2025. vill. mat A3 – 7-8. hét – Megoldások

(Felületi integrál, differenciáloperátorok, potenciálkeresés)

1. $\int_F \mathbf{v} d\mathbf{f} = \iint\limits_{(u,v)\in T} \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \partial_u \mathbf{r}(u,v) \times \partial_v \mathbf{r}(u,v) dudv$

a) Számítsa ki a $\mathbf{v}(x,y,z) = (y,x,z^2)$ vektormező fluxusát azon a helikoid (csavarfelület) darabon, amelynek paraméteres megadása $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$, ahol a paraméterek tartománya: $0 \le u \le 1$ és $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$. A felületi normálvektor irányítását a paraméterezés által meghatározott természetes irányítás adja meg.

b) Számítsa ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ vektormező fluxusát, ahol $\mathbf{k} = (0,0,1)$ és $\mathbf{r} = (x,y,z)$ a helyvektor, azon az egységnégyzeten, amely az $y-z$ síkon fekszik, és amelyet a következő egyenlőtlenségek határoznak meg: $x = 0, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1$. A felület normálvektora mutasson a pozitív x-tengely irányába.

HF) Határozza meg a $\mathbf{v}(x,y,z) = (x,y,2z)$ vektormező fluxusát arra a paraboloid felületdarabra, amelyet a $z = 4-x^2-y^2$ egyenlet határoz meg, és amely az $x-y$ sík felett helyezkedik el ($z \ge 0$). A felület irányítása "felfelé" mutasson (a normálvektor z-komponense legyen pozitív).

MO. a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) = (u\sin(v), u\cos(v), v^2)$. A parciális deriváltak és a normálvektor:

$$\partial_u \mathbf{r} = (\cos(v), \sin(v), 0) \qquad \partial_v \mathbf{r} = (-u\sin(v), u\cos(v), 1)$$

$$\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 1 \end{vmatrix} = (\sin(v), -\cos(v), u)$$

A skalárszorzat:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r})\cdot(\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}) = (u\sin(v), u\cos(v), v^2)\cdot(\sin(v), -\cos(v), u) = u\sin^2(v) - u\cos^2(v) + uv^2 = -u\cos(2v) + uv^2$$

Az integrál:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (-u\cos(2v) + uv^2)\, du\, dv = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{u^2}{2}\cos(2v) + \frac{u^2}{2} v^2 \right]_0^1 dv$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2}\cos(2v) + \frac{1}{2}v^2 \right) dv = \left[-\frac{1}{4}\sin(2v) + \frac{1}{6}v^3 \right]_0^{\pi/2} = \left(0 + \frac{1}{6}\frac{\pi^3}{8} \right) - (0+0) = \frac{\pi^3}{48}$$

b) $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{r} = (0,0,1) \times (x,y,z) = (-y, x, 0)$. A felület F: $x = 0$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. A normálvektor $\mathbf{n} = (1,0,0)$. A vektormező a felületen ($x = 0$): $\mathbf{v}(0,y,z) = (-y,0,0)$. A fluxus (a felületelem $d\mathbf{f} = \mathbf{n}\, dy\, dz = (1,0,0)\, dy\, dz$):

$$\int_F \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_0^1 \int_0^1 (-y,0,0)\cdot(1,0,0)\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^1 -y\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{y^2}{2} \right]_0^1 dz = \int_0^1 -\frac{1}{2}\, dz = \left[-\frac{1}{2} z \right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

HF) Felület: $z = 4 - x^2 - y^2$. Felfelé mutató normálvektor: $\mathbf{N} = (-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1) = (2x, 2y, 1)$. A vektormező a felületen: $\mathbf{v} = (x, y, 2(4 - x^2 - y^2)) = (x, y, 8 - 2x^2 - 2y^2)$. A skalárszorzat: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{N} =$

$(x, y, 8-2x^2-2y^2)\cdot(2x, 2y, 1) = 2x^2+2y^2+8-2x^2-2y^2 = 8$. Az integrálási tartomány az $x-y$ síkon a $z=0$ vetület, azaz $4-x^2-y^2 \geq 0 \implies x^2+y^2 \leq 4$. Ez egy $R=2$ sugarú körlap (T).

$$\int_F \mathbf{v} d\mathbf{f} = \iint_T (\mathbf{v}\cdot\mathbf{N})\, dx\, dy = \iint_{x^2+y^2\leq 4} 8\, dx\, dy = 8\cdot(\text{T területe}) = 8\cdot(\pi\cdot 2^2) = 32\pi$$

2. Felületekre vonatkozó SMART formula: $\int_F \mathbf{v} d\mathbf{f} = \int_F v_\perp |d\mathbf{f}|$.

a) Számítsa ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ vektormező integrálját az $F_1 : x^2+y^2 = R^2, 0\leq z\leq M$ hengerfelületre, az $F_2 : x^2+y^2 \leq R^2, z = M$ körlapra, és arra a zárt felületre, ami az $x^2+y^2\leq R^2, 0\leq z\leq M$, ahol $R>0$ és $M>0$.

b) Számítsa ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}\times\mathbf{r}$ vektormező integrálját a felfelé irányított $F_1 : x^2+y^2+z^2 = R^2, z\geq 0$ felületre!

