2023 Vill. Mat A2 – 5. gyakorlat

(Ortogonális, szimmetrikus és unitér mátrixok)

1. Ortonormált bázist alkotnak-e az alábbi A mátrix oszlopai? a) Ha nem, Gram–Schmidt-eljárással ortogonalizáljuk őket, ill. normáljuk. b) Írjunk fel bárhogyan olyan R invertálható felső háromszög mátrixot, amire: $AR^{-1} = Q$ már ortogonális (ill. mi A-nak a QR alakja?)!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \textbf{Hf.:}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Diagonalizáljuk ortogonálisan az alábbi mátrixot! Adjuk meg a sajátbázist ortonormáltként!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textbf{Hf.:}\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Számítsuk ki az alábbi skalárszorzatokat!
$(x, y \in \mathbf{C}^n \Longrightarrow \langle x \mid y \rangle := \overline{x}^{\mathsf{T}} y, \quad f, g \in \mathrm{C}([a,b], \mathbf{R}) \Longrightarrow (f,g) := \int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx)$

$$\langle x \mid y \rangle =?, \quad x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \\ i \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} i \\ 1-i \\ 1+i \end{bmatrix}, \quad (f,g) =?\ a = 0, b = \sqrt{\pi}, f(x) = \cos(x^2 + \pi), g(x) = x$$

$$\textbf{Hf.:}\ \langle x \mid y \rangle =?, \quad x = \begin{bmatrix} i \\ 1+2i \\ i \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 2i \\ 2-i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (f,g) =?\ a = 0, b = 1, f(x) = (x^7+1)^5, g(x) = x^6$$

4. Diagonalizáljuk unitéren az alábbi önadjungált mátrixot! Adjuk meg a sajátbázist ortonormáltként!

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \textbf{Hf.:}\ \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i+1 \end{bmatrix}$$

iMSc. A sajátprobléma megoldásával triangularizáljuk ortogonálisan az alábbi mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$