2022 Vill. Mat A1 – 6. gyakorlat

Sorozatok konvergenciája

**1.** Mondjuk ki a végesbe és végtelenbe tartó sorozat definícióját, majd igazoljuk definíció szerint a következő állításokat!

$$\lim_{n\to\infty} n^3 + 7n^2 - n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} -n^4 - n^3 + 4n = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{4n+1} = \frac{3}{4}$$

Hol hivatkozunk a bizonyítások során az archimedészi axiómára?

**hf.**

$$\lim_{n\to\infty} n^8 - 7n^3 = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} -n^3 + n^2 + 4 = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+11}{3n-4} = \frac{2}{3}$$

**2.** Számítsuk ki arra a tételre hivatkozna, ami azt mondja ki, hogy a határértékképzés invariáns az alapműveletekre nézve (HIA).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+8}{7n^2-n+2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{-n+7}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+2^n}{5^n+2^n}$$

**hf.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^7+4n^3+8}{7n^2-n+2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n+7}{-n^8+7n-5}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-7^n}{5^n+3^n}$$

**3.** Számítsuk ki a bikasági sorral ill. a "nullához tartó szor korlátos" lemmára hivatkozva!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3^n+1}{7n^2-n+\sin n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!+2^n}{2^n+\cos n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!+n+1}{n^n+n!+n^3}$$

**gy.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+n^{100}+8n}{4^{n+3}+n^5+\frac{1}{n}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+\sin(n!)}{4^n+n^4}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!+n^n+1}{n^n+2^4+\cos(n^n)}$$

**4.** Számítsuk ki a nullsorozatokra vonatkozó hányadoskritériummal:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$$

(Ha $\limsup_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, akkor $a_n \to 0$.)

**5*.** Igazoljuk, hogy ha $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor $a_n \to 0$.