HF) Számítsa ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^4$ vektormező integrálját a $V : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z\geq 0$ zárt térfogat kifelfelé irányított felszínére!

MO. a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = (x, y, z)$.

- F_1 **(palást):** Kifelé mutató normálvektor $\mathbf{n} = \frac{(x,y,0)}{R}$. $v_\perp = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = (x, y, z)\cdot\frac{(x,y,0)}{R} = \frac{x^2+y^2}{R} = \frac{R^2}{R} = R$. $\int_{F_1} \mathbf{v} d\mathbf{f} = \int_{F_1} v_\perp |d\mathbf{f}| = \int_{F_1} R\,|d\mathbf{f}| = R\cdot(\text{Palást területe}) = R\cdot(2\pi RM) = 2\pi R^2 M$.
- F_2 **(felső lap):** Kifelé (felfelé) mutató normálvektor $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. $z = M$ a felületen. $v_\perp = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = (x, y, z)\cdot(0, 0, 1) = z \overset{z=M}{=} M$. $\int_{F_2} \mathbf{v} d\mathbf{f} = \int_{F_2} M\,|d\mathbf{f}| = M\cdot(\text{Körlap területe}) = M\cdot(\pi R^2) = \pi R^2 M$.
- **Zárt felület (Henger):** A zárt felület $F = F_1\cup F_2\cup F_3$, ahol F_3 az alsó lap ($z=0, x^2+y^2\leq R^2$). F_3 normálvektora kifelé (lefelé): $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$. $z = 0$ a felületen. $v_\perp = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = (x, y, z)\cdot(0, 0, -1) = -z \overset{z=0}{=} 0$. Az F_3-ra vett integrál 0. Teljes fluxus: $\oint_F \mathbf{v} d\mathbf{f} = \int_{F_1} + \int_{F_2} + \int_{F_3} = 2\pi R^2 M + \pi R^2 M + 0 = 3\pi R^2 M$. (Megjegyzés: Gauss-Osztrogradszkij tétellel: $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\mathbf{r}) = 3$. $\iiint_V 3\, dV = 3\cdot V_{\text{henger}} = 3\cdot(\pi R^2 M)$.)

b) $\mathbf{v} = \mathbf{k}\times\mathbf{r} = (-y, x, 0)$. F_1 (felső félgömb). Felfelé/kifelé mutató normálvektor: $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R} = \frac{(x,y,z)}{R}$ (mivel $z\geq 0$, a z komponens pozitív). $v_\perp = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = (-y, x, 0)\cdot\frac{(x,y,z)}{R} = \frac{-yx+xy+0}{R} = 0$. $\int_{F_1} \mathbf{v} d\mathbf{f} = \int_{F_1} 0\,|d\mathbf{f}| = 0$.

HF) V (félgömb test) zárt felszíne $F = F_1\cup F_2$, ahol F_1 a gömbhéj ($r = R, z\geq 0$) és F_2 az alaplap ($z = 0, x^2+y^2\leq R^2$). $\mathbf{v} = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^4 = \mathbf{r}r^4$.

- F_1 **(gömbhéj):** Kifelé mutató normálvektor $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}$. A felületen $r = R$, így $\mathbf{v} = \mathbf{r}R^4$. $v_\perp = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = (\mathbf{r}R^4)\cdot(\frac{\mathbf{r}}{R}) = R^3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = R^3 r^2 \overset{r=R}{=} R^3R^2 = R^5$. $\int_{F_1} \mathbf{v} d\mathbf{f} = \int_{F_1} R^5\,|d\mathbf{f}| = R^5\cdot(\text{Félgömb felszíne}) = R^5\cdot(2\pi R^2) = 2\pi R^7$.
- F_2 **(alaplap):** Kifelé (lefelé) mutató normálvektor $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$. A felületen $z = 0$, így $\mathbf{v} = (x, y, 0)(x^2+y^2)^2$. $v_\perp = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = (x(x^2+y^2)^2, y(x^2+y^2)^2, 0)\cdot(0, 0, -1) = 0$. Az integrál 0.

