1. Létezik-e és ha igen, mennyi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}$$

MO. Legyen $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^4+y^2}$, ahol értelmes. Tehát, $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ha $y \neq 0$, akkor

$$0 \leq \left|\frac{xy^2}{x^4+y^2}\right| = \frac{|x|y^2}{x^4+y^2} \leq \frac{|x|y^2}{y^2} = |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

a rendőrelv miatt. Ez a határéték azt mondja, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy ha $(x,y) \in \mathrm{B}_\delta(0,0) \setminus \{(0,0)\}$, akkor $y \neq 0$ esetén $f(x,y) \in \mathrm{B}_\varepsilon(0)$. Továbbá, ha $y = 0$, akkor $f(x,y) = 0 \in \mathrm{B}_\varepsilon(0)$ szintén teljesül akármilyen nemnulla x-re, és mivel ε tetszőleges volt, f határértéke a 0-ban a 0.

2. Létezik-e és ha igen folytonos-e $\partial_1 f$ a $(0,0)$ pontban, ha

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

MO. Létezik. Az x irányú metszetfüggvény a nullában: $f(x,0) = \frac{x\cdot 0^2}{(x^2+0^2)^2} \equiv 0$, $f(0,0) = 0$, tehát $\partial_x f(0,0) = 0$. Az első változó szerinti parciális derivált folytonossághoz azt kell ellenőrizni, hogy $\lim\limits_{0} \partial_1 f = \partial_1 f(0)$ teljesül-e, hiszen ez ekvivalens azzal, hogy $f \in \mathrm{C}(0)$. Ehhez a parciális derivált máshol:

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x^2+y^2)^2 - xy^2 2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y^2(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} & \text{, ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

De ez nem véges, így nem is nulla, mert:

$$\infty = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2(0^2+y^2)^2 - 4\cdot 0^2 y^2(0^2+y^2)}{(0^2+y^2)^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{y^8} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^2}$$

3. Hol differenciálható az $f(x,y) = \sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$ függvény?

MO. A nullán kívül mindenhol, mert ezekben a pontokban folytonosan parciálisan deriválható és ezért az ismert tétel szerint totálisan is. A nullában a parciális deriváltakhoz tekintsük a metszetfüggvényeket: $f(0,y) = \sqrt[3]{y^4}$, $f(x,0) = \sqrt[3]{x^4}$. Ezek nullabeli deriváltjai:

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{y^4} - 0}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \sqrt[3]{y} = 0$$

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^4} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$$

Tehát a Jacobi-mátrix a nullában 0. Innen az $\sqrt{x^2+y^2} = r$ polárkoordináta helyettesítéssel:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2} - 0 - [0,0]\cdot\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} r^{\frac{1}{3}} = 0$$

tehát deriválható a nullában is.

4. Mely pontokban van az $f(x,y) = x^4 + 2x^3 + 2y^2 + y$ valós függvénynek lokális minimuma ill. maximuma?

MO. f mindenhol deriválható, ezért az elsőderivált-próba miatt lokális szélsőértéke csak ott lehet, ahol a gradiense nulla: $[\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)] = [4x^3+6x^2, 4y+1] = [0,0]$. Innen:

$$\text{I. } 4x^3 + 6x^2 = 0$$
$$\text{II. } 4y + 1 = 0$$

Az I. egyenletből: $2x^2(2x+3) = 0 \rightsquigarrow x_{1,2} = 0; -\frac{3}{2}$. A II.-ból: $y_{1,2} = -\frac{1}{4}$. Innen a két stacionárius pont: $P_1 = (0, -\frac{1}{4})$, $P_2 = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$. f kétszer folytonosan deriválható, ezért a másodikderivált-próba szerint, a Hesse-mátrix eldöntheti, hogy milyen szélsőértéke van:

$$H^f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 + 12x & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

P_1-ben $H^f(P_1) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Ez utóbbi mátrix esetén nem eredményes a próba, de az $f(x, -\frac{1}{4}) = x^4 + x^3 + 2(-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4}$ függvénynek nincs szélsőértéke 0-ban, mert $f'(x, -\frac{1}{4}) = 4x^3 + 3x^2 = x^2(4x+3)$ nem vált előjelet a 0-ban.
P_2-ben $H^f(P_2) = \left[\begin{smallmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Ez utóbbi mátrix esetén $\partial_{xx} f(P_2) = 9 > 0$, $\det H^f(P_2) > 0$, így P_2-ben a függvénynek minimuma van.

