

Szorzat

Definíció. Legyen \mathcal{C} kategória, $A_1, A_2 : \mathcal{C}_o$. Ekkor az $A_1 \times A_2 : \mathcal{C}_o$ *szorzatobjektum* a $\text{pr}_i : \text{Hom}(A_1 \times A_2; A_i)$ ($i = 1; 2$) projekciókkal, ha minden $C : \mathcal{C}_o$ -re és $f_i : \text{Hom}(C; A_i)$ -re ($i = 1; 2$) egyértelműen létezik az az $f_1 \times f_2 : \text{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ (*szorzatmorfizmus*), hogy az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{array}{ccccc} & & A_1 & \xleftarrow{\text{pr}_1} & A_1 \times A_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & A_2 & \\ & & \swarrow f_1 & & \uparrow f_1 \times f_2 & & \searrow f_2 & \\ & & C & & C & & C & \end{array}$$

A \mathcal{C} kategória *kartéziusi*, ha benne bármely két objektumnak van szorzata.

Megjegyzés. A morfizmusszorzás definiáló tulajdonságai tehát a

$$\text{pr}_i \circ x = f_i \quad (i = 1; 2)$$

egyenlőségek. Ha valami az x -be helyettesítve igazá teszi ezeket az egyenlőségeket, akkor az a definíció egyértelműségi kitétele miatt a szorzatmorfizmus. Ezt sokszor használjuk szorzattal való egyenlőség igazolásánál.

Lemma (Konverziós szabályok).

$$\begin{aligned} \beta_i^\times : \quad & \text{pr}_i \circ (f_1 \times f_2) = f_i \\ \eta^\times : \quad & (\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g \end{aligned} \quad (i = 1; 2)$$

ahol $g : \text{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ tetszőleges.

Bizonyítás. A β^\times -k a kommutálás következményei. η^\times pedig a szorzatmorfizmus egyértelműségéből következik. A definícióból ugyanis, tetszőleges $g : \text{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ -re az $f_i := \text{pr}_i \circ g$ választással triviálisan következik, hogy $f_i = \text{pr}_i \circ g$:

$$\begin{array}{ccccc} & & A_1 & \xleftarrow{\text{pr}_1} & A_1 \times A_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & A_2 & \\ & & \swarrow \text{pr}_1 \circ g & & \uparrow g & & \searrow \text{pr}_2 \circ g & \\ & & C & & C & & C & \end{array}$$

de ilyenből csak egy van, ami a $(\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g)$ szorzatmorfizmus, így:

$$(\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g$$

Megjegyzés. η^\times valójában ekvivalens a szorzatmorfizmus egyértelműségével. Tegyük fel ugyanis, hogy a definícióban az egyértelműség *helyett* az $(\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g$ egyenlőséget követeljük meg minden $g : \text{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ -re. Legyen g tehát olyan, hogy teljesíti a kommutálási feltételt: $\text{pr}_i \circ g = f_i$. Ekkor

$$f_1 \times f_2 = (\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g,$$

vagyis a szorzatmorfizmus az egyetlen olyan, ami teljesíti β^\times szabályokat.

Lemma (A morfizmusszorzás kongruenciája).

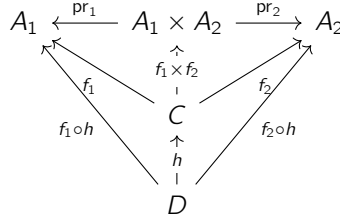
$$(f_1 \times f_2) \circ h = (f_1 \circ h) \times (f_2 \circ h)$$

ahol $h : \text{Hom}(D; C)$ tetszőleges, a definíció jelöléseivel.

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy $(f_1 \times f_2) \circ h$ teljesíti az $(f_1 \circ h) \times (f_2 \circ h)$ morfizmusszorzat definiáló tulajdonságait, azaz a következőket:

$$\text{pr}_i \circ x = f_i \circ h \quad (i = 1; 2).$$

Nyilván



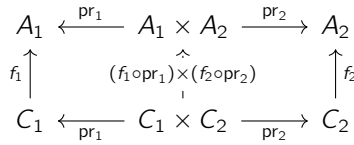
kommutál, tehát

$$\text{pr}_i \circ ((f_1 \times f_2) \circ h) = (\text{pr}_i \circ (f_1 \times f_2)) \circ h = f_i \circ h.$$

Definíció (Torii). Legyen \mathcal{C} kartéziusi kategória, $A_1, A_2, C_1, C_2 : \mathcal{C}_o$, $f_i : \text{Hom}(C_i; A_i)$ ($i = 1; 2$). Ekkor f_1 és f_2 torii-val jelölt szorzata:

$$f_1 \boxtimes f_2 \stackrel{\text{def.}}{=} (f_1 \circ \text{pr}_1) \times (f_2 \circ \text{pr}_2).$$

Megjegyzés. Kommutatív diagramban ábrázolva a torii középen van:



Később látni fogjuk, hogy egy karteziánus \mathcal{C} kategória $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ bifunktoriális szorzatművelete maga a torii, amit már most is lehet látni a diagramon.

