Matematika A1 C-E-K 2024 2. zh gyakorló

(Minden feladat 10 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat idő tartama 90 perc.)

1. Hol differenciálható és ahol differenciálható, ott mi a deriváltja az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(3x), & \text{ha } x \geq 0 \\ \sin(x^3), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

MO. 0-n kívül f differenciálhatókból van összetéve a differenciálhatóságot megőrző módon, ezért differenciálható. 0-ban is differenciálhatóságot a bal és jobboldali derivált vizsgálatával döntjük el.

$$f'_+(0) = \arctan(3x)'|_0 = \frac{1}{1+x^2} \cdot 3|_0 = 3$$

$$f'_-(0) = \sin(x^3)'|_0 = 3x^2\cos(x^3)|_0 = 0$$

$f'_-(0) = 0 \neq 3 = f'_+(0)$, ezért 0-ban f nem deriválható.
Tehát:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{1+x^2}, & \text{ha } x > 0 \\ 3x^2\cos(x^3), & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

2. Adja meg az $f(x) = \ln(2x+e)$ függvény görbéje érintőegyenesének egyenletét, az e abszciszájú pontjában!

MO. $f'(x)|_e = \dfrac{1}{2x+e} \cdot 2|_e = \frac{2}{3e}$, $f(x)|_e = \ln(2e+e) = 1+\ln 3$, $y = 1+\ln 3 + \frac{2}{3e}(x-0)$, $y = \frac{2}{3e}x + 1 + \ln 3$.

3. (5+5) Határozza meg az alábbi függvények határértékét!

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} \qquad b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+2x)}{x^2}$$

MO. a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+2x)}{\sin x} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1+2x)\cdot\frac{2}{1+2x}}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\ln(1+2x)}{2x}\frac{1}{1+2x} = 4.$$

a logaritmusra vonatkozó nevezetes határérték miatt.

4. Hol és milyen szélsőértékei vannak a következő függvénynek és mely intervallumokon monoton illetve konvex a függvény?

$$f(x) = \ln(1+x^2)$$

MO. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$. Mivel $1 + x^2 > 0$, ezért a derivált előjelét $2x$ határozza meg. Így: f' negatív és így f szigorúan monoton csökkenő a $(-\infty, 0)$ intervallumon és f' pozitív és így f szigorúan monoton növekvő a $(0, \infty)$ intervallumon. Mivel f folyonos, ezért az előbbiek miatt 0-ban f-nek abszolút minimuma van 0-ban.

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1+x^2) - 2x2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Mivel $1 + x^2 > 0$, ezért a második derivált előjelét $1 - x^2$ határozza meg. Így: f'' negatív és így f konkáv a $(-\infty, 1)$ és $(1, \infty)$ intervallumon és f'' pozitív és így f konvex a $(-1, 1)$ intervallumon.

5. Hány megoldása van a valós számok halmazán az $\arctan(x^2) = 1$ egyenletnek?

MO. Legyen $f(x) = \arctan(x^2) - 1$, ekkor $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$, amelynek az előjelét vizsgálva a következők igazak: $(-\infty; 0)$-ban $f' < 0$ és f sz. m. csökken és ha $(0; \infty)$-ban $f' > 0$ és f sz. m. nő. Innen f-nek van zérushelye $(-\infty; 0]$-ben a Bolzano-tétel miatt, mert f folytonos, intervallumon értelmezett és $\lim_{-\infty} f = \pi/2 > 0$, $f(0) = -1 < 0$. Itt csak egy van, mert itt f sz. m. Hasonléképpen a $[0, \infty)$ intervallumon. Tehát az egyenletnek pontosan 2 megoldása van.

6. (3+3+4) Melyik igaz?

a) Ha egy függvény deriválható a 0-ban, akkor folytonos is ott.

b) Ha egy $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenciálható, és szigorúan monoton növekvő, akkor $f'(0) > 0$.

c) Ha $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ folytonos 0-ban, deriválható $(0, \infty)$-ban, és $\lim_0 f'$ véges szám, akkor f deriválható 0-ban.

MO. a) Igaz, volt előadáson.

b) Hamis, pl. $f(x) = x^3$, ami szigorúan monoton növekvő, de $f'(0) = 0$.

c) Igaz, a L'Hospital szabály miatt: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f'(x)}{1} =$ véges. A $0/0$ alak indoka, hogy f folytonos a 0-ban és ezért a határértéke ott a helyettesítési érték, azaz 0.