Matematika Módszerei Gyakorló Feladatsor

1. **(Állításlogikai feladat)**
   Egy szigeten lovagok (akik mindig igazat mondanak) és lókötők (akik mindig hazudnak) élnek. Találkozol három szigetlakóval: A-val, B-vel és C-vel.

   - A azt mondja: „Mindhárman lókötők vagyunk."
   - B azt mondja: „Pontosan egy lovag van közöttünk."

   Logikai érveléssel határozza meg, hogy A, B és C közül ki lovag és ki lókötő!

2. **(Kvantoros következtetések)**
   Érvényes-e az alábbi következtetés? Premisszák:

   (a) Akinek leégett a háza, az hajléktalan.
   (b) Akinek leégett a háza, annak fizet a biztosító.
   (c) A biztosító egyetlen hajléktalannak sem fizet.

   Konklúzió: Senkinek sem égett le a háza

3. **(Kvantorok tagadása)**
   Igazak-e az alábbi állítások, írja fel a tagadásukat!

   (a) $\exists x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R}\ x^y \leq y$
   (b) $\exists x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R}\ x^y > y$
   (c) $\forall a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\ \exists b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\ a + b^2 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

4. **(Számelmélet, logikai következtetések)**
   Igazolja az alábbi állításokat!

   (a) Bármely n egész szám esetén az $n(n+1)(n+2)$ szorzat osztható 6-tal.
   (b) Két páratlan egész szám négyzetének összege nem négyzetszám.

5. **(Számelmélet, logikai következtetések)**
   Bizonyítsa be, hogy két tetszőleges egész szám összegének négyzete akkor és csak akkor páros, ha a két szám azonos paritású (mindkettő páros vagy mindkettő páratlan)!

6. **(Kombinatorika)**
   Egy dobozban 10 piros és 5 zöld golyó van. Visszatevés nélkül kiveszünk 4 golyót. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a kivett golyók között **legfeljebb** 2 piros legyen?

7. **(Kombinatorika)**
   Hányféleképpen lehet egy 5 kérdéses, igaz/hamis típusú tesztet kitölteni úgy, hogy **legfeljebb** 2 válasz legyen „igaz"? Ha annak a valószínűsége, hogy az igazba belenyúlunk picit több, mint $0,5$, mert az iagazt gyakrabban adja fel a tanár, mondjuk 0.6, akkor mi annak a valószínűsége, hogy **legfeljebb** 2 válasz legyen „igaz"?

8. **(Teljes indukció: oszthatóság)**
   Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy minden $n \geq 0$ egész számra igaz, hogy $11^{2n+1} + 3^{2n+1}$ osztható 14-gyel!

9. **(Kétszeres leszámlálás)**
   Vezesse le kétszeres leszámlálás („double counting") segítségével azt a binomiális együtthatókra vonatkozó azonosságot, amelyet a következő gondolatmenet bizonyít: „Válasszunk ki egy n fős csoportból egy k fős bizottságot, majd a bizottságból egy elnököt." Írja fel a levezetés mindkét oldalát és a kapott azonosságot!

10. **(Teljes indukció: egyenlőtlenség)**
    Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy minden $n \geq n_0$ egész számra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$n! > 3^n$$