2023 Vill. Mat A2 – 2. gyakorlat

(Alterek, műveletek mátrixokkal)

1. a) Az $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés *képtere* $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}\boldsymbol{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\}$, magtere: $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathcal{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$. (Egy vektorrendszer bázis, ha független is és generátorrendszer is.) Mi az alábbi $\mathcal{A} : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3, \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ leképezések mag- és képterének dimenziója, és egy-egy bázisa, ha az $\boldsymbol{A}$ mátrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} \qquad \textbf{hf.:}\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Igazoljuk, hogy az oszlopok által generált $\langle \mathcal{C}(\boldsymbol{A}) \rangle$ altér ugyanaz, mint az $\mathcal{A}$ képtere.

b) Írjuk fel az $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldását (ha $\boldsymbol{A}$ a fenti mátrix)!

2. Lineáris alteret alkotnak-e az alábbi $M \subseteq L$ halmazok az L lineáris térben, ha $L_1, L_2 \leq L$ alterek L-ben? (Ha igen, igazoljuk akkurátusan, ha nem, cáfoljuk körültekintően.) (Használjuk azt a jellemzést, hogy M altér L-ben, akkor és csak akkor, ha M nem üres és zárt a lineáris kombinációra.)

$$\text{a)}\ L_1 \cap L_2, \qquad \text{b)}\ L_1 \cup L_2, \qquad \text{c)}\ \{x + y \in L \mid x \in L_1, y \in L_2\}$$

hf. Legyen $H \subseteq \mathrm{Hom}(L)$ nem üres. Altér-e:

$$\text{a)}\ \{x \in L \mid \exists \mathcal{A} \in H : \mathcal{A}x = 0\}, \quad \text{b)}\ \{x \in L \mid \forall \mathcal{A} \in H : \mathcal{A}x = 0\}$$

3. Legyen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Melyik igaz?

a) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2$, b) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{C}^2$, **hf.:)** $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^2 = \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$

4. (Ha $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times m}$, akkor a $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \in \mathbf{R}^{n\times m}$ transzponált mátrix komponensei: $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$. Továbbá $I \in \mathbf{R}^{n\times n}$ az egységmátrix: $\boldsymbol{I}_{ij} = \delta_{ij}$, ahol $\delta_{ij} = 1$, ha $i = j$, $\delta_{ij} = 0$, ha $i \neq j$ a Kronecker-delta.) Mikor értelmes, és ha értelmes, akkor igazoljuk definíció szerint, hogy

$$\text{a)}\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}), \qquad \text{b)}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}, \qquad \text{c)}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

$$\text{hf.:}\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}, \qquad \text{b)}\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$$

iMSc. Az $\boldsymbol{A}$ mátrix $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A})$ rangján az oszlopai által kifeszített altér dimenzióját értjük. Igazoljuk, hogy $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leq \mathrm{rk}(\boldsymbol{A})$.