2024 Vill. Mat A1 – 14. gyakorlat

Parciális törtekre bontás

1.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+2)}\,dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x-1)(x+1)}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x-5}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$, (d) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x+2)x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{4}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{5}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$.

Improprius integrál

Legyen $f : I \to \mathbf{R}$ lokálisan integrálható függvény (azaz I minden korlátos és zárt részintervallumán f Riemann-integrálható) és $F : I \to \mathbf{R}$ az f bármelyik integrálfüggvénye. Ekkor f improprius integrálja konvergens, ha léteznek és végesek a $\lim\limits_{\inf I} F$ és $\lim\limits_{\sup I} F$ határértékek és ekkor az improprius integrálja

$$\boxed{\int_I f = \lim_{\sup I} F - \lim_{\inf I} F.}$$

máskor divergens.

2.

(a) $\displaystyle\int_{x=0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{x=0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{x=0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(g) $\displaystyle\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)\arctan^3 x}\,dx$, (h) $\displaystyle\int_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x\ln^4 x}\,dx$, (i) $\displaystyle\int_{x=0}^{1} \ln x\,dx$,

(j) $\displaystyle\int_{x=0}^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$, (k) $\displaystyle\int_{x=0}^{\infty} xe^{-x}\,dx$, (l) $\displaystyle\int_{x=0}^{1} x\ln x\,dx$.

Improprius integrálok ekvikonvergenciája

Legyen $f, g : [a,b) \to \mathbf{R}$ $[f, g : (a,b] \to \mathbf{R}]$ két nem negatív értékű függvény, amelyek lokálisan integrálhatók és $\lim_b f/g = p > 0$ $[\lim_a f/g = p > 0]$. Ekkor f és g improprius integráljai egyszerre konvergensek vagy divergensek.

3. Konvergensek vagy sem a következő improprius integrálok?

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sin x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$, (c) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} 1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$,

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$, (f) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} e^{-x}\,dx$.