2024 Vill. Mat A1 – 13. gyakorlat

Ilyen-és-ilyen alakú integrálok (helyettesítéses integrál), parciális integrálás

1. Ilyen-és-ilyen alakú integrálok (helyettesítéses integrál)

$$\boxed{\int g^n(x)g'(x)dx = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + C} \qquad (n \neq -1)$$

(a) $\int \sin^7(x) \cdot \cos x \, dx$, (b) $\int \frac{1}{x \ln^3 x} \, dx$, (c) $\int \sqrt[3]{e^x + x} \cdot (e^x + 1) \, dx$,

(d) $\int (x^2 + 2x + 3)^5 \cdot (x+1) \, dx$, (e) $\int \frac{x+2}{(x^4 + 8x - 1)^2} \, dx$, (f) $\int \frac{e^{4x} + 1}{\sqrt[4]{e^{4x} + 4x}} \, dx$.

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln g(x) + C}$$

(g) $\int \tan x \, dx$, (h) $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$, (i) $\int \frac{1}{(x^2+1)\arctan x} \, dx$.

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C} \qquad (F' = f)$$

(k) $\int \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} \, dx$, (l) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$, (m) $\int \ln(2e^x + e^{2x})(e^x + e^{2x}) \, dx$,

(o) $\int e^{x + \ln x} \cdot \frac{1+x}{x} \, dx$, (p) $\int \frac{e^{x+1}}{e^{2x+2} + 1} \, dx$, (q) $\int \sinh(\sin 2x + \cos 2x)(\cos 2x - \sin 2x) \, dx$.

2. Parciális integrálás

$$\boxed{\int Fg = FG + \int fG} \qquad (F' = f, G' = g)$$

(a) $\int (x+1) \sin x \, dx$, (b) $\int x^2 \cos 2x \, dx$, (c) $\int (2x+1)e^{x+3} \, dx$

(d) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$, (e) $\int \frac{\arctan x}{x^2 + 1} \, dx$, (f) $\int \ln x \, dx$

(g) $\int e^x \cos x \, dx$, (h) $\int e^{2x-1} \sin(3x+4) \, dx$, (i) $\int x^2 \arctan x \, dx$

3. Integrálás a helyettesítés elvégzésével

$$\int f(g(x))g'(x) \, \mathrm{d}x = \int f(u) \, \mathrm{d}u \Big|_{u=g(x)} = F(u)|_{u=g(x)} + C$$

(a) $[u = e^x]$ $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx$, (b) $[u = \sqrt{x}]$ $\int \frac{2x}{1 + \sqrt{x}} \, dx$, (c) $[x = \cos t]$ $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$.