

## Parciális törtekre bontás

1.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \int \frac{1}{x(x+2)} dx, \\
 \text{(b)} & \int \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} dx, \\
 \text{(c)} & \int \frac{x-5}{(x-1)(x+1)^2} dx, \\
 \text{(d)} & \int \frac{2x-4}{(x+2)x^2} dx \\
 \text{(e)} & \int \frac{4}{(x+1)(x^2+1)} dx \\
 \text{(f)} & \int \frac{5}{(x-1)(x^2+4)} dx.
 \end{array}$$

## Improprius integrál

Legyen  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  lokálisan integrálható függvény (azaz  $I$  minden korlátos és zárt részintervallumán  $f$  Riemann-integrálható) és  $F : I \rightarrow \mathbf{R}$  az  $f$  bármelyik integrálfüggvénye. Ekkor  $f$  improprius integrálja konvergens, ha léteznek és végesek a  $\lim_{\inf I} F$  és  $\lim_{\sup I} F$  határértékek és ekkor az improprius integrálja

$$\int_I f = \lim_{\sup I} F - \lim_{\inf I} F.$$

máskor divergens.

2.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \int_{x=0}^1 \frac{1}{x^2} dx, \\
 \text{(b)} & \int_{x=0}^1 \frac{1}{x} dx, \quad \text{(c)} \quad \int_{x=0}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 \text{(d)} & \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx, \\
 \text{(e)} & \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \text{(f)} \quad \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \\
 \text{(g)} & \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2) \arctan^3 x} dx, \quad \text{(h)} \quad \int_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x \ln^4 x} dx, \quad \text{(i)} \quad \int_{x=0}^1 \ln x dx, \\
 \text{(j)} & \int_{x=0}^{\infty} e^{-x} \sin x dx, \quad \text{(k)} \quad \int_{x=0}^{\infty} x e^{-x} dx, \quad \text{(l)} \quad \int_{x=0}^1 x \ln x dx.
 \end{array}$$

## Improprius integrálok ekvikonvergenciája

Legyen  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  [ $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ] két nem negatív értékű függvény, amelyek lokálisan integrálhatók és  $\lim_b f/g = p > 0$  [ $\lim_a f/g = p > 0$ ]. Ekkor  $f$  és  $g$  improprius integráljai egyszerre konvergenssek vagy divergenssek.

3. Konvergenssek vagy sem a következő improprius integrálok?

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx, \\
 \text{(b)} & \int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx, \quad \text{(c)} \quad \int_1^{\infty} 1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx, \\
 \text{(d)} & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx, \quad \text{(e)} \quad \int_1^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx, \quad \text{(f)} \quad \int_1^{\infty} e^{-x} dx.
 \end{array}$$