2023 Vill. Mat A2 – 7. gyakorlat

(Egyenletes konvergencia, hatványsorok)

1. Mi az (f_n) függvénysorozat f határfüggvénye és egyenletesen konvergens-e az I intervallumokon? Ha igen, és integrálhatók is, akkor számoljuk ki a $\lim \int_I f_n$ határértékeket!

$\forall x \in I : r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \le a_n \to 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[I]{u} f$; $\exists \varepsilon > 0, \exists (x_n) \in I^{\mathbf{N}} : r_n(x_n) \ge \varepsilon \Rightarrow f_n \not\xrightarrow[I]{u} f$;

$f_n \in \mathrm{C}(I)$ & $f_n \xrightarrow[I]{u} f \Rightarrow f \in \mathrm{C}(I)$

a) $f_n(x) = e^{-xn},\ I = [0,\infty),\ (0,\infty),\ [p,\infty),\ p > 0$; b) $f_n(x) = \dfrac{n^2x^4}{n^2x^2+1},\ I = (-\infty,\infty),\ (-1,1)$

HF a) $f_n(x) = x^n,\ I = (-1,1],\ (-1,1),\ [-p,p],\ 0 < p < 1$; b) $f_n(x) = \dfrac{n}{nx^2+1},\ I = (0,\infty),\ (1,\infty)$

2. Hol konvergensek az alábbi hatványsorok és az adott intervallumon egyenletesen konvergensek-e?

Szükséges kritérium: $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow[I]{u} \sum f_n \Rightarrow f_n \xrightarrow[I]{u} 0$

Weierstrass-féle M-próba: $\forall x \in I : |f_n(x)| \le M_n \to 0$ & $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n \in \mathbf{R} \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow[I]{u} \sum f_n$

Leibniz-kritérium: $a_n \searrow 0$ & $a_n > 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \in \mathbf{R}$

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}; I = [-1,1] \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; I = [-p,p], \mathbf{R}, 0 < p$$

$$\text{HF}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; I = [-p,p], 0 < p < 1$$

3. Mi az alábbi hatványsorok konvergenciasugara és konvergenciatartománya?

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$$

4. Fejtsük hatványsorba az alábbi függvényeket a u pont körül!

$$\text{a)}\ \frac{1}{1+x^2},\ u=0 \qquad \text{b)}\ \frac{x^2}{1+x},\ u=0 \qquad \text{c)}\ \frac{1}{x},\ u=1 \qquad \text{d)}\ x^2+3,\ u=-1$$

$$\text{HF a)}\ \frac{x}{1-x^4},\ u=0 \qquad \text{b)}\ x^2+2x+1,\ u=1$$

iMSc. Egyenletesen konvergens-e a $(0,1)$ intervallumon a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ sor? (Fogalmazzuk meg sorozatokkal, hogy mivel jellemezhető, hogy egy függvénysor nem egyenletesen konvergens. Felhasználhatjuk a Cauchy-kritériumot is: $\| \sum_{k=0}^{m} f_k - \sum_{k=0}^{n} f_k \| \to 0 \longleftrightarrow \sum f_n$ egy. konv., $m = 2^{N+1}$ és $n = 2^N$ jó ötlet szokott lenni.)