

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)

1. Igazolja, hogy ha  $A \subseteq B \cap C$ , akkor  $(A \cup B) \cap (A \cup C) = B \cap C$ ! Igaz-e fordítva?

**MO.** Tetszőleges  $x$ -re, ha  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ , akkor  $x \in A \cup B$  és  $x \in A \cup C$ . Ha  $x \in A$ , akkor a *feltétel* miatt  $x \in A \subseteq B \cap C$ . Ha  $x \notin A$ , akkor  $x \in B$  és  $x \in C$ , így  $x \in B \cap C$ . A másik irányban, ha  $x \in B \cap C$ , akkor  $x \in B$  és  $x \in C$ . De ekkor  $x$  a bővebb halmazokban is benne van:  $x \in A \cup B$  és  $x \in A \cup C$ , így  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

Valójában, mivel  $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$ , ezért elég ezt belátni:  $A \subseteq L \iff A \cup L = L$ , hiszen  $L = B \cap C$  helyettesítéssel megkapható az állítás. Az előbbi pedig igaz minden  $A$ -ra és  $L$ -re: ha  $x \in A \cup L$ , akkor vagy  $x \in L$  és kész, vagy  $x \in A \subseteq L$  és kész. Az egyenlőség másik iránya triviálisan következik az unió definíciójából. Fordítva: ha  $x \in A \subseteq A \cup L = L$  és kész.

2. Legyen  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  két tetszőleges térvektor! Adja meg a  $\lambda$  valós szám összes olyan értékét, amire  $\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}$

a) merőleges, ha  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \neq 0$  és  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ,

b) párhuzamos.

**MO.** a)  $(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b})(\mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \lambda(1 - \lambda) \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{a}^2 + \lambda(1 - \lambda) \mathbf{b}^2 = 0 \rightsquigarrow 1 + \lambda(1 - \lambda) = 0 \rightsquigarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = 1/2 \pm (\sqrt{5}/2)$ .

b) A két vektor párhuzamosságával ekvivalens, hogy vektoriális szorzatuk nulla:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \lambda \mathbf{b} \times \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b} \times \mathbf{b} = (1 - \lambda) \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \lambda \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1 - 2\lambda) \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Az első átalakításnál minden tagot minden taggal beszoroztunk figyelve arra, hogy a vektoriális szorzás tényezőinek sorrendje ne változzon, majd felhasználtuk, hogy  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , végül az antikommutatív tulajdonság miatt ( $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ) össze tudtuk vonni a tagokat. Innen,

$$\lambda = \begin{cases} 1/2, & \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \\ \text{tetszőleges}, & \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \end{cases}$$

3. Adjuk meg annak az  $f$  egyenesnek az egyenletét, amelyik merőlegesen metszi az  $S_1 : x + y + z = 1$  és  $S_2 : x - y + z = 1$  egyenletű síkok metszésvonalát és áthalad az  $P(0, 1, 1)$  ponton!

**MO.** A metszésvonalhoz, kivonva a két egyenletet egymásból, kapjuk, hogy  $2y = 0$ , azaz a metszésvonal egyenlete:  $x = t, y = 0, z = 1 - t$ , így annak a síknak a normálvektora, amiben  $f$  van:  $(1, 0, -1)$ , egyenlete pedig:  $S_3 : x - z + 1 = 0$ . Ez utóbbinak metszete a metszésvonallal:  $(0, 0, 1)$ , ami valójában a három sík metszéspontja is. Innen  $f$  egyenlete:  $f \parallel (0, 1, 0)$  és  $(0, 1, 1) \in f$ , azaz  $f : x = 0, y = 1 + t, z = 0$ .

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

$$\text{a) } z^2 + \bar{z} = |z|^2 \quad \text{b) } z^4 - (i - 1)z^2 - i = 0$$

**MO.** a) Algebrai alakban:  $z = x + iy$ , ahol  $x, y \in \mathbf{R}$ :  $x^2 - y^2 + 2ixy + x - iy = x^2 + y^2 \rightsquigarrow -2y^2 + x + i(2xy - y) = 0$ , így a két valós egyenlet:  $-2y^2 + x = 0$ ,  $2xy - y = 0$ . Tehát  $4y^3 - y = 0$ ,  $y_1 = 0$ , így  $x_1 = 0$ , valamint  $2y = \pm 1$ , így  $x = \frac{1}{2}$ . A három megoldás:  $z_1 = 0$ ,  $z_{23} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$ .

b)  $w = z^2$ ,  $w^2 - (i-1)w - i = 0 \rightsquigarrow w_1 = i, w_2 = -1$ .  $z_{12} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ,  $z_{34} = \pm i$ .

