Minta 1. zh, vill. 2024. A

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat idő tartama 90 perc.)

1. *(3+3+4)* Legyenek A, B, C halmazok. Igaz-e, hogy

a) ha $A \subseteq B \cap C$, akkor $A \cap B = A$

b) ha $A \subseteq B \cap C$, akkor $A \cap \overline{C} = \emptyset$

c) ha $A \cap B = A$, akkor $A \subseteq B \cap C$

(ahol $\overline{A} = U \setminus A$, az A komplementere valmely előre rögzített $U \supseteq A, B, C$ univerzális halmaz esetén). Ha igaz, bizonyítsa, ha hamis, cáfolja.

MO. a) Igaz. $A \subseteq B \cap C$-ből következik, hogy $A \subseteq B$, hiszen, $x \in A \subseteq B \cap C \subseteq B$. De ez utóbbi pont azt jelenti, hogy $A \cap B = A$. Ez utóbbi egyelőség ugyanis azért igaz, mert, ha $x \in A \cap B$ (bal oldal), akkor a metszet definíciója miatt $x \in B$ és $x \in A$ (jobb oldal). Ha pedig $x \in A$ (jobb oldal), akkor felhasználva $A \subseteq B \cap C$-t, tehát $x \in B$, így $x \in B$ és $x \in A$ (bal oldal).
b) Igaz. $A \cap \overline{C} = \emptyset$ szintén ugyanazt jelenti, mint $A \subseteq C$. Ha ugyanis, $A \subseteq C$, akkor akármi is $x \in A \cap \overline{C}$, akkor $x \in A$ és $x \in \overline{C}$, azaz $x \notin C$, de $x \in A \subseteq C$, amiből $x \in C$, ami színtiszta ellentmondás.
c) Hamis. Ellenpélda: $A = B = \{1\}$, $C = \emptyset$, ekkor bár $A \cap B = A$, igaz, mert $\{1\} \cap \{1\} = \{1\}$, de $\{1\} \subseteq \{1\} \cap \emptyset = \emptyset$ nem igaz.

2. Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ két egymásra merőleges egységvektor és $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ két térvektor!

a) Adja meg a λ valós szám összes olyan értékét, amire $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} + (1 - 2\lambda)\mathbf{b})$

b) Adja meg a λ valós szám összes olyan értékét, amire $(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) \parallel (\mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v})$

MO. a) $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})(\mathbf{a} + (1 - 2\lambda)\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}(1 - 2\lambda)\mathbf{b} + \lambda\mathbf{ab} + \lambda(1 - 2\lambda)\mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2 + \lambda(1 - 2\lambda)\mathbf{b}^2 = 0$ $\rightsquigarrow 1 + \lambda(1 - 2\lambda) = 0 \rightsquigarrow -2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = -1/2, \lambda_2 = 1$.
b) A két vektor párhuzamosságával ekvivalens, hogy vektoriális szorzatuk nulla:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v})\times(\mathbf{u}+(1-\lambda)\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times\mathbf{u}+(1-\lambda)\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\lambda\mathbf{v}\times\mathbf{u}+(1-\lambda)\mathbf{v}\times\mathbf{v} = (1-\lambda)\mathbf{u}\times\mathbf{v}-\lambda\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (1-2\lambda)\mathbf{u}\times\mathbf{v}$$

Az első átalkításnál minden tagot minden taggal beszoroztunk figyelve arra, hogy a vektoriális szorzás tényezőinek sorrendje ne változzon, majd felhasználtuk, hogy $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, végül az antikommutatív tulajdonság miatt $(\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ össze tudtuk vonni a tagokat. Innen,

$$\lambda = \begin{cases} 1/2, & \text{ha } \mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ \text{tetszőleges}, & \text{ha } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases}$$

3. Adjuk meg annak az f egyenesnek az egyenletét, amelyik merőlegesen metszi az $S_1 : x+y+z = 1$ és $S_2 : x - y + z = 1$ egyenletű síkok metszésvonalát és áthalad az $P(0, 1, 1)$ ponton!

