



1. a) Az $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés *képtere* $\text{Im}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\}$, *magtere*: $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. (Egy vektorrendszer bázis, ha független is és generátorrendszer is.) Mi az alábbi $\mathcal{A} : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^3, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezések mag- és képterének dimenziója, és egy-egy bázisa, ha az \mathbf{A} mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} \quad \text{hf.: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Igazoljuk, hogy az oszlopok által generált $\langle \mathcal{C}(\mathbf{A}) \rangle$ altér ugyanaz, mint az \mathcal{A} képtere.

b) Írjuk fel az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldását (ha \mathbf{A} a fenti mátrix)!

2. Lineáris alteret alkotnak-e az alábbi $M \subseteq L$ halmazok az L lineáris térben, ha $L_1, L_2 \leq L$ alterek L -ben? (Ha igen, igazoljuk akkurátusan, ha nem, cáfoljuk körültekintően.) (Használjuk azt a jellemzést, hogy M altér L -ben, akkor és csak akkor, ha M nem üres és zárt a lineáris kombinációra.)

$$\text{a) } L_1 \cap L_2, \quad \text{b) } L_1 \cup L_2, \quad \text{c) } \{x + y \in L \mid x \in L_1, y \in L_2\}$$

hf. Legyen $H \subseteq \text{Hom}(L)$ nem üres. Altér-e:

$$\text{a) } \{x \in L \mid \exists \mathcal{A} \in H : \mathcal{A}x = 0\}, \quad \text{b) } \{x \in L \mid \forall \mathcal{A} \in H : \mathcal{A}x = 0\}$$

3. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Melyik igaz?

$$\text{a) } (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2, \quad \text{b) } (\mathbf{B} + \mathbf{C})(\mathbf{B} - \mathbf{C}) = \mathbf{B}^2 - \mathbf{C}^2, \quad \text{hf.: } (\mathbf{A} + \mathbf{I})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{I}$$

4. (Ha $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, akkor a $(\mathbf{A}^T) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ transzponált mátrix komponensei: $(\mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$. Továbbá $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ az egységmátrix: $\mathbf{I}_{ij} = \delta_{ij}$, ahol $\delta_{ij} = 1$, ha $i = j$, $\delta_{ij} = 0$, ha $i \neq j$ a Kronecker-delta.) Mikor értelmes, és ha értelmes, akkor igazoljuk definíció szerint, hogy

$$\text{a) } (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}), \quad \text{b) } \mathbf{AI} = \mathbf{A}, \quad \text{c) } (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$$\text{hf.: } (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}, \quad \text{b) } (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

iMSc. Az \mathbf{A} mátrix $\text{rk}(\mathbf{A})$ rangján az oszlopai által kifeszített altér dimenzióját értjük. Igazoljuk, hogy $\text{rk}(\mathbf{AB}) \leq \text{rk}(\mathbf{A})$.