Szorzat

Definíció. Legyen $\mathcal{C}$ kategória, $A_1, A_2 : \mathcal{C}_o$. Ekkor az $A_1 \times A_2 : \mathcal{C}_o$ *szorzatobjektum* a $\mathrm{pr}_i : \mathrm{Hom}(A_1 \times A_2; A_i)$ ($i = 1; 2$) projekciókkal, ha minden $C : \mathcal{C}_o$-re és $f_i : \mathrm{Hom}(C; A_i)$-re ($i = 1; 2$) egyértelműen létezik az az $f_1 \times f_2 : \mathrm{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ (*szorzatmorfizmus*), hogy az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dashed, "f_1 \times f_2"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

A $\mathcal{C}$ kategória *kartéziusi,* ha benne bármely két objektumnak van szorzata.

Megjegyzés. A morfizmusszorzás definiáló tulajdonságai tehát a

$$\mathrm{pr}_i \circ x = f_i \qquad (i = 1; 2)$$

egyenlőségek. Ha valami az x-be helyettesítve igazzá teszi ezeket az egyenlőségeket, akkor az a definíció egyértelműségi kitétele miatt *a* szorzatmorfizmus. Ezt sokszor használjuk szorzattal való egyenlőség igazolásánál.

Lemma (Konverziós szabályok).

$$\begin{aligned}
\beta_i^\times : &\quad \mathrm{pr}_i \circ (f_1 \times f_2) = f_i && (i = 1; 2) \\
\eta^\times : &\quad (\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g &&
\end{aligned}$$

ahol $g : \mathrm{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ tetszőleges.

Bizonyítás. A $\beta^\times$-k a kommutálás következményei. $\eta^\times$ pedig a szorzatmorfizmus egyértelműségéből következik. A definícióból ugyanis, tetszőleges $g : \mathrm{Hom}(C; A_1 \times A_2)$-re az $f_i := \mathrm{pr}_i \circ g$ választással triviálisan következik, hogy $f_i = \mathrm{pr}_i \circ g$:

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\
& C \arrow[ul, "\mathrm{pr}_1 \circ g"] \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ur, "\mathrm{pr}_2 \circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

de ilyenből csak egy van, ami a $(\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g)$ szorzatmorfizmus, így:

$$(\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g$$

Megjegyzés. $\eta^\times$ valójában ekvivalens a szorzatmorfizmus egyértelműségével. Tegyük fel ugyanis, hogy a definícióban az egyértelműség *helyett* az $(\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g$ egyenlőséget követeljük meg minden $g : \mathrm{Hom}(C; A_1 \times A_2)$-re. Legyen g tehát olyan, hogy teljesíti a kommutálási feltételt: $\mathrm{pr}_i \circ g = f_i$. Ekkor

$$f_1 \times f_2 = (\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g,$$

vagyis a szorzatmorfizmus az egyetlen olyan, ami teljeseíti $\beta^\times$ szabályokat.

Lemma (A morfizmusszorzás kongruenciája).

$$(f_1 \times f_2) \circ h = (f_1 \circ h) \times (f_2 \circ h)$$

ahol $h : \mathrm{Hom}(D; C)$ tetszőleges, a definíció jelöléseivel.

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy $(f_1 \times f_2) \circ h$ teljesíti az $(f_1 \circ h) \times (f_2 \circ h)$ morfizmusszorzat definiáló tulajdonságait, azaz a következőket:

$$\mathrm{pr}_i \circ x = f_i \circ h \qquad (i = 1; 2).$$

Nyilván

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dashed, "f_1 \times f_2"] \arrow[ur, "f_2"'] & \\
& D \arrow[uul, "f_1 \circ h"] \arrow[u, "h"] \arrow[uur, "f_2 \circ h"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutál, tehát

$$\mathrm{pr}_i \circ ((f_1 \times f_2) \circ h) = (\mathrm{pr}_i \circ (f_1 \times f_2)) \circ h = f_i \circ h.$$

Definíció (Torii). Legyen $\mathcal{C}$ kartéziusi kategória, $A_1, A_2, C_1, C_2 : \mathcal{C}_o$, $f_i : \mathrm{Hom}(C_i; A_i)$ $(i = 1; 2)$. Ekkor f_1 és f_2 torii-val jelölt szorzata:

$$f_1 \sqcap f_2 \stackrel{\text{def.}}{=} (f_1 \circ \mathrm{pr}_1) \times (f_2 \circ \mathrm{pr}_2).$$

Megjegyzés. Kommutatív diagramban ábrázolva a torii középen van:

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\
C_1 \arrow[u, "f_1"] & C_1 \times C_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[u, dashed, "(f_1 \circ \mathrm{pr}_1) \times (f_2 \circ \mathrm{pr}_2)"] & C_2 \arrow[u, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

Később látni fogjuk, hogy egy karteziánus $\mathcal{C}$ kategória $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ bifunktoriális szorzatművelete maga a torii, amit már most is lehet látni a diagramon.

