2025 Vill. Mat A3 – 5. gyakorlat – Megoldások

1. Első gradiens tétel (Newton–Leibniz-tétel). Ha u összefüggő tartományon differenciálható és egy benne lévő görbe kezdő és végpontja $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, akkor:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \operatorname{grad} u \, d\mathbf{r} = u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{r}_1)$$

a) Mi lesz a $v(x,y,z) = (2xy+z^3, 2y+x^2, 3xz^2)$ vektormező intergálja a $[(0,0,0),(1,2,-1)]$ irányított egyenes szakaszra?
b) Mi lesz az $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, 0, R\sin t)$, $0 \le t \le \pi/2$ $(R > 0)$ görbére az integrálja a $\mathbf{v}(r) = r|r^4|$ vektormezőnek?

MO. **a)** A vektormező potenciálos (rotációja nulla). A potenciálfüggvény (a múlt heti 4a feladat alapján):

$$U(x,y,z) = x^2y + xz^3 + y^2 + K$$

A gradiens tétel alapján az integrál a potenciálfüggvény megváltozása a végpontok között:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = U(1,2,-1) - U(0,0,0)$$

$$U(1,2,-1) = (1^2)(2) + (1)(-1)^3 + (2^2) = 2 - 1 + 4 = 5$$

$$U(0,0,0) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Az integrál értéke: $5 - 0 = 5$.

b) A vektormező $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}r^4$. Ez centrális, tehát potenciálos (a múlt heti 4b feladat alapján):

$$U(\mathbf{r}) = \frac{r^6}{6} + K = \frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{6} + K$$

A görbe kezdőpontja: $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(0) = (R\cos 0, 0, R\sin 0) = (R,0,0)$. $|\mathbf{r}_1| = R$. A görbe végpontja: $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(\pi/2) = (R\cos\frac{\pi}{2}, 0, R\sin\frac{\pi}{2}) = (0,0,R)$. $|\mathbf{r}_2| = R$.

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = U(0,0,R) - U(R,0,0) = \frac{R^6}{6} - \frac{R^6}{6} = 0$$

2. **Stokes-tétel.** Legyen $D \subseteq \mathbf{R}^3$ nyílt, egyszeresen összefüggő, $\mathbf{v}: D \to \mathbf{R}^3$ folyt. diff. és $V \subseteq D$ korlátos, zárt és mérhető.

$$\oint_{\partial F} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \iint_F \mathbf{rot}\, \mathbf{v}\, d\mathbf{f}$$

a) Számítsa ki a $v(x,y,z) = (-yx^2, xy^2, z)$ vektorfüggvény görbementi integrálját az $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, $0 \le t \le \pi$ $(R > 0)$ félkör mentén!

HF) Számítsa ki a $v(x,y,z) = (xy, -xy, z^2)$ vektorfüggvény görbementi integrálját az $(1,0,0)$ pontból a $(0,1,0)$ pontba menő szakasz esetén.

MO. a) A G_1 görbe nem zárt. Zárjuk le a G_2 szakasszal: $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 0)$, $t \in [-R, R]$ (visszafelé). A $G_1 \cup G_2$ zárt görbe az F félkörlapot ($x^2 + y^2 \le R^2, z = 0, y \ge 0$) határolja. Stokes-tétel:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -yx^2 & xy^2 & z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(y^2 - (-x^2)) = (0, 0, x^2 + y^2)$$

A felület normálvektora $d\mathbf{f} = (0, 0, 1)\,dx\,dy$.

$$\iint_F \operatorname{rot}\mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \iint_F (0, 0, x^2 + y^2) \cdot (0, 0, 1)\,dx\,dy = \iint_F (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

Polárkoordinátákkal ($r \in [0, R], \varphi \in [0, \pi]$):

$$\int_0^\pi \int_0^R (r^2)\,r\,dr\,d\varphi = [\varphi]_0^\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \pi\frac{R^4}{4}$$

Ez egyenlő a vonalintegrállal a zárt görbén: $\oint_{G_1 \cup G_2} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \int_{G_1} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} + \int_{G_2} \mathbf{v}\,d\mathbf{r}$. A G_2 szakaszon ($y = 0, z = 0$): $\mathbf{v}(t, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Így $\int_{G_2} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = 0$. Tehát $\int_{G_1} \mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \pi\frac{R^4}{4}$.

