

(Minden feladat 20 pontot ér, indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat idő tartama 45 perc.)

Pótlás az első zh-ból

1. Mi $(\mathbf{a} - 5\mathbf{b})(2\mathbf{a} + \mathbf{b})$ értéke, ha \mathbf{a} és \mathbf{b} merőleges vektorok és $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$?

MO. a) Tudjuk, hogy $\mathbf{a}\mathbf{b} = 0$, mivel \mathbf{a} és \mathbf{b} merőlegesek, továbbá minden \mathbf{v} vektorra $\mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2$. Így $(\mathbf{a} - 5\mathbf{b})(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\mathbf{b} - 10\mathbf{a}\mathbf{b} - 5\mathbf{b}^2 = 2|\mathbf{a}|^2 - 5|\mathbf{b}|^2 = 2 - 5 \cdot 4 = -18$.

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében!

$$z^2 - (i - 1)z - i = 0$$

MO. A Viete-formulákkal: $-(i - 1) = -(z_1 + z_2)$, $-i = z_1 z_2$, tehát $\leadsto z_1 = i$, $z_2 = -1$.
VAGY elvégezve a komplex négyzetgyövonást:

$$z_{1,2} = \frac{i - 1 \pm \sqrt{(i - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-i)}}{2} = \frac{i - 1 \pm \sqrt{-1 - 2i + 1 + 4i}}{2} = \frac{i - 1 \pm \sqrt{2i}}{2}$$

$$\sqrt{2i} = \pm\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \pm(1 + i)$$

$$z_{1,2} = \frac{i - 1 \pm \sqrt{2i}}{2} = \frac{i - 1 \pm (1 + i)}{2} = \begin{cases} i \\ -1 \end{cases}$$

3. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x - 9}{x^2 + 3}$$

MO. a)

$$\frac{e^{2x} - 1}{3x} = \frac{2}{3} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

b)

$$\frac{x^4 + 3x - 9}{x^2 + 3} = \frac{x^2 + 3 \frac{3}{x} - 9 \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\infty + 0 - 0}{1 + 0} = \infty$$

1. Adja meg az $f(x) = \arctan x$ függvény görbéje érintőegyenésének egyenletét, a 1 abszciszájú pontjában!

MO. $f'(x)|_1 = \frac{1}{1+x^2}|_1 = \frac{1}{2}$, $f(x)|_1 = \arctan 1 \quad (= \pi/4)$, $y = \arctan 1 + \frac{1}{2}(x-1)$.

2. Határozza meg az alábbi függvények határértékét!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{\sin(x^3)} \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x^3}$

MO. a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{\sin(x^3)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2}{\cos(x^3) \cdot 3x^2} = \frac{2}{0+} = \infty$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{1}{0+} = \infty$$

3. Hány megoldása van a valós számok halmazán az $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ egyenletnek?

MO. Legyen $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, ekkor $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, amelynek az előjelét vizsgálva a következők igazak: $(-\infty; 0)$ -ban $f' > 0$ és f sz. m. nő, $(0; 2)$ -ben $f' < 0$ és f sz. m. csökken, $(2; \infty)$ -ban $f' > 0$ és f sz. m. nő. Innen f -nek nincs zérushelye $(-\infty; 0]$ -ben mert $f(0) = -1$ és $\lim_{-\infty} f = -\infty$ és így itt a függvény értékei nullánál kisebbek. $[0; 2]$ -ben szintén nincs, mert itt sz. m. csökken, és $f(2) = -5$, azaz minden értéke nullánál kisebb. A Bolzano-tétel miatt f -nek viszont van zérushelye a $[2, \infty)$ -ben, mert f folytonos, intervallumon értelmezett és $f(2) = -5 < 0$, $\lim_{\infty} f = \infty$. De itt csak egy van, mert itt f sz. m. Tehát az egyenletnek pontosan 1 megoldása van.