Lemma (Egyenlőségek torii-ra).

$$\begin{aligned}
\beta_i^{\sqcap} : &\quad \mathrm{pr}_i \circ (f_1 \sqcap f_2) = f_i \circ \mathrm{pr}_i && (i = 1; 2) \\
(\eta^{\sqcap} : &\quad (\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g) \\
\sqcap\circ : &\quad (f_1 \sqcap f_2) \circ h = (f_1 \circ \mathrm{pr}_1 \circ h) \times (f_2 \circ \mathrm{pr}_2 \circ h)
\end{aligned}$$

Exponenciális

Definíció. Legyen $\mathcal{C}$ kartéziusi kategória, $A, B : \mathcal{C}_o$. Ekkor a $B^A : \mathcal{C}_o$ *exponenciális objektum* az $ev : \mathrm{Hom}(B^A \times A; B)$ evaluációval, ha minden $C : \mathcal{C}_o$-re és $f : \mathrm{Hom}(C \times A; B)$-re egyértelműen létezik az a $\lambda f : \mathrm{Hom}(C; B^A)$ (*exponenciális adjungált*), hogy az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] & C \times A \arrow[d, dashed, "(\lambda f) \sqcap id_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B^A & B^A \times A \arrow[r, "ev"'] & B
\end{tikzcd}$$

Ha a $\mathcal{C}$ kartéziusi kategóriában bármely két objektumank van exponenciálisa, akkor $\mathcal{C}$-t *kartéziusian zárt kategóriának* nevezzük.

Megjegyzés. Tehát a hatványmorfizmus vagy exponenciális adjungált definiáló egyenlete:

$$ev \circ (x \prod id_A) = f$$

Ha ez teljesül x helyére téve egy morfizmusra, akkor az az adjungált.

Lemma (Konverziós szabályok).

$$\begin{aligned} \beta^{\to}: &\quad ev \circ ((\lambda f) \prod id_A) = f \\ \eta^{\to}: &\quad \lambda(ev \circ (g \prod id_A)) = g \end{aligned}$$

minden $g : \mathrm{Hom}(C; B^A)$-ra.

Bizonyítás. Az első azonos a kommutatív tulajdonsággal. A másodikhoz azt kell megmutatni, hogy van olyan f, amire teljesül, hogy

$$ev \circ (g \prod id_A) = f$$

márpedig ez az f triviálisan az $ev \circ (g \prod id_A)$. Így az egyértelműségből következik az η szabály.

Megjegyzés. Nyilván itt is igaz az, hogy az egyértelműségi kitétel ekvivalens az η szabállyal. Valóban! Tegyük fel, hogy teljesül $ev \circ (g \prod id_A) = f$. Ekkor

$$\lambda f = \lambda(ev \circ (g \prod id_A)) = g.$$

Az egyik legfontosabb technika az exponenciálisra vonatkozóan a Currying–unCurrying.

Lemma (Természetes izomorfia 1). Ha $\mathcal{C}$ kartéziusian zárt kategória, akkor az alábbi Set-izomorfizmus teljesül:

$$\mathrm{Hom}(C \times A; B) \cong \mathrm{Hom}(C; B^A)$$

Bizonyítás. A definiáló diagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] \arrow[d, bend left, "g"] & C \times A \arrow[d, dashed, "g \prod id_A"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[dr, bend left, "ev \circ (g \prod id_A)"] & \\ B^A & B^A \times A \arrow[r, "ev"'] & B \end{tikzcd}$$

alapján, legyen:

$$\Phi : \mathrm{Hom}(C \times A; B) \to \mathrm{Hom}(C; B^A), \quad \Phi(f) \overset{\text{def.}}{=} \lambda f$$

$$\Psi : \mathrm{Hom}(C; B^A) \to \mathrm{Hom}(C \times A; B), \quad \Psi(g) \overset{\text{def.}}{=} ev \circ (g \prod id_A).$$

