2024 Vill. Mat. A1 – 4. gyakorlat

Térgeometria koordinátákkal

**1.** Mi az $e$ és $f$ egyenesek kölcsönös helyzete (metszők-e, párhuzamosok-e, kitérők-e), ha

$$e:\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = -t \\ z = 1-2t \end{cases} \qquad f:\begin{cases} x = 2t-3 \\ y = -1 \\ z = 3t-9 \end{cases}$$

help

**hf.** Mi az $e$ és $f$ egyenesek kölcsönös helyzete, ha

$$e:\begin{cases} x = 3t+5 \\ y = t+1 \\ z = -t-4 \end{cases} \qquad f:\begin{cases} x = 4-t \\ y = 2t-4 \\ z = t-5 \end{cases}$$

help

**2.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges mind az $e$, mind az $f$ egyenesre és áthalad a $P_0 = (1,2,0)$ ponton!

$$e:\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-2t \\ z = 2 \end{cases} \qquad f:\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 4 \\ z = 2-t \end{cases}$$

help

**hf.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, ami merőleges az 1-es feladatban szereplő egyeneselre és mindkettőn áthalad (normáltranszverzális). help

**3.** Vetítsük merőlegesen a $P(-8,-4,3)$ pontot az $e$ egyenesre! (Mik a vetítési pont koordinátái?)

$$e:\begin{cases} x = 3+t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases}$$

help

**4.** Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad a $P = (3,0,1)$ ponton és párhuzamos az $e$ és az $f$ egyenesek közös síkjával, ha van ilyen.

$$e:\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \\ z = -2t \end{cases} \text{ és } f:\begin{cases} x = -2+2t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$$

**5.** Írjuk fel az alábbi egyenletekkel megadott síkok metszésvonalának egyenletét!
$s_1:\ x-y-4z-5=0,\ s_2:\ 2x+y-2z-4=0.$ help

**hf.** Határozzuk meg annak az $e$ egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $P = (-1,2,3)$ pontra, merőleges az $\mathbf{a} = (6,-2,-3)$ vektorra és metszi az alábbi egyenest!

$$f:\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 2t-2 \\ z = -4t+3 \end{cases}$$

1. MO.: A feladatban két egyenes kölcsönös helyzetét kell meghatároznunk. Az egyenesek egyenletei a következők:

$$e : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad f : \begin{cases} x = 2s - 3 \\ y = -1 \\ z = 3s - 9 \end{cases}$$

Az egyenesek kölcsönös helyzete lehet: 1. **metsző**, ha van egyetlen közös pontjuk ($e \cap f = \{M\}$), 2. **párhuzamos**, ha az irányvektoraik párhuzamosak ($\mathbf{v}_e \parallel \mathbf{v}_f$), 3. **kitérő**, ha az egyenesek nem metszik egymást, és nem is párhuzamosak. Az egyenesek irányvektorait az egyenesek egyenletrendszeréből határozhatjuk meg a paraméter együtthatóinak leolvasásával.

$$\mathbf{v_e} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v_f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az irányvektorok alapján először megvizsgáljuk, hogy párhuzamosak-e az egyenesek. Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy számszorosa-e valamelyik a másiknak:

$$\begin{aligned} 3 &= \lambda \cdot 2 \\ -1 &= \lambda \cdot 0 \\ -2 &= \lambda \cdot 3 \end{aligned} \qquad \text{vagy} \qquad \begin{aligned} \mu \cdot 3 &= 2 \\ \mu \cdot (-1) &= 0 \\ \mu \cdot (-2) &= 3 \end{aligned}$$

