Gyakorló feladatok, pót zh, Matematika A1 C-E-K 2024.

(Minden feladat 20 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat idő tartama 45 perc.)

Pótlás az első zh-ból

1. Mi $(\mathbf{a}-5\mathbf{b})(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$ értéke, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőleges vektorok és $|\mathbf{a}|=1$, $|\mathbf{b}|=2$?

MO. a) Tudjuk, hogy $\mathbf{ab}=0$, mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek, továbbá minden $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{v}^2=|\mathbf{v}|^2$. Így $(\mathbf{a}-5\mathbf{b})(2\mathbf{a}+\mathbf{b})=2\mathbf{a}^2+\mathbf{ab}-10\mathbf{ab}-5\mathbf{b}^2=2|\mathbf{a}|^2-5|\mathbf{b}|^2=2-5\cdot 4=-18$.

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében!

$$z^2-(i-1)z-i=0$$

MO. A Viete-formulákkal: $-(i-1)=-(z_1+z_2)$, $-i=z_1z_2$, tehát $\rightsquigarrow z_1=i, z_2=-1$.
VAGY elvégezve a komplex négyzetgyövonást:

$$z_{1,2}=\frac{i-1\pm\sqrt{(i-1)^2-4\cdot 1\cdot(-i)}}{2}=\frac{i-1\pm\sqrt{-1-2i+1+4i}}{2}=\frac{i-1\pm\sqrt{2i}}{2}$$

$$\sqrt{2i}=\pm\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot i\cos\frac{\pi}{4}\right)=\pm(1+i)$$

$$z_{1,2}=\frac{i-1\pm\sqrt{2i}}{2}=\frac{i-1\pm(1+i))}{2}=\begin{cases} i \\ -1\end{cases}$$

3. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x},\qquad b)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x-9}{x^2+3}$$

MO. a)

$$\frac{e^{2x}-1}{3x}=\frac{2}{3}\frac{e^{2x}-1}{2x}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

b)

$$\frac{x^4+3x-9}{x^2+3}=\frac{x^2+3\frac{3}{x}-9\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{\infty+0-0}{1+0}=\infty$$

Pótlás a második zh-ból

1. Adja meg az $f(x) = \arctan x$ függvény görbéje érintőegyenesének egyenletét, a 1 abszciszájú pontjában!

MO. $f'(x)|_1 = \dfrac{1}{1+x^2}|_1 = \dfrac{1}{2}$, $f(x)|_1 = \arctan 1 \quad (= \pi/4)$, $y = \arctan 1 + \dfrac{1}{2}(x-1)$.

2. Határozza meg az alábbi függvények határértékét!

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x}{\sin(x^3)} \qquad b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x^3}$$

MO. a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x}{\sin(x^3)} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2+2}{\cos(x^3)\cdot 3x^2} = \frac{2}{0+} = \infty$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x^3} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{1}{0+} = \infty$$

3. Hány megoldása van a valós számok halmazán az $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ egyenletnek?

MO. Legyen $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, ekkor $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, amelynek az előjelét vizsgálva a következők igazak: $(-\infty; 0)$-ban $f' > 0$ és f sz. m. nő, $(0; 2)$-ben $f' < 0$ és f sz. m. csökken, $(2; \infty)$-ban $f' > 0$ és f sz. m. nő. Innen f-nek nincs zérushelye $(-\infty; 0]$-ben mert $f(0) = -1$ és $\lim_{-\infty} f = -\infty$ és így itt a függvény értékei nullánál kisebbek. $[0; 2]$-ben szintén nincs, mert itt sz. m. csökken, és $f(2) = -5$, azaz minden értéke nullánál kisebb. A Bolzano-tétel miatt f-nek viszont van zérushelye a $[2, \infty)$-ben, mert f folytonos, intervallumon értelmezett és $f(2) = -5 < 0$, $\lim_{\infty} f = \infty$. De itt csak egy van, mert itt f sz. m. Tehát az egyenletnek pontosan 1 megoldása van.