

A deriválás alkalmazásai 2.

1. Határozza meg az alábbi határértékeket L'Hospital szabállyal! (Ha $f, g \in \text{Diff}^{(n+1)}(a, b)$, $\forall i = 0 \dots n \exists \lim_a f^{(i)} = \lim_a g^{(i)} = 0$ és $\exists \lim_a \frac{f^{(n+1)}}{g^{(n+1)}}$, akkor $\exists \lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f^{(n+1)}}{g^{(n+1)}}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = ?,$$

$$\text{gy.}:: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } 5x}{2x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin(x^2))}{x^2} = ?,$$

$$\text{gy.}:: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^3} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = ?,$$

$$\text{gy.}:: \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = ?,$$

$$\text{gy.}:: \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = ?,$$

$$\text{gy.}:: \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x^2}} = ?$$

2. Vizsgáljuk meg abszolút szélsőérték szempontjából az alábbi függvényeket!

$$f : [0, e] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} x \ln x, & x \in (0, e] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{gy.}:: f : [-1; 3] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^3 - 12x$$

3. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények egyenletesen folytonosak a valós számok halmazán!

(1. Heine-tétel: Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény egyenletesen folytonos. 2. Ha $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ deriválható és f' korlátos, akkor f egyenletesen folytonos I -n. 3. Lipschitz-es függvény egyenletesen folytonos (lásd 2. zh. iMSc feladat).)

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$\text{gy.}:: f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} x \arctg \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

4. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények nem egyenletesen folytonosak a pozitívokon!

$$1/x, \quad \text{gy.}:: \sin(1/x)$$