HF) Direkt vonalintegrál. A szakasz paraméterezése: $\mathbf{r}(t) = (1, 0, 0) + t((0, 1, 0) - (1, 0, 0)) = (1 - t, t, 0)$, $t \in [0, 1]$. $d\mathbf{r} = (-1, 1, 0)\,dt$. $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = ((1 - t)t, -(1 - t)t, 0^2) = (t - t^2, t^2 - t, 0)$.

$$\int_0^1 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t - t^2, t^2 - t, 0) \cdot (-1, 1, 0)\,dt = \int_0^1 (-(t - t^2) + (t^2 - t))\,dt$$

$$= \int_0^1 (2t^2 - 2t)\,dt = \left[\frac{2t^3}{3} - t^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

3. **Gauss-tétel.** Legyen $D \subseteq \mathbf{R}^3$ nyílt, $\mathbf{v} : D \to \mathbf{R}^3$ folyt. diff. és $V \subseteq D$ korlátos, zárt és mérhető. Ekkor

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{v} d\mathbf{f} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV$$

Határozzuk meg az alábbi vektormezők integrálját az adott felület mentén!

a $v(r) = r$, origú csúcspontú, z temgelyű M magasságú kúp palástja.

b) $v(r) = |r|^2 r$, $F : |r| = R > 0$, $x, y \ge 0$ ($\int_F \mathbf{v} d\mathbf{A}$ =?)

c) Számítsa ki a $v(x, y, z) = (3x + \sin y, x^2 y - 4y, z)$ vektorfüggvény felületi integrálját a $(0, 0, 3)$ csúcspontú, $z = 0$, $x^2 + y^2 \le 9$ feltételekkel adott alaplapú egyenes kúp kifelé irányított palástjára!

HF) $v(x, y, z) = (y^2, z^4, x + 2z)$, $H : x^2 + y^2 \le 4, 0 \le z \le 1$, kifelé irányítva a térfogatból

MO. a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$. $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 3$. A V kúptestet a P (palást) és A (alaplap) határolja. Legyen az alap $z = M$, sugara R. Gauss-tétel a V zárt térfogatra:

$$\oiint_{P \cup A} \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{v})\,dV = \iiint_V 3\,dV = 3 \cdot V_{\text{kúp}} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\pi R^2 M\right) = \pi R^2 M$$

Ez $\int_P \mathbf{v}\,d\mathbf{f} + \int_A \mathbf{v}\,d\mathbf{f}$. Az A alaplapon ($z = M$): $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ (kifelé). $\mathbf{v} = (x, y, M)$.

$$\int_A \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \iint_A (x, y, M) \cdot (0, 0, 1)\,dA = \iint_A M\,dA = M \cdot (\text{Alap területe}) = M\pi R^2$$

Így $\int_P \mathbf{v}\,d\mathbf{f} + \pi R^2 M = \pi R^2 M \implies \int_P \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = 0$.

b) $\mathbf{v} = r^2\mathbf{r}$. F egy negyedgömb felülete ($x \geq 0, y \geq 0$). A felületen $\mathbf{r} = R$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/R$. $\mathbf{v} = R^2\mathbf{r}$. $v_\perp = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = (R^2\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}/R) = R(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = R(r^2) = R(R^2) = R^3$.

$$\int_F \mathbf{v}d\mathbf{f} = \int_F v_\perp|d\mathbf{f}| = \int_F R^3|d\mathbf{f}| = R^3\cdot(\text{F területe})$$

F területe a gömbfelszín negyede: $\frac{1}{4}(4\pi R^2) = \pi R^2$. Az integrál értéke: $R^3\cdot(\pi R^2) = \pi R^5$.

