Matematika A2 – válogatott fejezetek

Molnár Zoltán

2023

Algebrai bevezető

Meg kell különbözetnünk a nyelvet (szignatúra) és a valóságot (modell):

1. τ *szignatúra:* – konstansjelek $(c_1, c_2, ...)$, – műveleti vagy függvényjelek $(f_1(), f_2(), ..., ()o_1(), ...)$ és aritásuk (változóik száma) (, – relációjelek és aritásuk)

2. τ szignatúrájú *algebrai struktúra:* $(A, c^A, ..., f^A(), ..., () *^A (), ...)$, ahol A nemüres halmaz, $c^A \in A$ konstans(ok), $*^A : A \times A \to A$ művelet(ek) (vagy egy- vagy többváltozós, ez éppen kettő).

Míg a halmazelméletben (Set) az alapvető fogalmak a halmaz, részhalmaz, függvény, ekvivalencia-reláció, unió, addig az algebrában adott struktúraosztály esetén az *algebra, morfizmus, részstruktúra, hányados-struktúra, direkt összeg* lesz.

halmazelmélet	absztrakt algebra	A1-ben tanult algebra	lineáris algebra
halmaz	struktúra	pl. $\mathbf{Z}_5^\times$, $\mathbf{R}$	vektortér
függvény	morfizmus	pl. $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^\times, x \mapsto e^x$	pl. $x \mapsto Ax$
részhalmaz	részstruktúra	$\mathbf{Q} \leq \mathbf{R}$	altér
ekvivalenciaosztályok	hányados struktúra	$\mathbf{R}[x]/(x^2+1)$	$y = x$-szel párhuzamos egyenesek

Algebrai/matematikai példa.
Csoportok
Szignatúra: $\tau_{\mathrm{Grp}} = (e, (...)^{-1}, ... * ...)$.
Az összes csoportok olyan τ_{Grp} szignatúrájú $(G, e, ()^{-2}, () * ())$ struktúrák, amik neutrális elemesek $(e * a = a * e = e)$, inverz elemesek ($a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$) és asszociatívak $((a*b)*c = (a*(b*c)))$.

1. $\mathbf{Z}_3^\times = \{1, 2\}$,
   ahol $e = 1$, $2^{-1} = 2, 1^{-1} = 1$, $\cdot$ a 3-mal való osztás maradékainak szorzása.

2. $H \neq \varnothing$, $\mathrm{Aut}(H) = \{f : H \to H \mid \text{f invertálható}\}$, csoport.

3. $\mathbf{C}^+$, $\mathbf{C}^\times$ csoportok.

Szintaxis és algebra a TCS-ben. A természetes számok induktív adattípusa. Típusolási szabályok (milyen adattípuson fusson a program):

$$\frac{}{\mathrm{Nat} : \mathrm{Set}} \qquad \frac{}{0 \colon \mathrm{Nat}} \qquad \frac{}{s \colon \mathrm{Nat} \to \mathrm{Nat}}$$

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "0'"'] & \mathrm{Nat} \arrow[d, dashed, "u"] & \mathrm{Nat} \arrow[l, "s"'] \arrow[d, dashed, "u"] \\
& M & M \arrow[l, "s'"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c} 0' = u \circ 0 \\ \\ s' \circ u = u \circ s \end{array}$$

Néha az egyelemű típust 1-nek vagy Truth-nak is nevezzük. A $(\mathrm{Nat}, 0 : 1 \to M, s : M \to M)$ algebrát a természetes számok típusának nevezzük. A definiáló tulajdonsága pedig az, hogy minden fenti $(M, 0' : 1 \to M, s' : M \to M)$, úgy nevezett "1+X"-algebrára, létezik egyértelműen olyan $u : \mathrm{Nat} \to M$, hogy $0'$ előáll $u \circ 0$-ként és $s' \circ u$ előáll $u \circ s$-ként. Felvetődő új fogalmak: Nat generálja a "1+X"-algebrákat és egyféleképpen generálja őket.

Lineáris algebra

Szignatúra: ha F egy test, akkor

$$\tau_{Lin_T} = (0, () + (), -(), \lambda.())_{\lambda \in F}.$$

Struktúra: $L \neq \varnothing$,

$$(L, 0^L, +^L, -()^L, \lambda.^L)_{\lambda \in F}$$

lineáris tér, ha $(L, 0^L, +^L, -()^L)$ kommutatív csoport, továbbá $1.x = x$, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$, $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$, minden $x, y \in L$-re.

Az F test általában: $\mathbf{Z}_p, \mathbf{R}, \mathbf{C}$.

Példák:

1. *Kitüntetett példa* (minden véges dimenziós lineáris algebra ilyen): $\mathbf{R}^n$.

2. Függvényterek: $H \neq \varnothing$, akkor $F^H = \{f : H \to F\}$, pl. $\mathbf{R}^H$. Műveletek: $0 : H \to F, x \mapsto 0$, minden $f \in H^F$, $-f : H \to F, x \mapsto -f(x)$, minden $f, g \in H^F$, $f + g : H \to F, x \mapsto f(x) + g(x)$. Még konkrétabb példák:

3. $\mathbf{R}^{\overline{1..n}} = \{f : \overline{1..n} \to \mathbf{R}\}$ (ez "ugyanaz", mint $\mathbf{R}^n$).

4. $\mathbf{R}^{\overline{1..n} \times \overline{1..k}} = \{f : \overline{1..n} \times \overline{1..k} \to \mathbf{R}\}$ (ez "ugyanaz", mint $\mathbf{R}^{n \times k}$) pl. $\mathbf{R}^{\overline{1..2} \times \overline{1..3}}$.

5. Formális polinomok: $\mathbf{R}[x] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid n \in \mathbf{N}, \forall i \in \overline{0..n} : a_i \in \mathbf{R}\}$

6. Formális hatványsorok: $\mathbf{R}[[x]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid \forall n \in \mathbf{N} : a_n \in \mathbf{R}\}$. (Ne feledjük a mértanit: $1 + q + q^2 + ...$, ami ha nem lenne formális, hanem igazi lenne, akkor $|q| < 1$ esetén az $1/(1 - q)$ összeggel rendelkezne.)

