2023 Vill. Mat A2 – 3. gyakorlat

(Inhomogén lineáris e.r., inverz, leképezés mártixa, bázisváltás)


**1.** Legyen $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ és $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^m$ olyan, hogy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$. Igazoljuk, hogy

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}) + \{\boldsymbol{x}_0\}$$

Az $a$ valós paraméter mely értékeire lesz az alábbi egyenletrendszereknek megoldása? Amikor van, írjuk fel a megoldáshalmazt $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}) + \{\boldsymbol{x}_0\}$ alakban!

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \textbf{hf.:}\ \boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & b \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

**2.** Az $a$ valós paraméter mely értékeire invertálhatóak az alábbi mátrixok és amikor igen, mi az inverzük?

$$\text{a)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} \quad \text{b)}\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{hf.:}\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$a = 0$ esetén számoljuk ki az inverzet az $()^{-1} = \mathrm{adj}()/\det()$ képlettel is!

**3.** Legyen $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ a $z$ tengely körül $+90°$-kal forgató, és $\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ az $xy$ síkra tükröző leképezés mátrixa. Mik az alábbi mátrixok? a) $\boldsymbol{A}^{-1}$ b) $\boldsymbol{B}^{-1}$, c) $\boldsymbol{AB}$, d) $\boldsymbol{BA}$, e) $\boldsymbol{A}^{2023} \cdot \boldsymbol{B}^{2023}$?

**4.** Legyen az $\mathcal{A}$ leképezés mátrixa a sztenderd bázisban:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel $\mathcal{A}$ mátrixát a $B = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ bázisban! (A bázisáttérés mátrixának felhasználásával is!) Mi $\boldsymbol{A}^{100}$?

**iMSc.** Az $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrixok *hasonlók,* ha van olyan $\boldsymbol{C} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ invertálható mátrix, hogy $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{B}$. Igazak-e? Hasonló mátrixok a) oszloptereinek dimenziója ugyanaz, b) oszlopterei ugyanazok, c) sortereinek dimenziója ugyanaz, d) sorterei ugyanazok?