Szorzat

Definíció. Legyen $\mathcal{C}$ kategória, $A_1, A_2 : \mathcal{C}_o$. Ekkor az $A_1 \times A_2 : \mathcal{C}_o$ *szorzatobjektum* a $\mathrm{pr}_i : \mathrm{Hom}(A_1 \times A_2; A_i)$ $(i = 1; 2)$ projekciókkal, ha minden $C : \mathcal{C}_o$-re és $f_i : \mathrm{Hom}(C; A_i)$-re $(i = 1; 2)$ egyértelműen létezik az az $f_1 \times f_2 : \mathrm{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ (*szorzatmorfizmus*), hogy az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dashed, "f_1 \times f_2"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

A $\mathcal{C}$ kategória *kartéziusi,* ha benne bármely két objektumnak van szorzata.

Megjegyzés. A morfizmusszorzás definiáló tulajdonságai tehát a

$$\mathrm{pr}_i \circ x = f_i \qquad (i = 1; 2)$$

egyenlőségek. Ha valami az x-be helyettesítve igazzá teszi ezeket az egyenlőségeket, akkor az a definíció egyértelműségi kitétele miatt *a* szorzatmorfizmus. Ezt sokszor használjuk szorzattal való egyenlőség igazolásánál.

Lemma (Konverziós szabályok).

$$\begin{aligned}
\beta_i^\times : &\quad \mathrm{pr}_i \circ (f_1 \times f_2) = f_i && (i = 1; 2) \\
\eta^\times : &\quad (\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g &&
\end{aligned}$$

ahol $g : \mathrm{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ tetszőleges.

Bizonyítás. A $\beta^\times$-k a kommutálás következményei. $\eta^\times$ pedig a szorzatmorfizmus egyértelműségéből következik. A definícióból ugyanis, tetszőleges $g : \mathrm{Hom}(C; A_1 \times A_2)$-re az $f_i := \mathrm{pr}_i \circ g$ választással triviálisan következik, hogy $f_i = \mathrm{pr}_i \circ g$:

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\
& C \arrow[ul, "\mathrm{pr}_1 \circ g"] \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ur, "\mathrm{pr}_2 \circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

de ilyenből csak egy van, ami a $(\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g)$ szorzatmorfizmus, így:

$$(\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g$$

Megjegyzés. $\eta^\times$ valójában ekvivalens a szorzatmorfizmus egyértelműségével. Tegyük fel ugyanis, hogy a definícióban az egyértelműség *helyett* az $(\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g$ egyenlőséget követeljük meg minden $g : \mathrm{Hom}(C; A_1 \times A_2)$-re. Legyen g tehát olyan, hogy teljesíti a kommutálási feltételt: $\mathrm{pr}_i \circ g = f_i$. Ekkor

$$f_1 \times f_2 = (\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g,$$

vagyis a szorzatmorfizmus az egyetlen olyan, ami teljeseíti $\beta^\times$ szabályokat.

Lemma (A morfizmusszorzás kongruenciája).

$$(f_1 \times f_2) \circ h = (f_1 \circ h) \times (f_2 \circ h)$$

ahol $h : \mathrm{Hom}(D; C)$ tetszőleges, a definíció jelöléseivel.

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy $(f_1 \times f_2) \circ h$ teljesíti az $(f_1 \circ h) \times (f_2 \circ h)$ morfizmusszorzat definiáló tulajdonságait, azaz a következőket:

$$\mathrm{pr}_i \circ x = f_i \circ h \qquad (i = 1; 2).$$

Nyilván

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[u, dashed, "f_1 \times f_2"] & \\
& D \arrow[uul, "f_1 \circ h"] \arrow[uur, "f_2 \circ h"'] \arrow[u, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}$$

kommutál, tehát

$$\mathrm{pr}_i \circ ((f_1 \times f_2) \circ h) = (\mathrm{pr}_i \circ (f_1 \times f_2)) \circ h = f_i \circ h.$$