Definíció. Legyen L lineáris tér a K test felett, $X \subseteq L$ részhalmaz. Azt mondjuk, hogy X lineárisan független, ha minden $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq X$ véges halmazra és minden $\lambda_1, \dots \lambda_n \in K$ számra, ha $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$, akkor $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Tétel. (Egyértelmű előállíthatóság.) Ha $v \in L \in \mathrm{Lin}$ előáll $v = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$ alakban egy $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq L$ független rendszer elemeivel, akkor ez az előállítás egyértelmű.

Bizonyítás. Legyen $v = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda'_j v_j$ két ilyen előállítás. Ekkor

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j - \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j v_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda'_j) v_j$$

így a rendszer függetlensége miatt minden j-re: $\lambda_j - \lambda'_j = 0 \rightsquigarrow \lambda_j = \lambda'_j$.

Definíció. Legyen L lineáris tér a K test felett, $X \subseteq L$ részhalmaz. Azt mondjuk, hogy X generátorrendszere L-nek, ha minden $v \in L$-re, van olyan $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq X$ véges halmaz, hogy vannak $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in K$ számok, hogy $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_i v_i = v$.

Definíció. Legyen L lineáris tér, $X \subseteq L$ részhalmaz. Azt mondjuk, hogy X bázisa L-nek, ha független rendszer és generátorrendszere L-nek. L véges dimenziós, ha minden bázis véges (később látjuk: minden véges bázis azonos számosságú).

Példák.

1. $\mathbf{R}^n$-ben a *sztenderd bázis* $S = \{e_j\}_{j=1}^{n}$ bázis. Jobb felírni így: $(e_j)_i = \delta_{ij}$, ahol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

a Kronecker-féle delta szimbólum. Ekkor S független, ugyanis $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$ esetén

$$0 = (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j . e_j)_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{ij} = \cancel{\sum_{j=1}^{n}} \lambda_{\cancel{j}i} \cancel{\delta_{ij}} = \lambda_i$$

is. Emlékezzünk vissza a Kronecker-deltával való számolásra: szummát áthúzzuk, összegzőindexet átírjuk a delta másik indexére és a deltát is áthúzzuk. És nyilván generátorrendszer, mert tetszőleges $v \in \mathbf{R}^n$-re

$$(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j)_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \delta_{ij} = v_i.$$

2. $\mathbf{R}[x]$-ben $S = \{x^j\}_{j=0}^{\infty}$ bázis, mert független, $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j . x^j = 0$ esetén, ahol 0 a nullapolinom, *definíció szerint* azt jelenti, hogy $\lambda_j = 0$, továbbá ha $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j . x^j$, akkor ez *szó szerint* azt jelenti, hogy S véges sok eleme az a_j-kel, mint együtthatókkal generálja $p(x)$-et.

Lineáris altér, részstruktúra: $L_1 \subseteq L_2$ részstruktúra az L_2 lineáris térben, ha zárt a műveletekre, tehát $0 \in L_1$, $x + y \in L_1$, ha $x, y \in L_1$, $-x \in L_1$, ha $x \in L_1$, $\lambda . x \in L_1$, ha $x \in L_1$. (Ilyenkor persze az összes vektortéraxióma igaz L_1-ben, ám a műveletek éppen ezek miatt kifejezhetők egymással, így nem ezt a definíciót érdemes választani, hanem egy egyszerűbb, kézzel foghatóbbat.)

Definíció. $L_1 \subseteq L_2$ *altér* az L_2 lineáris térben a K test felett, ha nem üres és zárt a lineáris kombinációra, azaz $\lambda . v + \mu . u \in L_1$, ha $v, u \in L_1$ és $\lambda, \mu \in K$.

Példák.

A legfontosabb példa a vektorrendszer által generált altér. Ha $v_1, \dots, v_n \in L$ vektorok, akkor

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle \overset{\text{def.}}{=} \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in K\}$$

Ez éppen úgy van csinálva, hogy ne legyen üres (0 benne van) és zárt a lineáris kombinációra.

Lineáris leképezés (vektortér morfizmus vagy homomorfizmus). Lin-ben a morfizmusok: $L_1, L_2 \in \text{Lin}$ és $A : L_1 \to L_2$, akkor A lineáris leképezés (vagy lineáris morfizmus vagy lineáris homomorfizmus), ha $A(0) = 0$, $A(x+y) = A(x) + A(y)$, $A(-x) = -A(x)$ és $A(\lambda.x) = \lambda.A(x)$ minden $x, y \in L_1$-re és $\lambda \in K$-ra. De ezt a lineáris kombináció $(\lambda.x + \lambda.y)$ erős kifejező tulajdonsága felhasználásával elegendő így definiálni:

Definíció. $L_1, L_2 \in \text{Lin}$ a K test felett és $A : L_1 \to L_2$, akkor A *lineáris leképezés,* ha $A(\lambda.x+\mu.y) = \lambda.A(x)+\mu.A(y)$ minden $x, y \in L_1$-re és minden $\lambda, \mu \in K$-ra. (Jelölése: $A \in \text{Lin}(L_1, L_2)$ vagy $A \in \text{Hom}(L_1, L_2)$,...)

Ezek között is speciális leképezések az izomorfizmusok:

Definíció. $L_1, L_2 \in \text{Lin}$ és $A \in \text{Lin}(L_1, L_2)$, akkor A *izomorfizmus,* ha kölcsönösen egyértelmű. (Mert Set-ben vagyunk, azaz a halmazok világában (kategóriájában), legalább is, ha elfelejtjük a Lin struktúrát, de általában $i \in \text{Hom}(L_1, L_2)$ izomorfizmus, ha van olyan $j \in \text{Hom}(L_2, L_1)$, hogy

$$i \circ j = \text{id}_{L_2} \text{ és } j \circ i = \text{id}_{L_1}.)$$

Példák.

