

1. Legyen $\{b_1, b_2, b_3\}$ az \mathbf{R}^3 egy bázisa. Mi az $X = \{2b_1 + b_2, 3b_2 + 2b_3, b_1 + 3b_2 + b_3\}$ vektorrendszer rangja? Lineárisan független-e X ? Generátorrendszer-e X ?

MO. A vektorrendszer $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ -beli koordinátareprezentációjára áttérve a feladat az alábbi mátrix rangjának meghatározása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ennek rangja 2. Nem független, mert az utolsó oszlop összefügg a többivel, nem generátorrendszer, mert akkor legalább 3-nak kellene a rangjának lennie.

2. Az a komplex paraméter mely értékeire lesz az alábbi mátrix determinánsa nulla? Mi a rangja az $a = 0$ érték esetén?

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

MO.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix} \stackrel{3. \text{ o.}}{=} -a \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} \stackrel{1. \text{ s.}}{=} -a(a \cdot (-a) + 1 \cdot (-1)) = a(a^2 + 1) = a(a + i)(a - i)$$

A mátrix $0, \pm i$ esetén szinguláris. A rangot Gauss–Jordan-eliminációval:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow r = 3$$

3. Adjuk meg az alábbi valós mátrix sajátértékeit, sajátvektorait és sajátaltérét! Diagonalizálható-e? Ha igen, diagonalizáljuk, ha nem, a sajátvektorok egy ortogonális kiegészítésével triangularizáljuk!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MO. Pontosan akkor diagonalizálható, ha van három független sajátvektora.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 - \lambda)^2(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 1 \rightsquigarrow r \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1 \rightsquigarrow r \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = 2, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tehát 1-hez a sajátaltér $\text{Ker}(A - I) = \langle v_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, -1-hez pedig $\text{Ker}(A + I) = \langle v_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Az ismert tétel szerint, ha minden sajátértéke valós, akkor valóban triangularizálható, egyébként komplexen. Most minden sajátérték valós. A triangularizációhoz ortogonálisan kell kiegészíteni a sajátvektorokat (Schur-féle triangularizáció), ez igen egyszerű: a 3. sztenderd bázisvektort választjuk:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: akinek van türelme, Jordan-normálformára is áttérhet. Ehhez a $\lambda = 1$ (algebrailag kétszeres, geometriailag egyszeres multiplicitású) sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektort kell meghatározni az

$$(A - I)u_2 = v_1$$

egyenlet megoldásával:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow x_1 + t = 0, x_3 = 1, x_2 = t \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, így a $V_2 = (v_1, u_2, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ mátrix átviszi a $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Jordan-normálformába.

4. Normál-e az alábbi A mátrix? Ha igen, adjunk meg olyan U unitér mátrixot, amivel $U^{-1}AU$ diagonális!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+i \end{bmatrix}$$

MO. A szimmetrikus ($A^T = A$), de nem valós, így nem feltétlenül normál ($A^*A = AA^*$). (Ellenpélda: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.) Viszont blokkonként ellenőrizve mégis normál: $(2+i)(2-i) = (2-i)(2+i)$, $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. Ebből viszont az következik, hogy unitéren diagonalizálható.

$$\left| \begin{array}{ccc} 2-\lambda & i & 0 \\ i & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2+i-\lambda \end{array} \right| = (2+i-\lambda) \left| \begin{array}{cc} 2-\lambda & i \\ i & 2-\lambda \end{array} \right| = (2+i-\lambda)((2-\lambda)^2 + 1) = (2+i-\lambda)^2((2-i-\lambda))$$

$$\lambda = 2+i, \quad \begin{bmatrix} -i & i & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hiszen az elfajuló mátrix magtere két dimenziós.

$$\lambda = 2-i, \quad \begin{bmatrix} i & i & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A sajátvektorok egy $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixából normálással tudunk unitért csinálni, ami amúgy diagonalizálja A -t a komplex spektráltétel miatt:

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$$

5. Határozza meg a $\int_0^1 \frac{\sin(x)-x}{x^3} dx$ integrál értékét 0,001 pontossággal!

MO. Mivel a \sin Taylor-sora mindenhol konvergens és hatványsor a konvergenciatartományán belüli kompakt intervallumon egyenletesen konvergens, ezért a szumma felcserélhető az integrállal:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin(x)-x}{x^3} dx &= \int_0^1 \frac{-x + x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots}{x^3} dx = \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^2 - \frac{1}{7!}x^4 + \dots dx = -\frac{1}{3!}[x]_0^1 + \frac{1}{3 \cdot 5!}[x^3]_0^1 - \frac{1}{5 \cdot 7!}[x^5]_0^1 + \frac{1}{7 \cdot 9!}[x^7]_0^1 - \dots = \\ &= -\frac{1}{3!} + \frac{1}{3 \cdot 5!} - \frac{1}{5 \cdot 7!} + \frac{1}{7 \cdot 9!} - \dots \end{aligned}$$

ez utóbbi egy Leibniz-sor, ezért az első elhagyott tag abszolútértéke felülbecsüli a részletösszeg eltérését az összegtől, így:

$$\left| -\frac{1}{3!} + \frac{1}{3 \cdot 5!} - \int_0^1 \frac{\sin(x)-x}{x^3} dx \right| \leq \frac{1}{5 \cdot 7!} < \frac{1}{1000}$$

6. Igazak-e az alábbi állítások?

6.1. Ha A szimmetrikus, akkor A normál is.

6.2. Ha $\sum(a_n^2)$ konvergens, akkor $\sum(a_n)$ is.

6.3. $\sum \frac{n}{2^n+5^n} x^n$ konvergenciasugara 5.

MO.

6.1. Hamis. Ellenpélda: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, mert $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

6.2. Hamis. Ellenpélda: $a_n = 1/n$, mert $\sum(1/n)^2 = \sum 1/n^2$ konvergens, de a $\sum(1/n)$ harmonikus sor nem.

6.3. Igaz. Rendőrelvvel a gyöksorozat határértéke:

$$\frac{1}{5} \leftarrow \sqrt[n]{\frac{n}{5^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n}{2^n+5^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n}{2 \cdot 5^n}} \rightarrow \frac{1}{5}$$

így $R = 1/(1/5) = 5$.

iMSc. Igazolja, hogy ha $V = (v_1, v_2, v_3)$ invertálható és $V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, akkor teljesülnek a $v_1 \neq 0$, $(A - \lambda I)v_1 = 0$, $(A - \lambda I)v_2 = v_1$ és $(A - \lambda I)v_3 = v_2$ feltételek.

MO. Valójában ez a 3×3 -as Jordan-blokk meghatározásáról beszélő tétel egyik iránya. $v_1 \neq 0$, mert ha az lenne, akkor V első oszlopa nulla lenne, és nem lenne invertálható. Az

$$AV = V \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

egyenlőséget oszloponként kiírva:

$$Av_1 = V \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Av_2 = V \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Av_3 = V \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Ahonnán: $Av_1 = \lambda v_1$, $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$, $Av_3 = v_2 + \lambda v_3$, amik pontosan a szükséges egyenlőségek.