2022 Vill. Mat A1 – 1. gyakorlat

Halmazalgebra

1. Igazoljuk, hogy bármely A, B, C halmazra $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. ($\cap, \cup, \subseteq, =$ definíciója, esetszétválasztás.)

gy. $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

hf. $A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Igazoljuk, hogy bármely A, B halmazra $A \cup B = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$. (Feltételes állítások.)

gy. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq C$.

hf. $A \subseteq C \quad \Rightarrow \quad A \cap (B \cup C) = A$.

3. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B halmazra $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. (Alaphalmazra vonatkozó komplementer, De Morgan, indirekt bizonyítás.)

gy. $\overline{A} \cap \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B} \qquad (\overline{A}, \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B})$.

hf. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$.

4. Igazoljuk az ismert azonosságok felhasználásával, hogy tetszőleges A, B, C halmazra $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. ($A \setminus B = A \cap \overline{B}$, disztributív szabályok.)

gy. $K \setminus (K \setminus L) = L \setminus (L \setminus K)$.

hf. $(K \setminus L) \setminus M = (K \setminus M) \setminus (L \setminus M)$.

5. Legyen A, B, C tetszőleges halmazok és
$K = (A \setminus (B \setminus C)) \setminus C$
$L = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
Vizsgáljuk meg, hogy melyik tartalmazás áll fenn

$$K \subseteq L, \qquad L \subseteq K, \qquad L = K; \qquad \text{egyik se.}$$

(Ellenpélda keresés.)

gy. Igaz-e minden A, B, C halmazra, hogy $(A \setminus C) \cup A = C$.

hf. Mi X, ha $A \setminus X = X \setminus A$?

6*. Igazoljuk, hogy tetszőleges A halmazra $\emptyset \subseteq A$. (Üres halmaz, univerzum.)

gy. Legyen $A, B \subseteq U \neq \emptyset$ ($\overline{A}$ az U-ra vonatkozik). Igazoljuk, hogy ha $A \cap \overline{B} = U$, akkor $A \nsubseteq B$.

hf. $A \cap \overline{B} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$.