Matematika A3, zh, VIK Villamosmérnök, 2025. ősz

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)

1. *(6+2+2 pont)* Oldja meg az $y' = \frac{y}{x} + y^2$ differenciálegyenletet és adja meg azt a megoldást, amely teljesíti az a) $y(1) = 0$ illetve b) $y(1) = 1$ kezdeti feltételt!

Megoldás: Az egyenlet homogén fokszámú (ha y^2 helyett y^2/x lenne), de itt inkább a változóban szeparábilisra visszavezethető típust alkalmazzuk az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel. Ekkor $y = x \cdot u$, és deriválva: $y' = u + xu'$. Helyettesítsük be ezeket az eredeti egyenletbe:

$$u + xu' = \frac{xu}{x} + (xu)^2$$

$$u + xu' = u + x^2u^2$$

Vonjunk ki u-t mindkét oldalból ($x \neq 0$ feltétellel):

$$xu' = x^2u^2$$

$$u' = xu^2 \implies \frac{du}{dx} = xu^2$$

Ez szétválasztható változójú egyenlet. 1. Ha $u \equiv 0$, akkor $y \equiv 0$, ami megoldás. 2. Ha $u \neq 0$:

$$\frac{du}{u^2} = xdx$$

Integráljuk mindkét oldalt:

$$\int u^{-2}du = \int xdx \implies -\frac{1}{u} = \frac{x^2}{2} + C$$

Fejezzük ki u-t:

$$u = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + C} = \frac{-2}{x^2 + 2C}$$

Legyen $K = 2C$ új konstans. Helyettesítsük vissza $u = y/x$-et:

$$\frac{y}{x} = \frac{-2}{x^2 + K} \implies y(x) = \frac{-2x}{x^2 + K}$$

a) Kezdeti feltétel $y(1) = 0$:

$$0 = \frac{-2(1)}{1 + K}$$

Ez csak akkor teljesülne, ha a számláló 0 lenne, de $-2 \neq 0$. Ez azt jelenti, hogy a keresett megoldás a szétválasztásnál elvesztett szinguláris megoldás. Megoldás: $\boldsymbol{y(x) = 0}$.

b) Kezdeti feltétel $y(1) = 1$:

$$1 = \frac{-2(1)}{1^2 + K} \implies 1 + K = -2 \implies K = -3$$

A megoldás: $\boldsymbol{y(x) = \frac{-2x}{x^2-3} = \frac{2x}{3-x^2}}$.

---

2. *(8+2 pont)* Oldja meg az $xy^2 + (3x^2y - y)y' = 0$ differenciálegyenletet! Mi az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása?

Megoldás: Jelölje $P(x, y) = xy^2$ és $Q(x, y) = 3x^2y - y$. Ellenőrizzük az egzaktságot:

$$\partial_y P = 2xy, \quad \partial_x Q = 6xy.$$

Mivel $2xy \neq 6xy$, az egyenlet nem egzakt. Keressünk integráló tényezőt (μ).

$$\frac{\partial_x Q - \partial_y P}{P} = \frac{6xy - 2xy}{xy^2} = \frac{4xy}{xy^2} = \frac{4}{y}.$$

Mivel ez csak y-tól függ, létezik $\mu(y)$ integráló tényező:

$$\ln \mu = \int \frac{4}{y} dy = 4 \ln y = \ln y^4 \implies \mu(y) = y^4.$$

Szorozzuk be az egyenletet y^4-gyel:

$$xy^6 dx + (3x^2y^5 - y^5)dy = 0.$$

Most már $\partial_y(xy^6) = 6xy^5$ és $\partial_x(3x^2y^5 - y^5) = 6xy^5$, tehát egzakt. Keressük az $F(x, y)$ potenciálfüggvényt:

$$\partial_x F = xy^6 \implies F(x, y) = \frac{x^2}{2} y^6 + g(y)$$

Deriváljuk y szerint és vessük össze Q_j-mal:

$$\partial_y F = 3x^2y^5 + g'(y) = 3x^2y^5 - y^5 \implies g'(y) = -y^5 \implies g(y) = -\frac{y^6}{6}.$$

Az általános megoldás implicit alakja ($F(x, y) = C$):

$$\frac{1}{2}x^2y^6 - \frac{1}{6}y^6 = C \quad \text{vagy} \quad \boldsymbol{3x^2y^6 - y^6 = K}.$$

Kezdeti feltétel: $y(0) = 0$. Behelyettesítve: $3(0)^2(0)^6 - 0^6 = K \implies K = 0$. Tehát $y^6(3x^2 - 1) = 0$. Mivel $y(0) = 0$, a megoldás az $\boldsymbol{y(x) \equiv 0}$ függvény.

