2023 Vill. Mat A2 – 4. gyakorlat

(Determináns, sajátprobléma)

1. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét!

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c)}\ \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{d)}\ \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \iddots & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} \quad \textbf{Hf.:}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \textbf{Hf.:}\ \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{n\times n}$$

2. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit és ha van, adjuk meg a sajátfelbontásukat! Igazoljuk, hogy ha az $A \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ mártixnak van három lineárisan független sajátvektora, akkor hasonló egy diagonális mátrixhoz! (A *hasonló* B-hez, ha van T invertálható, hogy $T^{-1}AT = B$.)

$$\text{a)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{Hf.:}\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Legyen $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Melyik igaz? a) Ha A-nak és B-nek sajátvektora v, akkor $A+B$-nek is. b) Ha A-nak és B-nek is sajátpárja (λ, v), akkor $A+B$-nek is. **HF.:** c) Ha A-nak sajátvektora v, akkor A^2-nek is. d) Ha A^2-nek sajátvektora v, akkor A-nak is.

4. Határozzuk meg az

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{HF.:}\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix komplex sajátérékeit és sajátvektorait! Váltsuk át a $\mathbf{C}^2$-beli sajátkoordinátarendszerbe, ha lehet. Váltsuk át a $B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ valós bázisba is!

iMSc. Igazoljuk diagonalizációval, hogy az alábbi két mátrix hasonló!

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$