

(Inhomogén lineáris e.r., inverz, leképezés mártixa, bázisváltás)



1. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ és $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^m$ olyan, hogy $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$. Igazoljuk, hogy

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\} = \text{Ker}(\mathbf{A}) + \{\mathbf{x}_0\}$$

Az a valós paraméter mely értékeire lesz az alábbi egyenletrendszereknek megoldása? Amikor van, írjuk fel a megoldáshalmazt $\text{Ker}(\mathbf{A}) + \{\mathbf{x}_0\}$ alakban!

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad \text{hf.: } \mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & b \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

2. Az a valós paraméter mely értékeire invertálhatóak az alábbi mátrixok és amikor igen, mi az inverzük?

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{hf.: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$a = 0$ esetén számoljuk ki az inverzet az $(\)^{-1} = \text{adj}(\) / \det(\)$ képlettel is!

3. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ a z tengely körül $+90^\circ$ -kal forgató, és $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ az xy síkra tükröző leképezés mártixa. Mik az alábbi mátrixok? a) \mathbf{A}^{-1} b) \mathbf{B}^{-1} , c) \mathbf{AB} , d) \mathbf{BA} , e) $\mathbf{A}^{2023} \cdot \mathbf{B}^{2023}$?

4. Legyen az \mathcal{A} leképezés mártixa a sztenderd bázisban:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel \mathcal{A} mártixát a $\mathbf{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ bázisban! (A bázisáttérés mártixának felhasználásával is!) Mi \mathbf{A}^{100} ?

iMSc. Az $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mártixok *hasonlók*, ha van olyan $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ invertálható mártix, hogy $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{B}$. Igazak-e? Hasonló mártixok a) oszloptereinek dimenziója ugyanaz, b) oszlopterei ugyanazok, c) sortereinek dimenziója ugyanaz, d) sortereinek dimenziója ugyanaz?