

13. hét / Integrálás II/

(^{HF} – javasolt házi feladat, * – nem kötelező, gondolkodtató feladat, B – Babcsányi feladatgyűjtemény I., T – Thomas-féle kalkulus I.)

1. (Az integrálfüggvény deriválása)

a) Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket!

$$\text{a1)} \quad \left(\int_{t=0}^x \text{sh}(t) dt \right)', \quad \text{a2)} \quad \left(\int_{t=0}^{x^2} \text{ch}(t) dt \right)' \quad (x \geq 0) \quad \text{a3)}^{\text{HF}} \quad \left(\int_{t=-1}^{\text{sh}(x)} e^t dt \right)'$$

b) Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket szélsőérték és monotonitás szempontjából!

$$\text{b1)} \quad \int_0^x f(t) dt, \text{ ahol } f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t > 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}, \quad \text{b2)}^{\text{HF}} \quad \int_0^x f(t) dt, \text{ ahol } f(t) = \begin{cases} t \ln t, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

c) Határozzuk meg az alábbi függvények nullában eltűnő integrálfüggvényét és adjuk meg ezek derivált-függvényét!

$$\text{c1)} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 2, & x \in (1, 2] \end{cases}, \quad \text{c2)}^{\text{HF}} \quad g(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in (1, 2] \end{cases}.$$

2. (Helyettesítéssel integrálás) Végezzük el az alábbi határozatlan integrálásokat!

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx, & \text{b)} \quad & \int \frac{\ln x}{x} dx, & \text{c)}^{\text{HF, B12.31}} \quad & \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx, \\ \text{d)} \quad & \int \cos^3 x dx, & \text{e)} \quad & \int \sin^5 x dx, & \text{f)}^{\text{HF}} \quad & \int \frac{4x + 6}{x^2 + 3x - 10} dx \\ \text{g)} \quad & \int \text{tg } x dx, & \text{h)} \quad & \int \frac{\sin(\text{arctg } x)}{1 + x^2} dx, & \text{i)}^{\text{HF, B12.48}} \quad & \int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx \end{aligned}$$

3. (Parciális integrálás) Végezzük el az alábbi határozatlan integrálásokat!

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int x \cos x dx, & \text{b)} \quad & \int (2x + 1) \text{sh}(3x - 4) dx, & \text{c)}^{\text{HF, B12.78}} \quad & \int x^2 \sin(2x) dx, \\ \text{d)} \quad & \int \frac{\ln x}{x} dx, & \text{e)} \quad & \int \cos x e^x dx, & \text{f)}^{\text{HF, B12.89}} \quad & \int e^x \sin^2 x dx \\ \text{g)} \quad & \int \ln x dx, & \text{h)} \quad & \int \arctg \frac{1}{x} dx, & \text{i)}^{\text{HF, B12.92}} \quad & \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx \end{aligned}$$

4.* (Görbék határolta terület) Határozzuk meg az alábbi görbék, függvénygörbék által határolt korlátos síkidom területét!

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & f(x) = \sqrt[3]{x}, g(x) = x^3 & \text{b)}^{\text{HF, B13.70}} \quad & f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}, g(x) = \frac{1}{4}x^2 \\ \text{c)} \quad & y = x^2, y = \frac{1}{4}x^2, y = 4 & \text{d)}^{\text{HF, B13.72}} \quad & y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = x \end{aligned}$$