

Halmazalgebra

1. (Logikai szita)

Egy 36 fős osztályban mindenki tanul angolt vagy olaszt. 30-an tanulnak angolt, 24-en olaszt. Hányan tanulják mindkét nyelvet? Mi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott diák csak olaszt tanul?

gy. Egy osztályban minden diák tanul olaszul, spanyolul vagy franciául. 10-an tanulnak olaszt, 24-en spanyolt, 12-en franciát, 33-an a francia és a spanyol közül legalább az egyiket, 6-an franciát és olaszt, 2-en olaszt és spanyolt, 1 diák mindhármat. Hányan tanulnak csak olaszt, csak spanyolt, csak franciát? Mi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott diák pontosan egy nyelvet tanul?

hf. Egy osztályban mindenki tanul vagy drámát, vagy emelt magyart, vagy táncot. 16-an tanulnak drámát, 8-an emelt magyart, 10-en táncot, 20-an a tánc és a dráma közül legalább az egyiket, 6-an emelt magyart és drámát, 8-an emelt magyart és táncot, 3 diák mindhármat. Mi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott diák pontosan egy, két, három fenti tárgyat tanul?

2. ($\cap, \cup, \subseteq, =$ definíciója, esetszétválasztás) Igazoljuk az \in reláció felhasználásával, hogy bármely A, B, C halmazra $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ és ábrázoljuk Venn-diagrammon mindkét oldalt.

gy. $A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

hf. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

3. (De Morgan azonosságok) Igazoljuk Venn-diagrammal, hogy bármely A, B halmazra $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (vagy $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$). Mi annak a valószínűsége, hogy egy 52 lapos francia kártyapakliból véletlenszerűen kiválasztva két lapot az egyik király?

gy. Mi annak a valószínűsége, hogy egy 52 lapos francia kártyapakliból kiválasztva három lapot a lapok között lesz treff?

hf. Mi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen felírt ötjegyű szám jegyei között van hármas?

4. (Boole-halmazalgebra) Igazoljuk az ismert Bool-e halmazalgebrai azonosságok(!) felhasználásával, hogy tetszőleges A, B, C halmazra $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. ($A \setminus B = A \cap \overline{B}$, disztributív szabályok, De Morgan.)

gy. $K \setminus (K \setminus L) = L \setminus (L \setminus K)$.

hf. $(K \setminus L) \setminus M = (K \setminus M) \setminus (L \setminus M)$.