Gyakorló feladatok, 1. zh, Vill. 2022. A

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat idő tartama 90 perc.)

1. Igazolja, hogy ha $A \subseteq B \cap C$, akkor $(A \cup B) \cap (A \cup C) = B \cap C$! Igaz-e fordítva?

MO. Tetszőleges x-re, ha $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, akkor $x \in A \cup B$ és $x \in A \cup C$. Ha $x \in A$, akkor a *feltétel* miatt $x \in A \subseteq B \cap C$. Ha $x \notin A$, akkor $x \in B$ és $x \in C$, így $x \in B \cap C$. A másik irányban, ha $x \in B \cap C$, akkor $x \in B$ és $x \in C$. De ekkor x a bővebb halmazokban is benne van: $x \in A \cup B$ és $x \in A \cup C$, így $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Valójában, mivel $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$, ezért elég ezt belátni: $A \subseteq L \Longleftrightarrow A \cup L = L$, hiszen $L = B \cap C$ helyettesítéssel megkapható az állítás. Az előbbi pedig igaz minden A-ra és L-re: ha $x \in A \cup L$, akkor vagy $x \in L$ és kész, vagy $x \in A \subseteq L$ és kész. Az egyenlőség másik iránya triviálisan következik az unió definíciójából. Fordítva: ha $x \in A \subseteq A \cup L = L$ és kész.

2. Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ két tetszőleges térvektor! Adja meg a λ valós szám összes olyan értékét, amire $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}$

a) merőleges, ha $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \neq 0$ és $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$,

b) párhuzamos.

MO. a) $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})(\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \lambda(1-\lambda)\mathbf{b}^2 + \mathbf{ab} = \mathbf{a}^2 + \lambda(1-\lambda)\mathbf{b}^2 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$.
b) A két vektor párhuzamosságával ekvivalens, hogy vektoriális szorzatuk nulla:

$$0 = (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) = (1-\lambda)\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \lambda\mathbf{b} \times \mathbf{a} = (1-\lambda)\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \lambda\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1-2\lambda)\mathbf{a} \times \mathbf{b} =$$

Innen, $\lambda = \begin{cases} 1/2, & \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0 \\ \text{tetszőleges}, & \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \end{cases}$

3. Adjuk meg annak az f egyenesnek az egyenletét, amelyik merőlegesen metszi az $S_1 : x+y+z = 1$ és $S_2 : x - y + z = 1$ egyenletű síkok metszésvonalát és áthalad az $P(0,1,1)$ ponton!

MO. A metszésvonalhoz, kivonva a két egyenletet egymásból, kapjuk, hogy $2y = 0$, azaz a metszésvonal egyenlete: $x = t, y = 0, z = 1-t$, így annak a síknak a normálvektora, amiben f van: $(1,0,-1)$, egyenlete pedig: $S_3 : x - z + 1 = 0$. Ez utóbbinak metszete a metszésvonallal: $(0,0,1)$, ami valójában a három sík metszéspontja is. Innen f egyenlete: $f||(0,1,0)$ és $(0,1,1) \in f$, azaz $f : x = 0, y = 1 + t, z = 0$.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

$$\text{a) } z^2 + \overline{z} = |z|^2 \qquad \text{b) } z^4 - (i-1)z^2 - i = 0$$

MO. a) Algebrai alakban: $z = x + iy$, ahol $x, y \in \mathbf{R}$: $x^2 - y^2 + 2ixy + x - iy = x^2 + y^2 \rightsquigarrow -2y^2 + x + i(2xy - y) = 0$, így a két valós egyenlet: $-2y^2 + x = 0$, $2xy - y = 0$. Tehát $4y^3 - y = 0$, $y_1 = 0$, így $x_1 = 0$, valamint $2y = \pm 1$, így $x = \frac{1}{2}$. A három megoldás: $z_1 = 0$, $z_{23} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$.
b) $w = z^2$, $w^2 - (i-1)w - i = 0 \rightsquigarrow w_1 = i, w_2 = -1$. $z_{12} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_{34} = \pm i$.