Lemma (Egyenlőségek torii-ra).

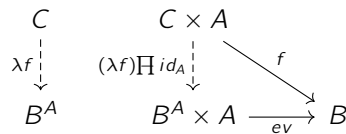
$$\beta_i^\boxtimes : \text{pr}_i \circ (f_1 \boxtimes f_2) = f_i \circ \text{pr}_i \quad (i = 1; 2)$$

$$(\eta^\boxtimes : (\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g)$$

$$\boxtimes \circ : (f_1 \boxtimes f_2) \circ h = (f_1 \circ \text{pr}_1 \circ h) \times (f_2 \circ \text{pr}_2 \circ h)$$

Exponenciális

Definíció. Legyen \mathcal{C} kartéziusi kategória, $A, B : \mathcal{C}_o$. Ekkor a $B^A : \mathcal{C}_o$ *exponenciális objektum* az $\text{ev} : \text{Hom}(B^A \times A; B)$ evaluációval, ha minden $C : \mathcal{C}_o$ -re és $f : \text{Hom}(C \times A; B)$ -re egyértelműen létezik az a $\lambda f : \text{Hom}(C; B^A)$ (*exponenciális adjungált*), hogy az alábbi diagram kommutál:



Ha a \mathcal{C} kartéziusi kategóriában bármely két objektumunk van exponenciálisa, akkor \mathcal{C} -t *kartéziusian zárt kategóriának* nevezzük.

Megjegyzés. Tehát a hatványmorfizmus vagy exponenciális adjungált definiáló egyenlete:

$$ev \circ (x \text{ } \text{H} \text{ } id_A) = f$$

Ha ez teljesül x helyére téve egy morfizmusra, akkor az az adjungált.

Lemma (Konverziós szabályok).

$$\beta^{\rightarrow} : ev \circ ((\lambda f) \text{ } \text{H} \text{ } id_A) = f$$

$$\eta^{\rightarrow} : \lambda(ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)) = g$$

minden $g : \text{Hom}(C; B^A)$ -ra.

Bizonyítás. Az első azonos a kommutatív tulajdonsággal. A másodikhoz azt kell megmutatni, hogy van olyan f , amire teljesül, hogy

$$ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A) = f$$

márpedig ez az f triviálisan az $ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)$. Így az egyértelműségből következik az η szabály.

Megjegyzés. Nyilván itt is igaz az, hogy az egyértelműségi kitétel ekvivalens az η szabállyal. Valóban! Tegyük fel, hogy teljesül $ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A) = f$. Ekkor

$$\lambda f = \lambda(ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)) = g.$$

Az egyik legfontosabb technika az exponenciálisra vonatkozóan a Curryng–unCurrying.

Lemma (Természetes izomorfia 1). Ha \mathcal{C} kartéziusian zárt kategória, akkor az alábbi Set-izomorfizmus teljesül:

$$\text{Hom}(C \times A; B) \cong \text{Hom}(C; B^A)$$

Bizonyítás. A definiáló diagram

$$\begin{array}{ccc} C & & C \times A \\ \downarrow \lambda f & \searrow g \text{ } \text{H} \text{ } id_A & \searrow f \\ B^A & & B^A \times A \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{ev} B \\ \text{ } \end{array}$$

alapján, legyen:

$$\Phi : \text{Hom}(C \times A; B) \rightarrow \text{Hom}(C; B^A), \quad \Phi(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda f$$

$$\Psi : \text{Hom}(C; B^A) \rightarrow \text{Hom}(C \times A; B), \quad \Psi(g) \stackrel{\text{def.}}{=} ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A).$$

Set-ben az izomorfizmusok bijekció, ezért azt kell belátni, hogy

$$\Phi(\Psi(g)) = g \quad \text{és} \quad \Psi(\Phi(f)) = f$$

Rendre az η és β szabályok alapján:

$$\Phi(\Psi(g)) = \lambda(ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)) = g$$

