1. Main

Lemma – (Primitív rekurzív függvények reprezentálhatósága) – Ha Γ a PA egy pr. rekurzív bővítése és $R(x_1, ..., x_n)$ pr. rekurzív számelméleti reláció, akkor létezik olyan r n-VÁLTOZÓS FORMULA, hogy minden $x_1, ..., x_n$ számra:

$$R(x_1, ..., x_n) \to \Gamma \vdash R(x_1, ..., x_n) \longleftrightarrow \Pr_{\Gamma} r[17 \to Z(x_1), ..., ... \to Z(x_n)]$$

és

$$\sim R(x_1, ..., x_n) \to \Gamma \vdash\sim R(x_1, ..., x_n) \longleftrightarrow \Pr_{\Gamma} \mathrm{Neg}\, r[17 \to Z(x_1), ..., .. \to Z(x_n)]$$

ahol $\Pr_\Gamma$ az az egyváltozós számelméleti reláció, ami pontosan akkor igaz egy kódra, ha amit kódol, akkor az levezethető Γ-ból. (Tehát a levezethetőség-igazság szempontjából a pr. relációk problémamentesek.)

(Bizonyítás vázlat: $R(x_1, ..., x_n) = \varphi(x_1, ..., x_n) = 0$ definívcióval van értelmezve, ahol φ pr. számlemeti függvény, amelynek felépítésére vontkozó indukció megfelelő: 0, f, rekurzió-indukció, helyettesítés.)

Lemma – (Diagonalizációs lemma) – Ha Γ a PA egy pr. rekurzív bővítése, akkor létezik olyan egybváltozós $A(x)$ reláció és ennek r kódja, amelyre teljesül, hogy minden x számra:

$$\sim (x \Pr_{\Gamma}(17\,\mathrm{Gen}\, r)) \to \Gamma \vdash A(x) \longleftrightarrow \Pr_{\Gamma} r[17 \to Z(x)]$$

és

$$x \Pr_{\Gamma}(17\,\mathrm{Gen}\, r) \to \Gamma \vdash\sim A(x) \longleftrightarrow \Pr_{\Gamma} \mathrm{Neg}\, r[17 \to Z(x)]$$

Bizonyítás. Legyen

$$Q(x, y) :=\sim (x \Pr_{\Gamma} y[19 \to Z(y)])$$

ekkor a reprezentációs tétel miatt létezik olyan q kód, mely egy KÉTVÁLTOZÓS RELÁCIÓT kódok, hogy

$$Q(x, y) \to \Gamma \vdash Q(x, y) \longleftrightarrow \Pr_{\Gamma} q[17 \to Z(x), 19 \to Z(y)]$$

és

$$\sim Q(x, y) \to \Gamma \vdash\sim Q(x, y) \longleftrightarrow \Pr_{\Gamma} \mathrm{Neg}\, q[17 \to Z(x), 19 \to Z(y)]$$

Most lekötjük az első változóját:

$$p := 17\,\mathrm{Gen}\, q$$

és az ennek a kódnak megfelelő számnevet behelyettesítjük a q MÁSDIK VÁLTOZÓJÁBA (y-ba):

$$r := q[19 \to Z(p)]$$

Ekkor tehát:

$$p[19 \to Z(p)] = (17\,\mathrm{Gen}\, q)[19 \to Z(p)] = (17\,\mathrm{Gen}\, q[19 \to Z(p)]) = 17\,\mathrm{Gen}\, r$$

Mi történt? Elkészítettük a következő mondat formális megfelelőjét:

> „A formula, amit úgy kapunk, hogy az ‚A formula, amit úgy kapunk, hogy az y formula nevét az egyetlen változójába helyettesítjük, nem levezethető.' formula nevét az egyetlen változója helyére helyettesítjük nem levezethető."

Mi lesz igaz erre?

1. Ha megcsináljuk, amit mond, akkor ugyanazt kapjuk.
2. Saját magáról beszél.
3. Ha igaz, akkor nem levezethető. Ha hamis, akkor levezethető.

Tétel – Gödel első nemteljességi tétele – FORMULÁK egy Γ primitív rekurzív, ω-KONZISZTENS halmazára létezik olyan r OSZTÁLYJEL, hogy

$$\sim \underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}\,(v\,\mathrm{Gen}\,r) \text{ és } \sim \underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}\,\mathrm{Neg}(v\,\mathrm{Gen}\,r)$$

ahol v az r SZABAD VÁLTOZÓJA.

Bizonyítás. Nyilván $(17\,\mathrm{Gen}\,r)$ lesz ez és ez egy formulát kódol, ami $\forall x, A(x)$ alakú, ami a G Gödel-mondat.

1. Indirekten tegyük fel, hogy G levezethető Γ-ból. Ekkor van olyan n szám, amely a levezetését kódolja, így

$$n\underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}(17\,\mathrm{Gen}\,r)) \to \Gamma \vdash A(n) \longleftrightarrow \underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}\,\mathrm{Neg}\,r[17 \to Z(n)]$$

a diaginalizációs lemma miatt. De ekkor G, mint egy univerzális állítás levezethető:

$$\underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}(17\,\mathrm{Gen}\,r))$$

vagy

$$\Gamma \vdash \forall x, A(x)$$

azaz minden x-re:

$$\underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}\,r[17 \to Z(x)])$$

így az $Z(n)$ számnévre is:

$$\underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}\,r[17 \to Z(n)])$$

ami ellentmond annak, hogy

$$\underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}\,\mathrm{Neg}\,r[17 \to Z(n)].$$

2. Indirekten tegyük fel, hogy G tagadása levezethető, azaz

$$\underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}\,\mathrm{Neg}(17\,\mathrm{Gen}\,r)$$

1.-ben bizonyítottuk, hogy $\sim \mathrm{Pr}_{\Gamma}\,(17\,\mathrm{Gen}\,r)$. Az azt jelenti, hogy akármilyen n természetes számra

$$\sim n\,\underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}\,(17\,\mathrm{Gen}\,r)$$

Van tehát egy olyan $A(x)$ predikátum (ez az r), amelyre az igaz, hogy minden n-re $A(n)$ levezethető, ugyanis ezt mondja a diagonalizációs lemma:

$$\sim (n\underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}(17\,\mathrm{Gen}\,r)) \to \Gamma \vdash A(n) \longleftrightarrow \underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}\,r[17 \to Z(n)]$$

ahonnan:

$$\underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}\,r[17 \to Z(n)]$$

de az indirekt feltevés miatt a generalizációjának a tagadása levezethető:

$$\underset{\Gamma}{\mathrm{Pr}}\,\mathrm{Neg}(17\,\mathrm{Gen}\,r)$$

□