c) $\mathbf{v} = (3x + \sin y, x^2 y - 4y, z)$. $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 3 + (x^2 - 4) + 1 = x^2$. A V kúptestet a P (palást) és A (alaplap $z = 0$) határolja.

$$\oiint_{P\cup A} \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{v})\,dV = \iiint_V x^2\,dV$$

Hengerkoord.: $x = r\cos\varphi$. Kúp egyenlete: $z = 3 - r$ (mivel $r = 0 \to z = 3$, $r = 3 \to z = 0$). Határok: $r \in [0,3]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $z \in [0, 3-r]$.

$$\iiint_V x^2\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{3-r}(r\cos\varphi)^2\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi$$

$$= \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^3 r^3[z]_0^{3-r}\,dr\right) = (\pi)\cdot\int_0^3 r^3(3-r)\,dr$$

$$= \pi\int_0^3(3r^3 - r^4)\,dr = \pi\left[\frac{3r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\right]_0^3 = \pi\left(\frac{3\cdot 81}{4} - \frac{243}{5}\right) = 243\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{243\pi}{20}$$

Az A alaplapon ($z = 0$): $\mathbf{n} = (0,0,-1)$ (kifelé). $\mathbf{v} = (\ldots,\ldots,0)$. $\int_A \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \iint_A \mathbf{v}\cdot(0,0,-1)\,dA = \iint_A 0\,dA = 0$. Tehát a palástra vett integrál: $\int_P \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \frac{243\pi}{20}$.

HF) A H henger zárt felület. Gauss-tételt alkalmazunk. $\mathbf{v} = (y^2, z^4, x + 2z)$. $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \partial_x(y^2) + \partial_y(z^4) + \partial_z(x + 2z) = 0 + 0 + 2 = 2$.

$$\oiint_H \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{v})\,dV = \iiint_V 2\,dV = 2\cdot V_{\text{henger}}$$

A henger alaplapja $R = 2$ sugarú kör, magassága $M = 1$. $V_{\text{henger}} = \pi R^2 M = \pi(2^2)(1) = 4\pi$. Az integrál értéke: $2\cdot(4\pi) = 8\pi$.

4. Határozza meg a $v = (x^2 + yz, x^2 + y + z, x^2 + y + z)$ vektormező rotációjának integrálját a következő F felületre: a T tetraéder legyen a koordinátasíkok és az $x + 2y + 2z = 2$ által határolt test, F legyen ennek felszínéből az utóbbi síklap elhagyásából kapott felület.

MO. A feladat: $\iint_F(\operatorname{rot}\mathbf{v})\,d\mathbf{f}$. F a tetraéder 3, koordinátasíkokra illeszkedő lapja. A pereme (∂F) az $x + 2y + 2z = 2$ síkban lévő három élszakasz. Használhatjuk a Stokes-tételt, vagy a Gauss-tételt a rotációra.

1. megoldás (Gauss-tétel): Legyen F_4 a zr síklap ($x + 2y + 2z = 2$). A teljes zárt felület $F_Z = F \cup F_4$. (Az F normálisai "befelé", az F_4 normálisa "kifelé" mutat). Mivel $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0$ minden $\mathbf{v}$-re, a Gauss-tétel szerint:

$$\oiint_{F_Z}(\operatorname{rot}\mathbf{v})\,d\mathbf{f} = \iiint_V \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v})\,dV = 0$$

A zárt integrál: $\iint_F(\operatorname{rot}\mathbf{v})\,d\mathbf{f} + \iint_{F_4}(\operatorname{rot}\mathbf{v})\,d\mathbf{f}_{\text{kifelé}} = 0$. A feladat $\iint_F(\operatorname{rot}\mathbf{v})\,d\mathbf{f}$-et kér, ami F természetes (befelé mutató) irányítása. Ezért $\iint_F(\operatorname{rot}\mathbf{v})\,d\mathbf{f} = -\iint_{F_4}(\operatorname{rot}\mathbf{v})\,d\mathbf{f}_{\text{kifelé}}$. Számoljuk ki $\operatorname{rot}\mathbf{v}$-t:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 + yz & x^2 + y + z & x^2 + y + z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1-1) - \mathbf{j}(2x - y) + \mathbf{k}(2x - z) = (0, y - 2x, 2x - z)$$