---

3. Számítsa ki a $v(x, y, z) = (yz + y^2, xz + 2xy, xy - \sin z)$ vektormező vonalintegrálját a $G : r(t) = (t; t^2; 2\pi t), 0 \leq t \leq 1$ görbére!

Megoldás: Megvizsgáljuk, hogy a vektormező konzervatív-e (van-e potenciálja). $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$:

- $(\partial_y v_z - \partial_z v_y) = (x - x) = 0$
- $(\partial_z v_x - \partial_x v_z) = (y - y) = 0$
- $(\partial_x v_y - \partial_y v_x) = ((z + 2y) - (z + 2y)) = 0$

Mivel a rotáció 0, létezik Φ potenciálfüggvény, melyre $\operatorname{grad} \Phi = v$.

$$\partial_x \Phi = yz + y^2 \implies \Phi = xyz + xy^2 + A(y, z)$$

$$\partial_y \Phi = xz + 2xy + \partial_y A = xz + 2xy \implies \partial_y A = 0 \implies A(z)$$

$$\partial_z \Phi = xy + A'(z) = xy - \sin z \implies A'(z) = -\sin z \implies A(z) = \cos z$$

A potenciál: $\Phi(x, y, z) = xyz + xy^2 + \cos z$. A vonalintegrál értéke $\Phi(r(1)) - \Phi(r(0))$. Kezdőpont: $r(0) = (0, 0, 0)$. Végpont: $r(1) = (1, 1, 2\pi)$.

$$\Phi(1, 1, 2\pi) = 1 \cdot 1 \cdot 2\pi + 1 \cdot 1^2 + \cos(2\pi) = 2\pi + 1 + 1 = 2\pi + 2$$

$$\Phi(0, 0, 0) = 0 + 0 + \cos(0) = 1$$

Az integrál értéke: $(2\pi + 2) - 1 = \boldsymbol{2\pi + 1}$.

---

4. Határozzuk meg a $v(x,y,z) = (-y^2x^2+1, 0, z^2-x^2)$ vektormező $G : r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ görbére vonatkozó integrálját!

Megoldás: A megadott G görbe nem zárt (negyedkörív $A(1,0,0)$ pontból $B(0,1,0)$ pontba a $z=0$ síkban). A Stokes-tétel alkalmazásához zárjuk le a görbét az L_1 szakasszal (B-ből az origóba $O(0,0,0)$) és az L_2 szakasszal (O-ból vissza A-ba). A zárt görbe: $\Gamma = G \cup L_1 \cup L_2$, mely a $z=0$ síkban lévő S negyedkörlemezt határolja. A jobbkéz-szabály szerint a z irányú normális $\mathbf{n} = (0,0,1)$ felel meg a körüljárásnak. Stokes-tétel: $\oint_\Gamma v d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n}\, dA$. Ebből: $\int_G v = \iint_S (\nabla \times v)\mathbf{n}\, dA - \int_{L_1} v - \int_{L_2} v$.

