Minta 1. zh, vill. 2024. A

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat idő tartama 90 perc.)

1. *(3+3+4)* Legyenek A, B, C halmazok. Igaz-e, hogy

a) ha $A \subseteq B \cap C$, akkor $A \cap B = A$

b) ha $A \subseteq B \cap C$, akkor $A \cap \overline{C} = \emptyset$

c) ha $A \cap B = A$, akkor $A \subseteq B \cap C$

(ahol $\overline{A} = U \setminus A$, az A komplementere valmely előre rögzített $U \supseteq A, B, C$ univerzális halmaz esetén). Ha igaz, bizonyítsa, ha hamis, cáfolja.

MO. a) Igaz. $A \subseteq B \cap C$-ből következik, hogy $A \subseteq B$, hiszen, $x \in A \subseteq B \cap C \subseteq B$. De ez utóbbi pont azt jelenti, hogy $A \cap B = A$. Ez utóbbi egyelőség ugyanis azért igaz, mert, ha $x \in A \cap B$ (bal oldal), akkor a metszet definíciója miatt $x \in B$ és $x \in A$ (jobb oldal). Ha pedig $x \in A$ (jobb oldal), akkor felhasználva $A \subseteq B \cap C$-t, tehát $x \in B$, így $x \in B$ és $x \in A$ (bal oldal).
b) Igaz. $A \cap \overline{C} = \emptyset$ szintén ugyanazt jelenti, mint $A \subseteq C$. Ha ugyanis, $A \subseteq C$, akkor akármi is $x \in A \cap \overline{C}$, akkor $x \in A$ és $x \in \overline{C}$, azaz $x \notin C$, de $x \in A \subseteq C$, amiből $x \in C$, ami színtiszta ellentmondás.
c) Hamis. Ellenpélda: $A = B = \{1\}$, $C = \emptyset$, ekkor bár $A \cap B = A$, igaz, mert $\{1\} \cap \{1\} = \{1\}$, de $\{1\} \subseteq \{1\} \cap \emptyset = \emptyset$ nem igaz.

2. Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ két egymásra merőleges egységvektor és $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ két térvektor!

a) Adja meg a λ valós szám összes olyan értékét, amire $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} + (1 - 2\lambda)\mathbf{b})$.

b) $(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) \parallel (\mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v})$

MO. a) $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})(\mathbf{a} + (1 - 2\lambda)\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}(1 - 2\lambda)\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}\mathbf{b} + \lambda(1 - 2\lambda)\mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2 + \lambda(1 - 2\lambda)\mathbf{b}^2 = 0$ $\rightsquigarrow 1 + \lambda(1 - 2\lambda) = 0 \rightsquigarrow -2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = -1/2, \lambda_2 = 1$.
b) A két vektor párhuzamosságával ekvivalens, hogy vektoriális szorzatuk nulla:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v})\times(\mathbf{u}+(1-\lambda)\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times\mathbf{u}+(1-\lambda)\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\lambda\mathbf{v}\times\mathbf{u}+(1-\lambda)\mathbf{v}\times\mathbf{v} = (1-\lambda)\mathbf{u}\times\mathbf{v}-\lambda\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (1-2\lambda)\mathbf{u}\times\mathbf{v}$$

Az első átalkításnál minden tagot minden taggal beszoroztunk figyelve arra, hogy a vektoriális szorzás tényezőinek sorrendje ne változzon, majd felhasználtuk, hogy $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, végül az antikommutatív tulajdonság miatt ($\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$) össze tudtuk vonni a tagokat. Innen,
$$\lambda = \begin{cases} 1/2, & \text{ha } \mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ \text{tetszőleges}, & \text{ha } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases}$$

3. Adjuk meg annak az f egyenesnek az egyenletét, amelyik merőlegesen metszi az $S_1 : x+y+z = 1$ és $S_2 : x - y + z = 1$ egyenletű síkok metszésvonalát és áthalad az $P(0, 1, 1)$ ponton!