és

$$\Psi(\Phi(f)) = ev \circ ((\lambda f) \amalg id_A) = f$$

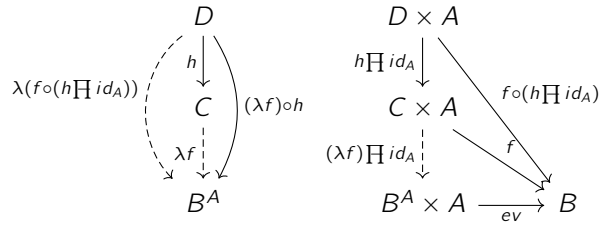
Lemma (Kongruencia).

$$\lambda(f \circ (h \amalg id_A)) = (\lambda f) \circ h$$

minden $h : \text{Hom}(D; C)$ -re.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy $(\lambda f) \circ h$ teljesíti az $\lambda(f \circ (h \amalg id_A))$ definiáló egyenlőségét, azaz

$$ev \circ (((\lambda f) \circ h) \amalg id_A) = f \circ (h \amalg id_A).$$



$$ev \circ (((\lambda f) \circ h) \amalg id_A) = ev \circ (((\lambda f) \circ h \circ pr_1) \times (id_A \circ pr_2)) =$$

Lemma (Természetes izomorfia 2). Ha \mathcal{C} kartéziusian zárt kategória, akkor az alábbi Set-izomorfizmus természetes \mathcal{C} -ben:

$$\Phi : \text{Hom}(C \times A; B) \rightarrow \text{Hom}(C; B^A); f \mapsto \lambda f$$

Bizonyítás. Rögzítsük A, B -t. A két funktor, ami között Φ vált két reprezentációja \mathcal{C} -nek:

$$F_{\times} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}, F_{\times}(C) = \text{Hom}(C \times A; B); F_{\times}(f) = f \circ _$$

$$F_{\uparrow} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}, F_{\uparrow}(C) = \text{Hom}(C; B^A); F_{\uparrow}(f) = f \circ _$$

Ezek valóban funktorok, mert $(F(f) \circ F(g))(h) = F(f)(F(g)(h)) = F(f)(g \circ h) = f \circ g \circ h = F(f \circ g)(h)$ és $F(id) = id \circ _ = _$. Ezek egyben izofunktorok, mert invertálhatók, ezért legitim reprezentációnak nevezni őket. F_{\times} és F_{\uparrow} inverze rendre:

$$G_{\times}(\text{Hom}(C \times A; B)) = C; G_{\times}(f') = f'(id), \quad G_{\uparrow}(\text{Hom}(C; B^A)) = C; G_{\uparrow}(f') = f'(id)$$

Yoneda-tételkör

Motiváció – Homset reprezentáció

$$\mathcal{C}_o \ni A \cong B \Leftrightarrow \text{Hom}(_, A) \cong \text{Hom}(_, B) \in \text{Set}$$

„Egy objektumot egyértelműen meghatároz a többi objektumhoz való viszonya”

Ezzel pl. $A^1 \cong A$ igazolható a következőképpen. Először is a Ψ uncurrying miatt az alábbi izomorfizmus X -ben természetes:

$$\text{Hom}(X, A^1) \xrightarrow{\Psi_X} \text{Hom}(X \times 1, A).$$

Majd be kell látni, hogy a

$$\text{Hom}(X \times 1, A) \xrightarrow{\text{Hom}(\varphi_X, A)} \text{Hom}(X, A)$$

izomorfizmus létezik és szintén természetes X -ben. Az izomorfia azért áll fenn, mert igazolható a

$$X \times 1 \xrightarrow{\varphi_X} X$$

izomorfia és a fenti ennek a Hom funktor általi képe. Az X -beli természetesség szintén ellenőrizendő:

$$\begin{array}{ccccc}
X & & X \times 1 & \xrightarrow{pr_1} & X \\
g \downarrow & & g \sqcap id \downarrow & & \downarrow g \\
Y & & Y \times 1 & \xrightarrow{pr_1} & Y
\end{array}$$

$$pr_1 \circ (g \sqcap id) = g \circ pr_1$$

Ezek után $\text{Hom}(\varphi_X, A) \circ \Psi_X$ szintén természetes izomorfizmus, így a két Homset izomorf. Végül, ha a két homset izomorf, akkor az objektumok is izomorfak.