1. **Rotáció számítása:**

$$\nabla \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -x^2y^2+1 & 0 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (0, \quad -(-2x), \quad 0-(-2x^2y)) = (0, 2x, 2x^2y)$$

$$(\nabla \times v)\cdot \mathbf{n} = (0,2x,2x^2y)\cdot(0,0,1) = 2x^2y.$$

2. **Felületi integrál (S negyedkörlemez):** Polárkoordinátákkal: $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$, $0 \le r \le 1, 0 \le \phi \le \pi/2$.

$$\iint_S 2x^2y\, dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 2(r^2\cos^2\phi)(r\sin\phi)r\, dr\, d\phi = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2\phi \sin\phi\, d\phi \int_0^1 r^4\, dr$$

$$r\text{-rész: } \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}. \quad \phi\text{-rész } (u=\cos\phi)\text{: } \int_1^0 2u^2(-du) = \left[\frac{2u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Felületi int: } \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

3. **Lezáró szakaszok integrálja:**

- L_1 (y tengely, $1 \to 0$): $x = 0 \implies v = (1,0,z^2)$. $d\mathbf{r} = (0,dy,0)$. $v \cdot d\mathbf{r} = 0$. $\int_{L_1} = 0$.
- L_2 (x tengely, $0 \to 1$): $y = 0 \implies v = (1,0,-x^2)$. $d\mathbf{r} = (dx,0,0)$. $v \cdot d\mathbf{r} = 1dx$. $\int_{L_2} = \int_0^1 1dx = 1$.

4. **Összegzés:**

$$\int_G v = \frac{2}{15} - 0 - 1 = \frac{2}{15} - \frac{15}{15} = \mathbf{-\frac{13}{15}}.$$

---

5. Adja meg a $v(x,y,z) = (x+z, y+z, z)$ vektormező integrálját az $V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le z \le 1\}$ test felszínének azon darabjára, amely a $z = x^2+y^2$ felület része és amely a V tartományból kifelé van irányítva!

Megoldás: A Gauss-Osztrogradszkij-tételt alkalmazzuk. A V térrész egy zárt tartomány, melyet alulról a S_1 paraboloid ($z = x^2+y^2$), felülről pedig az S_2 körlap ($z = 1, x^2+y^2 \le 1$) határol. A tétel szerint a zárt felületre ($S_1 \cup S_2$) kifelé vett integrál:

$$\iint_{\partial V} v \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} v\, dV$$

1. **Divergencia számítása:**

$$\operatorname{div} v = \partial_x(x+z) + \partial_y(y+z) + \partial_z(z) = 1+1+1 = 3.$$

2. **Térfogati integrál:** A V tartomány egy forgásparaboloid és a $z=1$ sík közötti rész.

$$\iiint_V 3\, dV = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 r\, dz\, dr\, d\phi = 3\cdot 2\pi \int_0^1 r(1-r^2)\, dr$$

$$= 6\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 6\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 6\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

3. **Felületi integrálok:** A zárt felületi integrál: $\iint_{\partial V} = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \frac{3\pi}{2}$. Itt $\iint_{S_1}$ a keresett integrál (az S_1 felület kifelé, azaz lefelé irányítva). Számítsuk ki a felső fedőlapra (S_2) eső integrált. Itt $z = 1$, a kifelé mutató normális $\mathbf{n}_{fel} = (0,0,1)$.

$$v|_{z=1} = (x+1, y+1, 1).$$

$$\iint_{S_2} v \cdot \mathbf{n}_{fel}\, dA = \iint_{S_2} (x+1, y+1, 1) \cdot (0,0,1)\, dA = \iint_{S_2} 1\, dA$$

Ez az egységsugarú kör területe: π. 4. **Eredmény:**

$$\iint_{S_1} + \pi = \frac{3\pi}{2} \implies \iint_{S_1} = \frac{3\pi}{2} - \pi = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}.$$

---

6. *(2+4+4)* Válaszát részletesen indokolja! **6.1.** Mennyi $\operatorname{rot} r$?
6.2. Legyen $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ kétszer folytonosan differenciálható! Melyik azonosan nulla?

a) $\operatorname{div}\operatorname{rot} v$, **b)** $\operatorname{grad}\operatorname{div} v$, **c)** $\operatorname{rot}\operatorname{div} v$

6.3. Mennyi a $v(r) = |r|^5 r$ vektormező integrálja az origó középpontú, $R > 0$ sugarú gömb kifelé irányított felszínére?