5. Hol és mennyi az $f(x,y) = x^2 - xy$ függvény abszolút minimuma és maximuma a T tartományon, ha van?

$$T = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

MO. A T kompakt tartományon a Weierstrass-tétel miatt biztosan van maximuma is és minimuma is a folytonos f-nek. Elsőként T belsején keresünk szélsőértéket, az első- és másodikderivált-próba segítségével, mert ott belső pontban deriválható a függvény. $[\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)] = [2x - y, -x] = [0,0]$. Innen $x = 0$ és $y = 0$, azaz $\operatorname{int} T$-ben nem lehet szélsőértéke. T peremét négy görbe alkotja, amit be is paraméterezünk: $\partial T = L_1 \frown L_2 \frown L_3 \frown L_4$.
$L_1 = \{(x,0) \mid 0 \le x \le 1\}$, itt $f(x,0) = x^2$ sz. m. nő és a szélsőértékek: $f(0,0) = 0$ és $f(1,0) = 1$.
$L_2 = \{(1,y) \mid 0 \le y \le 1\}$, itt $f(1,y) = 1 - y$ sz. m. csökken, és a szélsőértékek: $f(1,0) = 1$ és $f(1,1) = 0$.
$L_3 = \{(x,1) \mid 0 \le x \le 1\}$, itt $f(x,1) = x^2 - x$ nem sz. m., ennek belsejében a minimum: $f'(x,1) = 2x - 1 = 0 \rightsquigarrow x = \frac{1}{2}$ és $f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{4}$ ill.: $f(0,1) = 0 = f(1,1)$.
$L_4 = \{(0,y) \mid 0 \le y \le 1\}$, itt $f(0,y) \equiv 0$ konstans nulla. Összegezve, az abszolút tartományi minimum $f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{4}$, az abszolút tartományi maximum $f(1,0) = 1$.

6.1. Van-e olyan nyílt halmazokból álló halmazrendszer, amelynek metszete a $[0,1]$ zárt intervallum?
6.2. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ mindkét parciális deriváltja mindenhol létezik, akkor a függvény mindenhol differenciálható?

6.3. Pozitív vagy negatív definit-e a $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix?

MO. 6.1. Igen van: $\left\{\left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]\right\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$. Világos, hogy $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}^+}\left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$, másfelől, ha $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, akkor van olyan N, hogy $x \notin \left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$.
6.2. Hamis: $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$, ha $(x,y) \neq (0,0)$, továbbá $f(0,0) = 0$, mert előadáson láttuk, hogy mindenhol parciálisan deriválható, de a nullában nincs határértéke.
6.3. Egyik se. $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ sajátértékei: $\lambda^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$, így különböző előjelűek a sajátértékei. Pozitív definit lenne, ha mindkettő pozitív lenne, negatív definit lenne, ha mindkettő negatív lenne. Vagy a Sylvester-kritériummal: pozitív definit lenne, ha a főminorok determinánsa mind pozitív lenne, negatív definit lenne, ha a főminorok a bal felső elemtől, negatívval kezdve váltakozó előjelűek lennének. De a bal felső első sarokdetermináns nulla.

iMSc. Legyen $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ és $u \in \mathbf{R}^n$, valamint tegyük fel, hogy

$$\exists \lim_{(x_1,x_2)\to(u,u)} \frac{f(x_2) - f(x_1) - J^f(u)\cdot(x_2 - x_1)}{\|x_2 - x_1\|} = 0$$

és $\|J^f(u)\| > 0$. Ekkor léteznek olyan $\delta > 0$ és $L > 0$, hogy minden $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_\delta(u)$-ra

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le L_2\|x_2 - x_1\|.$$

Használjuk fel az $||a| - |b|| \le |a - b|$ egyenlőtlenséget, ahol $a, b \in \mathbf{R}$.

MO. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_\delta(u)$, akkor:

$$|f(x_2) - f(x_1) - J^f(u)\cdot(x_2 - x_1)| < \varepsilon\|x_2 - x_1\|$$

A fenti egyenlőtlenség miatt

$$\left||f(x_2) - f(x_1)| - |J^f(u)\cdot(x_2 - x_1)|\right| \le |f(x_2) - f(x_1) - J^f(u)\cdot(x_2 - x_1)| < \varepsilon\|x_2 - x_1\|$$

amiből

$$|J^f(u)\cdot(x_2 - x_1)| - \varepsilon\|x_2 - x_1\| \le |f(x_2) - f(x_1)| \le |J^f(u)\cdot(x_2 - x_1)| + \varepsilon\|x_2 - x_1\|$$

Ebből nekünk csak a második kell, ami a CBS miatt folytatható:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le |J^f(u)\cdot(x_2 - x_1)| + \varepsilon\|x_2 - x_1\| \le \|J^f(u)\|\cdot\|x_2 - x_1\| + \varepsilon\|x_2 - x_1\| = (\|J^f(u)\| + \varepsilon)\|x_2 - x_1\|$$

így tehát, ha mondjuk $\varepsilon = 1$, akkor létezik hozzá is δ, hogy a feladat feltételeivel $L = \|J^f(u)\| + 1$ jó lesz.