2024 Vill. Mat A1 – 5. gyakorlat

Komplex számok

1. Számítsuk ki az alábbi komplex szám hosszát, konjugáltját, valós és képzetes részét, ill. adjuk meg algebrai alakban!

$$\frac{-2-i}{3+4i}, \qquad \textbf{gy.:} \quad \frac{3-2i}{2-3i}, \qquad \textbf{hf:} \quad \frac{3-2i}{5-12i}$$

Egy $w \in \mathbf{C}$ n-edik gyökei a Gauss síkon egy orogó középpontú szabályos n szöget alkotnak, ahol az úgy nevezett $k=0$-van indexelt gyök szöge $\arg(w)/n$, hossza $\sqrt[n]{|w|}$, a többit pedig ennek $2\pi/n$ szöggel való elforgatással kapjuk. Azaz

$$\boxed{\sqrt[n]{w}_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\frac{\arg(w)+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg(w)+2\pi k}{n}\right)}$$

2. Oldjuk meg a $z^7 - 7z^4 - 8z = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

$$\textbf{gy.:} \quad z^4 + (4-i)z^2 - 4i = 0, \qquad \textbf{hf:} \quad z^6 + 13z^4 + 36z^2 = 0$$

3. Oldjuk meg a $\overline{z} + z = 6,\ z^2 = -18i$ egyenletrendszert!

$$\textbf{gy.:} \quad |z| + z = 2 + i, \qquad \textbf{hf:} \quad \overline{z} = z^2$$

4. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi kifejezések értékét!

$$\text{a) } \left(\sqrt{3}+i\right)^{2022}, \quad \text{b) } \frac{i^{2021}}{9} \cdot \left(\frac{3+3i}{1-i}\right)^{2020}$$

$$\textbf{gy.:} \quad \left(1-\sqrt{3}i\right)^{99}, \qquad \textbf{hf:} \quad \frac{i^{999}}{2} \cdot \left(\frac{2+\sqrt{12}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{31}$$

5. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

$$\text{a) } z^4 = -16, \quad \text{b) } z^3 = -4 + 4\sqrt{3}i$$

$$\textbf{gy.:} \quad z^6 = -9^3 i, \qquad \textbf{hf:} \quad z^2 = 2\sqrt{3} + 2i$$

6. Melyik igaz az alábbiak közül (a választ igazoljuk/cáfoljuk!)?

1. $\arg z \cdot \arg w = \arg(z \cdot w)$
2. $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$
3. $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w = \operatorname{Im}(z \cdot w)$

7*.

a) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán: $\overline{z}^3 \cdot z^4 = i$

b) Igazoljuk, hogy a z-t reprezentáló vektor pontosan akkor merőleges a w-t reprezentáló vektorra, ha $\operatorname{Im}(z\overline{w}) = 0$.