iMSC feladatok, első két hét (kétoldalas! bővülhet!)

Előadás

(Szeparábilis differenciálegyenlet, kezdeti érték probléma, lineáris argumentumú és fokszámban homogén differenciálegyenlet.)

1. Igazoljuk, hogy az $y' = 1 + \operatorname{sgn} y$ differenciálegyenletnek nincs az $y(0) = 0$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldása!

Legyen $y : (-\delta, +\delta) \to \mathbf{R}$ megoldásfüggvénye a d.e.-nek, ahol $\delta > 0$ és $y(0) = 0$. Világos, hogy ekkor $y'(0) = 1 + \operatorname{sgn} 0 = 1$, de y biztosan nem azonosan nulla, mert ellenkező esetben $y' \equiv 0 = 1 + 0 = 1$ lenne. Van tehát $x \in (-\delta, +\delta)$, hogy vagy $y(x) > 0$ vagy $y(x) < 0$. Ha $y(x) > 0$, akkor $y'(x) = 2$ és a Darboux-tétel miatt y' az 1 és 2 között minden értéket felvesz. De y' nem tud csak $0, 1, 2$ értéket felvenni. Ha $y(x) < 0$, akkor $y'(x) = 0$ és a Darboux-tétel miatt y' az 0 és 1 között minden értéket felvesz. De y' nem tud csak $0, 1, 2$ értéket felvenni. Ilyen megoldás tehát nincs.

2. Hány megoldása van az $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$ kezdeti érték feladatnak?

Világos, hogy $y \equiv 0$ megoldás, mert $0' = 0$. Tegyük fel, hogy vannak olyan megoldás, amik valamely intervallumon nem nullák. Ilyet szeparálással kapunk:

$$\frac{dy}{dy} = y^{\frac{1}{2}}$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int dx$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = x + C$$

$$y = \frac{1}{4}(x + C)^2$$

Ez a kezdeti érték feladatnak is megoldása, amennyiben $C = 0$, mert ekkor $y(x) = \frac{1}{4}x^2$. Ám, differenciálható megoldásokat kapunk, ha a következőképpen kompillálunk össze a konstans 0-ból és az $y(x) = \frac{1}{4}(x + C)^2$-ből megoldásokat:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \le -C \\ \frac{1}{4}(x + C)^2 & \text{, ha } x > -C \end{cases}$$

Ezek teljesítik a kezdeti feltételt és végtelen sokan vannak.

Házi Feladat

3. Igazolja a Picard–Lindelöf-tétel segítségével, hogy az $y' = y^2$ egyenlet esetén a sík minden pontja reguláris pont! (Reguláris egy pont, hogy azon egyetlen egy megoldás halad át.) Igazolja, hogy az egyenlet minden megoldása olyan, hogy vagy a konstans nulla, vagy sehol se nulla és nincs más lehetőség!

4. Igazoljuk, hogy az $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ egyenletnek létezik legalább két megoldása, ami eleget tesz az $y = y(0)$ kezdeti feltételnek! Adja is meg!

5. Hány megoldása van az $y' = \sqrt[3]{y}$ egyenletnek, ami eleget tesz az $y = y(0)$ kezdeti feltételnek?