MO. A metszésvonalhoz, kivonva a két egyenletet egymásból, kapjuk, hogy $2y = 0$, azaz a metszésvonal egyenlete: $x = t, y = 0, z = 1 - t$, így annak a síknak a normálvektora, amiben f van: $(1, 0, -1)$, egyenlete pedig: $S_3 : x - z + 1 = 0$. Ez utóbbinak metszete a metszésvonallal: $(0, 0, 1)$, ami valójában a három sík metszéspontja is. Innen f egyenlete: $f || (0, 1, 0)$ és $(0, 1, 1) \in f$, azaz $f : x = 0, y = 1 + t, z = 0$.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

$$\text{a) } z^2 + \overline{z} = |z|^2 \qquad \text{b) } z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$$

MO. a) Algebrai alakban: $z = x + iy$, ahol $x, y \in \mathbf{R}$: $x^2 - y^2 + 2ixy + x - iy = x^2 + y^2 \rightsquigarrow -2y^2 + x + i(2xy - y) = 0$, így a két valós egyenlet: $-2y^2 + x = 0$, $2xy - y = 0$. Tehát $4y^3 - y = 0$, $y_1 = 0$, így $x_1 = 0$, valamint $2y = \pm 1$, így $x = \frac{1}{2}$. A három megoldás: $z_1 = 0$, $z_{23} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$.
b) A 4. gyök képletével, amikor $w = -8 + 8\sqrt{3}i$, $k = 0; 1; 2; 3$ értékeire:

$$\left(\sqrt[4]{w}\right)_k = \sqrt[4]{|w|}\left(\cos\frac{\arg w + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\arg w + 2\pi k}{4}\right)$$

de $|w| = |-8 + 8\sqrt{3}i| = \sqrt{64 + 64 \cdot 3} = 8 \cdot 2 = 16$ és $\arg w = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$$z_k = \left(\sqrt[4]{w}\right)_k = \sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i; -1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i.$$

5. Számítsuk ki a határértékeket!

$$a) \quad \lim_{n\to\infty}\frac{5^n - 13^n}{5^{2n} + 2^n + 5}, \qquad b) \quad \lim_{x\to 1+}\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1} \qquad c) \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1}$$

MO.

$$\frac{5^n - 13^n}{5^{2n} + 2^n + 5} = \frac{\frac{5^n}{5^{2n}} - \frac{13^n}{5^{2n}}}{1 + \frac{2^n}{5^2n} + \frac{5}{5^{2n}}} \to \frac{0 - 0}{1 + 0} = 0$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-1} \sim_{1+} \frac{-2}{0+} = -\infty$$

6.1. Melyik igaz? a) $\sup H + \sup K = \sup(H \cup K)$ b) $\max\{\sup H, \sup K\} = \sup(H \cup K)$.

6.2. Igaz-e, hogy ha z megoldása, a $iz^2 = z$ egyeletnek, akkor $\overline{z}$ is.

6.3. Igaz-e, hogy ha $\mathbf{ab} = 0$, akkor $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ legalább az egyike nullvektor?

MO. 6.1. a) Hamis. Legyen $H = K = \{1\}$. Ekkor $\sup H + \sup K = 2 \neq 1 = \sup(H \cup K)$. b) Igaz. $x \in H \cup K \to x \leq \max\{\sup H, \sup K\}$. Wlog $\sup H = \max\{\sup H, \sup K\}$ valamely $\varepsilon > 0$-ra $\sup H - \varepsilon$ olyan, hogy van $y \in [\sup H - \varepsilon, \sup H)$, amire $y \in H \subseteq H \cup K$, azaz $\sup H$ a $H \cup K$-nak is szuprémuma.
6.2. Nem, mert ennek $0, -i$ a megoldásai és ezek nem konjugált párok.
6.3. Nem. $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{b} = \mathbf{j}$, akkor $\mathbf{ij} = 0$, de $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$.

iMSc. Legyen $H, K \subseteq \mathbf{R}$. Igaz-e, hogy ha x izolált pontja $H \cap K$-nak, akkor H-nak is és K-nak is. És fordítva?

MO. Hamis. Legyen $H = [-1, 0], K = [0, 1]$. Ekkor $H \cap K = \{0\}$. Ennek 0 izolált pontja, de egyiknek sem az. Fordítva igaz. $B_\varepsilon(x) \cap H \cap K = \{x\}$, ha $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ olyanok, hogy $B_{\varepsilon_1}(x) \cap H = \{x\}$, $B_{\varepsilon_2}(x) \cap K = \{x\}$, mert $B_\varepsilon(x) \cap H \cap K = B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(x) \cap H \cap K = \{x\} \cap \{x\} = \{x\}$.