$\lambda$-t keresve látható, hogy nem létezik ilyen, hiszen különben $-1 = 0$ lenne. Másfelől $\mu$ az első egyenletből $2/3$, de ezt behelyettesítve a másodikba $-2/3 = 0$, ami szintén lehetelten. Ez azt jelenti, hogy az egyenesek nem párhuzamosak.
Mivel az egyenesek nem párhuzamosak, megvizsgáljuk, hogy van-e közös pontjuk. Ehhez megoldjuk a két egyenes összesen hat egyenletéből álló egyenletrendszert. Mivel a feladat a közöt pontra kérdez rá, ezért lecseréljük az $s$-re a második egyenletrendszer $t$ paraméterét. Világos, hogy ekkor:

$$\begin{aligned} 3t + 2 &= 2s - 3 \\ -t &= -1 \\ 1 - 2t &= 3s - 9 \end{aligned}$$

tehát:

$$-t = -1 \rightsquigarrow t = 1$$

Az első egyenlet így:

$$3 \cdot 1 + 2 = 2s - 3 \rightsquigarrow 5 = 2s - 3 \rightsquigarrow 2s = 8 \rightsquigarrow s = 4$$

A harmadik egyenlet az $s$ és $t$ adódó értékével:

$$1 - 2 \cdot 1 = 3 \cdot 4 - 9 \rightsquigarrow 1 - 2 = 12 - 9 \rightsquigarrow -1 = 3$$

ami ellentmondást ad, tehát az egyenesek nem metszik egymást. Mivel az egyenesek nem párhuzamosak és nem metszik egymást, ezért **kitérők**.

2. MO.: Az $e$ és $f$ egyenesek irányvektorai:

$$\mathbf{v_e} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v_f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A keresett egyenes irányvektora merőleges mind az $e$, mind az $f$ egyenesek irányvektoraira. Ilyet úgy kaphatunk, hogy kiszámoljuk az irányvektorok *vektoriális szorzatát*:

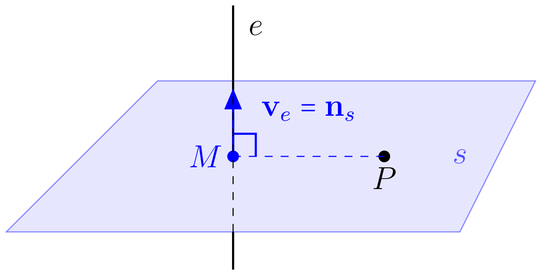
$$\mathbf{v} = \mathbf{v_e} \times \mathbf{v_f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\mathbf{i} - (-3)\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Az egyenes áthalad a $P_0 = (1, 2, 0)$ ponton, és az irányvektora $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, így az egyenletrendszere:

$$x = 1 + 2t$$
$$y = 2 + 3t$$
$$z = 4t$$

3. MO.: A merőleges vetületet úgy határozhatjuk meg, hogy felírjuk annak az $s$ síknak az egyenletetét, amely áthalad a $P(-8, -4, 3)$ ponton és a normálvektora az $e$ egyenes irányvektora, majd meghatározzuk ennek a síknak és az egyenesnek a metszéspontját.




Egy sík egyenlete a következő formában írható fel, ha adott a normálvektora és egy pontja:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

ahol $(A, B, C)$ a normálvektor komponensei, és $(x_0, y_0, z_0)$ a sík egy pontja. Jelen esetben, $\mathbf{n_s} = \mathbf{v_e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 3$$
$$(x_0, y_0, z_0) = (-8, -4, 3)$$

Behelyettesítve: $1(x+8) - 1(y+4) + 3(z-3) = 0$, illetve $x + 8 - y - 4 + 3z - 9 = 0$, azaz a sík egyenlete:

$$x - y + 3z - 5 = 0$$

Most meghatározzuk az $e$ egyenes és a sík metszéspontját. Az $e$ egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$$

Behelyettesítjük ezeket a sík egyenletébe:

$$(3 + t) - (-1 - t) + 3(4 + 3t) - 5 = 0 \rightsquigarrow 11t + 11 = 0 \rightsquigarrow t = -1$$

A $t = -1$ értékhez tartozó koordináták az $e$ egyenes paraméteres egyenletéből:

$$x = 3 + (-1) = 2$$
$$y = -1 - (-1) = 0$$
$$z = 4 + 3(-1) = 1$$

Tehát a merőleges vetület koordinátái: $P'(2, 0, 1)$.

