2024 Matematika A1 villamosmérnököknek – 1. gyakorlat

Logika, következtetések

1. *(Állításlogika)* Formalizáljuk a P, Ki ($i = 1, 2, 3, 4$) mondatokat és döntsünk arról, hogy következik-e P-ből Ki! (Nem kell igazságtáblázatot készíteni, elég érzésre. Ha úgy érezzük, hogy valami nem egyértelmű, ne essünk pánikba, vitatkozzunk róla. A vita során akár előjöhet az igazságtáblázat is.)

P : A hatamoto az útonálló támadása után még sokáig kiabált, de nem hallották meg, vagy egy lélek se volt a közelben.
$K1$: A hatamoto az útonálló támadása után még sokáig kiabált.
$K2$: A hatamotot az útonálló támadása után nem hallották meg.
$K3$: Ha volt is egy lélek a közelben, a hatamotot az se hallotta meg.
$K4$: Ha a hatamotot meghallották, akkor egy lélek se volt a közelben.

Gyakorlás vagy házi.
P : Nem kell zh-t írnod, ha már korábbról megvan az aláírásod vagy be se jutottál az egyetemre.
$K1$: Ha már korábbról megvan az aláírásod, nem kell zh-t írnod.
$K2$: Ha nem kell zh-t írnod, akkor már korábbról megvan az aláírásod vagy be se jutottál az egyetemre.
$K3$: Ha nincs meg korábbról az aláírásod, de be se jutottál az egyetemre, akkor nem kell zh-t írnod.
$K4$: Ha már korábbról megvan az aláírásod akkor nem kell zh-t írnod, vagy be se jutottál az egyetemre.

2. *(A kizárt harmadik elve)* Shakespeare *A velencei kalmár* című művében Portia kérőjének, hogy elnyerje a lány kezét, három ládika közül kell választania: arany, ezüst és ólom. A siker kulcsa, hogy rátaláljon arra az egyetlen képre, amelyet Portia rejtett a ládikákba. A mi Portiánk nem misztikus, hanem logikus. Elmondja a kérőnek, hogy a ládikákra írt feliratok közül pontosan egy igaz. Hol a kép?

arany	ezüst	ólom
A kép ebben a ládikában van.	A kép az aranyládikában van.	A kép nem ebben a ládikában van.

Gyakorlás vagy házi.
Portia útmutatása most: a ládikák felíratai közül legalább egy igaz és legalább egy hamis.

arany	ezüst	ólom
A kép nem ebben a ládikában van.	A kép az ólomládikában van.	A kép ebben a ládikában van.

Portia semmit nem mond, de utólag kiderül, hogy az ólomládikában volt a kép. Hazudtak-e a feliratok?

arany	ezüst	ólom
A kép ebben a ládikában van.	A kép nem az ólomládikában van.	A három mondat közül legalább kettő igaz.

3. *(Szillogizmusok)* Formalizáljuk az alábbi mondatokat kvantorok segítségével! Rajzoljunk Venn-diagramot és satírozzuk ki azokat a részeket, amelyekben a feltételek szerint nincs semmi. Jelöljük, ha valahol van! Döntsük el, hogy helyes-e a következtetés!

Aki megbízhatatlan, az veszélyes.
Néhány Jedi veszélyes.
A Jedik megbízhatatlanok.
Tehát, vannak veszélyes megbízhatatlanok.

