11. hét / improprius /

(HF – *javasolt házi feladat,* * – *nem kötelező, gondolkodtató feladat,* B – *Babcsányi feladatgyűjtemény I.*, T2 – *Thomas-féle kalkulus II.)*

1. *(Improprius integrálok)* Végezzük el az alábbi integrálásokat!

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}\,dx$, c)$^{\mathrm{HF,T2\,8.8.21}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$,

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$, e) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$, f)$^{\mathrm{HF,T2\,8.8.33}}$ $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx$

2. *(Improprius integrálok)* Döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi integrálok!

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{y^2+3}{y^2+1}\,dy$, b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{t^2+t+3}\,dt$, c)$^{\mathrm{HF,T2\,8.8.51}}$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^6+1}}\,ds$,

d) $\displaystyle\int_{-10}^\infty \frac{1}{e^{-x^2}}\,dx$, e)$^{\nparallel}$ $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$, f)$^{\mathrm{HF,T2\,8.8.55}}$ $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,dx$

3.* *(Alkalmazások)* (T2.6.6 körül)

a) Egy $m = 1\,kg$ tömegű $l = 1\,m$ hosszú lánc az asztalon hever, ahonnan egyetlen láncszem lóg le. A nagyon kicsi súrlódás miatt már ez a láncszem is lehúzza a láncot. Mekkora munkát végez a súlyerő ezen a láncon, miközben leesik az asztalról? (Az x magasság szerint változó erő munkája:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Az $F(x)$ súlyerő a lelógó rész x hosszának függvényében: $F(x) = \frac{x}{l}m \cdot 10$.)

b) Egy víz alatti téglalap alakú falra ható erőt az

$$F = a_0 \int_{h_1}^{h_2} p(x)\,dx$$

képlet adja, ahol $p(x)$ az x mélységben lévő víznyomás, a_0 a fal szélessége, h_1, h_2 a fal aljának és tetejének a mélysége. Mekkora erő hat egy $1\,m$ széles, $h = 2\,m$ mélységig a vízbe nyúló falra? (A víznyomás x méter mélységben $p(x) = 10000x\,Pa$)

c) Egy eredetileg $70\,kg$ tömegű homokzsákot $6\,m$ magasságba húznak fel egyenletes sebességgel. Szintén egyenletes sebességgel homok pereg ki belőle, melyből $6\,m$ magasságban már csak az eredeti mennyiség fele marad. Mennyi munkát végeztünk az emelés alatt? (A változó $G(x)$ súlyerő munkája

$$W = \int_{h_1}^{h_2} G(x)\,dx,$$

ahol az x magasságban lévő $m(x)$ tömeg súlya $G(x) = 10 \cdot m(x)$.

d) Egy rácsban az $(1,0)$ pontban stabil egyensúlyi helyzetben lévő részecskére kimozdítás után az $(x,0)$ pontban $F(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ erő hat. Mennyi munkára van szükség ahhoz, hogy a részecskét a rácsból eltávolítsuk? (

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx,$$

$x_1 = 1$, $x_2 = \infty$.)

($^{\text{HF}}$ – *javasolt házi feladat,* * – *nem kötelező, gondolkodtató feladat,* B – *Babcsányi feladatgyűjtemény I.*, T2 – *Thomas-féle kalkulus II.)*

1. *(Racionális törtfüggvények integrálása – elsőfokú tényezőkre bomló nevezők)* Végezzük el az alábbi integrálásokat!

a)$^{\text{T2 8.3.11}}$ $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,dx,$ b)$^{\text{T2 8.3.13}}$ $\displaystyle\int_4^8 \frac{y}{y^2-2y-3}\,dy,$ c)$^{\text{HF,T2 8.3.13}}$ $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^3-8x}\,dx,$

*d)$^{\text{T2 8.3.29}}$ $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\,dx,$ *e)$^{\text{T2 8.3.31}}$ $\displaystyle\int \frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2}\,dx,$ f)$^{\text{HF,T2 8.3.20}}$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

2.* *(Racionális törtfüggvények integrálása – irreducibilis tényezőkez tartalmazó nevezők)* Végezzük el az alábbi integrálásokat!

a)$^{\text{T2 8.3.23}}$ $\displaystyle\int \frac{y^2+2y+1}{y^2+1}\,dy,$ b)$^{\text{T2 8.3.22}}$ $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}\,dt,$ c)$^{\text{HF,T2 8.3.26}}$ $\displaystyle\int \frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2}\,ds,$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx,$ e)$^{\text{HF}}$ $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+3)^2}\,dx,$ f)$^{\text{HF}}$ $\displaystyle\int \frac{x^2+18x+80}{(x^2+9)^2}\,dx$

3.* *(Integrálás helyettesítéssel II.)* Végezzük el az alábbi határozatlan integrálásokat!

a)$^{\text{B 12.125}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx,$ b)$^{\text{B 12.124}}$ $\displaystyle\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx,$ c)$^{\text{HF, B 12.127}}$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx,$

d)$^{\text{B12.122}}$ $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx,$ e)$^{\text{B12.141}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx,$ f)$^{\text{HF, B12.175}}$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

g)$^{\text{B12.157}}$ $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,dx,$ h)$^{\text{B12.158}}$ $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx,$ i)$^{\text{HF, B12.173}}$ $\displaystyle\int \frac{6}{e^x-3}\,dx$

4.* *(Helyettesítés a határozott integrálban)* Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{3}{e^x+1}\,dx$