2025. vill. mat A3 – 7-8. hét

(Felületi integrál, differenciáloperátorok, potenciálkeresés)

1. $\int_F \mathbf{v} d\mathbf{f} = \iint\limits_{(u,v)\in T} \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \partial_u \mathbf{r}(u,v) \times \partial_v \mathbf{r}(u,v) du dv$

a) Számítsa ki a $\mathbf{v}(x,y,z) = (y,x,z^2)$ vektormező fluxusát azon a helikoid (csavarfelület) darabon, amelynek paraméteres megadása $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$, ahol a paraméterek tartománya: $0 \le u \le 1$ és $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$. A felületi normálvektor irányítását a paraméterezés által meghatározott természetes irányítás adja meg.

b) Számítsa ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ vektormező fluxusát, ahol $\mathbf{k} = (0,0,1)$ és $\mathbf{r} = (x,y,z)$ a helyvektor, azon az egységnégyzeten, amely az $y-z$ síkon fekszik, és amelyet a következő egyenlőtlenségek határoznak meg: $x = 0, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1$. A felület normálvektora mutasson a pozitív x-tengely irányába.

HF) Határozza meg a $\mathbf{v}(x,y,z) = (x,y,2z)$ vektormező fluxusát arra a paraboloid felületdarabra, amelyet a $z = 4 - x^2 - y^2$ egyenlet határoz meg, és amely az $x-y$ sík felett helyezkedik el ($z \ge 0$). A felület irányítása "felfelé" mutasson (a normálvektor z-komponense legyen pozitív).

2. Felületekre vonatkozó SMART formula: $\int_F \mathbf{v} d\mathbf{f} = \int_F v_\perp |d\mathbf{f}|$.

a) Számítsa ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ vektormező integrálját az $F_1 : x^2 + y^2 = R^2, 0 \le z \le M$ hengerfelóletre, az $F_2 : x^2 + y^2 \le R^2, z = M$ körlapra, és arra a zárt felületre, ami az $x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le M$, ahol $R > 0$ és $M > 0$.

b) Számítsa ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ vektormező integrálját a felfelé irányított $F_1 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \ge 0$ felületre!

HF) Számítsa ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^4$ vektormező integrálját a $V : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \ge 0$ zárt térfogat kifelfelé irányított felszínére!

3. Számítsa ki az alábbi deriváltakat!
($\operatorname{div} u\mathbf{v} = (\operatorname{grad} u)\,\mathbf{v} + u \operatorname{div} \mathbf{v}$, $\operatorname{rot} u\mathbf{v} = (\operatorname{grad} u) \times \mathbf{v} + u \operatorname{rot} \mathbf{v}$)

a) $\operatorname{div} r|r|^3$, b) $\operatorname{rot} r|r|^3$, b) $\operatorname{rot} (k \times r)|r|^2$

4. Keressünk potenciálfüggvényt az alábbi vektormezőkhöz!

a) $v(x,y,z) = (2xy + z^3, 2y + x^2, 3xz^2)$, b) $v(r) = r|r^4|$

iMSc. $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$
Igazolja indexes deriválással, hogy a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$ b) $\nabla \times (u\mathbf{v}) = (\nabla u) \times \mathbf{v} + u(\nabla \times \mathbf{v})$ c) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$, d) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F})$