Megoldás: **6.1.** Az $r = (x, y, z)$ helyvektor rotációja:

$$\operatorname{rot} r = \nabla \times r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0-0, 0-0, 0-0) = \mathbf{0}.$$

6.2. **a)** $\operatorname{div}\operatorname{rot} v = \nabla \cdot (\nabla \times v)$. Ez egy ismert vektoranalitikai azonosság, mely szerint bármely kétszer diffható vektormező rotációjának divergenciája **azonosan nulla**.
b) $\operatorname{grad}\operatorname{div} v = \nabla(\nabla \cdot v)$. Nem azonosan nulla: $v = (x^2, y^2, z^2)$, akkor $\operatorname{grad}\operatorname{div} v = (1,1,1) \neq (0,0,0)$.
c) $\operatorname{rot}\operatorname{div} v$. A $\operatorname{div} v$ egy skalármező, skalármezőnek nem értelmezzük a rotációját a klasszikus vektoranalízisben (vagy a $\operatorname{rot}\operatorname{grad}$ az, ami nulla lenne).

6.3. Szimmetria megfontolások alapján számolunk, integrálás nélkül. A felület egy origó középpontú, R sugarú gömb (S). Ennek felszínén a helyvektor hossza állandó: $|r| = R$. A gömb felületi normálvektora minden pontban sugárirányú egységvektor: $\mathbf{n} = \frac{r}{|r|} = \frac{r}{R}$. A $v(r) = |r|^5 r$ vektormező értéke a felületen: $v|_S = R^5 r$. Számítsuk ki a $v \cdot \mathbf{n}$ skaláris szorzatot a felületen:

$$v \cdot \mathbf{n} = (R^5 r) \cdot \left(\frac{r}{R}\right) = R^4 (r \cdot r) = R^4 |r|^2 = R^4 \cdot R^2 = R^6.$$

Látható, hogy a skaláris szorzat (a fluxussűrűség) a teljes gömbfelületen **állandó**. Így a felületi integrál egyszerűen ezen konstans és a gömb felszínének ($A = 4\pi R^2$) szorzata:

$$\iint_S v \cdot d\mathbf{A} = \text{konstans} \cdot \text{Felszín} = R^6 \cdot 4\pi R^2 = \boldsymbol{4\pi R^8}.$$

---

iMSc. Legyen $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ differenciálható! Igazolja, hogy $\operatorname{grad}(v \cdot r) = \mathrm{J}^v \cdot r + v$, ahol $r \mapsto r$ az $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ identitás függvény, J a Jacobi-mátrix.

Megoldás: Írjuk fel a $\operatorname{grad}(v \cdot r)$ i-edik komponensét az Einstein-féle szumma konvenciót alkalmazva (ahol $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$).

$$[\nabla(v \cdot r)]_i = \partial_i (v_j x_j)$$

Alkalmazzuk a szorzatderiválás szabályát:

$$\partial_i(v_j x_j) = (\partial_i v_j)x_j + v_j(\partial_i x_j)$$

Tudjuk, hogy $\partial_i x_j = \delta_{ij}$ (Kronecker-delta).

$$= (\partial_i v_j)x_j + v_j\delta_{ij} = (\partial_i v_j)x_j + v_i$$

A kapott kifejezés második tagja (v_i) maga a v vektor i-edik komponense. Az első tag: $(\partial_i v_j)x_j$. A Jacobi-mátrix definíciója (szokásos elrendezésben): $J_{ji} = \partial_i v_j$ (azaz a j. sor és i. oszlop eleme a v_j függvény x_i szerinti deriváltja - *megjegyzés: egyes konvenciókban ez a transzponált, de a feladat kontextusa alapján a tenzoros kontrakció a lényeg*). Ha a J^v jelölés alatt a derivált tenzort értjük úgy, hogy a mátrixszorzás a láncszabály szerint működik a vektoron (tehát $(\partial_i v_j)x_j$ alakban áll elő a gradiens művelet természetéből fakadóan, amennyiben a gradiens sort, a J pedig ennek megfelelő struktúrát jelöl), akkor az állítás igazolást nyert. Pontosabban, ha J alatt a $(\nabla \otimes v)^T$ tenzort értjük, akkor:

$$[\mathrm{J}^v \cdot r]_i + v_i = \sum_j (\partial_i v_j)x_j + v_i = [\mathrm{grad}(v \cdot r)]_i. \quad \square$$