Funktor

$$\begin{array}{ccc}
id \curvearrowright A & \xrightarrow{g} & F(id_A) = id_{F(A)} \curvearrowright F(A) \\
& \searrow f & \downarrow F(f) \\
& f \circ g & F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& g & \\
& \searrow f & \downarrow F^{op}(f) \\
& f \circ g & F^{op}(g) \circ F^{op}(f) = F^{op}(f \circ g)
\end{array}$$

Az első a kovariáns funktor, a másik a kontravariáns. Példa funktorokra: a kategóriából az oppozit kategóriába menő $(_)^{op} : X \mapsto X, f \mapsto f^{op}$; $\text{Hom}(_, A)$; $\text{Hom}(_ \times A, B)$. Ez a két utóbbi Set-be menő és kontravariáns, azaz "presheaf" ($\mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$).

Yoneda-lemma

Lemma (Yoneda-lemma 1, Nat-os alak) Legyen \mathcal{C} egy kategória, $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, és $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ egy kontravariáns funktor. Ekkor az alábbi izomorfia fennáll:

$$\text{Nat}(\text{Hom}(_, A), F) \cong F(A)$$

azaz van olyan $\Phi : \text{Nat}(\text{Hom}(_, A), F) \rightarrow F(A)$ és $\Psi : F(A) \rightarrow \text{Nat}(\text{Hom}(_, A), F)$, amelyek egymás inverzei.

Bizonyítás. (Φ) Legyen $\eta \in \text{Nat}(\text{Hom}(_, A), F)$ tetszőleges, kell ehhez egy alkalmas $F(A)$ -beli elem. Tetszőleges $X \in \mathcal{C}_0$ -ra $\eta_X : \text{Hom}(X, A) \rightarrow F(X)$ morfizmus, ezért

$$\Phi(\eta) \stackrel{\text{def.}}{=} \eta_A(id_A) \in F(A).$$

(Ψ) Legyen $x \in F(A)$. Kell egy alkalmas $\Psi(x) \in \text{Nat}(\text{Hom}(_, A), F)$ természetes transzformáció. Legyen $X \in \mathcal{C}_0$ és $f \in \text{Hom}(X, A)$ tetszőleges. Ekkor:

$$\Psi(x)_X(f) \stackrel{\text{def.}}{=} (F(f))(x) \in F(X)$$

amivel $\Psi(x) : \text{Hom}(X, A) \rightarrow F(X)$ lesz.

Még azt kell igazolni, hogy $\Psi(x)$ **természetes transzformáció**.

Legyen $g : Y \rightarrow X$ morfizmus,

$$\begin{array}{ccccc}
X & & \text{Hom}(X, A) & \xrightarrow{\Psi(x)_X} & F(X) \\
\uparrow g & & \downarrow \text{Hom}(g, A) & & \downarrow F(g) \\
Y & & \text{Hom}(Y, A) & \xrightarrow{\Psi(x)_Y} & F(Y)
\end{array}$$

Definíciója szerint $\text{Hom}(g, A) : \text{Hom}(X, A) \rightarrow \text{Hom}(Y, A)$, $f \mapsto f \circ g$, így tetszőleges $f \in \text{Hom}(X, A)$ -re:

$$\begin{aligned}
(F(g) \circ \Psi(x)_X)(f) &= F(g)(F(f)(x)) = (F(g) \circ F(f))(x) = F(f \circ g)(x) = \\
&= \Psi(x)_Y(f \circ g) = \Psi(x)_Y(\text{Hom}(g, A)(f)) = (\Psi(x)_Y \circ \text{Hom}(g, A))(f).
\end{aligned}$$

Kell $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{F(A)}$. Legyen $x \in F(A)$.

$$(\Phi \circ \Psi)(x) = \Phi(\Psi(x)) = \Psi(x)_A(\text{id}_A) = F(\text{id}_A)(x) = \text{id}_{F(A)}(x) = x$$

Kell $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\text{Nat}(\text{Hom}(_, A), F)}$. Legyen $\eta \in \text{Nat}(\text{Hom}(_, A), F)$ természetes transzformáció, $X \in \mathcal{C}_0$ és $g \in \text{Hom}(X, A)$.