1. $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n, x \mapsto Ax$, ahol $(Ax)_i := \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$ lineáris, ha $A \in \mathbf{R}^{n\times k}$, és valóban:

$$(A(\lambda.x + \mu.y))_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\lambda.x_j + \mu.y_j) = \lambda.\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j + \mu.\sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j$$

2. $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ izomorf $\mathbf{R}[x]$-szel, az izomorfizmus $(a_0, ..., a_n, 0, 0, 0, ...) \mapsto \sum ... a_i$

3. Ha $B = \{b_j\}_{j=1}^{n}$ bázis L-ben, akkor

$$[]_B : L \to \mathbf{R}^n, v \mapsto [v]_B := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j$$

L koordináta reprezentációja. Ez persze izomorfizmus:

$$\lambda.v + \mu.u = \lambda.\sum_{j=1}^{n} x_j b_j + \mu.\sum_{j=1}^{n} y_j b_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda.x_j + \mu.y_j) b_j$$

amely utóbbiban az báziselemek együtthatói $((\lambda.x_j + \mu.y_j))$ egyértelműek és éppen a $[v]_B$ és $[u]_B$ megfelelő lineáris kombinációinak komponensei. Az injektivitáshoz: $x = [v]_B = [u]_B = y$, akkor komponensenként egyenlők, így $v = \sum_{j=1}^n x_j b_j = \sum_{j=1}^n y_j b_j = u$.

Tétel. Lineáris leképezések kompozíciója lineáris. Az $L \to L$ izomorfizmusok csoportot alkotnak.

Bizonyítás.

$$(A \circ B)(\lambda.x + \mu.y) = A(B(\lambda.x + \mu.y)) = A(\lambda.B(x) + \mu.B(y)) = \lambda.(A \circ B)(x) + \mu.(A \circ B)(y))$$

A csoport művelete a $\circ$, egysége az identitás ($x \mapsto x$), inverz a függvényinverz.

Megjegyzés: $\circ$ úgy viselkedik, mint a szorzás. $x \mapsto Ax$-ekre éppen az is:

$$(ABx)_i = \sum_l A_{il}(Bx)_l = \sum_l A_{il}(\sum_j B_{lj}x_j) =$$

$$= \sum_l \sum_j A_{il}B_{lj}x_j = \sum_j \sum_l A_{il}B_{lj}x_j = \sum_j (\sum_l A_{il}B_{lj})x_j = \sum_j (AB)_{ij}x_j.$$

Ebből az utóbbiból kiderül, hogy érdemes a mátrixszorzást definiálni, hogy ugyanaz legyen, mint a kompozíció reprezentációja:

$$\boxed{(AB)_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{l=1}^m A_{il}B_{lj}}$$

feltéve, hogy $A \in \mathbf{R}^{k \times m}$, $B\mathbf{R}^{m \times n}$.

Vektoregyenletek, egyenletrendszerek, mátrixaik és megoldásuk. Láthatóan a

$$\sum_{j=1}^m x_j v_j = c$$

típsusú egyenletek megoldása jelentős szerepet játszik a függetlenség és a generálás szempontjából. Először is belátjuk, hogy ez lefordítható igazi egyenletekre, ha rögzített a $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ bázis L-ben (tehát véges dimenziós a tér).

$$c = \sum_{j=1}^n x_j v_j = \sum_{j=1}^m x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j) b_i \rightsquigarrow c_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \rightsquigarrow Ax = c$$

ahol $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ és $A_{ij} = a_{ij}$.

$Ax = c$-t *inhomogén lineáris egyenletrendszernek* nevezzük, ha $c \neq 0$ és *homogén,* ha $c = 0$.

Jelölje

$$[A \mid c]$$

azt a mátrixot, ami az A kibővítése c-vel és az $Ax = c$ *kibővített (együttható)mátrixának* nevezzük; ha $c = 0$, akkor nem terjesztjük ki. Megoldjuk az $Ax = c$-t, mégpedig úgy, hogy az oszlopaiból minél többet "bevisszünk a sztenderd bázisba". Cél: *elemi sorműveletekkel,* az egyenletrendszer ekvivalens átalakításaival, a következő, **redukált lépcsős** alakba

$$\text{ref}(A) \qquad \text{row echelon form, ilyenek halmaza: ref}$$

kerüljön:

$$\begin{bmatrix}1 & * & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

1. balról az első nem nulla elem egy sorban mindig 1 (vezérelem)
2. ez alatt és fölötte minden 0 (vezéroszlop)
3. kezdő 0-k lefelé egy sorban mindig többen
4. a csupa 0 sorok lent

Azok a transzformációk (vektortér izomorfizmusok), amelyekkel az egyenletrendszer ekvivalensen alakul át és az oszlopok is lineárisan izomorf módon képeződnek le az **elemi sorműveletek.** Tehát két dologra különösön ügyelünk: olyan műveleteket végzünk a mátrixszal, ami

1. az egyenletrendszer szemüvegen át ekvivalens átalakítás,
2. a lineáris szemüvegen át izomoorfizmus.

Ez azért fontos, mert *az izomorfizmus megőrzi a lineáris kapcsolatokat.* Benne van a nevében: azonos alakú. Tehát független rendszer izomorfizmus általi képe független lesz, generátorrendszeré generátorrendszer, ha egy vektor függ valamiktől valamilyen együtthatókkal, akkor ugyanazokkal az együtthatókkal a kép is függeni fog a valamik képétől...

$$R(i \longleftrightarrow j), R(\lambda.i), R(i+\mu.j)$$

ahol $\lambda \neq 0$, $i \neq j$.

Tétel. Az elemi sorműveletek lineáris izomorfizmusok.

Bizonyítás. $R(i \longleftrightarrow j)R(i \longleftrightarrow j) = I$, $R(\lambda.i)R(1/\lambda.i) = I$, $R(i+\mu.j)R(i-\mu.j) = I$.