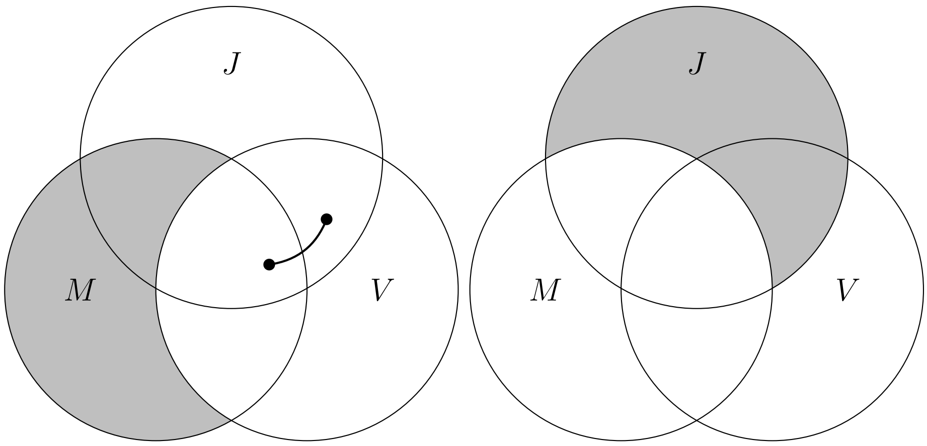
Gyakorlás vagy házi.
Nincs Sith, aki ne lenne bátor.
Nem mindenki bátor, aki erős.
Csak az erősek vagy a Sithek tudnak bátrak lenni.
Tehát, vannak nem erős, de bátor Sithek.

4. *(Kvantorok)*
Két fontos tény. Hamisból vagy ellentmondásból minden következik: egy ellentmondásos elmélet teljesen használhatatlan, mert minden és mindennek a tagadása is igaz benne.
Az igaz mindenből következik: ha valamiről kiderült, hogy igaz, akkor utána már minden körülmény és feltétel mellett igaz marad. Persze ez fordítva nem igaz: ha valami egy feltétel mellett igaz, és ez a feltétel eltűnik, akkor az állítás nem marad feltétlenül igaz (ilyenkor néha azt mondjuk hogy ez a feltétel nem elhagyható.)
Formalizáljuk az alábbi állításokat és döntsük el, hogy helyesek-e a következtetések. Valamely feltétel megkövetelésével helyesek lesznek-e a nem működő következtetések?

1. Ha mindenki felszólal, akkor valaki megsértődik.
Tehát, van valaki, aki megsértődik, ha mindenki felszólal.
2. Bárki felszólal, valaki megsértődik.
Tehát, van valaki, aki megsértődik, ha valaki felszólal.
3. Bárki felszólal, valaki megsértődik.
Tehát, mindenkire igaz az, hogy ha felszólal, akkor valaki megsértődik.
4. Ha senki se kap fizetést, akkor mindenki felmond.
Tehát, mindenki olyan, hogy ha nem kap fizetést, akkor felmond.

Gyakorlás vagy házi.
1. Ha minden jól megy, Vincent örül.
Tehát, minden dolog olyan, ami, ha jól megy, akkor Vincent örül.
2. Vincent örül, akkor valaki fizet.
Tehát, van valaki, aki fizet, ha Vincent örül.
3. Ha valaki fizet, Vincent örül.
Tehát, van valaki aki, ha fizet, akkor Vincent örül.
4. Ha mindenki fizet, Vincent örül.
Tehát, mindenki olyan, hogy ha fizet, akkor Vincent örül.

1. MO.: A : A hatamoto az útonálló támadása után még sokáig kiabált, B : nem hallották meg, C : egy lélek se volt a közelben. $P = A \wedge (B \vee C)$. $K1 = A$ és következik. $K2 = B$ és nem következik, nem tudjuk, hogy B vagy C közül melyik az eset. $K3 = \neg C \to B$, következik, mert B és C közül legalább az egyik teljesül, így ha nem C, akkor B az. $K4 = \neg B \to C$, szintén következik az előző indoklással.
2.1 MO.: A: "Ebben van." E: "Az aranyládikában van." Ó: "Nem ebben van."
Az igaz állítás helye szerint. A: igaz $\rightsquigarrow$ A-ban van. E: igazat mond, de csak egy igaz lehet $\downarrow$. E: igaz $\rightsquigarrow$ A-ban van. A: igazat mond, de csak egy igaz lehet $\downarrow$. Ó: igaz $\rightsquigarrow$ A: hamis, E: hamis $\rightsquigarrow$ mindkettő azt mondja, hogy az E vagy Ó-ban van, tehát Ó igazsága miatt az E-ben van.
(*Megjegyzés:* lehetett volna a kép helye szerint is okosodni, de az most nem konkluzív. A-ban van a kép $\rightsquigarrow$ A: igaz, E: igaz, de csak egy igaz lehet $\downarrow$. E-ben $\rightsquigarrow$ A: hamis, E: hamis, Ó: igaz (ez egy lehetőség). Ó-ban $\rightsquigarrow$ A: hamis, E: hamis, Ó: igaz.)
2.2 MO.: A: "Nem ebben van." E: "Az ólomládikában van." Ó: "Ebben van."
Legalább egy igaz és legalább egy hamis. A kép helye alapján. A-ban van a kép $\rightsquigarrow$ A: hamis, E: hamis, Ó: hamis, de kell egy igaz is $\downarrow$. E-ben $\rightsquigarrow$ A: igaz, E: hamis, Ó: igaz (ez egy lehetőség). Ó-ban $\rightsquigarrow$ A: igaz, E: igaz, Ó: igaz, de kell egy hamis is. Ezért az E-ben van.
3.
Aki megbízhatatlan (M), az veszélyes (V): $\forall x, M(x) \to V(x)$
Néhány Jedi (J) veszélyes: $\exists x, J(x) \wedge V(x)$
A Jedik megbízhatatlanok: $\forall x, J(x) \to M(x)$
Tehát, vannak veszélyes megbízhatatlanok: $\exists x, V(x) \wedge M(x)$