Teljes fluxus: $2\pi R^7 + 0 = 2\pi R^7$. (Megjegyzés: Gauss-Osztr. tétellel: $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\mathbf{r}r^4) = 7r^4$. $\iiint_V 7r^4\, dV$. Gömbkoord.:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^R (7\rho^4)(\rho^2\sin\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\phi = (2\pi)\cdot[-\cos\theta]_0^{\pi/2}\cdot\left[7\frac{\rho^7}{7}\right]_0^R = 2\pi\cdot(1)\cdot(R^7) = 2\pi R^7$$

)

3. Számítsa ki az alábbi deriváltakat!
(div $u\mathbf{v}$ = (grad u) $\mathbf{v}$ + u div $\mathbf{v}$, rot $u\mathbf{v}$ = (grad u) × $\mathbf{v}$ + u rot $\mathbf{v}$)

$$\text{a) div}\,(\mathbf{r}|\mathbf{r}|^3), \qquad \text{b) rot}\,(\mathbf{r}|\mathbf{r}|^3), \qquad \text{c) rot}\,((\mathbf{k}\times\mathbf{r})|\mathbf{r}|^2)$$

(A b) pont a feladatban kétszer szerepelt, itt c)-ként javítva)

MO. Jelölések: $\mathbf{r} = (x,y,z)$, $r = |\mathbf{r}|$. Használt összefüggések: $\text{grad}(r^n) = nr^{n-1}\nabla r = nr^{n-1}\frac{\mathbf{r}}{r} = nr^{n-2}\mathbf{r}$. $\text{div}(\mathbf{r}) = 3$, $\text{rot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

a) $u = r^3$, $\mathbf{v} = \mathbf{r}$. $\text{grad}(u) = \text{grad}(r^3) = 3r^{3-2}\mathbf{r} = 3r\mathbf{r}$.

$$\text{div}(\mathbf{r}r^3) = (\text{grad}\,r^3)\cdot\mathbf{r} + r^3\,\text{div}\,\mathbf{r} = (3r\mathbf{r})\cdot\mathbf{r} + r^3\cdot 3 = 3r(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) + 3r^3 = 3r(r^2) + 3r^3 = 6r^3$$

b) $u = r^3$, $\mathbf{v} = \mathbf{r}$.

$$\text{rot}(\mathbf{r}r^3) = (\text{grad}\,r^3)\times\mathbf{r} + r^3\,\text{rot}\,\mathbf{r} = (3r\mathbf{r})\times\mathbf{r} + r^3\cdot\mathbf{0} = 3r(\mathbf{r}\times\mathbf{r}) + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

c) $u = r^2$, $\mathbf{v} = \mathbf{k}\times\mathbf{r}$. $\text{grad}(u) = \text{grad}(r^2) = 2r^{2-2}\mathbf{r} = 2\mathbf{r}$. $\mathbf{v} = (-y,x,0)$. $\text{rot}(\mathbf{v}) = \text{rot}(-y,x,0) = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ -y & x & 0\end{vmatrix} = (0,0,1-(-1)) = (0,0,2) = 2\mathbf{k}$.

$$\text{rot}((\mathbf{k}\times\mathbf{r})r^2) = (\text{grad}\,r^2)\times(\mathbf{k}\times\mathbf{r}) + r^2\,\text{rot}\,(\mathbf{k}\times\mathbf{r})$$

$$= (2\mathbf{r})\times(\mathbf{k}\times\mathbf{r}) + r^2(2\mathbf{k})$$

A $(A\times(B\times C) = (A\cdot C)B - (A\cdot B)C)$ azonosságot használva:

$$= 2[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\mathbf{k} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{k})\mathbf{r}] + 2r^2\mathbf{k} = 2[r^2\mathbf{k} - z\mathbf{r}] + 2r^2\mathbf{k}$$

$$= 2r^2\mathbf{k} - 2z\mathbf{r} + 2r^2\mathbf{k} = 4r^2\mathbf{k} - 2z\mathbf{r}$$

Komponensenként: $4(x^2+y^2+z^2)(0,0,1) - 2z(x,y,z) = (-2zx, -2zy, 4(x^2+y^2+z^2) - 2z^2) = (-2zx, -2zy, 4x^2+4y^2+2z^2)$.