Gauss–Jordan-algoritmus. Csak elemi sorműveleteket használunk:

$$\begin{bmatrix}0 & * & \dots \\ 0 & a & \dots \\ 0 & * & \dots \\ 0 & * & \dots\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots\end{bmatrix}$$

Kezdő lépés:
Balról az első nem csupa nulla oszlopból vezéroszlopot csinálunk.
Legalulra a csupa nulla sorok,
legfelülre a vezérelemes sor.

$$\left[\begin{array}{cccccc}\dots & 0 & * & * & * \\ & \vdots & * & * & * \\ \dots & 1 & * & * & * \\ \hline \dots & 0 & 0 & * & * \\ & \vdots & 0 & a & * \\ \dots & 0 & 0 & * & *\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc}\dots & 0 & * & 0 & * \\ & \vdots & * & 0 & * \\ \dots & 1 & * & 0 & * \\ \hline \dots & 0 & 0 & 1 & * \\ & \vdots & 0 & 0 & * \\ \dots & 0 & 0 & 0 & *\end{array}\right]$$

Rekurziós lépés:
Az utolsó vezérelem vonala alatt
vezéroszlopot csinálunk, ha lehet.
Legalulra a csupa nulla sorok,
vonal alá a vezérelem, fölötte nullák.

Tétel. Minden mátrix sorekvivalens egy redukált lépcsős alakkal, és ez egyértelmű.

Bizonyítás. Létezés: a Gauss–Jordan-algoritmus ref-et készít, véges lépésben véget ér és csak elemi sorműveleteket használ. Unicitás: lényeges, hogy az oszlopok redezettek (de, hiszen mátrixról van szó!). Az i. oszlop pontosan akkor vezéroszlop, ha

$$i = \min\{k \mid v_k \neq \sum_{l<k} \lambda_l v_l\}$$

(balról az első olyan oszlopok, hogy az előző oszlopok *nem* generálják őket). Ha ugyanis i ilyen a kiindulási mátrixban, akkor a redukált lépcsős alakban is ilyen, és ha nem lenne vezéroszlop, generálnák az előzőek. Fordítva, a ref-ban a vezéroszlopokat az előzőek nem generálják, mert ezek a sztenderd bázis elemei. Végül, a nem-vezéroszlopok elemei kifejezhetők egyértelműen a korábbi vezéroszlopok (független rendszer) lineáris kombinációiként.

Tétel. Ha F véges független rendszer $L \in$ Lin-ben és B véges bázis L-ben, akkor $|F| \le |B|$.

Bizonyítás. Legyen $F = \{v_j\}_{j\in\overline{1..k}}$, $B = \{b_i\}_{i\in\overline{1..n}}$, $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ji} b_i$. Ekkor

$$A \sim \mathrm{ref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(nincsenek a többitől függő oszlopok) mert F eredetileg is független volt, azaz A oszlopai is, azaz $\mathrm{ref}(A)$ is. Innen: $|F| = k \le n = |B|$.

Következmény. Ha $L \in$ Lin-ben minden bázis véges, akkor ezeknek az elemszáma ugyanaz.

Bizonyítás. Értelemszerűen: $|B_1| \le |B_2|$, $|B_2| \le |B_1|$.

Definíció. Véges dimenziós lineáris térben a bázis elemszámát a tér dimenziójának nevezzük.

$$\dim L := |B|$$

(B véges bázis L-ben.)

Definíció. Vektorrendszer rangja a kifeszített altér dimenziója

$$\mathrm{rk}\{v_k\}_{k\in\overline{1..n}} := \dim\langle\{v_k\}_{k\in\overline{1..n}}\rangle.$$

Gyakran a mátrixokat oszlopvektorok rendezett sorozatának tekintjük:

$$\mathbf{R}^{m\times n} \ni A = [A^{(j)}]_{\in\overline{1..n}} = \begin{bmatrix} | \\ A^{(j)} \\ | \end{bmatrix}_{j\in\overline{1..n}} \in \mathbf{R}^{m\times n}, \qquad A^{(j)} \in \mathbf{R}^m$$

Mátrix rangja (oszloprangja) az oszlopai által kifeszített tér dimenziója:

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}\{A^{(j)}\}_{j\in\overline{1..k}}$$

ahol $A =$.

Tétel. Ha G véges generátorrendszer $L \in$ Lin-ben és B véges bázis L-ben, akkor $|B| \le |G|$.

Bizonyítás. Legyen $G = \{v_j\}_{j\in\overline{1..k}}$, $B = \{b_i\}_{i\in\overline{1..n}}$, $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ji} b_i$. Ekkor

$$A \sim \mathrm{ref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & * \\ 0 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & * \end{bmatrix}$$

azaz nincsenek csupa nulla sorok, mert ha lennének, akkor a $(0,...,1)$ vektor nem függene tőlük, márpedig ők generátorrendszert alkotnak. Innen: $|G| = k \geq n = |B|$.

Nevezetes alterek: képtér és magtér, dimenziótétel.

Definíció. Ha $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, akkor

$$\mathrm{Im}(A) := \{Ax \mid x \in L_1\} \text{ a képtér}$$

$$\mathrm{Ker}(A) := \{x \in L_1 \mid Ax = 0\} \text{ a magtér}$$

Ez utóbbi az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszer megoldástere is. Ezek valóban alterek.

Dimenziótétel. Legyen $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$ véges dimenziós térben. Ekkor

$$\dim \mathrm{Ker}\, A + \dim \mathrm{Im}\, A = \dim L_1.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy ha $B = \{u_i\}_{i \in \overline{1..k}}$ bázis $\mathrm{Ker}(A)$-ban és $A(C) = \{Av_j\}_{j \in \overline{1..n}}$ bázis $\mathrm{Im}(A)$-ban, ahol $C = \{v_j\}_{j \in \overline{1..k}}$, akkor $B \cup C$ bázis L_1-ben. 1)

$$0 = \sum_{i \in \overline{1..k}} \lambda_i u_i + \sum_{j \in \overline{1..n}} \mu_j v_i$$

ennek A szerinti képe:

$$0 = A0 = \sum_{j \in \overline{1..n}} \mu_j A v_i$$

de $A(C)$ bázis, így független, így $\mu_j = 0$. Ha ezek viszont nullák, akkor az előző egyenletből $\lambda_i = 0$ szintén.

