2023 Vill. Mat A2 – 1. gyakorlat

Függvényterek (is)

1. a) Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek ($\mathbf{R}^4$-ben és $\mathbf{R}^3$-ban)? (Emlékezzünk vissza arra, hogy a Gauss-elimináció (természetesen) az oszlopok közötti lineáris kapcsolatokat megőrzi.) b) Ha nem az, fejezze ki a függőket egy maximális elemszámú független rész lineáris kombinációjaként. (Használjuk a redukált lépcsős alakokat!) c) Lehet-e a maximális elemszámú független rendszert többféleképpen is kiválasztani?

$$X = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\4\\6\end{pmatrix} \right\} \qquad Y = \left\{ \begin{pmatrix}1\\3\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\textbf{hf.:} \quad \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\2\\0\end{pmatrix} \right\}$$

2. Lineárisan függetlenek-e az alábbi halmazok $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$-ben? Előállítják-e lineárisan a g_1, g_2, g_3 függvényeket? (Függvénytérben a lineáris műveletek a pontonkénti műveletek.)

$$\{\sin 2x, \cos 2x, e^x\}, \quad g_1(x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad g_2(x) = \cos^2 x + \sin^2 x, \quad g_3(x) = e^{x-3}$$

$$\textbf{hf.} \quad \left\{1, x^2, \frac{1}{1+x^2}\right\}, \quad g_1(x) = \frac{2x^2+3}{1+x^2}, \quad g_2(x) = \frac{x^4-1}{1+x^2}, \quad g_3(x) = \frac{2x+3}{1+x^2}$$

3. Zártak-e az alábbi halmazok a(z $\mathbf{R}$-beli) skalárral szorzásra és a pontonkénti összeadásra? Adjunk szabatos indoklást! ($a < b$)

a) $\mathrm{B}[a,b]$ (korlátos függvények), *b*) $\mathrm{M}[a,b]$ (monoton függvények)

c) $\{f : [a,b] \to \mathbf{R} \mid$ felülről korlátos függvények $\}$, *d*) $\mathrm{R}[a,b]$ (integrálható függvények)

hf. *a*) $\{f : [a,b] \to \mathbf{Z}\}$ (egész értékű függvények) *b*) $\mathrm{Diff}[a,b]$ (deriválható függvények)

4. Rajzoljuk fel az alábbi $\mathbf{R}^2$-beli normák (általánosított vektorhossz) esetén az origó középpontú egységgömböket! (Az $N = \mathbf{R}^n$ vektortéren értelmezett $\|.\| : N \to \mathbf{R}$ függvény norma N-en, ha 1) $\|v\| \geq 0$ minden $v \in N$-re és $v = 0$, ha $\|v\| = 0$, 2) minden $\lambda \in \mathbf{R}$ számra és $v \in N$-re $|\lambda| \cdot \|v\| = \|\lambda.v\|$, 3) minden $u, v \in N$-re $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\mathrm{B}_1^{\|\cdot\|}(0) = \{v \in N \mid \|v\| < 1\}$)

$$a) \quad \|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}, \quad b) \quad \|(x,y)\|_1 = |x| + |y|, \quad c) \quad \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\textbf{hf.} \quad \|\lambda(1,1) + \mu(-1,1)\| = \max\{|\lambda|,|\mu|\}$$

iMSc. Igazoljuk, hogy a **4**-beli normák normák! Vannak-e olyan $c, C > 0$ számok, hogy minden $v \in \mathbf{R}^2$-re $c \cdot \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C \cdot \|v\|_1$? És a többi normapárra?