4. Keressünk potenciálfüggvényt az alábbi vektormezőkhöz!

$$\text{a) } \mathbf{v}(x,y,z) = (2xy+z^3, 2y+x^2, 3xz^2), \quad \text{b) } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}^4|$$

MO. **a)** $\text{rot}(\mathbf{v}) = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ 2xy+z^3 & 2y+x^2 & 3xz^2\end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(3z^2-3z^2) + \mathbf{k}(2x-2x) = \mathbf{0}$. A mező potenciálos. $U(x,y,z) = \int v_x\,dx = \int(2xy+z^3)\,dx = x^2y + xz^3 + C(y,z)$. $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial C}{\partial y} \overset{!}{=} v_y = 2y+x^2 \implies \frac{\partial C}{\partial y} = 2y \implies C(y,z) = y^2 + D(z)$. $U(x,y,z) = x^2y+xz^3+y^2+D(z)$. $\frac{\partial U}{\partial z} = 3xz^2 + D'(z) \overset{!}{=} v_z = 3xz^2 \implies D'(z) = 0 \implies D(z) = K$. A potenciálfüggvény: $U(x,y,z) = x^2y + xz^3 + y^2 + K$.

b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}^4| = \mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^2 = \mathbf{r}r^4$. (Mivel $r^4 = (x^2+y^2+z^2)^2 \geq 0$). Ez egy centrális erőtér, $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$, ahol $f(r) = r^4$. Minden centrális erőtér potenciálos. A potenciál $U(r)$, amelyre $\text{grad}(U) = \frac{dU}{dr}\nabla r = \frac{dU}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}$. Azonosítva: $\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}\mathbf{r} = r^4\mathbf{r} \implies \frac{dU}{dr} = r^5$. $U(r) = \int r^5\,dr = \frac{r^6}{6} + K$. A potenciálfüggvény: $U(x,y,z) = \frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)^3 + K$.

iMSc. $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$
Igazolja indexes deriválással, hogy a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$ b) $\nabla \times (u\mathbf{v}) = (\nabla u) \times \mathbf{v} + u(\nabla \times \mathbf{v})$ c) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$, d) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F})$

MO. **a)** $[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\nabla \times \mathbf{v})_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{klm}\partial_l v_m) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_l v_m$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l v_m = \delta_{il}\delta_{jm}\partial_j\partial_l v_m - \delta_{im}\delta_{jl}\partial_j\partial_l v_m$$

$$= \partial_j\partial_i v_j - \partial_j\partial_j v_i = \partial_i(\partial_j v_j) - (\partial_j\partial_j)v_i = [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})]_i - [\nabla^2\mathbf{v}]_i$$

b) $[\nabla \times (u\mathbf{v})]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(uv_k) = \varepsilon_{ijk}[(\partial_j u)v_k + u(\partial_j v_k)]$

$$= \varepsilon_{ijk}(\partial_j u)v_k + u(\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k) = [(\nabla u) \times \mathbf{v}]_i + u[\nabla \times \mathbf{v}]_i$$

c) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \partial_i(\mathbf{F} \times \mathbf{G})_i = \partial_i(\varepsilon_{ijk}F_jG_k) = \varepsilon_{ijk}[(\partial_i F_j)G_k + F_j(\partial_i G_k)]$

$$= \varepsilon_{ijk}(\partial_i F_j)G_k + \varepsilon_{ijk}F_j(\partial_i G_k) = \varepsilon_{kij}(\partial_i F_j)G_k - \varepsilon_{jik}F_j(\partial_i G_k)$$

$$= G_k(\varepsilon_{kij}\partial_i F_j) - F_j(\varepsilon_{jik}\partial_i G_k) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$$

d) $[\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})]_i = \partial_i(F_jG_j) = (\partial_i F_j)G_j + F_j(\partial_i G_j)$. A jobb oldal (RHS) i-edik komponense:

$$[(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}]_i = (F_j\partial_j)G_i = F_j\partial_j G_i$$

$$[(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}]_i = (G_j\partial_j)F_i = G_j\partial_j F_i$$

$$[\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G})]_i = \varepsilon_{ijk}F_j(\varepsilon_{klm}\partial_l G_m) = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})F_j\partial_l G_m = F_j\partial_i G_j - F_j\partial_j G_i$$

$$[\mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F})]_i = \varepsilon_{ijk}G_j(\varepsilon_{klm}\partial_l F_m) = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})G_j\partial_l F_m = G_j\partial_i F_j - G_j\partial_j F_i$$

RHS összege: $(F_j\partial_j G_i) + (G_j\partial_j F_i) + (F_j\partial_i G_j - F_j\partial_j G_i) + (G_j\partial_i F_j - G_j\partial_j F_i)$ A tagok átrendezve és kiejtve: $(F_j\partial_j G_i - F_j\partial_j G_i) + (G_j\partial_j F_i - G_j\partial_j F_i) + F_j\partial_i G_j + G_j\partial_i F_j$

$$= F_j(\partial_i G_j) + (\partial_i F_j)G_j = \partial_i(F_jG_j)$$

Ez megegyezik a bal oldal i-edik komponensével.