Definíció (Torii). Legyen $\mathcal{C}$ kartéziusi kategória, $A_1, A_2, C_1, C_2 : \mathcal{C}_o$, $f_i : \mathrm{Hom}(C_i; A_i)$ $(i = 1; 2)$. Ekkor f_1 és f_2 torii-val jelölt szorzata:

$$f_1 \mathbin{\overline{\mathrm{H}}} f_2 \overset{\text{def.}}{=} (f_1 \circ \mathrm{pr}_1) \times (f_2 \circ \mathrm{pr}_2).$$

Megjegyzés. Kommutatív diagramban ábrázolva a torii középen van:

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\
C_1 \arrow[u, "f_1"] & C_1 \times C_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[u, dashed, "(f_1 \circ \mathrm{pr}_1) \times (f_2 \circ \mathrm{pr}_2)"] & C_2 \arrow[u, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

Később látni fogjuk, hogy egy karteziánus $\mathcal{C}$ kategória $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ bifunktoriális szorzatművelete maga a torii, amit már most is lehet látni a diagramon.

Lemma (Egyenlőségek torii-ra).

$$\begin{aligned}
\beta_i^{\overline{\mathrm{H}}} : &\quad \mathrm{pr}_i \circ (f_1 \mathbin{\overline{\mathrm{H}}} f_2) = f_i \circ \mathrm{pr}_i && (i = 1; 2) \\
(\eta^{\overline{\mathrm{H}}} : &\quad (\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g) \\
\overline{\mathrm{H}}\circ : &\quad (f_1 \mathbin{\overline{\mathrm{H}}} f_2) \circ h = (f_1 \circ \mathrm{pr}_1 \circ h) \times (f_2 \circ \mathrm{pr}_2 \circ h)
\end{aligned}$$

Exponenciális

Definíció. Legyen $\mathcal{C}$ kartéziusi kategória, $A, B : \mathcal{C}_o$. Ekkor a $B^A : \mathcal{C}_o$ *exponenciális objektum* az $ev : \mathrm{Hom}(B^A \times A; B)$ evaluációval, ha minden $C : \mathcal{C}_o$-re és $f : \mathrm{Hom}(C \times A; B)$-re egyértelműen létezik az a $\lambda f : \mathrm{Hom}(C; B^A)$ (*exponenciális adjungált*), hogy az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] & C \times A \arrow[d, dashed, "(\lambda f) \mathbin{\overline{\mathrm{H}}} id_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B^A & B^A \times A \arrow[r, "ev"'] & B
\end{tikzcd}$$

Ha a $\mathcal{C}$ kartéziusi kategóriában bármely két objektumank van exponenciálisa, akkor $\mathcal{C}$-t *kartéziusian zárt kategóriának* nevezzük.

Megjegyzés. Tehát a hatványmorfizmus vagy exponenciális adjungált definiáló egyenlete:

$$ev \circ (x \prod id_A) = f$$

Ha ez teljesül x helyére téve egy morfizmusra, akkor az az adjungált.

Lemma (Konverziós szabályok).

$$\begin{aligned} \beta^{\rightarrow}: &\quad ev \circ ((\lambda f) \prod id_A) = f \\ \eta^{\rightarrow}: &\quad \lambda(ev \circ (g \prod id_A)) = g \end{aligned}$$

minden $g : \mathrm{Hom}(C; B^A)$-ra.

Bizonyítás. Az első azonos a kommutatív tulajdonsággal. A másodikhoz azt kell megmutatni, hogy van olyan f, amire teljesül, hogy

$$ev \circ (g \prod id_A) = f$$

márpedig ez az f triviálisan az $ev \circ (g \prod id_A)$. Így az egyértelműségből következik az η szabály.

Megjegyzés. Nyilván itt is igaz az, hogy az egyértelműségi kitétel ekvivalens az η szabállyal. Valóban! Tegyük fel, hogy teljesül $ev \circ (g \prod id_A) = f$. Ekkor

$$\lambda f = \lambda(ev \circ (g \prod id_A)) = g.$$

Az egyik legfontosabb technika az exponenciálisra vonatkozóan a Currying–unCurrying.