2)

$$L_1 \ni y = \sum_{i \in \overline{1..k}} \lambda_i u_i + \sum_{j \in \overline{1..n}} \mu_j v_i$$

$$0 = Ay - \sum_{j=1}^{n} \mu_j A v_j = Ay - A \sum_{j=0}^{n} \mu_j v_j = A(y - \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j) \rightsquigarrow y - \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \rightsquigarrow y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$$

Inhomogén és szimultán egyenletrendszer, inverz.

Definíció. $[A|b]$, $[A|B]$, ha b nem nulla és B nem egyoszlopos rendre *inhomogén* ill. *szimultán* egyenletrendszerek.

Példák. a)

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b)

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \rightsquigarrow X = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

c) Ha A invertálható, akkor

$$x = A^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix}$$

Tétel (inverz lézetése). Legyen $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ olyan, hogy van $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ amire $AB = I$. Ekkor $BA = I$ is teljesül, így
$$B = A^{-1}.$$

Bizonyítás. Ha $AX = I$-t megoldja B, akkor $\mathrm{rref}[A \mid I] = [I \mid B]$, mert lesz n db vezéroszlop és nincs csupa nulla sor a végeredményben, mert az I-ből indultunk ki és nem generálna valamit a mátrix, amit kéne. De akkor $[I \mid B] \sim [A \mid I]$ is fennáll és $[B \mid I] \sim [I \mid A]$ is, azaz A az $BY = I$ egyenlet megoldása.

Definíció. Az A mátrix *rangja* (oszloprangja) az oszlopai által kifeszített altér dimenziója ($\mathrm{rk}(A) = \dim\langle A^{(j)}\rangle_{j=1}^{n}$).

Tétel (egyenletek megoldhatósága és egyértelműsége). Az $[A \mid b]$ egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha
$$\mathrm{rk}[A \mid b] = \mathrm{rk}\,A$$
Ha van megoldása, akkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha
$$\mathrm{rk}\,A = n.$$

Teljes oszloprangú az $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ mátrix, ha $\mathrm{rk}\,A = n$.

Bizonyítás. Legyen $\mathrm{rref}[A \mid b] = [B^{(j)}|c]_{j=1}^{n}$. $[A \mid b]$ megoldhatatlan $\Leftrightarrow$ $c \notin \langle B^{(j)}\rangle_{j=1}^{n}$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rk}[B^{(j)}]_{j=1}^{n} = \mathrm{rk}[B^{(j)}|c]_{j=1}^{n} \Leftrightarrow \mathrm{rk}\,A = \mathrm{rk}[A \mid b]$. Ha van megoldása, akkor az előállítás pontosan akkor egyértelmű, ha A oszlopai függetelnek, azaz A teljes oszloprangú: $\mathrm{rk}\,A = n$.

Leképezések mátrixa.

Tétel (leképezések mátrixa). Legyenek L_1, L_2 véges dimenziós terek, $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B_1 = \{b_1, \ldots, b_k\} \subseteq L_1$, $B_2 \subseteq L_2$ bázisok, $\dim B_2 = n$. A
$$\mathbf{R}^{n\times k} \ni [A]_{B_1,B_2} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [Ab_1]_{B_2} & [Ab_2]_{B_2} & \ldots & [Ab_k]_{B_2} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$
mátrixszal, mint A-nak B_1, B_2-beli koordinátareprezentációjával, minden $x \in L_1$-re:
$$[A]_{B_1,B_2}[x]_{B_1} = [Ax]_{B_2}.$$

Bizonyítás. Az állítás azt mondja, hogy az alábbi lineáris leképezésekből álló diagram kommutál, az $[A] : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n, y \mapsto [A]_{B_1,B_2} \cdot y$ leképezéssel:
$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^k & \xrightarrow{[A]} & \mathbf{R}^n \\ {\scriptstyle [\,]_{B_1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle [\,]_{B_2}} \\ L_1 & \xrightarrow[A]{} & L_2 \end{array}$$
Elég belátni a báziselemekre, mert a többi elemen már automatikusan azonosak lesznek a függvények:
$$([A]_{B_1,B_2} \cdot [b_i]_{B_1})_j = \sum_{l=1}^{k}([A]_{B_1,B_2})_{jl}[b_i]_l = \sum_{l=1}^{k}([A]_{B_1,B_2})_{jl}\delta_{li} = ([A]_{B_1,B_2})_{ji} = ([Ab_i]_{B_2})_j$$

Ha $B = B_1 = B_2$, akkor $[A]_{B_1,B_2}$ jelölése $[A]_B$, vagy ha az is világos a kontextusból, hogy mi B, akkor $[A]$.

Koordinátarendszerváltás.

Tétel (koordinátarendszerváltás). Legyen L véges dimenziós tér, $A \in \text{Lin}(L, L)$, $B = \{b_1, \dots, b_k\}, C = \{c_1, \dots, c_k\} \subseteq L$ két bázis. Ha

$$T_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [b_1]_C & [b_2]_C & \dots & [b_k]_C \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

akkor

$$[A]_B = T_{C \leftarrow B}^{-1} [A]_C T_{C \leftarrow B}.$$

Determináns

A vektorrendszerek által kifeszített általánosított paralelepipedon térfogatának kiszámítása azért hasznos, mert kiderül belőle, hogy a vektorrendszer összefüggő-e. Ha a térfogat nulla, a vektorok összefüggenek. A determináns a **térfogat** többdimenziós általánosítása.

