1. Legyen $\{b_1, b_2, b_3\}$ az $\mathbf{R}^3$ egy bázisa. Mi az $X = \{2b_1 + b_2,\ 3b_2 + 2b_3,\ b_1 + 3b_2 + b_3\}$ vektorrendszer rangja? Linárisan független-e X? Generátorrendszer-e X?

MO. A vektorrendszer $B = \{b_1, b_2, b_3\}$-beli koordinátareprezentációjára áttérve a feladat az alábbi mátrix rangjának meghatározása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ennek rangja 2. Nem független, mert az utolsó oszlop összefügg a többivel, nem generátorrendszer, mert akkor legalább 3-nak kellene a rangjának lennie.

2. Az a komplex paraméter mely értékeire lesz az alábbi mártix determinánsa nulla? Mi a rangja az $a = 0$ érték esetén?

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

MO.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix} \overset{3.\text{ o.}}{=} -a \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} \overset{1.\text{ s.}}{=} -a(a \cdot (-a) + 1 \cdot (-1)) = a(a^2 + 1) = a(a+i)(a-i)$$

A mátrix $0, \pm i$ esetén szinguláris. A rangot Gauss–Jordan-eliminációval:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow r = 3$$

3. Adjuk meg az alábbi valós mátrix sajátértékeit, sajátvektorait és sajátaltereit! Diagonalizálható-e? Ha igen, diagonalizáljuk, ha nem, a sajátvektorok egy ortogonális kiegészítésével triangularizáljuk!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MO. Pontosan akkor diagonalizálható, ha van három független sajátvektora.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda = 1 \rightsquigarrow r\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1 \rightsquigarrow r\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tehát 1-hez a sajátaltér $\mathrm{Ker}(A - I) = \langle v_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, -1-hez pedig $\mathrm{Ker}(A + I) = \langle v_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Az ismert tétel szerint, ha minden sajátértéke valós, akkor valósan triangularizálható, egyébként komplexen. Most minden sajátérték valós. A triangularizációhoz ortogonálisan kell kiegészíteni a sajátvektorokat (Schur-féle triangularizáció), ez igen egyszerű: a 3. sztenderd bázisvektort választjuk:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: akinek van türelme, Jordan-normálformára is áttérhet. Ehhez a $\lambda = 1$ (algebrailag kétszeres, geometriailag egyszeres multiplicitású) sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektort kell meghatározni az

$$(A - I)u_2 = v_1$$

egyenlet megoldásával:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow x_1 + t = 0, x_3 = 1, x_2 = t \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, így a $V_2 = (v_1, u_2.v_2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mátrix átviszi a $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ Jordan-normálformába.

4. Normál-e az alábbi A mátrix? Ha igen, adjunk meg olyan U unitér mátrixot, amivel $U^{-1}AU$ diagonális!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + i \end{bmatrix}$$

MO. A szimmetrikus ($A^{\mathrm{T}} = A$), de nem valós, így nem feltétlenül normál ($A^*A = AA^*$). (Ellenpélda: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right)$.) Viszont blokkonként ellenőrizve mégis normál: $(2 + i)(2 - i) = (2 - i)(2 + i)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & -i \\ -i & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -i \\ -i & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Ebből viszont az következik, hogy unitéren diagonalizálható.

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & i & 0 \\ i & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 + i - \lambda \end{vmatrix} = (2 + i - \lambda)\begin{vmatrix} 2 - \lambda & i \\ i & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 + i - \lambda)((2 - \lambda)^2 + 1) = (2 + i - \lambda)^2((2 - i - \lambda)$$

$$\lambda = 2 + i, \quad \begin{bmatrix} -i & i & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hiszen az elfajuló mátrix magtere két dimenziós.

$$\lambda = 2 - i, \quad \begin{bmatrix} i & i & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A sajátvektorok egy $V = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mártixából normálással tudunk unitért csinálni, ami amúgy diagonalizálja A-t a komplex spektráltétel miatt:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$$

5. Határozza meg a $\int\limits_0^1 \frac{\sin(x)-x}{x^3}dx$ integrál értékét 0,001 pontossággal!

MO. Mivel a sin Taylor-sora mindenhol konvergens és hatványsor a konvergenciatartományán belüli kompakt intervallumon egyenletesen konvergens, ezért a szumma felcserélhető az integrállal:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin(x)-x}{x^3}dx = \int\limits_0^1 \frac{-x+x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\dots}{x^3}dx =$$

$$= \int\limits_0^1 -\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}x^2-\frac{1}{7!}x^4+\dots\,dx = -\frac{1}{3!}[x]_0^1+\frac{1}{3\cdot 5!}[x^3]_0^1-\frac{1}{5\cdot 7!}[x^5]_0^1+\frac{1}{7\cdot 9!}[x^7]_0^1-\dots =$$

$$= -\frac{1}{3!}+\frac{1}{3\cdot 5!}-\frac{1}{5\cdot 7!}+\frac{1}{7\cdot 9!}-\dots$$

ez utóbbi egy Leibniz-sor, ezért az első elhagyott tag abszolútértéke felülbecsüli a részletösszeg eltérését az összegtől, így:

$$\left|-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3\cdot 5!}-\int\limits_0^1 \frac{\sin(x)-x}{x^3}dx\right| \le \frac{1}{5\cdot 7!} < \frac{1}{1000}$$

6. Igazak-e az alábbi állítások?
6.1. Ha A szimmetrikus, akkor A normál is.
6.2. Ha $\sum(a_n^2)$ konvergens, akkor $\sum(a_n)$ is.
6.3. $\sum \frac{n}{2^n+5^n}x^n$ konvergenciasugara 5.

MO.

6.1. Hamis. Ellenpélda: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right)$, mert $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{smallmatrix}\right) \ne \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right)$
6.2. Hamis. Ellenpélda: $a_n = 1/n$, mert $\sum(1/n)^2 = \sum 1/n^2$ konvergens, de a $\sum(1/n)$ harmonikus sor nem.
6.3. Igaz. Rendőrelvvel a gyöksorozat határértéke:

$$\frac{1}{5} \leftarrow \sqrt[n]{\frac{n}{5^n}} \le \sqrt[n]{\frac{n}{2^n+5^n}} \le \sqrt[n]{\frac{n}{2\cdot 5^n}} \to \frac{1}{5}$$

így $R = 1/(1/5) = 5$.

iMSc. Igazolja, hogy ha $V = (v_1, v_2, v_3)$ invertálható és $V^{-1}AV = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, akkor teljesülnek a $v_1 \ne 0$, $(A-\lambda I)v_1 = 0$, $(A-\lambda I)v_2 = v_1$ és $(A-\lambda I)v_3 = v_2$ feltételek.

MO. Valójában ez a 3×3-as Jordan-blokk meghatározásáról beszélő tétel egyik iránya. $v_1 \neq 0$, mert ha az lenne, akkor V első oszlopa nulla lenne, és nem lenne invertálható. Az

$$AV = V \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

egyenlőséget oszloponként kiírva:

$$Av_1 = V \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Av_2 = V \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Av_3 = V \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Ahonnan: $Av_1 = \lambda v_1$, $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$, $Av_3 = v_2 + \lambda v_3$, amik pontosan a szükséges egyenlőségek.