

## Halmazalgebra

1. Igazoljuk, hogy bármely  $A, B, C$  halmazra  $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .  
( $\cap, \cup, \subseteq, =$  definíciója, esetszétválasztás.)

**gy.**  $A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**hf.** a)  $A \cup (B \cap A) = A$     b)  $A \cap (B \cup A) = A$

2. Igazoljuk, hogy bármely  $A, B$  halmazra  $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ . (Feltételes állítások.)

**gy.**  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow A \subseteq C$ .

**hf.**  $A \subseteq C \Rightarrow A \cap (B \cup C) = A$ .

3. Igazoljuk az ismert azonosságok felhasználásával, hogy tetszőleges  $A, B, C$  halmazra  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ . ( $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ , disztributív szabályok, de Morgan szabályok.)

**gy.**  $K \setminus (K \setminus L) = L \setminus (L \setminus K)$ .

**hf.**  $(K \setminus L) \setminus M = (K \setminus M) \setminus (L \setminus M)$ .

4. (Ellenpélda keresés.) Legyen  $A, B, C$  tetszőleges halmazok és

$$K = (A \setminus (B \setminus C)) \setminus C$$

$$L = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Vizsgáljuk meg, hogy melyik tartalmazás áll fenn a)  $K \subseteq L$ , b)  $L \subseteq K$ , c)  $L = K$ ;

d) egyik se.

**gy.** Ha lehet, adjunk meg olyan  $A, B, C$  halmazt, amire igaz  $(A \setminus C) \cup B = C$  és olyat is, amire nem igaz.

**hf.** Mi  $X$ , ha  $A \setminus X = X \setminus A$ ?

—

5\*. Igazoljuk, hogy tetszőleges  $A, B$  halmazra  $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ . (Alaphalmazra vonatkozó komplementer, De Morgan, indirekt bizonyítás.)

**gy.**  $\overline{A} \cap \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B} \quad (\overline{A}, \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B})$ .

**hf.**  $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ .

6\*. Igazoljuk, hogy tetszőleges  $A$  halmazra  $\emptyset \subseteq A$ . (Üres halmaz, univerzum.)

**gy.**

1. Legyen  $A, B \subseteq U \neq \emptyset$  ( $\overline{A}$  az  $U$ -ra vonatkozik). Igazoljuk, hogy ha  $A \cap \overline{B} = U$ , akkor  $A \not\subseteq B$ .

2. Mikor oldható meg az  $(A \setminus X) \cup B = X$  halmazegyenlet és ha megoldható, mi a megoldása?

**hf.**  $A \cap \overline{B} = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$ .

$X \subseteq Y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$  minden  $x$ -re, ha  $x \in X$ , akkor  $x \in Y$  is teljesül.

$X = Y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$  minden  $x$ -re, ha  $x \in X$ , akkor  $x \in Y$  is teljesül és ha  $x \in Y$ , akkor  $x \in X$  is teljesül.

$X \cap Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$  (mindkettőnek eleme),

$X \cup Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$  (legalább az egyiknek eleme).

Hogyan következtetünk, ha unióval és metszettel van dolgunk?

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{x \in A}{x \in A \cup B} \text{ (bal)} & & \frac{x \in B}{x \in A \cup B} \text{ (jobb)} \\
 \\ 
 & \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \text{1. eset} \\ [x \in A] \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} \text{2. eset} \\ [x \in B] \\ \vdots \end{array} \\
 \frac{x \in A \cup B}{x \in C} & \frac{x \in C}{x \in C} & \frac{x \in C}{x \in C} \text{ (esetszétválasztás)}
 \end{array} \\
 \\ 
 \frac{x \in A \quad x \in B}{x \in A \cap B} & & \frac{x \in A_1 \cap A_2}{x \in A_i} \quad i = 1; 2
 \end{array}$$

1. MO. Tfh.  $x \in A \cup (B \cap C)$ . A külső művelet az  $\cup$ , azaz "vagy". "Vagy"-ból esetszétválasztással következtetünk tovább (az egyik eset  $x \in A$ , a másik  $x \in B \cap C$ ). 1. eset:  $x \in A$ . Ekkor  $x \in A \cup B$ , az unió definíciója (vagy) miatt. Hasonlóképpen  $x \in A \cup C$ , és ebből a kettőből a  $\cap$  definíciója (és) miatt  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

2. eset:  $x \in B \cap C$ , ahonnan az metszet definíciója, illetve az és miatt:  $x \in B$  és  $x \in C$ . Most a "vagy" miatt ezekből rendre:  $x \in A \cup B$ ,  $x \in A \cup C$ , így a  $\cap$  definíciója miatt  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

2. MO.  $\Rightarrow$ . Amit tudunk:  $A \cup B = B$ , amit be kell bizonyítanunk:  $A \subseteq B$ . Ez utóbbit definíció szerint: legyen  $x \in A \subseteq A \cup B = B$ .

$\Leftarrow$  Amit tudunk:  $A \subseteq B$ , amit be kell bizonyítanunk:  $A \cup B = B$ . Ez egy egyenlőség, azaz sajnos mindkét irányt kezelni kell. Balról jobbra: ha  $x \in A \cup B$ , akkor vagy  $x \in A$  és akkor  $A \subseteq B$  miatt  $x \in B$  vagy  $x \in B$  és akkor kész. Jobbról balra: ha  $x \in B$ , akkor világos, hogy  $x \in A \cup B$ .

**gy.**  $(A \cup (B \cap C)) = (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow A \subseteq C$ .  $\Rightarrow$  Amit felhasználunk:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ , amit igazolni kell:  $A \subseteq C$ . Legyen  $x \in A$ . Ekkor az unió definíciója miatt  $x \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ , figyelve a jobb oldalt, ez azt is jelenti, hogy  $x \in C$ .

$\Leftarrow$  Amit tudunk:  $A \subseteq C$ , amit be kell bizonyítanunk:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ . Balról: tfh.:  $x \in A \cup (B \cap C)$ . Esetszétválasztással: ha  $x \in A$ , akkor  $x \in A \cup B$ , de  $A \subseteq C$ , így  $x \in C$ , azaz  $x \in (A \cup B) \cap C$ . Fordítva:  $x \in (A \cup B) \cap C$ , akkor  $x \in C$  és  $x \in A \cup B$ . Ez utóbbiból esetszétválasztással: ha  $x \in A$ , akkor készen vagyunk mert akkor  $x \in A \cup (B \cap C)$ . Ha  $x \in B$ , akkor  $x \in C$ -vel együtt  $x \in B \cap C$ , így  $x \in A \cup (B \cap C)$ .

3. 4. könnyű.

5. Tudjuk:  $x \in \overline{A \cap B}$ , kell:  $x \in \overline{A \cup B}$ . Mivel a cél "negatív", ezért *indirekten*. Tegyük fel, hogy  $x \in A \cup B$ . Ebből esetszétválasztással. Ha  $x \in A$ , akkor persze ez ellentmond  $x \in \overline{A \cap B}$ -nek, mert ebből  $x \in \overline{A}$ .  $x \in B$  esetén ugyanez pepitában. Mindkét esetben ellentmondásra jutunk.