Definíció (Determináns). Az az egyetlen $\det : \mathbf{R}^{n \times n} \to \mathbf{R}$ függvény a *determináns,* amire teljesülnek a következők:

det1. (az egységkocka térfogata egység)

$$\boxed{\det I = 1}$$

det2. (minden oszlopában lineáris) $\forall j \in \overline{1..n}\ \forall (\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n) \in \mathbf{R}^{n \times n}\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n\ \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\boxed{\det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{j.}{\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}}, ..., \boldsymbol{a}_n) = \lambda \det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{j.}{\boldsymbol{u}}, ..., \boldsymbol{a}_n) + \mu \det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{j.}{\boldsymbol{v}}, ..., \boldsymbol{a}_n)}$$

det3. (alternáló) $\forall j \neq k \in \overline{1..n}\ \forall (\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n) \in \mathbf{R}^{n \times n}\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$

$$\boxed{\det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{j.}{\boldsymbol{v}}, ..., \underset{k.}{\boldsymbol{v}}, ..., \boldsymbol{a}_n) = 0}$$

Probléma. Adott egy bázis, mondjuk $B = (\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_n)$ és egy vektorrendszer: $A = (\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n)$. Nyilván A oszlopait lineáris kombinációkkal generálja a bázis, pl.: $\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} \boldsymbol{b}_i$. Hogyan függ $\det A$ a $\det B$-től? Más szavakkal **hogyan lehet visszavezetni** az A oszlopai által kifeszített paralelepipedon térfogatát, tehát A **térfogatát a** B **térfogatára?** det multilinearitásából kihullik az eredmény:

$$\det A = \det\left(\sum_{i=1}^n c_{i1} \boldsymbol{b}_i, ..., \sum_{i=1}^n c_{in} \boldsymbol{b}_i\right) = \sum_{i_1=1}^n c_{i_1 1} \det\left(\boldsymbol{b}_{i_1}, \sum_{i=1}^n c_{i2} \boldsymbol{b}_i, ..., \sum_{i=1}^n c_{in} \boldsymbol{b}_i\right) =$$

$$= \sum_{i_2=1}^n c_{i_2 2} \sum_{i_1=1}^n c_{i_1 1} \det\left(\boldsymbol{b}_{i_1}, \boldsymbol{b}_{i_2}, ..., \sum_{i=1}^n c_{in} \boldsymbol{b}_i\right) = \sum_{i_1, i_2=1}^n c_{i_1 1} c_{i_2 2} \det\left(\boldsymbol{b}_{i_1}, \boldsymbol{b}_{i_2}, ..., \sum_{i=1}^n c_{in} \boldsymbol{b}_i\right) =$$

$$= \sum_\sigma \left(\prod_{k=1}^n c_{\sigma(k)k}\right) \det\left(\boldsymbol{b}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{b}_{\sigma(n)}\right)$$

Ahol σ egyelőre tetszőleges $\overline{1..n} \to \overline{1..n}$ függvény. Néhány komolyabb eredmény is kiolvasható a számításból.

Megjegyzés. Ez a számítás nem csak bázisra, hanem minden B-re és minden olyan A-ra végigvihető, amelynek oszlopai kifejezhetők B-ivel.

Megjegyzés. A fenti összegben lesz $n^n - n!$ db tag, ami nulla, konkrétan, amikor két oszlop a determinánsban egyenlő, mert akkor a térfogat elfajul. A maradékban $n!$ tag esetén a tagok fele negatív lesz, a többi pozitív. Oszlopcserénél előjelt vált a determináns, így amikor ezek száma páros, a determináns előjelet vált, ellenkező esetben nem.

Megjegyzés. Az előzőek miatt érdemes az összes invertálható $\overline{1..n} \to \overline{1..n}$ függvény halmazát különös figyelemmel kísérni. Ezt a halmazt a $\overline{1..n}$ halmaz összes permutációi halmazának nevezzük és az

$$\mathrm{S}_n$$

szimbólummal jelöljük. S_n csoportot alkot a függvénykompozícióval, az identitással, mint egységelemmel és a függvényinverzzel, mint inverz elemmel (tehát az $(\mathrm{S}_n, \circ, \mathrm{id}, ()^{-1})$ algebrai struktúra csoport). A jelölés onnan van, hogy ezt a csoportot még az n-edrendű szimmetriacsoportnak is nevezik.

Lemma (Az alapvető lemma). Ha $B = (\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_n)$ tetszőleges vektorrendszer és $A = (\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n)$ szintén, úgy, hogy minden $j \in \overline{1..n}$-re $\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \boldsymbol{b}_i$ valamely c_{ij} együtthatókkal, akkor

$$\det(\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \left(\prod_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)k} \right) \det\left(\boldsymbol{b}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{b}_{\sigma(n)}\right)$$

ahol S_n a $\overline{1..n}$ halmaz permutációinak halmaza.

Bizonyítás. Az előző gondolatmenet és a következő néhány egyszerű determinánstulajdonság miatt. □

Tétel (4., 5., 6. determináns tulajdonság). Ha $A = (\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, akkor

1. (nulla oszlop)
$$\boxed{\det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{j.}{\mathbf{0}}, ..., \boldsymbol{a}_n) = 0}.$$

2. (oszlopcsere)
$$\boxed{\det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{i.}{\boldsymbol{a}_j}, ..., \underset{j.}{\boldsymbol{a}_i}, ..., \boldsymbol{a}_n) = -\det A}.$$

3. (oszlop $\lambda \in \mathbf{R}$-szorosának hozzáadása másik oszlophoz)
$$\boxed{\det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{j.}{\boldsymbol{a}_j}, ..., \underset{i.}{\boldsymbol{a}_i + \lambda \boldsymbol{a}_j}, ..., \boldsymbol{a}_n) = \det A}.$$

Bizonyítás. 1. $\det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{j.}{\mathbf{0}}, ..., \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{j.}{0 \cdot \mathbf{0}}, ..., \boldsymbol{a}_n) \overset{\det 2}{=} 0 \cdot \det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{j.}{\mathbf{0}}, ..., \boldsymbol{a}_n) = 0$