Set-ben az izomorfizmusok bijekció, ezért azt kell belátni, hogy

$$\Phi(\Psi(g)) = g \quad \text{és} \quad \Psi(\Phi(f)) = f$$

Rendre az η és β szabályok alapján:

$$\Phi(\Psi(g)) = \lambda(ev \circ (g \prod id_A)) = g$$

és
$$\Psi(\Phi(f)) = ev \circ ((\lambda f) \mathbin{\Pi} id_A) = f$$

Lemma (Kongruencia).
$$\lambda(f \circ (h \mathbin{\Pi} id_A)) = (\lambda f) \circ h$$
minden $h : \mathrm{Hom}(D; C)$-re.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy $(\lambda f) \circ h$ teljesíti az $\lambda(f \circ (h \mathbin{\Pi} id_A))$ definiáló egyenlőségét, azaz
$$ev \circ (((\lambda f) \circ h) \mathbin{\Pi} id_A) = f \circ (h \mathbin{\Pi} id_A).$$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "h"] \arrow[dd, dashed, bend right=50, "\lambda(f\circ(h \mathbin{\Pi} id_A))"'] \arrow[dd, bend left=50, "(\lambda f)\circ h"] \\
C \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] \\
B^A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \times A \arrow[d, "h \mathbin{\Pi} id_A"'] \arrow[ddr, "f\circ(h \mathbin{\Pi} id_A)"] & \\
C \times A \arrow[d, dashed, "(\lambda f) \mathbin{\Pi} id_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B^A \times A \arrow[r, "ev"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$ev \circ (((\lambda f) \circ h) \mathbin{\Pi} id_A) = ev \circ (((\lambda f) \circ h \circ pr_1) \times (id_A \circ pr_2)) =$$

Lemma (Természetes izomorfia 2). Ha $\mathcal{C}$ kartéziusian zárt kategória, akkor az alábbi Set-izomorfizmus természetes C-ben:
$$\Phi : \mathrm{Hom}(C \times A; B) \to \mathrm{Hom}(C; B^A); f \mapsto \lambda f$$

Bizonyítás. Rögzítsük A, B-t. A két funktor, ami között Φ vált két reprezentációja $\mathcal{C}$-nek:
$$F_\times : \mathcal{C}^{op} \to \mathsf{Set}, F_\times(C) = \mathrm{Hom}(C \times A; B); F_\times(f) = f \circ \_$$
$$F_\uparrow : \mathcal{C}^{op} \to \mathsf{Set}, F_\uparrow(C) = \mathrm{Hom}(C; B^A); F_\uparrow(f) = f \circ \_$$
Ezek valóban funktorok, mert $(F(f) \circ F(g))(h) = F(f)(F(g)(h)) = F(f)(g \circ h) = f \circ g \circ h = F(f \circ g)(h)$ és $F(id) = id \circ \_ = \_$. Ezek egyben izofunktorok, mert invertálhatók, ezért legitim reprezentációnak nevezni őket. $F_\times$ és $F_\uparrow$ inverze rendre:
$$G_\times(\mathrm{Hom}(C \times A; B)) = C;\ G_\times(f') = f'(id), \quad G_\uparrow(\mathrm{Hom}(C; B^A)) = C;\ G_\uparrow(f') = f'(id)$$

Yoneda-tételkör

Motiváció – Homset reprezentáció
$$\mathcal{C}_o \ni \qquad A \cong B \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Hom}(\_\,, A) \cong \mathrm{Hom}(\_\,, B) \qquad \in \mathsf{Set}$$
„Egy objektumot egyértelműen meghatároz a többi objektumhoz való viszonya"
Ezzel pl. $A^1 \cong A$ igazolható a következőképpen. Először is a Ψ uncurrying miatt az alábbi izomorfizmus X-ben természetes:
$$\mathrm{Hom}(X\,, A^1) \overset{\Psi_X}{\to} \mathrm{Hom}(X \times 1\,, A).$$
Majd be kell látni, hogy a
$$\mathrm{Hom}(X \times 1\,, A) \overset{\mathrm{Hom}(\varphi_X, A)}{\to} \mathrm{Hom}(X\,, A)$$
izomorfizmus létezik és szintén természetes X-ben. Az izomorfia azért áll fenn, mert igazolható a
$$X \times 1 \overset{\varphi_X}{\to} X$$
izomorfia és a fenti ennek a Hom funktor általi képe. Az X-beli természetesség szintén ellenőrizendő:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "g"'] \\
Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times 1 \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "g \sqcap id"'] & X \arrow[d, "g"] \\
Y \times 1 \arrow[r, "pr_1"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

$$pr_1 \circ (g \sqcap id) = g \circ pr_1$$

Ezek után $\mathrm{Hom}(\varphi_X, A) \circ \Psi_X$ szintén természetes izomorfizmus, így a két Homset izomorf. Végül, ha a két homset izomorf, akkor az objektumok is izomorfak.

