Minta 2. zh, vill. 2024. A

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat idő tartama 90 perc.)

1. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n-n^4+1}$$

2. Mi a határértéke az alábbi függvényeknek az értelmezési tartományuk véges határpontjaiban?

$$\textbf{a)}\ f(x)=\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\ \text{(7 pont)} \qquad \textbf{b)}\ g(x)=\frac{e^{2x}-1}{x}\ \text{(3 pont)}$$

3. Hol és milyen szakadása van az $f(x)=\frac{1}{x-2}\cdot\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+2}$ függvénynek? (10 pont)

4. Mely intervallumokon szigorúan monoton növő ill. csökkenő az $f(x)=|x-3|\cdot e^x$ függvény? Hol van lokális szélsőértéke? (10 pont)

5. Hány gyöke van a valós számok halmazán az $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-2$ függvénynek? (10 pont)

6. Igaz vagy hamis?
a) Legyen $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ és $u\in\mathbf{R}$. Ha $f+g$-nek van határértéke u-ban és f-nek is van u-ban, akkor g-nek is van u-ban. (3 pont)
b) Van-e olyan a_n sorozat, amelyik tart a végtelenbe, de $(a_{n+1}-a_n)\to 0$? (3 pont)
c) Korlátos és nyílt intervallumon folytonos függvény mindig felveszi maximumát. (4 pont)

iMSc. Igazolja definíció szerint, hogy az $1/x^2$ függvénynek a 0-ban $+\infty$ a határértéke.

1. MO.: a) Rendőrelvvel. Egy N index után minden n-re:

$$a \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0.$$

hiszen $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$
b) Rendőrelvvel. Egy N index után minden n-re $3^n - \frac{3^n}{2} \leq 3^n - n^4 + 1$ ill. $3^n - n^4 + 1 \leq 3^n$, így:

$$\frac{3}{1} \leftarrow \frac{3}{\sqrt[n]{2}} = \frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{2}} = \sqrt[n]{3^n - \frac{3^n}{2}} \leq \sqrt[n]{3^n - n^4 + 1} \leq \sqrt[n]{3^n} = 3 \to 3.$$

így $\sqrt[n]{3^n - n^4 + 1} \to 3$. Vagy,

$$3 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \leq 3 \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{n^4}{3^n} + \frac{1}{3^n}} \leq 3 \cdot \sqrt[n]{2} \to 3.$$

hiszen a bikasági sor miatt $n^4 << 3^n$, így $-\frac{n^4}{3^n} + \frac{1}{3^n} \to 0$.

2. MO.: a) Dom $f = [-7; 2) \cup (2; +\infty)$. Ennek belsején folytonos, mert folytonosokból van összetéve a folytonosságot megőrző módokon. $u = 2$-ben:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+7} + 3}{\sqrt{x+7} + 3} = \frac{(x+7) - 9}{(x-2)(\sqrt{x+7} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} \to \frac{1}{6}.$$

b) Nevezetes határértékekkel, $\lim_{\vartheta \to 0}(e^{\vartheta} - 1/\vartheta) = 1$ helyettesítéssel $\vartheta = 2x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2.$$

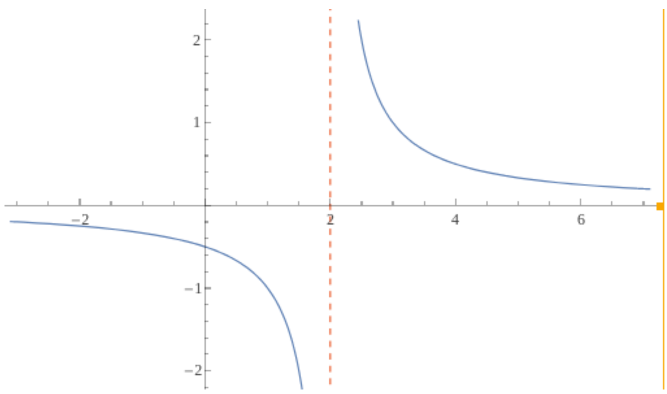
Vagy L'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