2. $0 \overset{\det 1}{=} \det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{i.}{\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j}, ..., \underset{j.}{\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j}, ..., \boldsymbol{a}_n) \overset{\det 2}{=} \det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{i.}{\boldsymbol{a}_i}, ..., \underset{j.}{\boldsymbol{a}_i}, ..., \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, ..., \underset{i.}{\boldsymbol{a}_i}, ..., \underset{j.}{\boldsymbol{a}_j}, ..., \boldsymbol{a}_n) +$

$+\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underset{i.}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \underset{j.}{\boldsymbol{a}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underset{i.}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \underset{j.}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \overset{\text{det3}}{=}$
$= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underset{i.}{\boldsymbol{a}_i}, \ldots, \underset{j.}{\boldsymbol{a}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underset{i.}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \underset{j.}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, tehát ezek a tagok egymás ellentettjei.

3. $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underset{j.}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \underset{i.}{\boldsymbol{a}_i + \lambda \boldsymbol{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \overset{\text{det1}}{=} \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underset{j.}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \underset{i.}{\boldsymbol{a}_i}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \lambda \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underset{j.}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \underset{i.}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \overset{\text{det2}}{=}$ $\det A + 0$ □

Tétel (Leibniz-formula). Ha $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, akkor

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon_\sigma \left(\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)k} \right)$$

ahol ε_σ tetszőleges $\sigma \in \mathrm{S}_n$ esetén a Levi–Civita-szimbólum, azaz $\varepsilon_\sigma \overset{\text{def.}}{=} (-1)^{I(\sigma)}$, ahol $I(\sigma)$ a σ inverzióinak szám.

A $(\sigma(k), k)_{k=1}^{n}$ helyeket a mátrixban *kígyónak* (vagy bástyaelrendezésnek) nevezzük.

Bizonyítás. Az alapvető lemmát a sztenderd bázisra alkalmazzuk: $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ szereposztásban. Ekkor $\varepsilon_\sigma = \det\left(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\right)$ az oszlopcserélős determináns-tulajdonság miatt és a c_{ij} számok éppen az $\boldsymbol{a}_j$-k komponensei leszek, szintén a sztenderd bázis választása miatt. □

Megjegyzés. Az előző tétel itt nem részleteznd\H{o}, de fontos folytatása **a determináns egzisztencia-unicitástétele.** Egyfelől hosszadalmas, de könnyű számítással ellenőrizhető, hogy a Leibniz-formula által adott mátrixfüggvény teljesíti a determináns definiciáló feltételeit (egzisztencia). Másfelől (és ezt pont előző bizonyítás igazolja) a sztenderd bázisban a Leibniz-formula explicit módon megadja *bármely* determináns értékét, függetlenül a konkrét implementációjától tehát a determináns definíciója egyértelmű (unicitás).

Speciális esetben érdemes a 2×2-es esetet tekinteni! Az $\{1; 2\}$ halmaznak két permutációja van: $(1, 2)$, $(2, 1)$, így:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \overset{\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)}{a_{11}a_{22}} - \overset{\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)}{a_{21}a_{12}} .$$

Tétel (Determinánsok szorzástétele.) Ha $B, C \in \mathbf{R}^{n \times n}$, akkor $\det(BC) = \det B \cdot \det C$.

Bizonyítás. Meglepő, de BC oszlopait generálják B oszlopai éspedig éppen a C-ben tárolt skalárokkal. Legyen $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$. Ha j az A egy oszlopának indexe, akkor

$$(\boldsymbol{a}_j)_k = a_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} (\boldsymbol{b}_i)_k$$

Az alapvető lemma, majd a Leibniz-formula miatt ekkor

$$\det(BC) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \left(\prod_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)k} \right) \det\left(\boldsymbol{b}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}_{\sigma(n)}\right) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon_\sigma \left(\prod_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)k} \right) \det\left(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\right) =$$

$$= \det B \cdot \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon_\sigma \left(\prod_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)k} \right) = \det B \cdot \det C$$

□

Tétel (Sor-oszlop invariancia). Ha $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, akkor $\det(A) = \det(A^T)$.

Bizonyítás. Legyen $A = (\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n)$. Az alapvető lemma miatt és mert S_n-nek $()^{-1}$ antiautomorfizmusa S_n-nek (művelettartó bijekció, ami megfordítja a szorzást), továbbá mert $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\sigma^{-1}}$

$$\det A = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon_\sigma \left(\prod_{k=1}^n a_{\sigma(k)k}\right) = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon_\sigma \left(\prod_{k=1}^n a_{k\sigma^{-1}(k)}\right) = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon_{\sigma^{-1}} \left(\prod_{k=1}^n a_{\sigma^{-1}(k)k}\right) = \det(A^T)$$

□

Tétel (Laplace-kifejtés). Ha $A = (a_{jk}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrix, $k \in \overline{1..n}$ akkor

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{jk}(-1)^{j+k} \det A^{\min}_{jk}$$

ahol $A^{\min}$ az A minormátrixainak mártixa.

Bizonyítás.

$$\det A \overset{\det 2}{=} \sum_{j=1}^n a_{jk} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \underset{j,k.}{1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{j+k-2 \text{ db csere}}{=} \sum_{j=1}^n a_{jk}(-1)^{j+k} \begin{vmatrix} 1 & a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{transzp.}}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{jk}(-1)^{j+k} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{jn} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{j=1}^n a_{jk}(-1)^{j+k} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{jk}(-1)^{j+k} \det A^{\min}_{jk}$$

