2024 C-E-K Mat A1 – 5. gyakorlat

Függvényhatárérték

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-7x+1}{4x^4+4x+5}$$

gy.

$$a)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+5}{x^2+5x-2} \qquad b)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+8x-3}{x^4+7x+1}$$

hf.

$$a)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-5}{x+2} \qquad b)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+7x-7}{8x^3+6x-1}$$

Nevezetes határértékek:

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}}$$

2. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$a)\quad \lim_{x\to2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} \qquad b)\quad \lim_{x\to1+} \frac{x-3}{x^2-4x+3}$$

hf.

$$a)\quad \lim_{x\to-3} \frac{x^2+6x+9}{x^2-9} \qquad b)\quad \lim_{x\to2-} \frac{x-2}{x^2-5x+6}$$

3. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$a)\quad \lim_{x\to0} \frac{\sin x^2}{2x} \qquad b)\quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos(3x)}{x^4}$$

$$c)\quad \lim_{x\to0} \frac{e^{\sin(5x)}-1}{x} \qquad d)\quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(x^2)}$$

hf.

$$a)\quad \lim_{x\to0} \frac{\sin\sin x}{x} \qquad b)\quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+3x)} \qquad d)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{\sin x}$$

Szakadás.

Az $f:\mathbf{R}\supset\!\!\to\mathbf{R}$ függvénynek szakadása van az $u\in\mathbf{R}\cap\mathrm{Dom}(f)'$ pontban, ha $u\notin\mathrm{Dom}(f)$ vagy $\nexists\lim\limits_{x\to u}f(x)$ vagy $\lim\limits_{x\to u}f(x)\neq f(u)$.

Szakadások osztályozása.

Ha az $f:\mathbf{R}\supset\!\!\to\mathbf{R}$ függvénynek szakadása van az $u\in\mathbf{R}\cap\mathrm{Dom}(f)'$ pontban, akkor ez a szakadás **elsőfajú,** ha $\lim\limits_{x\to u+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to u-}f(x)$ végesek (ha egyáltalán $u\in\mathrm{Dom}(f)'_+$ vagy $u\in\mathrm{Dom}(f)'_-$), ezen belül *ugrása* van u-ban, ha $\lim\limits_{x\to u+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to u-}f(x)$, egyébként *megszüntethető.*

u-ban f-nek **másodfajú szakadása** van, ha nem elsőfajú; és ezen belül, ha $\lim\limits_{x\to u+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to u-}f(x)$ mindkettő végtelen, akkor u-ban *végtelen* szakadása van, ha legalább az egyik oldali határérték nem létezik, akkor *lényeges* szakadása van f-nek u-ban.

4. Hol szakadnak és osztályozzuk a szakadásokat!

$$a)\quad \frac{x^2-5x+6}{x-3} \qquad b)\quad \frac{e^{1/x}+2}{1+x} \qquad c)\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

hf.

$$a)\quad \frac{x^2-x-6}{x+2} \qquad b)\quad \frac{e^{-1/x^2}+1}{1+x^2}$$