

(Ortogonalis, szimmetrikus és unitér mátrixok)



1. Ortonormált bázist alkotnak-e az alábbi A mátrix oszlopai? a) Ha nem, Gram-Schmidt-eljárással ortogonalizáljuk őket, ill. normáljuk. b) Írjunk fel bárhogyan olyan R invertálható felső háromszög mátrixot, amire: $AR^{-1} = Q$ már ortogonális (ill. mi A -nak a QR alakja?)!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Hf.: } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Diagonalizáljuk ortogonálisan az alábbi mátrixot! Adjuk meg a sajátbázist ortonormáltként!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Hf.: } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Számítsuk ki az alábbi skalárszorzatokat!

$$(x, y \in \mathbf{C}^n \implies \langle x | y \rangle := \bar{x}^T y, \quad f, g \in C([a, b], \mathbf{R}) \implies (f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dx)$$

$$\langle x | y \rangle = ?, \quad x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \\ i \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} i \\ 1-i \\ 1+i \end{bmatrix}, \quad (f, g) = ? \quad a=0, b=\sqrt{\pi}, f(x) = \cos(x^2 + \pi), g(x) = x$$

$$\text{Hf.: } \langle x | y \rangle = ?, \quad x = \begin{bmatrix} i \\ 1+2i \\ i \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 2i \\ 2-i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (f, g) = ? \quad a=0, b=1, f(x) = (x^7+1)^5, g(x) = x^6$$

4. Diagonalizáljuk unitéren az alábbi önadjungált mátrixot! Adjuk meg a sajátbázist ortonormáltként!

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{Hf.: } \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i+1 \end{bmatrix}$$

iMSc. A sajátprobléma megoldásával triangularizáljuk ortogonálisan az alábbi mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$