1. vizsga-zh gyakorló, Matek 1. CEK, 2023/24 tavasz

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.)

1. Hol szakad és ahol szakad, ott milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

MO. 0-ban van szakadása. 0+ esetén:

$$\lim_{x\to 0+} xe^{\frac{1}{x}} \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

0− esetén:

$$\lim_{x\to 0-} xe^{\frac{1}{x}} \overset{0\cdot 0}{=} 0$$

Tehát a szakadás végtelen típusú és másodfajú.

2. Számítsa ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{1-\cos x} =?$$

MO.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x^2)\cdot 6x}{\sin x} = 6$$

Hiszen $\lim\limits_{x\to 0} \cos(3x^2) = 1$ és $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

3. Vizsgálja meg a pozitív valós számokon értelmezett $f(x) = x^3 - 3\ln x$ függvényt monotonitás és szélsőérték szempontjából! Mi f értékkészletének szuprémuma és infimuma?

MO. $f'(x) = 3x^2 - 3/x = \frac{3}{x}(x^3-1) = \frac{3}{x}(x-1)(x^2+x+1)$, aminek az előjele: $(0,1)$-en f' negatív, azaz f itt szigorúan monoton csökkenő, $(1,\infty)$-n f' pozitív, azaz f szigorúan monoton nő, és mivel f folytonos, ezért 1-ben abszolút minimuma van f-nek, és ez $f(1) = 1$. $\lim\limits_{0} f = +\infty$, ezért $[1,\infty)$-ben minden értéket felvesz a Bolzano-tétel miatt, és csak ezeket. Így $\sup f = \infty$ és $\inf f = 1$.

4. Határozza meg az alábbi integrálokat! (5+5 pont)

$$\textbf{a)} \int \frac{e^{2x}+x}{(e^{2x}+x^2+1)^2}\,dx \qquad\qquad \textbf{b)} \int (x+1)\cdot e^{x+1}\,dx$$

MO. a) $\int \frac{e^{2x}+x}{(e^{2x}+x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}+2x}{(e^{2x}+x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}(e^{2x}+x^2+1)^{-1} + C$. b) $\int (x+1)\cdot e^{x+1}\,dx = (x+1)e^{x+1} - \int e^{x+1}\,dx = (x+1)e^{x+1} - e^{x+1} + C = xe^{x+1} + C$

5. Határozza meg az alábbi integrálokat! (5+5 pont)

$$\textbf{a)} \int_0^\infty \frac{\arctan^7 x}{1+x^2}\,dx \qquad\qquad \textbf{b)} \int_0^\pi \sin^2 x\,dx$$

MO. a)
$$\int_0^\infty \frac{\arctan^7 x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{8}(\arctan x)^8\right]_0^\infty = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)^8$$

b)
$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi = \pi/2$$

6. Legyen $f:[0,1]\to\mathbf{R}$. Igazak-e az alábbi állítások? (2+2+4+2)
a) Ha f folytonos, akkor létezik $\lim\limits_0 f\in\mathbf{R}$.
b) Ha létezik $\lim\limits_0 f\in\mathbf{R}$, akkor f folytonos 0-ban.
c) Ha f folytonos, akkor van primitívfüggvénye.
d) Ha f integrálható, akkor f folytonos.

MO. a) Igaz, tétel volt.
b) Hamis. $f(0)=1$, $f(x)=0$, ha $x\neq 0$, ha folyonos volna, akkor $0=\lim_0 f = f(0)=1$ lenne.
c) Igaz. Ekkor f korlátos és nem szakad, ezért Riemann-integrálható, innen a kalkulus első fundamentális tétele miatt az integrálfüggvény primitív függvénye.
d) Hamis. Lásd b), ami Riemann-integrálható, de nem folytonos.