \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}e^{2t} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\dot{c}_1(t) = \frac{1}{2}e^{2t} \rightsquigarrow c_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t}$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} \rightsquigarrow c_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t}$$

$\mathbf{x}(t) = \Psi(t) \cdot \mathbf{C} + \Psi(t) \cdot \mathbf{c}(t)$, ahol $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$ általános konstans vektor.

2. Oldja meg az $y'' - 4y' + 4y = 6te^{2t}$ differenciálegyeletet az $y(0) = 1, y'(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett!

MO. Laplace-transzformációval. $s^2Y - s - 4sY + 4 + 4Y = \frac{6}{(s-2)^2} \rightsquigarrow (s^2 - 4s + 4)Y - s + 4 = \frac{6}{(s-2)^2} \rightsquigarrow$ $Y = \frac{1}{s-2} + \frac{-2}{(s-2)^2} + \frac{6}{(s-2)^4} \rightsquigarrow y(t) = y(t) = e^{2t} - 2te^{2t} + t^3e^{2t}$.

3. Határozza meg az alábbi háromváltozós vektormező $\mathbf{v}(x, y, z)$ potenciálfüggvényét:

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (2xy, x^2 + z, y)$$

MO. A vektormező konzervatív, ha $\mathrm{rot}\mathbf{v}(x, y, z) \equiv \mathbf{0}$, azaz:

$$\mathrm{rot}\mathbf{v}(x, y, z) \equiv (2x - 2x, 0 - 0, 1 - 1) = (0, 0, 0).$$

Azaz van potenciálfüggvénye. Keressük tehát az $u(x, y, z)$-t, amelyre $\partial_x u = v_1$, $\partial_y u = v_2$, $\partial_z u = v_3$. Ezeket integrálva:

$$u = x^2y + C_1(y, z), u = x^2y + zy + C_2(x, z), u = yz + C_3(x, y)$$

Tehát:

$$u(x,y,z) = x^2y + yz + C$$

4. Számítsa ki a $G : r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ vonalra a $v(x,y,z) = (x^3+3, x^2y^2-1, z^2)$ függvény integrálját!

MO. Stokes-tétellel. Legyen $T = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le 1, x \ge 0\}$ az $r(t)$-vel kompatibilisen irányítva, azaz $(0,0,1)$ normálissal. $\operatorname{rot} v = (0,0,2xy^2)$ és $(\operatorname{rot} v)_\perp = (0,0,2xy^2)\cdot(0,0,1) = 2xy^2$. Ekkor

$$\oint\limits_{\partial T} v\,dr = \int\limits_T \operatorname{rot} v\,dA = \int\limits_T (\operatorname{rot} v)_\perp\,|dA| = \int\limits_T \operatorname{rot} v\,dA \iint\limits_T 2xy^2\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 2r\cos\varphi r^2 \sin^2\varphi r\,drd\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 2r^4 \cos\varphi \sin^2\varphi\,drd\varphi = \left[\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{2}{5}r^5\right]_0^1 = \frac{4}{15}.$$

A lezáró $L = [(0,1,0),(0,-1,0)]$ szakaszon $v_\parallel = (3,-1,0)\cdot(0,-1,0) = 1$ mert L az y-tengellyel ellentétesen van irányítva, azaz L irányvektora $(0,-1,0)$, így az integrál:

$$\int\limits_L v\,dr = \int\limits_L v_\parallel\,dr = \int\limits_{-1}^{1} 1\,dy = 2.$$

Tehát

$$\int\limits_G v\,dr = \oint\limits_{\partial T} v\,dr - \int_L v\,dr = -\frac{26}{15}.$$

5. Számítsa ki az $x=0$, $x=1$, $z=0$, $y=0$, $z=1-y$ síkok által határolt háromszög alapú hasáb palástjára a $v(x,y,z) = (3x^2y^2z, -2xy^3z, 2z)$ vektorfüggvény felületi integrálját!

MO. Alaplapok: $T_1 : ((0,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$, erre $v(0,y,z) = (0,0,2z) \parallel T_1 \rightsquigarrow \iint_{T_1} v\,dA = \iint_{T_1} v_\perp\,|dA| = \iint_{T_1} 0\,|dA| = 0$ (T_1 kifelé mutató normálisa $(-1,0,0)$, de az integrál nulla). T_2: $((1,0,0),(1,1,0),(1,0,1))$, itt $v(1,y,z) = (3y^2z, -2y^3z, 2z) \rightsquigarrow \iint_{T_2} v\,dA = \iint_{T_2} v_\perp |dA| = \int_0^1 \int_0^{1-y} 3y^2z\,dzdy = \frac{1}{20}$, hiszen T_2 kifelé mutató normálisa $(1,0,0)$ és $v_\perp = (3y^2z, -2y^3z, 2z)\cdot(1,0,0) = 3y^2z$. A Gauss-tételből a hasáb zárt V térfogatának ∂V kifelé irányított felszínére az integrál:

$$\oiint\limits_{\partial V} v\,dA = \iiint\limits_V \operatorname{div} v\,dV = \iiint\limits_V 2\,dV = 2\cdot|V| = 1.$$

Hiszen $\operatorname{div} v = 2$. Tehát a palástra az integrál:

$$\iint\limits_P v\,dA = \oiint\limits_{\partial V} v\,dA - \iint\limits_{T_1} v\,dA - \iint\limits_{T_2} v\,dA = \frac{19}{20}.$$

6. (4+4+2) Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ differenciálható függvény és $\operatorname{rot} v \equiv 0$, akkor v konstans.

b) Ha $v : \mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^3$ differenciálható függvény és $\operatorname{div} v \equiv 0$, akkor v konstans.

c) Ha $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, akkor $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u \equiv 0$.

MO. a) Hamis. $v(r) = r \not\equiv 0$ esetén $\operatorname{rot} v \equiv 0$, mert $\operatorname{grad} \frac{|r|^2}{2} = r$, lévén, r potenciálos.
b) Hamis. $\operatorname{div}(x, -y, 0) = 1 - 1 + 0 = 0$, de $(x, -y, 0) \not\equiv 0$.
c) Igaz, a Young-tétel miatt.

iMSc. Igaz-e, hogy a $\sqrt[3]{y} = y'$, $y(0) = 0$ kezdeti érték feladatnak egyetlen megoldása van?

MO. Hamis. $y = 0$ megoldás, de szeparálással az $y(x) = \sqrt{\frac{8}{27}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$ is megoldás.