4. MO.: Az $e$ és $f$ egyenesek irányvektorai az egyenletekből: $\mathbf{v_e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v_f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vegyünk egy $P$ pontot az $e$ egyenesen úgy, hogy $t = 0$-t választunk $P = (1-2(0), 2+0, -2(0)) = (1,2,0)$ és egy $Q$ pontot az $f$ egyenesen szintén $t = 0$ esetén $Q = (-2+2(0), -0, 2(0)) = (-2,0,0)$.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az $e$ egyenes irányvektora a paraméteres egyenletéből: $\mathbf{v_e} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. A keresett sík normálvektora a $\overrightarrow{PQ}$ vektor és az $e$ egyenes irányvektorának vektoriális szorzata:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v_e} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

A sík egyenlete, amely áthalad a $P_0 = (3,0,1)$ ponton, és a normálvektora $\mathbf{n}$:

$$4(x-3) - 6(y-0) - 7(z-1) = 0 \rightsquigarrow 4x - 6y - 7z - 5 = 0$$

5. MO.: A metszésvonal vagy a közös pontok halmazának meghatározásához oldjuk meg a két sík egyenletéből álló egyenletrendszert:

$$s_1 : x - y - 4z - 5 = 0$$

$$s_2 : 2x + y - 2z - 4 = 0$$

Összeadva őket kiesik az $y$:

$$3x - 6z - 9 = 0 \rightsquigarrow x - 2z - 3 = 0$$

A $z$ változó paraméternek választásával: $z = t \in \mathbf{R}$ adódik, hogy

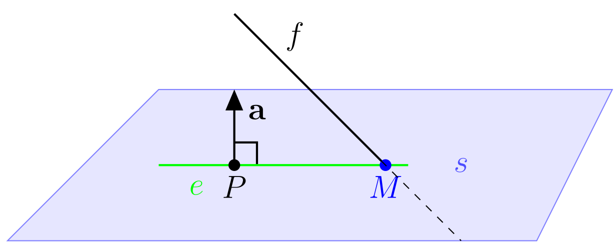
$$x = 3 + 2t$$

$y$-t például az első egyenletből, felhasználva ez utóbbit és hogy $z = t$: $y = (2t+3) - 4t - 5 = 2t + 3 - 4t - 5 = -2t - 2$. Tehát a metszésvonal egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -2t - 2 \\ z = t \end{cases}$$

ahol $t \in \mathbf{R}$ paraméter.

**5. hf. MO.:** A keresett $e$ egyenes abban az $s$ síkban van, amelyiknek normálvektora $\mathbf{a} = (6,-2,-3)$, és amely áthalad a $P = (-1,2,3)$ ponton. Mivel $e$-nek a feltétel miatt metszenie kell $f$-et és mivel $e$ minden pontja az $s$ síkban van, $e$ és $f$ metszéspontja is csak a síkon lehet.



ezért a sík egyenlete:

$$6(x+1)-2(y-2)-3(z-3)=0 \rightsquigarrow 6x-2y-3z+19=0$$

Megoldjuk az ebből és az $f$ egyenletrendszeréből álló négyismeretlenes egyenletrendszert azzal a céllal, hogy megjapjuk a metszéspontot, amelyen a keresett $e$-nek is át kell haladnia:

$$f:\begin{cases} x=2t+1 \\ y=2t-2 \\ z=-4t+3 \end{cases}$$

Behelyettesítés utám:

$$6(2t+1)-2(2t-2)-3(-4t+3)+19=0 \rightsquigarrow t=-1$$

Így:

$$x=2(-1)+1=-1, \quad y=2(-1)-2=-4, \quad z=-4(-1)+3=7$$

Tehát a metszéspont $M=(-1,-4,7)$. Az egyenes egyenlete, amely áthalad a $P=(-1,2,3)$ és $M=(-1,-4,7)$ pontokon olyan, aminek az irányvektora:

$$\mathbf{v}=M-P=(-1,-4,7)-(-1,2,3)=(0,-6,4)$$

A keresett $e$ egyenes paraméteres egyenletrendszere tehát:

$$e:\begin{cases} x=-1 \\ y=2-6t \\ z=3+4t \end{cases}$$

ahol $t\in\mathbf{R}$ paraméter.