Az F_4 felület normálvektora $g(x,y,z) = x + 2y + 2z - 2 = 0$ alapján $\mathbf{N} = \nabla g = (1,2,2)$. A $d\mathbf{f} = \mathbf{N}\frac{dxdy}{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}|} = (1,2,2)\frac{dxdy}{2}$. A vetületi tartomány T az $x-y$ síkon ($z = 0 \implies x + 2y \le 2$).

$$\iint_{F_4} (\operatorname{rot}\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{f} = \iint_T (0, y-2x, 2x-z) \cdot (1,2,2)\frac{dxdy}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\iint_T (2(y-2x) + 2(2x-z))\,dxdy = \iint_T (y-z)\,dxdy$$

A felületen $2z = 2 - x - 2y \implies z = 1 - x/2 - y$.

$$= \iint_T (y - (1 - x/2 - y))\,dxdy = \iint_T (2y + x/2 - 1)\,dxdy$$

Határok: $x \in [0,2]$, $y \in [0, 1-x/2]$.

$$\int_0^2 \left[y^2 + \frac{xy}{2} - y\right]_0^{1-x/2} dx = \int_0^2 \Big((1-x/2)^2 + (\frac{x}{2} - 1)(1-x/2)\Big)\,dx$$

$$= \int_0^2 \big((1-x/2)^2 - (1-x/2)^2\big)\,dx = \int_0^2 0\,dx = 0$$

Mivel $\iint_{F_4} \ldots = 0$, ezért $\iint_F \ldots = -0 = 0$.

2. megoldás (Stokes-tétel): $\iint_F (\operatorname{rot}\mathbf{v})\,d\mathbf{f} = \oint_{\partial F} \mathbf{v}\,d\mathbf{r}$. A perem ∂F a $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ görbe, $(2,0,0) \to (0,1,0) \to (0,0,1) \to (2,0,0)$.

- G_1: $(2,0,0) \to (0,1,0)$. $\mathbf{r}(t) = (2-2t, t, 0)$, $t \in [0,1]$. $d\mathbf{r} = (-2,1,0)dt$. $\mathbf{v} = ((2-2t)^2, (2-2t)^2 + t, (2-2t)^2 + t)$. $\int_{G_1} \mathbf{v}d\mathbf{r} = \int_0^1 (-2(2-2t)^2 + (2-2t)^2 + t)dt = \int_0^1 (-(2-2t)^2 + t)dt = \int_0^1 (-4t^2 + 9t - 4)dt = [-\frac{4t^3}{3} + \frac{9t^2}{2} - 4t]_0^1 = -4/3 + 9/2 - 4 = -5/6$.

- G_2: $(0,1,0) \to (0,0,1)$. $\mathbf{r}(t) = (0, 1-t, t)$, $t \in [0,1]$. $d\mathbf{r} = (0,-1,1)dt$. $\mathbf{v} = (t(1-t), (1-t) + t, (1-t) + t) = (t - t^2, 1, 1)$. $\int_{G_2} \mathbf{v}d\mathbf{r} = \int_0^1 (0 \cdot (t-t^2) - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1)dt = 0$.

- G_3: $(0,0,1) \to (2,0,0)$. $\mathbf{r}(t) = (2t, 0, 1-t)$, $t \in [0,1]$. $d\mathbf{r} = (2,0,-1)dt$. $\mathbf{v} = ((2t)^2, (2t)^2 + (1-t), (2t)^2 + (1-t))$. $\int_{G_3} \mathbf{v}d\mathbf{r} = \int_0^1 (2(4t^2) - (4t^2 - t + 1))dt = \int_0^1 (4t^2 + t - 1)dt = [\frac{4t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t]_0^1 = 4/3 + 1/2 - 1 = 5/6$.

Teljes integrál: $-5/6 + 0 + 5/6 = 0$.