Funktor

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "id"] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & {} \arrow[d, "f"] \\
& {}
\end{tikzcd}
F(id_A) = id_{F(A)}
\quad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[loop left] \arrow[r, "F(g)"] \arrow[dr] & {} \arrow[d, "F(f)"] \\
& {}
\end{tikzcd}
\quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & {} \arrow[d, "f"] \\
& {}
\end{tikzcd}
\quad F^{op}(g) \circ F^{op}(f) = F^{op}(f \circ g) \quad
\begin{tikzcd}
{} & {} \arrow[l, "F^{op}(g)"'] \\
& {} \arrow[ul] \arrow[u, "F^{op}(f)"']
\end{tikzcd}
$$

Az első a kovariáns funktor, a másik a kontravariáns. Példa funktorokra: a kategóriából az oppozit kategóriába menő $(\_)^{op} : X \mapsto X, f \mapsto f^{op}$; $\mathrm{Hom}(\_\,, A)$; $\mathrm{Hom}(\_ \times A, B)$. Ez a két utóbbi Set-be menő és kontravariáns, azaz "presheaf" ($\mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$).

Yoneda-lemma

Lemma (Yoneda-lemma 1, Nat-os alak) Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória, $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, és $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ egy kontravariáns funktor. Ekkor az alábbi izomorfia fennáll:

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F) \cong F(A)$$

azaz van olyan $\Phi : \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F) \to F(A)$ és $\Psi : F(A) \to \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F)$, amelyek egymás inverzei.

Bizonyítás. (Φ) Legyen $\eta \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F)$ tetszőleges, kell ehhez egy alkalmas $F(A)$-beli elem. Tetszőleges $X \in \mathcal{C}_0$-ra $\eta_X : \mathrm{Hom}(X, A) \to F(X)$ morfizmus, ezért

$$\Phi(\eta) \overset{\text{def.}}{=} \eta_A(\mathrm{id}_A) \in F(A).$$

(Ψ) Legyen $x \in F(A)$. Kell egy alkalmas $\Psi(x) \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F)$ természetes transzformáció. Legyen $X \in \mathcal{C}_0$ és $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$ tetszőleges. Ekkor:

$$\Psi(x)_X(f) \overset{\text{def.}}{=} (F(f))(x) \in F(X)$$

amivel $\Psi(x) : \mathrm{Hom}(X, A) \to F(X)$ lesz.
Még azt kell igazolni, hogy $\Psi(x)$ **természetes transzformáció.**
Legyen $g : Y \to X$ morfizmus,

$$\begin{array}{ccc} X & \mathrm{Hom}(X,A) \xrightarrow{\Psi(x)_X} & F(X) \\ g\uparrow & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(g,A)} & \downarrow{\scriptstyle F(g)} \\ Y & \mathrm{Hom}(Y,A) \xrightarrow{\Psi(x)_Y} & F(Y) \end{array}$$

Definíciója szerint $\mathrm{Hom}(g,A) : \mathrm{Hom}(X,A) \to \mathrm{Hom}(Y,A)$, $f \mapsto f \circ g$, így tetszőleges $f \in \mathrm{Hom}(X,A)$-re:

$$(F(g) \circ \Psi(x)_X)(f) = F(g)(F(f)(x)) = (F(g) \circ F(f))(x) = F(f \circ g)(x) =$$

$$= \Psi(x)_Y(f \circ g) = \Psi(x)_Y(\mathrm{Hom}(g,A)(f)) = (\Psi(x)_Y \circ \mathrm{Hom}(g,A))(f).$$

Kell $\Phi \circ \Psi = id_{F(A)}$. Legyen $x \in F(A)$.

$$(\Phi \circ \Psi)(x) = \Phi(\Psi(x)) = \Psi(x)_A(\mathrm{id}_A) = F(\mathrm{id}_A)(x) = \mathrm{id}_{F(A)}(x) = x$$

Kell $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_,A),F)}$. Legyen $\eta \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_,A),F)$ természetes transzformáció, $X \in \mathcal{C}_0$ és $g \in \mathrm{Hom}(X,A)$.