A „Leibniz"-cel jelölt átalakításban a két determináns egyenlőségét a Leibniz-formula adja. Az összegben a j-edik $N^{(j)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ * & M^{(j)} \end{smallmatrix}\right)$ alakú mátrix esetén $|N^{(j)}| = |M^{(j)}|$ $(= |A^{\min}_{jk}|)$, mert

$$|N^{(j)}| = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n, \sigma(1)=1} \varepsilon_\sigma \cdot 1 \cdot N^{(j)}_{\sigma(2)2} \cdot \ldots \cdot N^{(j)}_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n, \sigma(1)\neq 1} \varepsilon_\sigma \cdot 0 \cdot N^{(j)}_{\sigma(2)2} \cdot \ldots \cdot N^{(j)}_{\sigma(n)n} =$$

$$= \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n, \sigma(1)=1} \varepsilon_\sigma \cdot N^{(j)}_{\sigma(2)2} \cdot \ldots \cdot N^{(j)}_{\sigma(n)n} = \sum_{\tau\in \mathrm{S}_{n-1}} \varepsilon_\tau \cdot M^{(j)}_{\tau(1)1} \cdot \ldots \cdot M^{(j)}_{\tau(n)n} = |M^{(j)}|$$

ahol τ a $\tau(i) \coloneqq \sigma(i) - 1$ definíciójú függvény és amire igaz, hogy bijekció S_{n-1} és $\{\sigma \in \mathrm{S}_n \mid \sigma(1) = 1\}$ között, és $(N^{(j)}_{l+1,m+1}) = M^{(j)}_{lm}$ pont az $A^{\min}_{jk}$ minormátrix transzponáltja. □

Alkalmazásként tekintsük a **Sarrus-szabályt,** ami 3×3-as mátrixra vonatkozik:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Tény (Determináns és Gauss–Jordan-elimináció).

$$\det(A) = (-1)^r \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) \det \operatorname{rref}(A)$$

ahol r a sorcserék száma a végrehajtott elimináció során, p_i a vezérelemképzésnél kiemelt számok. (Itt $\det \operatorname{rref}(A) = 1$, ha A oszlopai függetlenek, 0 ellenkezőleg). Speciálisan, ha T felső vagy alsó háromszög mátrix, akkor

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

Bizonyítás. A sorcsere (-1) szeresére változtatja a determináns, sorból kiemelhető a determináns elé elem. Független esetben $\det(\operatorname{rref}(A)) = \det(I) = 1$, nem független esetben ekvivalensen lenullázható egy sor a transzponálási tulajdonság miatt. □

Saját

Cél: felkutatni az invariánsokat! Invariáns: olyan mátrixokon értelmezett függvény, ami független a koordinátarendszer megváltoztatásásra nézve.

1. determináns:

$$\det A$$

2. trace (spur, nyom):

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

Egy mátrixokon értelmezett számfüggvény invariánsnak, ha változatlan marad a koordinátarendszer váltásra. Ilyenkor ezt a számot skalárnak nevezzük. Egy mátrixokon értelmezett oszlopvektorfüggvény invariáns, ha úgy transzformálódik, mint az oszlopvektorok. Ilyenkor ezt az oszlopvektort vektornak nevezzük. Egy mátrixokon értelmezett mátrixfüggvény invariáns, ha úgy transzformálódik, mint az oszlopvektorok. Ilyenkor ezt az oszlopvektort vektornak nevezzük.

Definíció (Sajátvektor, sajátérték). Legyen $A \in \operatorname{Lin}(L)$ a K test felett. Azt mondjuk hogy $\lambda \in K$ *sajátértéke* A-nak, ha van olyan $0 \neq v \in L$, hogy

$$Av = \lambda v$$

Ha van olyan $0 \neq v \in L$, hogy $Av = \lambda v$ valamely $\lambda \in K$-ra, akkor v-t a λ *sajátértékhez tartozó sajátvektornak* nevezzük. ((λ, v)-t ilyenkor sajátpárnak is nevezzük.)

Megjegyzés. A sajtérték és a sajátvektor valóban invariáns, mert ha A-nak (λ, v) sajátpárja és $T = T_{S\leftarrow B}$, akkor $T^{-1}AT$-nak $(\lambda, T^{-1}v)$ sajátpárja:

$$T^{-1}ATT^{-1}v = T^{-1}Av = T^{-1}\lambda v = \lambda T^{-1}v$$

Tétel (Sajátérték és vektor meghatározása) λ akkor és csak akkor sajátértéke A-nak, ha megoldása a

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

(karakterisztikus) egyenletnek. Ha λ sajátértéke A-nak, akkor a $(A - \lambda I)v = 0$ homogén egyenletrendszer nemnulla megoldásai ehhez tartozó sajátrvektorok.

Bizonyítás. $Av = \lambda v$ ekvivalens ezzel:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

ennek nem nulla megoldásaira hajtunk. Nem triviális megoldás akkor és csak akkor van, ha $A - \lambda I$ nem függetlenek, ami pont akkor van, ha $\mathrm{rref}(A - \lambda I)$ nem teljesrangú, azaz $\det\det(A - \lambda I) = 0$. □

Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$

$$\lambda = 2 : \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\dim \mathrm{Ker}=2}{\rightsquigarrow} \boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\dim \mathrm{Ker}=1}{\rightsquigarrow} \boldsymbol{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SMART MÓDSZER:

$$\boxed{\text{ha } \begin{pmatrix} z & w \\ * & * \end{pmatrix} \text{ elfajuló, akkor } \begin{pmatrix} w \\ -z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} z & w \\ * & * \end{pmatrix}.}$$

Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0 \rightsquigarrow \lambda^{\mathbf{R}} = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\dim \mathrm{Ker}=1}{\rightsquigarrow} \boldsymbol{s}^{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(1-\lambda)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0 \rightsquigarrow \lambda = 1, i, -i$

$$\lambda = 1 : \boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = i : \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \overset{\dim \mathrm{Ker}=1}{\rightsquigarrow} \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -i : \begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix} \overset{\dim \mathrm{Ker}=1}{\rightsquigarrow} \boldsymbol{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tétel.

1. Az ugyanahhoz a sajátértékhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak.

2. Két különböző sajátértékhez tartozó sajátvektor nem lehet egyenlő.

3. Sajátalterek vagy megegyeznek vagy metszetük $\{0\}$.