Gyakorló feladatok, 1. zh, Matematika A1 C-E-K 2024. A

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat idő tartama 90 perc.)

1. a) Mi $(\mathbf{a}+3\mathbf{b})(3\mathbf{a}-\mathbf{b})$ értéke, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőleges vektorok és $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=3$?
b) Milyen λ valós számra lesz $\mathbf{a}+4\mathbf{b}$ párhuzamos $2\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$-vel, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamosak?

MO. a) Tudjuk, hogy $\mathbf{ab}=0$, mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek, továbbá minden $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{v}^2=|\mathbf{v}|^2$. Így $(\mathbf{a}+3\mathbf{b})(3\mathbf{a}-\mathbf{b})=3\mathbf{a}^2-\mathbf{ab}+9\mathbf{ab}-3\mathbf{b}^2=3|\mathbf{a}|^2-3|\mathbf{b}|^2=3(4-9)=-15$.

b) $\mathbf{a}+4\mathbf{b}\parallel 2\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ pontosan akkor, ha $(\mathbf{a}+4\mathbf{b})\times(2\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})=\mathbf{0}\rightsquigarrow \mathbf{a}\times 2\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\lambda\mathbf{b}+4\mathbf{b}\times 2\mathbf{a}+4\mathbf{b}\times\lambda\mathbf{b}=\mathbf{0}$ $\rightsquigarrow 2\mathbf{a}\times\mathbf{a}+\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}+8\mathbf{b}\times\mathbf{a}+4\lambda\mathbf{b}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}\rightsquigarrow\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}+8\mathbf{b}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$, hiszen $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{a}$ miatt $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ és ugyanígy $\boldsymbol{b}$-re, $\rightsquigarrow(\lambda-8)\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}\rightsquigarrow\lambda=8$, hiszen $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$.

2. Adja meg annak az f egyenesnek az egyenletét, amelyik merőlegesen metszi az $s_1: x+y+z=1$ és $s_2: x-y+z=1$ egyenletű síkok metszésvonalát és áthalad az $P(0,1,1)$ ponton!

MO. Legyen $m=s_1\cap s_2$ a síkok metszésvonala. Azok az egyenesek, amik a P-n áthaladnak és merőlegesek m-re (ami f egy-egy tulajdonsága) a P-n áthaladó síkban vannak, legyen ez s. Így tudjuk, hogy $f\subseteq s$. De f harmadik tulajdonsága, hogy metszi m-et, így f az s és az m metszéspontján is áthalad a P-n kívül. f-et tehát így írhatjuk vel. Kivonjuk s_1-et s_2-ből, ez megadja m egyenletét: $2y=0$, azaz $y=0$, $x=t\in\mathbf{R}$ legyen a tetszőlegesen választott változó, majd ezeket az s_1-be behelyettesítve és z-t kiszámolva, a metszésvonal egyenlete: $x=t, y=0, z=1-t$. Az s sík normálvektora éppen $\boldsymbol{v}_m=(1,0,-1)$, s egyenlete pedig: $S_3: x-z+1=0$. Az $\{M\}=s\cap m$ metszéspontot úgy számoljuk ki, hogy s és m egyenleteit egy egyenletredszerként megoldjuk. Ez $(0,0,1)$ lesz. Ezen és P-n áthaladó egyenes: $f\parallel P-M=(0,1,0)$ és $P=(0,1,1)\in f$, azaz $f: x=0, y=1+t, z=0$.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

$$z^6-(i-1)z^3-i=0$$

MO. $w=z^3$, $w^2-(i-1)w-i=0$, a Viete-formulákkal: $-(i-1)=-(w_1+w_2)$, $-i=w_1w_2$, tehát $\rightsquigarrow w_1=i, w_2=-1$. Ezekből kell köbgyököt vonni: $z_{1,2,3}=\sqrt[3]{i}=\;\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6},\ \cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}),\ \cos(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})$, és $z_{4,5,6}=\sqrt[3]{-1}=\;\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},\ \cos(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}),\ \cos(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})$. (Algebrai alakban ezek: $z_{1,2,4}=\sqrt{3}/2+i/2, -\sqrt{3}/2+i/2, -i$, $z_{4,5,6}=1/2+\sqrt{3}i/2, -1, 1/2-\sqrt{3}i/2$.)

4. Számítsuk ki az alábbi határéttékeket!

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-1}{x},\qquad b)\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

MO. a)

$$\frac{e^{3x^2}-1}{x^3}=\frac{e^{3x^2}-1}{3x^2}\cdot\frac{3x^2}{x^3}=\frac{e^{3x^2}-1}{3x^2}\cdot\frac{3}{x}$$

ennek a határértéke nem létezik a 0-ban, mert

$$\frac{e^{3x^2}-1}{3x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

de közben $\lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{3}{x} = \pm\infty$, azaz $\lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{3}{x}$ nem létezik.

b)

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3 \xrightarrow[x\to 3]{} 6$$

5. Hol és milyen szakadása van az alábbi függvényeknek?

$$a) \quad f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^3-x^2}, \quad b) \quad g(x) = \frac{e^{-1/x^2}+x}{x+1}$$

MO. a)

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^3-x^2} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x-1)} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{(x-1)}$$

tehát szakása van $x = 0$-ban és $x = 1$-ben. 0-ban a hatérték:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{(x-1)} = 1 \cdot (-1)$$

azaz létezik és véges, a bal és jobb oldali hatérték így megegyezik, csak 0-ban nincs a függvény értelmezve, így ott elsőfajú, megszüntethető szakadás van. 1-ben

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{(x-1)} = \frac{\ln 2}{1} \cdot (\mp\infty)$$

vagyis végtelen, azaz másodfajú ott a szakadás és végetelen típusú.

6. Melyik igaz?

a) $z + \overline{z}$ mindig valós, ha $z \in \mathbf{C}$.

b) Ha $\boldsymbol{ab} = 0$, akkor $\boldsymbol{a}$ ill. $\boldsymbol{b}$ legalább egyike nulla.

c) Ha $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, akkor $f(0) = 0$.

MO. a) Igaz, $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a \in \mathbf{R}$

b) Hamis, mert pl. $\boldsymbol{ij} = 0$, de közben se $\boldsymbol{i}$, se $\boldsymbol{j}$ (a koordinátaegységvektorok) nem nullák.

c) Hamis, pl. $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} = \frac{\sin(x^2)}{x^2}x = 1 \cdot 0 = 0$, de $f(0)$ nincs értelmezve.