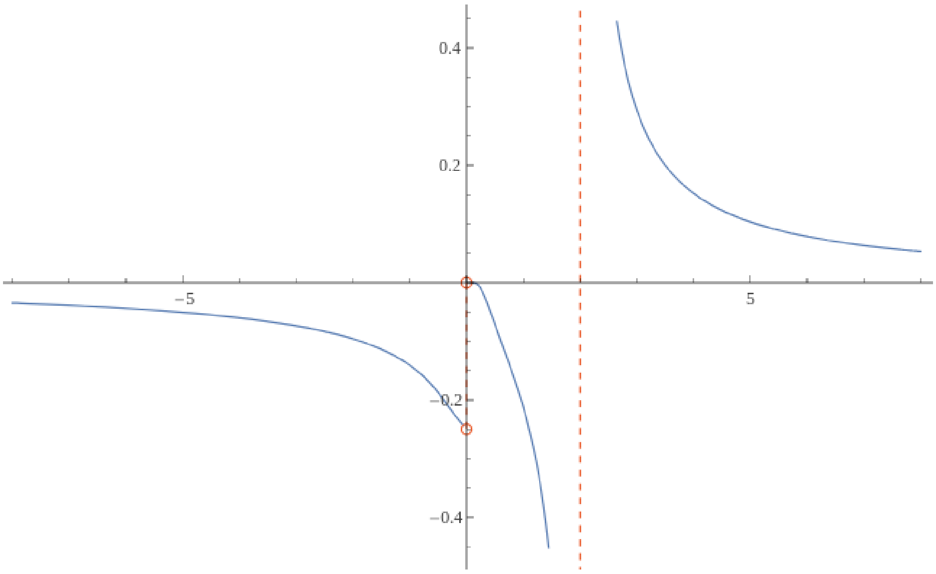
3. MO.: Dom $f = (\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$, így discont$(f) = \{0; 2\}$. $u = 2$ esetén a bal- és jobb oldali határértékek:

$$\frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{e^{1/x} + 2} \sim_2 \frac{1}{x-2} \cdot \text{pozitív szám.}$$

azaz f úgy viselkedik 2-ben, mint $\frac{1}{x-2}$ (a $\frac{1}{e^{1/2}+2}$ pozitív egész szám erejéig). $\lim_{2+} f = +\infty$, $\lim_{2-} f = -\infty$. Azaz itt másodfajú szakadása van és a szakadás végtelen.



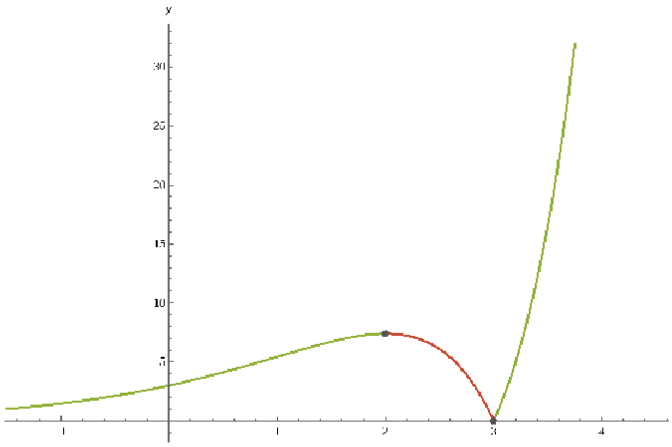
Ha $u = 0$, akor meg $\frac{1}{x-2}$ számítható ki és ez meg a $-1/2$ negatív szám lesz. Tehát $f(x) \sim_0 (-1/2) \cdot \dfrac{1}{e^{1/x}+2}$. Ennek egyoldali határértékei a következők. 0+-ban: $1/x \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty$, $e^{1/x}+2 \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty$, $(-1/2)\cdot\dfrac{1}{e^{1/x}+2} \xrightarrow[x\to 0+]{} 0-$. 0−-ban: $1/x \xrightarrow[x\to 0-]{} -\infty$, $e^{1/x}+2 \xrightarrow[x\to 0-]{} +2$, $(-1/2)\cdot\dfrac{1}{e^{1/x}+2} \xrightarrow[x\to 0-]{} -1/4$. Végesek az egyoldaiak, különbözők, azaz ugrás, tehát elsőfajú.