$$(\Psi \circ \Phi)(\eta)(X)(g) = (\Psi(\Phi(\eta))(X)(g) = (\Psi(\eta_A(id_A)))(X)(g) = F(g)(\eta_A(id_A)) =$$

$$\begin{array}{ccc} A & \mathrm{Hom}(A,A) \xrightarrow{\eta_A} & F(A) \\ g\uparrow & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(g,A)} & \downarrow{\scriptstyle F(g)} \\ X & \mathrm{Hom}(X,A) \xrightarrow[\eta_X]{} & F(X) \end{array}$$

kommutativitása miatt

$$= (\eta_X(\mathrm{Hom}(g,A)(id_A))) = (\eta_X(id_A \circ g)) = \eta(X)(g) = id_{\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_,A),F)}(\eta)(X)(g).$$

Lemma (Yoneda-lemma v2, reprezentált funktor alak) $\mathcal{C}$ kategória, $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Ekkor az alábbi izomorfia fennáll:

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_,A),\mathrm{Hom}(\_,B)) \cong \mathrm{Hom}(A,B).$$

Bizonyítás. $F(\_) := \mathrm{Hom}(\_,B)$.

Megjegyzés. Az előző $A, B \in \mathcal{C}_0$ objektumokkal írjuk a fenti Yoneda-lemma bizonyításában lévő Φ és Ψ izomorfizmusokat, az $F(\_) := \mathrm{Hom}(\_,B)$ funktorral! Ekkor a következőt találjuk:

$$\mathrm{dom}\,\Phi = \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_,A),F(\_)) = \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_,A),\mathrm{Hom}(\_,B)),$$
$$\mathrm{codom}\,\Phi = \mathrm{Hom}(A,B)$$

$\forall \eta \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_,A),\mathrm{Hom}(\_,B)) \quad \forall X \in \mathrm{C}_0$

$$\Phi(\eta) = \eta_A(id_A) \in \mathrm{Hom}(A,B)$$

$$\mathrm{dom}\,\Psi = F(A) = \mathrm{Hom}(A,B), \quad \mathrm{codom}\,\Psi = \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_,A),F(\_)) = \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_,A),\mathrm{Hom}(\_,B))$$

$\forall g \in \mathrm{Hom}(A,B) \quad \forall X \in \mathrm{C}_0 \quad \forall f \in \mathrm{Hom}(X,A)$

$$\Psi(g)(X)(f) = F(f)(g) = \mathrm{Hom}(f,A)(g) =$$

$$= g \circ f \in \mathrm{Hom}(X,B)$$

Definíció. Ha $\mathcal{C}$ kategória, akkor *Yoneda-beágyazásnak* nevezzük és よ-val jelöljük a következő $\mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$ funktort:

$$\text{よ}(A) := \mathrm{Hom}(\_, A) \qquad (A \in \mathrm{C}_0)$$
$$\text{よ}(g) := \Psi(g) \qquad (A, B \in \mathcal{C}_0, g : \mathrm{Hom}(A, B))$$

ahol Ψ az előző megjegyzésben és a Yoneda-lemmában szereplő $\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), \mathrm{Hom}(\_, B)$ izomorfizmus.

Megjegyzés. Tehát a Yoneda-funktor a morfizmusokon a g-vel (balról) való komponálás.

1. Tehát, ha $g \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $X \in \mathcal{C}_0$, $f : \mathrm{Hom}(X, A)$, akkor
$$\text{よ}(g)(X)(f) = \mathrm{Hom}(f, A)(g) = g \circ f \in \mathrm{Hom}(X, B)$$
2. Ha $X = A$, akkor $g \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $f : \mathrm{Hom}(B, A)$
$$\text{よ}(g)(A)(f) = \mathrm{Hom}(f, A)(g) = g \circ f \in \mathrm{Hom}(A, B)$$
3. A fenti Yoneda-funktor kovariáns:
$$\text{よ}(h \circ k)(A)(f) = h \circ k \circ f = \text{よ}(h)(A)(k \circ f) = \text{よ}(h)(A)(\text{よ}(k)(A)(f)) = (\text{よ}(h) \circ \text{よ}(k))(A)(f)$$
4. Világos, hogy a Yoneda-beágyazás inverze pedig a morfizmusokon a korábbi Φ, azaz tetszőleges $\eta \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), \mathrm{Hom}(\_, B))$-ra:
$$\text{よ}^{-1}(\eta) = \eta_A(id_A) \in \mathrm{Hom}(A, B).$$

Mindezeket felhasználva egy újabb fontos lemmához jutunk.

