

11. hét / Integrálás /

(^{HF} – javasolt házi feladat, * – nem kötelező, gondolkodtató feladat, B – Babcsányi feladatgyűjtemény I., T – Thomas-féle kalkulus I.)

Alapintegrálokra visszavezethető feladatok

1. (Elemi átalakításokkal alapintegrálra vezető feladatok) Végezzük el az alábbi határozatlan integrálásokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \sqrt[3]{x^4} + 1 \, dx, & \text{b)} \int \sqrt{x \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x}}} \, dx, & \text{c)}^{\text{HF, B12.5}} \int \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} \, dx, \\ \text{d)} \int \ln(7 \cdot e^{x^2+4}) \, dx, & \text{e)}^* \int \frac{9 - \sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx, & \text{f)}^{\text{HF, B12.6}} \int 2e^x + \frac{5}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} \, dx, \\ \text{g)} \int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} \, dx, & \text{h)}^{\text{HF}} \int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} \, dx, & \text{*i)}^{\text{HF, B12.13}} \int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} \, dx \text{ (kellenek a 2.-ban tanultak)} \end{array}$$

2. (Lineáris argumentumú függvény primitív függvénye) Végezzük el az alábbi határozatlan integrálásokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int 3e^{2x+7} \, dx, & \text{b)} \int \frac{1}{3} \sin(2x) \, dx, & \text{c)}^{\text{HF, B12.14}} \int (2x-3)^{100} \, dx, \\ \text{d)} \int \frac{1}{1+(x-5)^2} \, dx, & \text{e)} \int \frac{3}{4-x} \, dx, & \text{f)}^{\text{HF, B12.18}} \int \sqrt[3]{1-3x} \, dx \end{array}$$

3. („A primitív függvények csak additív konstansban térnek el egymástól”) Deriválással vagy integrálással döntjük el, hogy igazak vagy hamisak-e az alábbi állítások! (C tetszőleges valós szám.)

$$\begin{array}{ll} \text{a)}^{\text{T4.8.60}} \int \frac{1}{(1+x)^2} \, dx = \frac{x}{x+1} + C, & \text{b)} \int (2x+1)^2 \, dx = \frac{8x^3+12x^2+6x}{6} + C, \\ \text{c)}^{\text{HF, T4.8.64b}} \int \sqrt{2x+1} \, dx = \sqrt{x^2+x} + C \end{array}$$

4. (Polinom vagy egész rész leválasztásával alapintegrálra vezető feladatok) Végezzük el az alábbi határozatlan integrálásokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{x-3}{x+2} \, dx, & \text{b)} \int \frac{2x-1}{x+3} \, dx, & \text{c)}^{\text{HF}} \int \frac{5x+4}{x-1} \, dx, \\ \text{d)} \int \frac{x^2+2}{x-1} \, dx, & \text{e)}^{\text{HF}} \int \frac{x^2-7}{x^2+1} \, dx, & \text{f)}^{\text{HF}} \int \frac{3x^2+1}{x+1} \, dx \end{array}$$

5. (Linearizáló formulák) Végezzük el az alábbi határozatlan integrálásokat!

$$\text{a)} \int \sin^2 x \, dx, \quad \text{b)} \int \text{sh}^2 x \, dx, \quad \text{c)}^{\text{HF}} \int \cos^2(3x) \, dx$$

6. (Határozott intergál, Newton–Leibniz-formula, alapok) Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx, & \text{b)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx, & \text{c)}^{\text{HF}} \int_2^3 \frac{4}{x-1} \, dx, \\ \text{d)} \int_{-1}^1 |x|^3 \, dx, & \text{e)}^* \int_{-2}^2 x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \, dx, & \text{*f)}^{\text{HF}} \int_0^{2/\pi} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \, dx \end{array}$$