Gyakorló feladatok, 2. zh, Vill. 2022. A

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat idő tartama 90 perc.)

1. Konvergens-e az alábbi sorozat és ha igen, mi a határértéke?

$$\sqrt[n^2]{n^4+2n^2+4}$$

MO. Jelölje $(a_{n_k}) \underset{\to}{\subseteq} (a_n)$, hogy (a_{n_k}) részsorozata (a_n)-nek. Van olyan N természetes szám, hogy minden $n > N$ természetes számra az alábbi egyenlőtlenségek érvényesek:

$$1 = \sqrt[n^2]{1} = \sqrt[n^2]{n^4+2n^2+4} \leq \sqrt[n^2]{n^4+n^4} = \sqrt[n^2]{2n^4} = \sqrt[n^2]{2}\,\sqrt[n^2]{n^2}\,\sqrt[n^2]{n^2} \to 1\cdot 1 = 1$$

mivel $\sqrt[n^2]{2} \underset{\to}{\subseteq} \sqrt[n]{2} \to 1$ és $\sqrt[n^2]{n^2} \underset{\to}{\subseteq} \sqrt[n]{n} \to 1$. Innen a rendőrelv szerint a sorozat határértéke 1.

2. Létezik-e az alábbi határérték, és ha igen, mennyi az értéke?

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^{\sin x}-1}{x^2}$$

MO.

$$\frac{e^{\sin x}-1}{x^2} = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}} \underset{\substack{\sin x \\ \downarrow \\ 0}}{} \underset{\substack{x \\ \downarrow \\ 0}}{} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{\sin x}{x}} \underset{\substack{x \\ \downarrow \\ 0}}{} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{\frac{1}{x}} \underset{\substack{x \\ \downarrow \\ 0-}}{} \xrightarrow[x\to 0-]{} 1\cdot 1\cdot(-\infty) = -\infty$$

ahol felhasználtuk, hogy a határérték invariáns a kompozícióra és hogy $\lim\limits_{\vartheta\to 0} \frac{e^{\vartheta}-1}{\vartheta} = 1$.

3. Hol vannak szakadásai az alábbi valós függvénynek és ezek milyen osztályú szakadások (azaz első- v. másodfajú, ugrás, megszüntethető, végtelen vagy lényeges szakadások-e ezek)?

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}+1}{x+1}$$

MO. Legyen $f(x) = \frac{e^{-1/x^2}+1}{x+1}$. Ekkor világos, hogy $\operatorname{discont}(f) = \{-1; 0\}$, mert máshol f folytonos, ezekben a pontokban pedig nem értelmes.

$$\lim_{x\to -1-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}+1}{x+1} = \frac{e^{-1}+1}{0-} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}+1}{x+1} = \frac{e^{-1}+1}{0+} = +\infty$$

legalább az egyik oldali határérték nem véges, azaz -1-ben másodfajú szakadása van f-nek, és mindegyik létezik és legalább az egyik végtelen, azaz ez egy *végtelen* szakadás. Felhasználtuk, hogy $e^{-\frac{1}{x^2}}+1$ folytonos.

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}+1}{x+1} = \frac{0+1}{1} = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}+1}{x+1} = \frac{0+1}{1} = 0$$

Mivel a két egyoldali határérték véges, a szakadás elsőfajú. Mivel egyenlők, ez egy *megszüntethető szakadás*. Felhasználtuk, hogy ha $x \to 0$, akkor $-1/x^2 \to -\infty$ és ha $\vartheta \to -\infty$, akkor $e^{\vartheta} \to 0$.

4. Mely intervallumokon monoton az alábbi valós függvény és hol van lokális szélsőértéke?

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$$

MO. Legyen $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$, ekkor persze $x^2+3x+2=0$ esetén nem értelmes f, így $\mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1;-2\}$.

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2} = \frac{(x+2)^2}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+2}{x+1} \rightsquigarrow f'(x) = \frac{(x+1)-(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0$$

azaz minden intervallumon szigorúan monoton csökkenő a függvény és mivel nyílt az értelmezési tartomány, ezért nincs szélsőértéke.

5. Hány zérushelye van az alábbi függvénynek a valós számok halmazán?

$$2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$

MO. Legyen $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$. $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2-5x+6) = 6(x-2)(x-3)$. f' pozitív a $(-\infty;2)$ és a $(3;+\infty)$ intervallumokon, azaz ezeken f szigorúan monoton nő, és negatív a $(2;3)$ intervallumon, azaz itt szigorúan monoton csökken. Mivel folytonos és 2 előtt nő, utána csökken, 2-ben lokális maximuma van, és 3 előtt csökken, utána nő, azaz 3-ban lokális minimuma van. $f(2) = 29$, ezért $(-\infty;2]$-ben van zérushelye, felhasználva a Bolzano-tételt és hogy $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$. És $(-\infty;2]$-ben egyetlen zérushelye van, mert ezen az intervallumon f injektív. $f(3) = 28$ abszolút minimumértéke f-nek, ha a $(2;+\infty)$ intervallumra szűkítjük le, azaz nincs itt zérushelye f-nek. Tehát f-nek egyetlen egy zérushelye van.

6.1. **a)** $\lim\limits_{x\to 0} x\cos x = ?$, **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\cos x = ?$

6.2. Igaz-e, hogy ha $(a_n + b_n)$ konvergens és (a_n) is konvergens, akkor (b_n) is konvergens?

6.3. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ olyan függvény, hogy $\lim\limits_{0} f = 0$, akkor $f(0) = 0$?

MO. 6.1. a) Korlátos szor nullához tartó, így a nullához tart. b) Legyen $f(x) = x\cos x$, $x_n = n2\pi$ és $x'_n = \pi + n2\pi$. Ekkor $x_n, x'_n \to +\infty$, de $f(x_n) = n2\pi \cdot 1 \to \infty \neq -\infty \leftarrow (\pi + n2\pi)(-1) = f(x'_n)$. Ezért a függvényhatárérték Heine-féle definíciója miatt nem létezik határértéke f-nek ∞-ben.
6.2. Ha (a_n) konvergens, akkor $(-a_n)$ is, így $(b_n) = (a_n + b_n - a_n) = (a_n + b_n) + (-a_n)$, így hivatkozva arra, hogy a konvergencia invariáns az alapműveletekre, (b_n) is konvergens.
6.3. Nem igaz. $f(x) = 0$, ha $x \neq 0$ és $f(0) = 1 \neq 0$ triviális ellenpélda.

iMSc. a) Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Igaz-e, hogy ha f folytonos u-ban, akkor

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in \mathbf{R}\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

b) Igaz-e fordítva?

MO. a) Nem. Legyen $f(x) = x^2$ és $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$. Legyen $\varepsilon := 1$ és $\delta > 0$ tetszőleges. Ekkor az archimedészi axióma miatt van olyan n természetes szám, hogy $n > 1/\delta$. Legyen $x_n = n + \frac{1}{2n}$, $y_n = n$. Ekkor $|n + \frac{1}{2n} - n| = \frac{1}{2n} < \delta$ és $|(n + \frac{1}{2n})^2 - n^2| = 1 + \frac{1}{4n^2} > 1 = \varepsilon$. b) Igaz. Legyen $y = u$.