

(Inhomogén lineáris e.r., inverz, leképezés mártixa, bázisváltás)



1. Legyen  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$  és  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^m$  olyan, hogy  $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ . Igazoljuk, hogy

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\} = \text{Ker}(\mathbf{A}) + \{\mathbf{x}_0\}$$

Az  $a$  valós paraméter mely értékeire lesz az alábbi egyenletrendszereknek megoldása? Amikor van, írjuk fel a megoldáshalmazt  $\text{Ker}(\mathbf{A}) + \{\mathbf{x}_0\}$  alakban!

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \text{hf.: } \mathbf{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & b \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

2. Az  $a$  valós paraméter mely értékeire invertálhatóak az alábbi mátrixok és amikor igen, mi az inverzük?

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{hf.: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$a = 0$  esetén számoljuk ki az inverzet az  $(\ )^{-1} = \text{adj}(\ ) / \det(\ )$  képlettel is!

3. Legyen  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  a  $z$  tengely körül  $+90^\circ$ -kal forgató, és  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  az  $xy$  síkra tükröző leképezés mártixa. Mik az alábbi mátrixok? a)  $\mathbf{A}^{-1}$  b)  $\mathbf{B}^{-1}$ , c)  $\mathbf{AB}$ , d)  $\mathbf{BA}$ , e)  $\mathbf{A}^{2023} \cdot \mathbf{B}^{2023}$ ?

4. Legyen az  $\mathcal{A}$  leképezés mártixa a sztenderd bázisban:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel  $\mathcal{A}$  mártixát a  $\mathbf{B} = \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  bázisban! (A bázisáttérés mártixának felhasználásával is!) Mi  $\mathbf{A}^{100}$ ?

**iMSc.** Az  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  mártixon *használnak*, ha van olyan  $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  invertálható mártix, hogy  $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{B}$ . Igazak-e? Hasonló mártixok a) oszloptereinek dimenziója ugyanaz, b) oszlopterei ugyanazok, c) sortereinek dimenziója ugyanaz, d) sortereinek dimenziója ugyanaz?