$$(\Psi \circ \Phi)(\eta)(X)(g) = (\Psi(\Phi(\eta)))(X)(g) = (\Psi(\eta_A(\text{id}_A)))(X)(g) = F(g)(\eta_A(\text{id}_A)) =$$

$$\begin{array}{ccccc}
A & & \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{\eta_A} & F(A) \\
\uparrow g & & \downarrow \text{Hom}(g, A) & & \downarrow F(g) \\
X & & \text{Hom}(X, A) & \xrightarrow{\eta_X} & F(X)
\end{array}$$

kommutativitása miatt

$$= (\eta_X(\text{Hom}(g, A)(\text{id}_A))) = (\eta_X(\text{id}_A \circ g)) = \eta(X)(g) = \text{id}_{\text{Nat}(\text{Hom}(_, A), F)}(\eta)(X)(g).$$

Lemma (Yoneda-lemma v2, reprezentált funktor alak) \mathcal{C} kategória, $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. Ekkor az alábbi izomorfia fennáll:

$$\text{Nat}(\text{Hom}(_, A), \text{Hom}(_, B)) \cong \text{Hom}(A, B).$$

Bizonyítás. $F(_) := \text{Hom}(_, B)$.

Megjegyzés. Az előző $A, B \in \mathcal{C}_0$ objektumokkal írjuk a fenti Yoneda-lemma bizonyításában lévő Φ és Ψ izomorfizmusokat, az $F(_) := \text{Hom}(_, B)$ funktorral! Ekkor a következőt találjuk:

$$\begin{aligned}
\text{dom } \Phi &= \text{Nat}(\text{Hom}(_, A), F(_)) = \text{Nat}(\text{Hom}(_, A), \text{Hom}(_, B)), \\
\text{codom } \Phi &= \text{Hom}(A, B)
\end{aligned}$$

$$\forall \eta \in \text{Nat}(\text{Hom}(_, A), \text{Hom}(_, B)) \quad \forall X \in \mathcal{C}_0$$

$$\Phi(\eta) = \eta_A(\text{id}_A) \in \text{Hom}(A, B)$$

$$\text{dom } \Psi = F(A) = \text{Hom}(A, B), \quad \text{codom } \Psi = \text{Nat}(\text{Hom}(_, A), F(_)) = \text{Nat}(\text{Hom}(_, A), \text{Hom}(_, B))$$

$$\forall g \in \text{Hom}(A, B) \quad \forall X \in \mathcal{C}_0 \quad \forall f \in \text{Hom}(X, A)$$

$$\begin{aligned}
\Psi(g)(X)(f) &= F(f)(g) = \text{Hom}(f, A)(g) = \\
&= g \circ f \in \text{Hom}(X, B)
\end{aligned}$$

Definíció. Ha \mathcal{C} kategória, akkor *Yoneda-beágyazásnak* nevezzük és \mathfrak{Y} -val jelöljük a következő $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}}$ funktort:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y}(A) &:= \text{Hom}(_, A) \quad (A \in \mathcal{C}_0) \\ \mathfrak{Y}(g) &:= \Psi(g) \quad (A, B \in \mathcal{C}_0, g : \text{Hom}(A, B))\end{aligned}$$

ahol Ψ az előző megjegyzésben és a Yoneda-lemmában szereplő $\text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Nat}(\text{Hom}(_, A), \text{Hom}(_, B))$ izomorfizmus.

Megjegyzés. Tehát a Yoneda-funktor a morfizmusokon a g -vel (balról) való komponálás.

1. Tehát, ha $g \in \text{Hom}(A, B)$, $X \in \mathcal{C}_0$, $f : \text{Hom}(X, A)$, akkor

$$\mathfrak{Y}(g)(X)(f) = \text{Hom}(f, A)(g) = g \circ f \in \text{Hom}(X, B)$$

2. Ha $X = A$, akkor $g \in \text{Hom}(A, B)$, $f : \text{Hom}(B, A)$

$$\mathfrak{Y}(g)(A)(f) = \text{Hom}(f, A)(g) = g \circ f \in \text{Hom}(A, B)$$

3. A fenti Yoneda-funktor kovariáns:

$$\mathfrak{Y}(h \circ k)(A)(f) = h \circ k \circ f = \mathfrak{Y}(h)(A)(k \circ f) = \mathfrak{Y}(h)(A)(\mathfrak{Y}(k)(A)(f)) = (\mathfrak{Y}(h) \circ \mathfrak{Y}(k))(A)(f)$$

4. Világos, hogy a Yoneda-beágyazás inverze pedig a morfizmusokon a korábbi Φ , azaz tetszőleges $\eta \in \text{Nat}(\text{Hom}(_, A), \text{Hom}(_, B))$ -ra:

$$\mathfrak{Y}^{-1}(\eta) = \eta_A(id_A) \in \text{Hom}(A, B).$$

Mindezeket felhasználva egy újabb fontos lemmához jutunk.

