

# Matematika módszerei 2. zh

## 1. Kombinatorikai bizonyítás kettős leszámolással (double counting)

Bizonyítsa be, hogy

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

ahol  $n$  természetes szám és  $0 \leq k < n$  természetes szám.

## 2. Hipergeometrikus eloszlás és francia kártyák

Egy 52 lapos francia kártyapakliból véletlenszerűen kihúznak 5 lapot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legalább 2 pikk lesz a kezünkben?

## 3. Binomiális eloszlás az életből

Omnius, az világot leigázó AI örökelme a Dűne univerzumban gonosz emberek segítségével készít egy olyan retrovírust, ami 40%-ban halálos az emberekre. Mi annak a valószínűsége, hogy 10 fertőzött esetben 4 halál történik? Fűszer fogyasztása a halálozási arányt 1%-ra tudja csökkenteni. Mennyi lesz az előző halálozási arány valószínűsége 10 fertőzött fűszerfogyasztó esetén?

## 4. Halmazalgebrai bizonyítás

Bizonyítsa be, hogy minden  $A, B, C$  halmazra

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

## 5. Végtelen halmazcsalád - metszet és unió:

Legyenek  $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$  halmazok egy tetszőleges végtelen családja. Melyik igaz, hogy:

$$\text{a) } \bigcap_{i \in \mathbf{N}} \bigcup_{j \geq i} A_j = \emptyset \quad \text{b) } \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \bigcap_{j \geq i} A_j = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} A_i.$$

## 6. Halmazalgebrai feladat nyílt halmazokra:

Legyenek  $\{A_i\}_{i \in I}$  nyílt halmazok egy tetszőleges végtelen családja. Melyik igaz, hogy:

$$\text{a) } \bigcap_{i \in I} A_i \text{ nyílt} \quad \text{b) } \bigcup_{i \in I} A_i \text{ nyílt.}$$

## 7. Teljes indukció

Igazolja, hogy egy idő után  $3^n > n^2$ .

## 8. Analízis és kiválasztási axióma

Legyen  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  és  $u \in \mathbf{R}$ . Igazoljuk, hogy az alábbi két állítás ekvivalens egymással:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in B_\delta(u) |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

$$\forall (x_n), (x'_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^+} x_n, x'_n \rightarrow u \rightarrow f(x_n) - f(x'_n) \rightarrow 0$$

(Hol használjuk a kiválasztási axiómát?)