2024 Vill. Mat A1 – 9.

nyílt és zárt intervallumok, folytonosság, nagyságrendek

1. (**Cantor-axióma:** egymásba skatulyázott korlátos és zárt intervallumok metszete nem üres. Ha ezeknek az intervallumoknak a hossza a nullához tart, akkor a metszet egyelemű.

$$(\forall n \in \mathbf{Z}^+ \ a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n) \ \Rightarrow \ \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Egy $H \subseteq \mathbf{R}$ halmaz nyílt, ha minden $x \in H$-ra, létezik $\varepsilon > 0$, hogy $B_\varepsilon(x) \subseteq H$.)

Igazak-e a következő állítások:

a) Végtelen sok egymásba skatulyázott nyílt intervallum metszete nyílt halmaz.
b) Végtelen sok egymásba skatulyázott zárt intervallum metszete egyetlen pont.
c) Végtelen sok zárt intervallum uniója nem nyílt halmaz.
d) Végtelen sok nyílt intervallum uniója nyílt halmaz.
e) Véges sok nyílt intervallum metszete nyílt halmaz.

2. (**Bolzano-tétel:** intervallumon értelmezett, negatív és pozitív értékeket is felvevő folytonos függvénynek van zérushelye.

a) Legyen $f(x) = \sin x - \frac{1}{3}$. Igazoljuk, hogy f-nek van legalább két zérushelye a $[0, \pi]$ intervallumban!
b) Legyen $f(x) = \dfrac{1}{x} + e^{-x} - 1$. Igazoljuk, hogy f-nek van legalább zérushelye a $(0, \infty)$ intervallumban!
c) Igazolja, hogy az $f(x) = e^x$ és az $g(x) = 2x$ függvények metszik egymást a $[0, 1]$ intervallumon.

3. (**Weierstrass-tétel:** korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi minimumát és maximumát.)

a) Mindenhol értelmezett folytonos függvény két különböző lokális minimumhelye között mindig van egy lokális maximumhelye.
b) Igazolja, hogy ha a mindenhol értelmezett folytonos f olyan, hogy $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = \infty$, akkor f-nek van abszolút minimumhelye.

4. (**Hányadoskritérium sorozatokra:** $\left|\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, akkor $a_n \to 0$.)

a) $\lim \dfrac{2^n + n + n^3}{3^n + n^6} = ?$

b) $\lim \dfrac{2^n + 1}{3^n + 2n^n} = ?$

c) $\lim \dfrac{n^n + n^2}{n^4 + n} = ?$

1. Mo.: a) Hamis: $\bigcap_n(-1/n,1/n) = \{0\}$, ami nem nyílt (az egyenlőséget lehet igazolni vagy elfogadni triviálisként). b) Hamis: $\bigcap_n[0,1] = [0,1]$, ami nem singelton. c) Hamis: $\bigcap_n[1/n,1-1/n] = (0,1)$, ami nyílt (az egyenlőséget lehet igazolni vagy elfogadni triviálisként). d) Igaz. Ha x az unió eleme, akkor legalább az egyik halmaz eleme, és mivel az nyílt, egy egész környezete rész ennek és az uniónak is. e) Ha üres, akkor nyílt a metszet. Ha nem, akkor mindegyikhez választunk benne lévő krnyezetet és ezek között a legszűkebb mutatja, hogy nyílt a metszet.

2. a) $x = \pi/2$-ben f pozitív. b) 0-ban és ∞-ben a határértékek ellenekező előjelűek. c) $f-g$ a 0 és 1-ben ellenkező előjelű.

3. a) leszűkítve a két mimimum közé a függvényt, ezek egyike se maximum, tehát van köztük absz maximum, ami a teljes függénynek lokális maximuma. b) legyen bárhol $f(c)$ egy függényérték. Ekkor lesz $K > 0$, hogy $c-K$-nál kisebbekre $f(c)$-nél nagyobb lesz a függvény, és $c+K$-nál nagyobbakra is $f(c)$-nél nagyobb lesz a függvény. Ezért a $[c-K, c+K]$ intervallumon az abszolút minimum a függvénynek is abszolút minimuma lesz.