Lemma (Izomorf objektumok funktor általi képe) Ha $F \in \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ és $A \cong B \in \mathcal{C}$, akkor $F(A) \cong F(B)$.

Bizonyítás. Bármilyen i, j -re, ha $i \circ j = id$, akkor $F(i) \circ F(j) = F(i \circ j) = F(id) = id$.

Következmény (Objektumok izomorfiájának jellemzése hom-funktorral) \mathcal{C} kategória, $A, B \in \mathcal{C}_0$. Ekkor az alábbi ekvivalencia fennáll:

$$\text{Hom}(_, A) \cong \text{Hom}(_, B) \Leftrightarrow A \cong B.$$

Bizonyítás. A Yoneda-beágyazás és inverze olyan funktorok, amik éppen a kontravariáns hom-funktorok kategóriája és az eredeti kategória között teremtenek izomorf kapcsolatot és így megőrzik az izomorfiát.

Adjungált

Definíció. Legyen $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktor. Azt mondjuk, hogy F *bal adjungált* (és definiálja a $G(Y)$ objektumot, ε_Y counit-ot és g_f morfizmust), ha minden $Y \in \mathcal{D}_o$ -ra létezik olyan $G(Y) \in \mathcal{C}_o$ objektum és $\varepsilon_Y : F(G(Y)) \rightarrow Y$ morfizmus (counit), hogy minden $f : F(X) \rightarrow Y$ -ra létezik egyetlen $g_f : X \rightarrow G(Y)$, hogy az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{array}{ccc} & & \xrightarrow{\quad F \quad} \\ & & \\ X & & F(X) \\ \downarrow g_f & & \downarrow F(g_f) \quad \searrow f \\ G(Y) & & F(G(Y)) \xrightarrow{\quad \varepsilon_Y \quad} Y\end{array}$$

Ekkor G is funktor és az adjungált kapcsolat jelölése: $F \dashv G$.

Megjegyzés. Világos, hogy a bal adjunkció legjobb példája az exponenciális objektum. Ezzel:

$$F(X) = X \times A, F(g) = g \circ id_A$$

$$\begin{array}{ccc}
 X & & X \times A \\
 \lambda f \downarrow & & \downarrow (\lambda f) \circ id_A \\
 Y^A & & Y^A \times A \xrightarrow{ev} Y
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow f
 \end{array}$$

Ekkor tehát: $(_ \times A) \dashv (_{}^A)$.

Egy másik érdekes adjunktív kapcsolat a pár és a szorzat kapcsolata, ez is a kommutatív diagramon múlik, csak egy kicsit transzparenssebben kell felírunk:

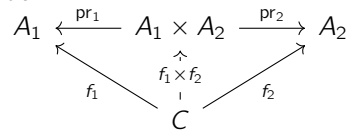
$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & & (C, C) \\
 \Pi_i f_i \downarrow & & \downarrow ((\Pi_i f_i), (\Pi_i f_i)) \\
 \prod_i X_i & & ((\prod_i X_i), (\prod_i X_i)) \xrightarrow{(pr_1, pr_2)} (X_1, X_2)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow (f_1, f_2)
 \end{array}$$

Itt a funktor a diagonális és ahova képez az a közönséges párok kategóriája $(\mathcal{C} \square \mathcal{C})$: $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \square \mathcal{C}$, $\Delta(X) = (X, X)$, $\Delta(f) = (f, f)$. Ezzel:

$$\Delta \dashv (_ \times _)$$

Összefoglaló

Szorzat



$$f_i = pr_i \circ (f_1 \times f_2) \quad (i = 1; 2)$$

$$g = (pr_1 \circ g) \times (pr_2 \circ g) \quad (\forall g : C \rightarrow A_1 \times A_2)$$

Terminális

$$A \xrightarrow{!_A} 1$$

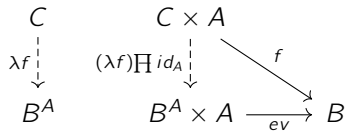
$$g = !_A \quad \forall g : A \rightarrow 1$$

Iniciális

$$0 \xrightarrow{!_A} A$$

$$g = !_A \quad \forall g : 0 \rightarrow A$$

Exponenciális



$$f = ev \circ ((\lambda f) \text{H} id_A)$$

$$g = \lambda(ev \circ (g \text{H} id_A)) \quad (\forall g : C \rightarrow B^A)$$