MO. A metszésvonalhoz, kivonva a két egyenletet egymásból, kapjuk, hogy $2y = 0$, azaz a metszésvonal egyenlete: $m : x = t, y = 0, z = 1-t$, így annak a síknak a normálvektora, amiben f van: $\mathbf{n}_{S_3} = \mathbf{v}_m = (1, 0, -1)$, egyenlete pedig: $S_3 : x - z + 1 = 0$. Ez utóbbinak metszete a metszésvonallal úgy határozható meg, hogy megoldjuk az $x-z+1 = 0, x = t, y = 0, z = 1-t$ egyenletrendszert. Innen: $t - (1 - t) + 1 = 0$, azaz $t = 0$ és $M : x = 0, y = 0, z = 1$, ami valójában a három sík metszéspontja is. f mind az M, mind a P ponton átlahalad, így párhuzamos az $\overrightarrow{MP} = (0, 1, 1) - (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$ vektorral. Ínnen f egyenlete: $x = 0, y = 1 + t, z = 1$.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

$$\text{a) } z^2+\overline{z}=|z|^2 \qquad \text{b) } z^4=-8+8\sqrt{3}i$$

MO. a) Algebrai alakban: $z=x+iy$, ahol $x,y\in\mathbf{R}$: $x^2-y^2+2ixy+x-iy=x^2+y^2 \rightsquigarrow -2y^2+x+i(2xy-y)=0$, így a két valós egyenlet: $-2y^2+x=0$, $2xy-y=0$. Tehát $4y^3-y=0$, $y_1=0$, így $x_1=0$, valamint $2y=\pm 1$, így $x=\frac{1}{2}$. A három megoldás: $z_1=0$, $z_{23}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$.
b) A 4. gyök képletével, amikor $w=-8+8\sqrt{3}i$, $k=0;1;2;3$ értékeire:

$$\left(\sqrt[4]{w}\right)_k=\sqrt[4]{|w|}\left(\cos\frac{\arg w+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\arg w+2\pi k}{4}\right)$$

de $|w|=|-8+8\sqrt{3}i|=\sqrt{64+64\cdot 3}=8\cdot 2=16$ és $\arg w=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$

$$z_k=\left(\sqrt[4]{w}\right)_k=\sqrt{3}+i;-\sqrt{3}-i;-1+\sqrt{3}i;1-\sqrt{3}i.$$

5. Számítsuk ki a határértékeket!

$$a)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{5^n-13^n}{5^{2n}+2^n+5},\qquad b)\quad \lim_{x\to 1+}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1}\qquad c)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1}$$

MO.

$$\frac{5^n-13^n}{5^{2n}+2^n+5}=\frac{\frac{5^n}{5^{2n}}-\frac{13^n}{5^{2n}}}{1+\frac{2^n}{5^2n}+\frac{5}{5^{2n}}}\to\frac{0-0}{1+0}=0$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-1}\sim_{1+}\frac{-2}{0+}=-\infty$$

6.1. Melyik igaz? a) $\sup H+\sup K=\sup(H\cup K)$ b) $\max\{\sup H,\sup K\}=\sup(H\cup K)$.

6.2. Igaz-e, hogy ha z megoldása, a $iz^2=z$ egyeletnek, akkor $\overline{z}$ is.

6.3. Igaz-e, hogy ha $\mathbf{ab}=0$, akkor $\mathbf{a},\mathbf{b}$ legalább az egyike nullvektor?

MO. 6.1. a) Hamis. Legyen $H=K=\{1\}$. Ekkor $\sup H+\sup K=2\neq 1=\sup(H\cup K)$. b) Igaz. $x\in H\cup K\to x\leq\max\{\sup H,\sup K\}$. Wlog $\sup H=\max\{\sup H,\sup K\}$ valamely $\varepsilon>0$-ra $\sup H-\varepsilon$ olyan, hogy van $y\in[\sup H-\varepsilon,\sup H)$, amire $y\in H\subseteq H\cup K$, azaz $\sup H$ a $H\cup K$-nak is szuprémuma.
6.2. Nem, mert ennek $0,-i$ a megoldásai és ezek nem konjugált párok.
6.3. Nem. $\mathbf{a}=\mathbf{i},\mathbf{b}=\mathbf{j}$, akkor $\mathbf{ij}=0$, de $\mathbf{i}\neq\mathbf{j}$.

iMSc. Legyen $H,K\subseteq\mathbf{R}$. Igaz-e, hogy ha x izolált pontja $H\cap K$-nak, akkor H-nak is és K-nak is. És fordítva?

MO. Hamis. Legyen $H=[-1,0],K=[0,1]$. Ekkor $H\cap K=\{0\}$. Ennek 0 izolált pontja, de egyiknek sem az. Fordítva igaz. $B_\varepsilon(x)\cap H\cap K=\{x\}$, ha $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, ahol $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ olyanok, hogy $B_{\varepsilon_1}(x)\cap H=\{x\}$, $B_{\varepsilon_2}(x)\cap K=\{x\}$, mert $B_\varepsilon(x)\cap H\cap K=B_\varepsilon(x)\cap B_\varepsilon(x)\cap H\cap K=\{x\}\cap\{x\}=\{x\}$.