

Folytonos differenciálhatóság és barátai

Az alábbi feladatokban, ha lehet, használjuk fel a függvényhatárérték és a rendezés közötti alábbi két kapcsolatot:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \exists \lim_u f = \lim_u h = A \Rightarrow \exists \lim_u g = A \quad (\text{rendőrelv})$$

$$f(x) \text{ korlátos}, \exists \lim_u g = 0 \Rightarrow \exists \lim_u f \cdot g = 0 \quad (\text{nullához tartó szor korlátos})$$

1. Hol folytonosak-e a következő függvények *deriváltjai* és milyen szakadásuk van?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad \textbf{gy.} \quad f(x) = \begin{cases} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

hf.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \arcsin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Az **inverzfüggvénytétel** szerint, ha f folytonosan deriválható és sehol se nulla egy intervallumon, akkor invertálható, az inverze deriválható és az inverz deriváltja az $f(x)$ helyen:

$$f^{-1}'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvénye inverzének deriváltját!

$$f(x) = \sin x \quad \textbf{gy.} \quad f(x) = \tan x$$

3. Határozzuk meg az alábbi egyenlettel megadott implicit függvények deriváltját a $(0, 1)$ koordinátájú pontban

$$x^3 + y^2x + y^4 = 1 \quad \textbf{gy.} \quad x^7 + y^2x^5 + y^3 = 1$$

- hf.** Határozzuk meg az alábbi egyenlettel megadott implicit függvény deriváltját a $(0, \pi/2)$ koordinátájú pontban

$$x^2 + y + \sin y = 1 + \pi/2$$

4. Mi az alábbi függvények inverzének deriváltja az $f(1)$ helyen?

$$f(x) = e^{x^2} \quad \textbf{gy.} \quad f(x) = e^{x^3+1}$$