Boole-algebra

Egy *Boole-algebra* egy $\mathcal{B} = (B, \top, \bot, \wedge, \vee, \neg)$ struktúra, amelyben a B halmaz felett az alábbi műveletek vannak definiálva:

- $\top$: az igaz (*true*),
- $\bot$: a hamis (*false*),
- $\wedge : B \times B \to B$: konjunkció (*and*),
- $\vee : B \times B \to B$: diszjunkció (*or*),
- $\neg : B \to B$: negáció (*negation*).

A Boole-algebrára a következő axiómák érvényesek:

Asszociativitás

$$\forall x, y, z \in B, \quad (x \wedge (y \wedge z)) = ((x \wedge y) \wedge z), \tag{1}$$
$$\forall x, y, z \in B, \quad (x \vee (y \vee z)) = ((x \vee y) \vee z). \tag{2}$$

Kommutativitás

$$\forall x, y \in B, \quad (x \wedge y) = (y \wedge x), \tag{3}$$
$$\forall x, y \in B, \quad (x \vee y) = (y \vee x). \tag{4}$$

Disztributivitás

$$\forall x, y, z \in B, \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \tag{5}$$
$$\forall x, y, z \in B, \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \tag{6}$$

Identitás

$$\forall x \in B, \quad x \wedge \top = x, \tag{7}$$
$$\forall x \in B, \quad x \vee \bot = x. \tag{8}$$

Komplementer

$$\forall x \in B, \quad x \wedge \neg x = \bot, \tag{9}$$
$$\forall x \in B, \quad x \vee \neg x = \top. \tag{10}$$

Boole-algebra a Boole-típussal

Az alábbiakban definiálunk egy konkrét Boole-algebrát, ahol B a logikai értékek halmaza, egészen pontosan a Boole-típus, azaz $\{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$:

$$\mathrm{bool} ::= \mathrm{true} \mid \ \mathrm{false}$$

Ezt felhasználva az alábbi szereposztásban bool, mint a Coq natív nyelvében lévő típus, a beépített Coq-függvényekkel Boole-algebra:

$$\begin{aligned}
B &:= \mathrm{bool}, \\
\top &:= \mathrm{true}, \\
\bot &:= \mathrm{false}, \\
\wedge &:= \mathrm{andb}, \quad (\text{logikai ÉS}), \\
\vee &:= \mathrm{orb}, \quad (\text{logikai VAGY}), \\
\neg &:= \mathrm{negb} \quad (\text{logikai negáció}).
\end{aligned}$$