Azt először még nem tudjuk, hogy a V és a J metszetének két tartománya közül melyikben vannak, de a harmadik feltétel miatt már igen. Tehát van az M és a V metszetben valalki, azaz helyes a következtetés.
4. MO.: 4.1. Ha mindenki felszólal, akkor valaki megsértődik, tehát, van valaki, aki megsértődik, ha mindenki felszólal.

$$((\forall x, F(x)) \to \exists x, M(x)) \to \exists x, ((\forall x, F(x)) \to M(x))?$$

A szövegkörnyezet miatt feltesszük, hogy vannak egyáltalán valakik, bár nem kell, mert enélkül is igaz. Vagy mindenki felszólal, vagy nem. Tegyük fel, hogy mindenki felszólal, ekkor van, aki megsértődik, ezért ő olyan, hogy ebben az esetben bármi is van, megsértődik, így akkor is, ha mindenki felszólal. Tegyük fel, hogy nem mindenki szólal fel, vannak résztvevők, ezért bárki olyan, hogy megsértődik, ha mindenki felszólal, mert hamis, hogy mindenki felszólal és hamisból minden következik.

4.2. Bárki felszólal, valaki megsértődik. Tehát, van valaki, aki megsértődik, ha valaki felszólal.
Itt azon kell elgondolkodni, hogy ez a "bárki", ugyanaz a bárki-e, mint az előző "mindenki". Asszem nem. Ekkor a bárki egy valaki, akármilyen furán is hangzik. Vagyis

$$((\exists x, F(x)) \to \exists x, M(x)) \to \exists x, ((\exists x, F(x)) \to M(x))?$$

Igaz, és szintén esetszétválasztással. Ha van aki felszólal, akkor van, aki megsértődik. Ezzel készen vagyunk, mert az igaz bármiből következik, így abból is, hogy ha van aki felszólal. Ha nincs, aki felszólal, akkor bárkit is veszünk, az teljesíti a feltételt, mert hamisból minden következik, így az is, hogy ez az illető megsértődik.
4.3. Bárki felszólal, valaki megsértődik. Tehát, mindenkire igaz az, hogy ha felszólal, akkor valaki megsértődik.

$$((\exists x, F(x)) \to \exists x, M(x)) \to \forall x, (F(x) \to \exists x, M(x))?$$

Ez elég egyszerű. Vegyünk egy embert és tegyük fel, hogy ő felszólal. Mivel igaz, hogy ha valaki felszólal, valaki megsértődik, ezért valaki megsértődik.
4.4. Ha senki se kap fizetést, akkor mindenki felmond. Tehát, mindenki olyan, hogy ha nem kap fizetést, akkor felmond.

$$((\forall x, \neg K(x)) \to \forall x, F(x)) \to \forall x, (\neg K(x) \to F(x))?$$

Nem helyes a következtetés. Attól, hogy veszünk egy embert, aki nem kap fizetést, még lehet, hogy van, aki kap.