

Komplex számok

1. Számítsuk ki az alábbi komplex szám hosszát, konjugáltját, valós és képzetes részét, ill. adjuk meg algebrai alakban!

$$\frac{-2-i}{3+4i}, \quad \textbf{gy.}: \quad \frac{3-2i}{2-3i}, \quad \textbf{hf.}: \quad \frac{3-2i}{5-12i}$$

2. Oldjuk meg a $z^7 - 7z^4 - 8z = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

$$\textbf{gy.}: \quad z^4 + (4-i)z^2 - 4i = 0, \quad \textbf{hf.}: \quad z^6 + 13z^4 + 36z^2 = 0$$

3. Oldjuk meg a $\bar{z} + z = 6, z^2 = -18i$ egyenletrendszert!

$$\textbf{gy.}: \quad |z| + z = 2 + i, \quad \textbf{hf.}: \quad \bar{z} = z^2$$

4. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi kifejezések értékét!

$$\begin{aligned} \text{a) } (\sqrt{3} + i)^{2022}, \quad \text{b) } \frac{i^{2021}}{9} \cdot \left(\frac{3+3i}{1-i} \right)^{2020} \\ \textbf{gy.}: \quad (1 - \sqrt{3}i)^{99}, \quad \textbf{hf.}: \quad \frac{i^{999}}{2} \cdot \left(\frac{2 + \sqrt{12}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^{31} \end{aligned}$$

5. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

$$\begin{aligned} \text{a) } z^4 = -16, \quad \text{b) } z^3 = -4 + 4\sqrt{3}i \\ \textbf{gy.}: \quad z^6 = -9^3i, \quad \textbf{hf.}: \quad z^2 = 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

6. Melyik igaz az alábbiak közül (a választ igazoljuk/cáfoljuk!)?

1. $\arg z \cdot \arg w = \arg(z \cdot w)$
2. $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$
3. $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w = \operatorname{Im}(z \cdot w)$

7*.

- a) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán: $\bar{z}^3 \cdot z^4 = i$

- b) Igazoljuk, hogy a z -t reprezentáló vektor pontosan akkor merőleges a w -t reprezentáló vektorra, ha $\operatorname{Im}(z\bar{w}) = 0$.