4. MO.: Az abszolútérték miatt 3 előtt és után külön vizsgáljuk a függvényt.

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)e^x & \text{ha } x < 3, \\ -(x-3)e^x & \text{ha } x \leq 3. \end{cases}$$

Majd valami ilyen grafikonra számítsunk:



1. $x < 3$

$$f'(x) = (-1 \cdot e^x + (-x+3)e^x) = (-x+2)e^x.$$

$f'(x)$ előjele alapján, ha $x < 2$, akkor $f'(x) < 0$, így $f(x)$ itt szig. mon. csökken, ha $2 < x < 3$, akkor $f'(x) > 0$, így itt $f(x)$ szig. mon. növekszik. Tehát $f(x)$ nő $(-\infty, 2]$-n, majd csökken $(2,3)$-n, 2-ben pedig folytonos, mert deriválható, így 2-ben lokális maximuma van.

2. $x \geq 3$

$$f'(x) = e^x + (x-3)e^x = (x-2)e^x.$$

$f'(x)$ előjele alapján, ha $x > 2$, akkor $f'(x) > 0$, tehát itt $f(x)$ szig. mon. növekszik. Csökken $(2,3)$-n, az $(3,\infty)$-n nő, és 3-ban folytonos, mert folytonosokból van összetéve a folytonosságot megőrző módon, ezért 2-ben lokális (sőt abszolút) minimuma van.

5. MO.: A függvény monoton intervallumainak megkereséséhez számoljuk ki a deriváltját:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x = 4x(x-1)^2.$$

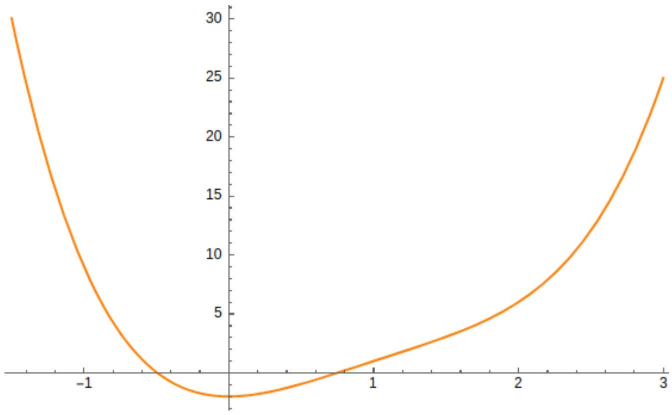
A derivált gyökei: $x = 0$ és $x = 1$ (utóbbi kétszeres gyök), így a derivált előjele alapján elemezzük a függvény monotonitását:

1. $x < 0$: itt $f'(x) = 4x(x-1)^2$ negatív, ezért $f(x)$ sz. m. csökken a $(-\infty,0)$-n.

2. $0 < x < 1$: itt $f'(x) = 4x(x-1)^2$ pozitív ($4x > 0$ és $(x-1)^2 > 0$). Tehát $f(x)$ sz. m. növekvő a $(0,1)$-n.

3. $x > 1$: itt $f'(x) = 4x(x-1)^2$ szintén pozitív (mivel $x > 1$). Tehát $f(x)$ sz. m. növekvő a $(1,\infty)$-n.

Összességében f sz. m. csökken a $(-\infty,0)$ intervallumon, majd sz. m. növekszik a $(0,\infty)$ intervallumon. A függvény gyökei azok az x értékek, ahol $f(x) = 0$. f a $(-\infty,0)$ intervallumon egyetlen egyszer veszi fel a nullát, mert szigorúan monoton, folytonos és $\lim_{-\infty} f = \infty$, $f(0) = -2$ azaz a Bolzano-tétel miatt van zérushelye. f a $(0,\infty)$ intervallumon egyetlen egyszer veszi fel a nullát, mert szigorúan monoton, folytonos és $\lim_{\infty} f = \infty$, $f(0) = -2$ azaz a Bolzano-tétel miatt van zérushelye. Tehát pontosan két gyöke van a valós számok halmazán.



6. MO.: a) Igaz. $\lim_u g = \lim_u f + \lim_u g - \lim_u f = \lim_u (f+g) - \lim_u f$ a HIA miatt.

b) Igen: $a_n = \sqrt{n}$, mert $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$.

c) Hamis. Legyen $f : (0;1) \to \mathbf{R}; x \mapsto x$.

iMSc. MO.: Legyen $\varepsilon > 0$. Kell $\delta > 0$, hogy minden $0 \neq |x| < \delta$ esetén $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}$. Legyen $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Ekkor ha $0 \neq |x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$, akkor $x^2 = |x|^2 < \varepsilon$ és $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}$.