2025 Vill. Mat A3 – 3. gyakorlat

(Vonalmenti és ívhossz szerinti integrál)

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

$$\int_G v dr = \int_{t=t_1}^{t_2} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$$

a) $\int_G v dr = ?$, ahol $v = (x^2 + y^2, y, z)$, G a $(1, 0, 0)$ ponttól az $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ pontig az $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ görbe íve.

b) $\int_G v dr = ?$, ahol $v = (xy, yz, zx)$, G a $(0, 0, 0)$ ponttól az $(1, 1, 1)$ pontig az $r(t) = (t, t^2, t^3)$ görbe íve.

c) $\int_G v dr = ?$, ahol $v = (x^3, y^2, z)$, G a $(0, 0, 1)$ ponttól az $(1, 1, -1)$ pontig az $\{(x, y, z) \mid x = y, z = 1 - x^2 - y^2\}$ görbe íve.

HF) Legyen adott a $v = (2xy + z, x^2, x)$ vektormező. d1) Számítsa ki a $\int_G v\, dr$ vonalintegrált, ahol G a $(0, 0, 0)$ pontot az $(1, 1, 1)$ ponttal összekötő egyenes szakasz! d2) Számítsa ki a $\int_H v\, dr$ vonalintegrált, ahol H az $r(t) = (t^3, t, t^5)$ görbe íve a $(0, 0, 0)$ és $(1, 1, 1)$ pontok között!

2. Számítsuk ki az alábbi görbeív hosszát és térjünk át ívhosszparaméterezésre is!

$$s = \int_G |dr| = \int_{t=t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt, \quad s = s(t) = \int_{t'=t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2(t') + \dot{y}^2(t') + \dot{z}^2(t')}\, dt'$$

$\rightsquigarrow t = t(s) \rightsquigarrow r(t(s))$. Deriváljuk le az ívhosszparaméterezést s szerint!

a) $r(t) = (5 \sin t, 5 \cos t, 12t)$, $t \in [0, 2\pi]$

b) $r(t) = (3e^t \sin t, 3e^t \cos t, 4e^t)$, $t \in [0, \pi]$

3. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét! Figyeljünk a görbe irányítására! $(k = (0, 0, 1))$

$$\int_G v dr = \int_G v_t |dr|, \quad \int_G v \times dr = \int_{t_1}^{t_2} v(r(t)) \times \dot{r}(t) dt$$

a) $v(r) = k \times r$; $K:\ r(t) = (R \cos t, R \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, $R > 0$, $\int_K v dr = ?$

b) $v(r) = \dfrac{k \times r}{|k \times r|^3}$; $G:\ r(t) = (R \sin t, R \cos t, t)$, $t \in [0, \pi]$, $R > 0$, $\int_G v dr = ?$

c) $v(r) = \dfrac{r}{|r|^3}$; $G:\ r(t) = (R \sin t, R \cos t, 0)$, $t \in [0, \pi]$, $R > 0$, $\int_G v \times dr = ?$

HF) $v(r) = |k \times r|^2 \cdot k \times r$; $G:\ r(t) = (R \sin t, R \cos t, t)$, $t \in [0, \pi]$, $R > 0$, $\int_G v dr = ?$

HF) $v(r) = r|r|^2$; $G:\ r(t) = (R \sin t, R \cos t, 0)$, $t \in [0, \pi]$, $R > 0$, $\int_G v \times dr = ?$