5. Számítsuk ki a bikasági sorral ill. a "nullához tartó szor korlátos" lemmára hivatkozva!

$$a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+7^n+1}{7^{n^2}-n^2+\sin^3 n}, \qquad b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n}{2^n+\cos^n n}$$

MO. Jelölje $(a_{n_k}) \underset{\to}{\subset} (a_n)$, hogy (a_{n_k}) részsorozata (a_n)-nek. a)

$$\frac{n^2+7^n+1}{7^{n^2}-n^2+\sin^3 n} = \frac{(n^2/7^{n^2})+(1/7^{n^2-n})+(1/7^{n^2})}{1-(n^2/7^{n^2})+((\sin^3 n)/7^{n^2})} \to \frac{0+0+0}{1-0+0} = 0$$

mert $n^2/7^{n^2} \underset{\to}{\subset} n/7^n \to 0$, $(n << 7^n,)$ $1/7^{n^2-n} \underset{\to}{\subset} 1/7^n \to 0$, $(\sin^3 n)$ korlátos.
b)

$$b_n = \frac{(-2)^n}{2^n+\cos^n n} = \frac{(-1)^n}{1+((\cos^n n)/2^n)}$$

$(\cos^n n)$ korlátos, $b_{2k} \to 1$, $b_{2k+1} \to -1$, így nem tud határértéke lenni, mert ha lenne, akkor minden részsorozatának ugyanoda kéne tartania.

6.1. Melyik igaz? a) $\sup H + \sup K = \sup(H \cup K)$ b) $\max\{\sup H, \sup K\} = \sup(H \cup K)$.

6.2. Igaz-e, hogy ha z megoldása, a $iz^2 = z$ egyeletnek, akkor $\overline{z}$ is.

6.3. Igaz-e, hogy ha $\mathbf{ab} = 0$, akkor $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ legalább az egyike nullvektor?

MO. 6.1. a) Hamis. Legyen $H = K = \{1\}$. Ekkor $\sup H + \sup K = 2 \neq 1 = \sup(H \cup K)$. b) Igaz. $x \in H \cup K \to x \leq \max\{\sup H, \sup K\}$. Wlog $\sup H = \max\{\sup H, \sup K\}$ valamely $\varepsilon > 0$-ra $\sup H - \varepsilon$ olyan, hogy van $y \in [\sup H - \varepsilon, \sup H)$, amire $y \in H \subseteq H \cup K$, azaz $\sup H$ a $H \cup K$-nak is szuprémuma.
6.2. Nem, mert ennek $0, -i$ a megoldásai és ezek nem konjugált párok.
6.3. Nem. $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{b} = \mathbf{j}$, akkor $\mathbf{ij} = 0$, de $i \neq j$.

iMSc. a) Legyen $H, K \subseteq \mathbf{R}$. Igaz-e, hogy ha x izolált pontja $H \cap K$-nak, akkor H-nak is és K-nak is. És fordítva?
b) Van-e olyan (a_n) és (b_n) sorozat, hogy mindkettőnek pontosan két sűrűsödési helye van, de $(a_n + b_n)$-nek pontosan négy?

MO. a) Nem igaz. Legyen $H = [-1, 0], K = [0, 1]$. Ekkor $H \cap K = \{0\}$. Ennek 0 izolált pontja, de egyiknek sem az. Fordítva igaz. $B_\varepsilon(x) \cap H \cap K = \{x\}$, ha $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ olyanok, hogy $B_{\varepsilon_1}(x) \cap H = \{x\}$, $B_{\varepsilon_2}(x) \cap K = \{x\}$, mert $B_\varepsilon(x) \cap H \cap K = B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(x) \cap H \cap K = \{x\} \cap \{x\} = \{x\}$.
b) Igen. Legyen $a_{2k} = 1$, $a_{2k+1} = 2$, $b_{4k} = b_{4k+1} = 10$, $b_{4k+2} = b_{4k+3} = 100$. Ekkor $(a_{4k} + b_{4k}) = (11)$, $(a_{4k+1} + b_{4k+1}) = (12)$, $(a_{4k+2} + b_{4k+2}) = (101)$, $(a_{4k+3} + b_{4k+3}) = (102)$.