**5.** Számítsuk ki a *bikasági sorral* ill. a "nullához tartó szor korlátos" lemmára hivatkozva!

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 7^n + 1}{7^{n^2} - n^2 + \sin^3 n}, \quad b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n}{2^n + \cos^n n}$$

**MO.** Jelölje  $(a_{n_k}) \subseteq (a_n)$ , hogy  $(a_{n_k})$  részsorozata  $(a_n)$ -nek.

a)  $\infty/\infty$  alakú határérték esetén a javaslat, hogy osszuk el a nevező legbikábbikával a nevezőt és a számlálót is. Ez jelen esetben a  $7^n$ . Ekkor:

$$\frac{n^2 + 7^n + 1}{7^{n^2} - n^2 + \sin^3 n} = \frac{(n^2/7^n) + (1/7^{n^2-n}) + (1/7^n)}{1 - (n^2/7^n) + ((\sin^3 n)/7^n)} \rightarrow \frac{0 + 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 0$$

mert  $n^2/7^n \xrightarrow{\subseteq} n/7^n \rightarrow 0$  hiszen az első a második minden négyzetszámadik tagja és a második nullához tart a  $n \ll 7^n$  nagyságrend miatt,  $1/7^{n^2-n} \subseteq 1/7^n \rightarrow 0$  ugyanezért, és  $(\sin^3 n)$  korlátos, így használhatjuk a "0-korl." lemmát. Nyilván hivatkoztunk arra, hogy a határtértékképzés invariáns az alapműveletekre (HIA).

b) Ugyanígy, de most a nevező legerősebbike  $2^n$ :

$$b_n = \frac{(-2)^n}{2^n + \cos^n n} = \frac{(-1)^n}{1 + ((\cos^n n)/2^n)}$$

$(\cos^n n)$  korlátos;  $b_{2k} \rightarrow 1$ ,  $b_{2k+1} \rightarrow -1$ , két különböző számhoz tartó részsorozata  $(b_n)$ -nek, így nem tud határértéke lenni, mert ha lenne, akkor *minden részsorozatának ugyanoda tartana*.

**6.1.** Melyik igaz? a)  $\sup H + \sup K = \sup(H \cup K)$  b)  $\max\{\sup H, \sup K\} = \sup(H \cup K)$ .

**6.2.** Igaz-e, hogy ha  $z$  megoldása, a  $iz^2 = z$  egyeletnek, akkor  $\bar{z}$  is.

**6.3.** Igaz-e, hogy ha  $\mathbf{ab} = 0$ , akkor  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  legalább az egyike nullvektor?

**MO.** 6.1. a) Hamis. Legyen  $H = K = \{1\}$ . Ekkor  $\sup H + \sup K = 2 \neq 1 = \sup(H \cup K)$ . b) Igaz.  $x \in H \cup K \rightarrow x \leq \max\{\sup H, \sup K\}$ . Wlog  $\sup H = \max\{\sup H, \sup K\}$  valamely  $\varepsilon > 0$ -ra  $\sup H - \varepsilon$  olyan, hogy van  $y \in [\sup H - \varepsilon, \sup H)$ , amire  $y \in H \subseteq H \cup K$ , azaz  $\sup H$  a  $H \cup K$ -nak is szuprémuma.

6.2. Nem, mert ennek  $0, -i$  a megoldásai és ezek nem konjugált párok.

6.3. Nem.  $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{b} = \mathbf{j}$ , akkor  $\mathbf{ij} = 0$ , de  $i \neq j$ .

**iMSc.** a) Legyen  $H, K \subseteq \mathbf{R}$ . Igaz-e, hogy ha  $x$  izolált pontja  $H \cap K$ -nak, akkor  $H$ -nak is és  $K$ -nak is. És fordítva?

b) Van-e olyan  $(a_n)$  és  $(b_n)$  sorozat, hogy mindkettőnek pontosan két sűrűsödési helye van, de  $(a_n + b_n)$ -nek pontosan négy?

**MO.** a) Nem igaz. Legyen  $H = [-1, 0], K = [0, 1]$ . Ekkor  $H \cap K = \{0\}$ . Ennek  $0$  izolált pontja, de egyiknek sem az. Fordítva igaz.  $B_\varepsilon(x) \cap H \cap K = \{x\}$ , ha  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , ahol  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  olyanok, hogy

$B_{\varepsilon_1}(x) \cap H = \{x\}$ ,  $B_{\varepsilon_2}(x) \cap K = \{x\}$ , mert  $B_{\varepsilon}(x) \cap H \cap K = B_{\varepsilon}(x) \cap B_{\varepsilon}(x) \cap H \cap K = \{x\} \cap \{x\} = \{x\}$ .

b) Igen. Legyen  $a_{2k} = 1$ ,  $a_{2k+1} = 2$ ,  $b_{4k} = b_{4k+1} = 10$ ,  $b_{4k+2} = b_{4k+3} = 100$ . Ekkor  $(a_{4k} + b_{4k}) = (11)$ ,  $(a_{4k+1} + b_{4k+1}) = (12)$ ,  $(a_{4k+2} + b_{4k+2}) = (101)$ ,  $(a_{4k+3} + b_{4k+3}) = (102)$ .

További:

**1+**. Igaz-e, hogy  $A \subseteq B \iff (A \setminus B) \cup B = B$ ? Igaz-e önmagában, hogy  $(A \setminus B) \cup B = B$ ?

**2+**. Igazolja a Thales-tételt és ennek megfordítását! Igazolja a koszinusztételt!

**3+**. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik merőleges mind az  $e : x = 2 - t, y = 4 + 3t, z = 1 + 2t$ , mind az  $f : x = -5 + 3t, y = 3 + 2t, z = 1 + t$  egyenesekre és áthalad a metszéspontjukon!

**4+**. Oldja meg a  $|z|^2 \cdot \operatorname{Re}(z) = z$  egyenletet!