1. Legyen $\{b_1, b_2, b_3\}$ az $\mathbf{R}^3$ egy bázisa. Előállítható-e a $v = 2b_1 - b_2 + b_3$ vektor, és ha igen, hogyan a $\{b_1 + b_2 + b_3,\ b_2 - b_3,\ b_3 + b_1\}$ vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként?

MO. Mivel a kérdés, hogy vannak-e olyan x_1, x_2, x_3 számok, hogy $v = x_1(b_1 + b_2 + b_3) + x_2(b_2 - b_3) + x_3(b_3 + b_1)$, ezért áttérve a B-beli koordinátareprezentációkra, a feladat ekvivalens az alábbi egyenletrendszer megoldásával:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Gauss–Jordan-elimináció után a rref-ból látjuk, hogy előállítható és így:

$$v = -2(b_1 + b_2 + b_3) + (b_2 - b_3) + 4(b_3 + b_1)$$

2. Az a valós paraméter mely értékeire invertálható az alábbi mátrix? Mi a rangja az $a = 0$ érték esetén?

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MO.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{3.\text{ o.}}{=} -a \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{3.\text{ o.}}{=} -a \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -a(-1-a) = a(a+1)$$

Ez elfajuló $a = 0$ és $a = -1$ esetén. A rangot Gauss–Jordan-eliminációval:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow r = 3$$

3. Adjunk meg olyan T invertálható valós mátrixot, amivel az alábbi A mátrix esetén $T^{-1}AT$ diagonális, ha van ilyen! Van-e ilyen T mátrix, ami ortogonális?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

MO. A nem diagonalizálható ortogonálisan, mert nem szimmetrikus (mert felső háromszög mátrix). De hasonló egy diagonális mátrixhoz:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

$$\lambda = 1 \rightsquigarrow r\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\text{"}-1\text{"}}{\rightarrow} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{array} \rightsquigarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2 \rightsquigarrow r\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{"}-1\text{"}]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \rightsquigarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A három független sajátvektorból álló rendszerben diagonális lesz a mátrix, tehát $T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ olyan mátrix, ami kell és a diagonális alak természetesen: $T^{-1}AT = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$

4. Adjunk meg olyan U unitér mátrixot, amivel az alábbi A mátrix esetén $U^{-1}AU$ diagonális, ha van ilyen!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i \\ -i & i & 2 \end{bmatrix}$$

MO.
A Hermitikus ($A^* = A$, ahol A^* a komplex konjugált-transzponáltja A-nak), tehát normális ($A^*A = AA^*$, mert Hermitikusnál ezek mindketten az A^2.), tehát unitéren diagonalizálható.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & i \\ 0 & 1-\lambda & -i \\ -i & i & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -i \\ i & 2-\lambda \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ -i & i \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)(2-\lambda)-1\right) - (1-\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-2)) = (1-\lambda)\lambda(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda = 1, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i \\ -i & i & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{"SMART"}]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i \\ -i & i & 1 \end{bmatrix} \overset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 3, \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & i \\ 0 & -2 & -i \\ -i & i & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{"SMART"}]{} \begin{bmatrix} -2 & 0 & i \\ 0 & -2 & -i \\ -i & i & -1 \end{bmatrix} \overset{v_2}{\begin{bmatrix} i \\ -i \\ 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i \\ -i & i & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{"SMART"}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i \\ -i & i & 2 \end{bmatrix} \overset{v_3}{\begin{bmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A sajátvektorok egy $V = \left[\begin{smallmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \\ 0 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ mártixából normálással tudunk unitért csinálni, ami amúgy diagonalizálja A-t a komplex spektráltétel miatt:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Határozza meg az $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ integrál értékét 0,01 pontossággal!

MO. Mivel a Taylor-sor a konvergenciatartományán belüli kompakt intervallumon egyenletesen konvergens, ezért a szumma felcserélhető az integrállal:

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx = \int\limits_0^1 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \ldots\, dx = [x]_0^1 - \frac{1}{3}[x^3]_0^1 + \frac{1}{2!\cdot 5}[x^5]_0^1 - \frac{1}{3!\cdot 7}[x^7]_0^1 \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2! \cdot 5} - \frac{1}{3! \cdot 7} + \frac{1}{4! \cdot 9} \dots$$

ez utóbbi egy Leibniz-sor, ezért az első elhagyott tag abszolút értéke felülbecsüli a részletösszeg eltérését az összegtől, így:

$$\left| 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2! \cdot 5} - \frac{1}{3! \cdot 7} - \int_0^1 e^{-x^2} dx \right| \le \frac{1}{4! \cdot 9} < \frac{1}{100}$$

6. Igazak-e az alábbi állítások?
6.1. Ha A az x tengelyre tükrözés mátrixa a síkon, B a 30°-os forgatás mátrixa, akkor $AB = BA$.
6.2. Ha A invertálható és (λ, v) sajátpárja A-nak, ahol nem $\lambda \neq 0$, akkor $(1/\lambda, Av)$ sajátpárja A^{-1}-nek.
6.3. Ha (f_n) egyenletesen konvergens minden $p > 0$-ra a $[p, \infty)$-n, akkor a $(0, \infty)$-n is egyenletesen konvergens.

MO. 6.1. Hamis. Az $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ vektorral $BA\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{smallmatrix}\right) = AB\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
6.2. Igaz. Ha (λ, v) sajátpárja A-nak, azaz $Av = \lambda v$ (másként: $\frac{1}{\lambda}Av = v$), akkor $(1/\lambda, Av)$ sajátpárja A^{-1}-nek, mert $A^{-1}Av = v = \frac{1}{\lambda}Av$.
6.3. Hamis. Legyen $f_n = \sqrt[n]{.}$ a nemnegatívokon. f_n nem egyenletesen konvergens, mert az $x_n = 1/n^n$ sorozat olyan, hogy $|f_n(x_n) - f(x_n)| = |1/n - 1| \to 1 \neq 0$, míg f_n a $[p, \infty)$-n egyenletesen konvergál, mert $|f_n(x) - 1| \le |\sqrt[n]{p} - 1| \to 0$, ha $x \in [p, \infty)$.

iMSc. Igazolja, hogy ha $U \in \mathbf{C}^{n \times n}$ unitér, akkor minden $z \in \mathbf{C}^n$-re $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$, ahol $\|z\|_2 = \sqrt{\langle z \mid z \rangle}$.
MO. $U^*U = UU^* = I$, ha U unitér. $\|w\|_2^2 = \langle w \mid w \rangle = w^*w$, ahol az utóbbi szorzat a mátrixszorzás, így

$$\|Uz\|_2^2 = (Uz)^*(Uz) = z^*U^*Uz = z^*z = \|z\|_2^2$$