2023 Vill. Mat A2 – 9. gyakorlat

(Határérték, parciális deriválhatóság, deriválhatóság, folytonos differenciálhatóság)

1. Léteznek-e határértékei az alábbi függvényeknek a $(0,0)$-ban?

$$\text{a) } \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \text{b) } \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \quad \text{c) } \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \quad \text{d) } \frac{xy^2}{x^4+y^2}, \quad \text{e)* } \frac{\sin(x^4 y)}{x^6+y^4}$$

$$\text{HF f) } \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{HF g) } \frac{\tan(x^2)}{x^4+y^2 2}, \quad \text{HF h) } \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

2. Hol parciálisan deriválhatóak az alábbi függvények és ahol igen, ott mik a parciális deriváltjaik?

$$\text{a) } \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad \text{b) } \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \text{c) } \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{HF d) } x^3 \cdot \sin(x^2+y^4), \quad \text{HF e) } \sqrt[3]{x^2+y^2}, \quad \text{HF f) } \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3. Totálisan differenciálhatóak-e az alábbi függvények a $(0,0)$ pontban?

$$\text{a) } \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, ha } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{, ha } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & \text{, ha } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{, ha } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{cases}$$

4. Folytonosak-e a parciális deriváltjai az alábbi függvényeknek:

$$\text{a) } \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^2+y^2} & \text{, ha } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{, ha } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2+y^6}} & \text{, ha } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{, ha } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$$

iMSc. A $X \subseteq \mathbf{R}^n$ halmaz korlátos, ha létezik $r > 0$, hogy $X \subseteq B_r(0)$. Igazolja, hogy ha $K \subseteq \mathbf{R}^n$ (topologikusan) kompakt, akkor korlátos is és zárt is.