Lemma (Izomorf objektumok funktor általi képe) Ha $F \in \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ és $A \cong B \in \mathcal{C}$, akkor $F(A) \cong F(B)$.
Bizonyítás. Bármilyen i, j-re, ha $i \circ j = id$, akkor $F(i) \circ F(j) = F(i \circ j) = F(id) = id$.

Következmény (Objektumok izomorfiájának jellemzése hom-funktorral) $\mathcal{C}$ kategória, $A, B \in \mathrm{C}_0$. Ekkor az alábbi ekvivalencia fennáll:

$$\mathrm{Hom}(\_, A) \cong \mathrm{Hom}(\_, B) \quad \Leftrightarrow \quad A \cong B.$$

Bizonyítás. A Yoneda-beágyazás és inverze olyan funktorok, amik éppen a kontravariáns hom-funktorok kategóriája és az eredeti kategória között teremtenek izomorf kapcsolatot és így megőrzik az izomorfiát.

Adjungált

Definíció. Legyen $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor. Azt mondjuk, hogy F *bal adjungált* (és definiálja a $G(Y)$ objektumot, ε_Y counit-ot és g_f morfizmust), ha minden $Y \in \mathcal{D}_o$-ra létezik olyan $G(Y) \in \mathcal{C}_o$ objektum és $\varepsilon_Y : F(G(Y)) \to X$ morfizmus (counit), hogy minden $f : F(X) \to Y$-ra létezik egyetlen $g_f : X \to G(Y)$, hogy az alábbi diagram kommutál:

$$\xRightarrow{\quad F \quad}$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "g_f"'] & F(X) \arrow[d, dashed, "F(g_f)"'] \arrow[dr, "f"] & \\
G(Y) & F(G(Y)) \arrow[r, "\varepsilon_Y"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

Ekkor G is funktor és az adjungált kapcsolat jelölése: $F \dashv G$.

Megjegyzés. Világos, hogy a bal adjunkció legjobb példája az exponenciális objektum. Ezzel:

$$\xRightarrow[F(X)=X\times A, F(g)=g\coprod id_A]{}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] & X \times A \arrow[d, dashed, "(\lambda f)\coprod id_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Y^A & Y^A \times A \arrow[r, "ev"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Ekkor tehát: $(\_ \times A) \dashv (\_^A)$.

Egy másik érdekes adjunktív kapcsolat a pár és a szorzat kapcsaolata, ez is a kommutatív diagramon múlik, csak egy kicsit transzparensebben kell felírnunk:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "\prod_i f_i"'] & (C, C) \arrow[d, dashed, "((\prod_i f_i), (\prod_i f_i))"'] \arrow[dr, "(f_1, f_2)"] & \\
\prod_i X_i & ((\prod_i X_i), (\prod_i X_i)) \arrow[r, "(pr_1, pr_2)"'] & (X_1, X_2)
\end{tikzcd}$$

Itt a funktor a diagonális és ahova képez az a közönséges párok kategóriája ($\mathcal{C}\Box\mathcal{C}$): $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\Box\mathcal{C}$, $\Delta(X) = (X, X), \Delta(f) = (f, f)$. Ezzel:

$$\Delta \dashv (\_ \times \_)$$

Összefoglaló

Szorzat

$$\begin{tikzcd} A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\ & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[u, dashed, "f_1 \times f_2"] & \end{tikzcd}$$

$$f_i = pr_i \circ (f_1 \times f_2) \qquad (i = 1; 2)$$
$$g = (pr_1 \circ g) \times (pr_2 \circ g) \quad (\forall g : C \to A_1 \times A_2)$$

Terminális

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "!_A"] & 1 \end{tikzcd}$$

$$g = !_A \qquad \forall g : A \to 1$$

Iniciális

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dashed, "!_A"] & A \end{tikzcd}$$

$$g = !_A \qquad \forall g : 0 \to A$$

Exponenciális

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] & C \times A \arrow[d, dashed, "(\lambda f) \mathbin{\Pi} id_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B^A & B^A \times A \arrow[r, "ev"'] & B \end{tikzcd}$$

$$f = ev \circ ((\lambda f) \mathbin{\Pi} id_A)$$
$$g = \lambda(ev \circ (g \mathbin{\Pi} id_A)) \quad (\forall g : C \to B^A)$$