

14. hét / inpropius /

(^{HF} – javasolt házi feladat, * – nem kötelező, gondolkodtató feladat, B – Babcsányi feladatgyűjtemény I., T2 – Thomas-féle kalkulus II.)

1. (Impropius integrálok) Végezzük el az alábbi integrálásokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} dx, & \text{b)} \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} dx, & \text{c)}^{\text{HF, T2 8.8.21}} \int_{-\infty}^0 x e^x dx, \\ \text{d)} \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx, & \text{e)} \int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx, & \text{f)}^{\text{HF, T2 8.8.33}} \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} dx \end{array}$$

2. (Impropius integrálok) Döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi integrálok!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_1^{\infty} \frac{y^2+3}{y^2+1} dy, & \text{b)} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+t+3} dt, & \text{c)}^{\text{HF, T2 8.8.51}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^6+1}} ds, \\ \text{d)} \int_{-10}^{\infty} \frac{1}{e^{-x^2}} dx, & \text{e)}^* \int_{-1}^1 \ln|x| dx, & \text{f)}^{\text{HF, T2 8.8.55}} \int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x} dx \end{array}$$

3.* (Alkalmazások) (T2.6.6 körül)

a) Egy $m = 1 \text{ kg}$ tömegű $l = 1 \text{ m}$ hosszú lánc az asztalon hever, ahonnan egyetlen láncszem lóg le. A nagyon kicsi súrlódás miatt már ez a láncszem is lehúzza a láncot. Mekkora munkát végez a súlyerő ezen a láncon, miközben leesik az asztalról? (Az x magasság szerint változó erő munkája:

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$

Az $F(x)$ súlyerő a lelógó rész x hosszának függvényében: $F(x) = \frac{x}{l} m \cdot 10$.)

b) Egy víz alatti téglalap alakú falra ható erőt az

$$F = a_0 \int_{h_1}^{h_2} p(x) dx$$

képlet adja, ahol $p(x)$ az x mélységben lévő víznyomás, a_0 a fal szélessége, h_1, h_2 a fal aljának és tetejének a mélysége. Mekkora erő hat egy 1 m széles, $h = 2 \text{ m}$ mélységig a vízbe nyúló falra? (A víznyomás x méter mélységben $p(x) = 10000x \text{ Pa}$)

c) Egy eredetileg 70 kg tömegű homokzsákot 6 m magasságba húznak fel egyenletes sebességgel. Szintén egyenletes sebességgel homok pereg ki belőle, melyből 6 m magasságban már csak az eredeti mennyiség fele marad. Mennyi munkát végeztünk az emelés alatt? (A változó $G(x)$ súlyerő munkája

$$W = \int_{h_1}^{h_2} G(x) dx,$$

ahol az x magasságban lévő $m(x)$ tömeg súlya $G(x) = 10 \cdot m(x)$.

d) Egy rácsban az $(1, 0)$ pontban stabil egyensúlyi helyzetben lévő részecskére kimozdítás után az $(x, 0)$ pontban $F(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ erő hat. Mennyi munkára van szükség ahhoz, hogy a részecskét a rácsból eltávolítsuk? (

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx,$$

$x_1 = 1, x_2 = \infty$.)

(^{HF} – javasolt házi feladat, * – nem kötelező, gondolkodtató feladat, B – Babcsányi feladatgyűjtemény I., T2 – Thomas-féle kalkulus II.)

1. (Racionális törtfüggvények integrálása – elsőfokú tényezőkre bomló nevezők) Végezzük el az alábbi integrálásokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a)}^{\text{T2 8.3.11}} & \int \frac{x+4}{x^2+5x-6} dx, & \text{b)}^{\text{T2 8.3.13}} & \int \frac{y}{y^2-2y-3} dy, & \text{c)}^{\text{HF, T2 8.3.13}} & \int \frac{x+3}{2x^3-8x} dx, \\ \text{d)}^{\text{*T2 8.3.29}} & \int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x} dx, & \text{e)}^{\text{*T2 8.3.31}} & \int \frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2} dx, & \text{f)}^{\text{HF, T2 8.3.20}} & \int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2} dx \end{array}$$

2.* (Racionális törtfüggvények integrálása – irreducibilis tényezőket tartalmazó nevezők) Végezzük el az alábbi integrálásokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a)}^{\text{T2 8.3.23}} & \int \frac{y^2+2y+1}{y^2+1} dy, & \text{b)}^{\text{T2 8.3.22}} & \int \frac{3t^2+t+4}{t^3+t} dt, & \text{c)}^{\text{HF, T2 8.3.26}} & \int \frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2} ds, \\ \text{d)} & \int \frac{1}{(x^2+4)^2} dx, & \text{e)}^{\text{HF}} & \int \frac{x+1}{(x^2+3)^2} dx, & \text{f)}^{\text{HF}} & \int \frac{x^2+18x+80}{(x^2+9)^2} dx \end{array}$$

3.* (Integrálás helyettesítéssel II.) Végezzük el az alábbi határozatlan integrálásokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a)}^{\text{B 12.125}} & \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx, & \text{b)}^{\text{B 12.124}} & \int \sqrt{(x^2-1)^3} dx, & \text{c)}^{\text{HF, B 12.127}} & \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx, \\ \text{d)}^{\text{B12.122}} & \int x\sqrt{x+1} dx, & \text{e)}^{\text{B12.141}} & \int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} dx, & \text{f)}^{\text{HF, B12.175}} & \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx \\ \text{g)}^{\text{B12.157}} & \int \sqrt{e^x-1} dx, & \text{h)}^{\text{B12.158}} & \int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx, & \text{i)}^{\text{HF, B12.173}} & \int \frac{6}{e^x-3} dx \end{array}$$

4.* (Helyettesítés a határozott integrálban) Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx & \text{b)} & \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx & \text{c)} & \int_{-1}^0 \frac{3}{e^x+1} dx \end{array}$$