Gyakorló feladatok, 1. zh, Matematika A1 C-E-K 2024. B

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat idő tartama 90 perc.)

1. a) Mi a $(\mathbf{i}+2\mathbf{j})\times(3\mathbf{i}-\mathbf{j})$ vektor $\mathbf{k}$-val kifejezve? ($\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ a sztenderd bázisvektorok $\mathbf{R}^3$-ben.)
b) Mely λ valós számra lesz $\mathbf{a}-5\mathbf{b}$ merőleges $-2\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$-re, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek továbbá $|\mathbf{a}|=1$ és $|\mathbf{b}|=2$?

MO. a) $(\mathbf{i}+2\mathbf{j})\times(3\mathbf{i}-\mathbf{j}) = 3\mathbf{i}\times\mathbf{i}-\mathbf{i}\times\mathbf{j}+6\mathbf{j}\times\mathbf{i}-2\mathbf{j}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}\times\mathbf{j}-6\mathbf{i}\times\mathbf{j} = -7\mathbf{i}\times\mathbf{j} = -7\mathbf{k}$.

Ahol felhasználtuk, hogy mivel $\boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{v}$, ezért $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ és $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i}=\mathbf{k}$.

b) $(\mathbf{a}-5\mathbf{b})(-2\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})=0 \rightsquigarrow -2\mathbf{a}^2+\lambda\mathbf{ab}+10\mathbf{ab}-5\lambda\mathbf{b}^2=0 \rightsquigarrow -2-5\lambda\cdot 4=0 \rightsquigarrow \lambda=-\frac{1}{10}$.

2. Vetítse merőlegesen az $s_1: x+y-z=2$ és $s_2: 2x-y+4z=1$ egyenletű síkok metszésvonalára a $P(-1,2,3)$ ponton!

MO. Ha $m=s_1\cap s_2$ a síkok metszésvonala, akkor valójában az erre merőleges és P-n áthaladó s sík és m metszéspontjának kiszámítása a feladat. Megoldva az s_1,s_2 egyenletrendszert megkapjuk az m metszésvonal egyenletét. Összeadva őket: $3x+3z=3$, innen a $z=t\in\mathbf{R}$ választással: $x=1-t$, és visszahelyettesítve s_1 egyenletébe: $y=2-x+z=2-(1-t)+t=1+2t$. Tehát $m: x=1-t, y=1+2t, z=t$. Erre az egyenesre állítunk merőleges s síkot a $P(-1,2,3)$ pontban: $\mathbf{n}_s=\mathbf{v}_m=(-1,2,1)$. Innen: $s: -(x+1)+2(y-2)+(z-3)=0 \rightsquigarrow -x+2y+z=8$. ($s$ egyenleltét még úgy is meghatározhatnánk, hogy a normálvektorát az s_1 és s_2 normálvektorának vektoriális szorzatából számítjuk ki:

$$\mathbf{n}_s=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}$$

amiből $\mathbf{n}_s=(3,-6,-3)\parallel(-1,2,1)$.) Végül megoldva az m,s egyenletrendszert (behelyettesítjük s-be m-et): $-(1-t)+2(1+2t)+t=8 \rightsquigarrow t+4t+t=7 \rightsquigarrow t=7/6$. Innen a metszéspont: $M=m(t=7/6)=(-1/6,10/3,7/6)$.

3. a) Mennyi $\sqrt[3]{\frac{27}{i^6}}$?

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

$$z^4+5z^2+4=0$$

MO. a) $i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot(-1)$, így a feladat: $\sqrt[3]{-27}=?$. Trigonometrikus alakban a gyökformulából:

$$\sqrt[3]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+k2\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+k2\pi}{3}\right)$$

Ha $w=-27$, akkor a $\arg(z)=\pi$ $(180°)$ és $|-27|=27$. Innen.

$$\sqrt[3]{-27}_0=3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{-27}_1=3\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=3\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$\sqrt[3]{-27}_2 = 3 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

b) $w = z^2$, helyettesítéssel, a megoldóképletből: $w_1 = -1$ és $w_2 = -4$. Az ezekből vont négyzetgyök: $z_{1,2} = \pm i$, $z_{3,4} = \pm 2i$.

4. Számítsuk ki az alábbi határéttékeket!

$$a) \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sin x}{2x}, \qquad b) \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+9}{x^2+3}$$

MO. a)

$$\frac{1-\cos\sin x}{2x} = \frac{1-\cos\sin x}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{2x^2}\cdot x \to \frac{1}{4}\cdot 0 = 0$$

b)

$$\frac{x^3+9}{x^2+3} = \frac{x+9/x^2}{1+3/x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\infty}{1} = \infty$$

5. Hol és milyen szakadása van az alábbi függvényeknek?

$$a) \quad f(x) = \frac{\sin x}{x+2x}, \qquad b) \quad g(x) = \arctan(1/x^2)$$

MO. a)

$$\frac{\sin x}{x+2x} = \frac{\sin x}{3x} \to \frac{1}{3}$$

azaz szakása van $x = 0$-ban létezik és véges, a bal és jobb oldali hatérték és megegyezik, így ott elsőfajú, megszüntethető szakadás van. b) Ha $x \to 0$, akkor $1/x^2 \to infty$ és ott arctan határértéke $\pi/2$. azaz szakása van $x = 0$-ban létezik és véges, a bal és jobb oldali hatérték és megegyezik, így ott elsőfajú, megszüntethető szakadás van.

6. Melyik igaz?

a) $z - \overline{z}$ mindig valós, ha $z \in \mathbf{C}$.

b) Van olyan $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$, hogy $\boldsymbol{ab} = 0$ és se $\boldsymbol{a}$ se $\boldsymbol{b}$ nem nulla.

c) Ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ és $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, akkor $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$.

MO. a) Hamis, $z - \overline{z} = a + bi - a + bi = 2bi \notin \mathbf{R}$ általában.

b) Igaz, mert pl. $\boldsymbol{ij} = 0$, és se $\boldsymbol{i}$, se $\boldsymbol{j}$ (a koordináta-egységvektorok) nem nulla.

c) Hamis, pl. $f(x) = 2x, g(x) = x, f(x)/g(x) = 2 \neq 1$, ahol értelmezve van.