2024 Vill. Mat A1 – 2. gyakorlat

Halmazalgebra

1. Igazoljuk, hogy bármely A, B, C halmazra $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
($\cap, \cup, \subseteq, =$ definíciója, esetszétválasztás.)

gy. $A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

hf. a) $A \cup (B \cap A) = A$ b) $A \cap (B \cup A) = A$

2. Igazoljuk, hogy bármely A, B halmazra $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$. (Feltételes állítások.)

gy. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow A \subseteq C$.

hf. $A \subseteq C \Rightarrow A \cap (B \cup C) = A$.

3. Igazoljuk az ismert azonosságok felhasználásával, hogy tetszőleges A, B, C halmazra $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. ($A \setminus B = A \cap \overline{B}$, disztributív szabályok, de Morgan szabályok.)

gy. $K \setminus (K \setminus L) = L \setminus (L \setminus K)$.

hf. $(K \setminus L) \setminus M = (K \setminus M) \setminus (L \setminus M)$.

4. (Ellenpélda keresés.) Legyen A, B, C tetszőleges halmazok és
$K = (A \setminus (B \setminus C)) \setminus C$
$L = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
Vizsgáljuk meg, hogy melyik tartalmazás áll fenn a) $K \subseteq L$, b) $L \subseteq K$, c) $L = K$;
d) egyik se.

gy. Ha lehet, adjunk meg olyan A, B, C halmazt, amire igaz $(A \setminus C) \cup B = C$ és olyat is, amire nem igaz.

hf. Mi X, ha $A \setminus X = X \setminus A$?

—

5*. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B halmazra $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. (Alaphalmazra vonatkozó komplementer, De Morgan, indirekt bizonyítás.)

gy. $\overline{A} \cap \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B}$ $(\overline{A}, \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B})$.

hf. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$.

6*. Igazoljuk, hogy tetszőleges A halmazra $\varnothing \subseteq A$. (Üres halmaz, univerzum.)

gy.

1. Legyen $A, B \subseteq U \neq \varnothing$ ($\overline{A}$ az U-ra vonatkozik). Igazoljuk, hogy ha $A \cap \overline{B} = U$, akkor $A \nsubseteq B$.

2. Mikor oldható meg az $(A \setminus X) \cup B = X$ halmazegyenlet és ha megoldható, mi a megoldása?

hf. $A \cap \overline{B} = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$.

$X \subseteq Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ minden x-re, ha $x \in X$, akkor $x \in Y$ is teljesül.
$X = Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ minden x-re, ha $x \in X$, akkor $x \in Y$ is teljesül és ha $x \in Y$, akkor $x \in X$ is teljesül.
$X \cap Y \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$ (mindkettőnek eleme),
$X \cup Y \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ (legalább az egyiknek eleme).

Hogyan következtetünk, ha unióval és metszettel van dolgunk?

$$\frac{x \in A}{x \in A \cup B}\ \text{(bal)} \qquad \frac{x \in B}{x \in A \cup B}\ \text{(jobb)}$$

$$\frac{x \in A \cup B \qquad \begin{matrix} \text{1. eset} \\ [x \in A] \\ \vdots \\ x \in C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{2. eset} \\ [x \in B] \\ \vdots \\ x \in C \end{matrix}}{x \in C}\ \text{(esetszétválasztás)}$$

$$\frac{x \in A \qquad x \in B}{x \in A \cap B} \qquad \frac{x \in A_1 \cap A_2}{x \in A_i}\ i = 1; 2$$

1. MO. Tfh. $x \in A \cup (B \cap C)$. A külső művelet az $\cup$, azaz "vagy". "Vagy"-ból esetszétválasztással következtetünk tovább (az egyik eset $x \in A$, a másik $x \in B \cap C$). 1. eset: $x \in A$. Ekkor $x \in A \cup B$, az unió definíciója (vagy) miatt. Hasonlóképpen $x \in A \cup C$, és ebből a kettőből a $\cap$ definíciója (és) miatt $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. eset: $x \in B \cap C$, ahonnan az metszet definíciója, illetve az és miatt: $x \in B$ és $x \in C$. Most a "vagy" miatt ezekből rendre: $x \in A \cup B$, $x \in A \cup C$, így a $\cap$ definíciója miatt $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. MO. $\Rightarrow$. Amit tudunk: $\boxed{A \cup B = B}$, amit be kell bizonyítanunk: $A \subseteq B$. Ez utóbbit definíció szerint: legyen $x \in A \subseteq \boxed{A \cup B = B}$.
$\Leftarrow$ Amit tudunk: $\boxed{A \subseteq B}$, amit be kell bizonyítanunk: $A \cup B = B$. Ez egy egyenlőség, azaz sajnos mindkét irányt kezelni kell. Balról jobbra: ha $x \in A \cup B$, akkor vagy $x \in A$ és akkor $A \subseteq B$ miatt $x \in B$ vagy $x \in B$ és akkor kész. Jobbról balra: ha $x \in B$, akkor világos, hogy $x \in A \cup B$.

gy. $(A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq C)$. $\Rightarrow$ Amit felhasználunk: $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C}$, amit igazolni kell: $A \subseteq C$. Legyen $x \in A$. Ekkor az unió definíciója miatt $x \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, figyelve a jobb oldalt, ez azt is jelenti, hogy $x \in C$.
$\Leftarrow$ Amit tudunk: $\boxed{A \subseteq C}$, amit be kell bizonyítanunk: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$. Balról: tfh.: $x \in A \cup (B \cap C)$. Esetszétválasztással: ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup B$, de $A \subseteq C$, így $x \in C$, azaz $x \in (A \cup B) \cap C$. Fordítva: $x \in (A \cup B) \cap C$, akkor $x \in C$ és $x \in A \cup B$. Ez utóbbiból esetszétválasztással: ha $x \in A$, akkor készen vagyunk mert akkor $x \in A \cup (B \cap C)$. Ha $x \in B$, akkor $x \in C$-vel együtt $x \in B \cap C$, így $x \in A \cup (B \cap C)$.

3. 4. könnyű.

5. Tudjuk: $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, kell: $x \in \overline{A \cup B}$. Mivel a cél "negatív", ezért *indirekten.* Tegyük fel, hogy $x \in A \cup B$. Ebből esetszétválasztással. Ha $x \in A$, akkor persze ez ellentmond $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$-nek, mert ebből $x \in \overline{A}$. $x \in B$ esetén ugyanez pepitában. Mindkét esetben ellentmondásra jutunk.