Lemma (Természetes izomorfia 1). Ha $\mathcal{C}$ kartéziusian zárt kategória, akkor az alábbi Set-izomorfizmus teljesül:

$$\mathrm{Hom}(C \times A; B) \cong \mathrm{Hom}(C; B^A)$$

Bizonyítás. A definiáló diagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] \arrow[d, bend left, "g"] & C \times A \arrow[d, dashed, "g \prod id_A"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[dr, bend left, "ev \circ (g \prod id_A)"] & \\ B^A & B^A \times A \arrow[r, "ev"'] & B \end{tikzcd}$$

alapján, legyen:

$$\Phi : \mathrm{Hom}(C \times A; B) \to \mathrm{Hom}(C; B^A), \quad \Phi(f) \overset{\text{def.}}{=} \lambda f$$
$$\Psi : \mathrm{Hom}(C; B^A) \to \mathrm{Hom}(C \times A; B), \quad \Psi(g) \overset{\text{def.}}{=} ev \circ (g \prod id_A).$$

Set-ben az izomorfizmusok bijekció, ezért azt kell belátni, hogy

$$\Phi(\Psi(g)) = g \quad \text{és} \quad \Psi(\Phi(f)) = f$$

Rendre az η és β szabályok alapján:

$$\Phi(\Psi(g)) = \lambda(ev \circ (g \prod id_A)) = g$$

és

$$\Psi(\Phi(f)) = ev \circ ((\lambda f) \sqcap id_A) = f$$

Lemma (Kongruencia).

$$\lambda(f \circ (h \sqcap id_A)) = (\lambda f) \circ h$$

minden $h : \mathrm{Hom}(D; C)$-re.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy $(\lambda f) \circ h$ teljesíti az $\lambda(f \circ (h \sqcap id_A))$ definiáló egyenlőségét, azaz

$$ev \circ (((\lambda f) \circ h) \sqcap id_A) = f \circ (h \sqcap id_A).$$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "h"'] \arrow[dd, bend right=60, dashed, "\lambda(f\circ(h\prod id_A))"'] \arrow[dd, bend left=60, "(\lambda f)\circ h"] \\
C \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] \\
B^A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \times A \arrow[d, "h\prod id_A"'] \arrow[ddr, "f\circ(h\prod id_A)"] & \\
C \times A \arrow[d, dashed, "(\lambda f)\prod id_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B^A \times A \arrow[r, "ev"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$ev \circ (((\lambda f) \circ h) \sqcap id_A) = ev \circ (((\lambda f) \circ h \circ pr_1) \times (id_A \circ pr_2)) =$$

Lemma (Természetes izomorfia 2). Ha $\mathcal{C}$ kartéziusian zárt kategória, akkor az alábbi Set-izomorfizmus természetes C-ben:

$$\Phi : \mathrm{Hom}(C \times A; B) \to \mathrm{Hom}(C; B^A); f \mapsto \lambda f$$

Bizonyítás. Rögzítsük A, B-t. A két funktor, ami között Φ vált két reprezentációja $\mathcal{C}$-nek:

$$F_\times : \mathcal{C}^{op} \to \mathsf{Set}, F_\times(C) = \mathrm{Hom}(C \times A; B); F_\times(f) = f \circ \_$$

$$F_\uparrow : \mathcal{C}^{op} \to \mathsf{Set}, F_\uparrow(C) = \mathrm{Hom}(C; B^A); F_\uparrow(f) = f \circ \_$$

Ezek valóban funktorok, mert $(F(f) \circ F(g))(h) = F(f)(F(g)(h)) = F(f)(g \circ h) = f \circ g \circ h = F(f \circ g)(h)$ és $F(id) = id \circ \_ = \_$. Ezek egyben izofunktorok, mert invertálhatók, ezért legitim reprezentációnak nevezni őket. $F_\times$ és $F_\uparrow$ inverze rendre:

$$G_\times(\mathrm{Hom}(C \times A; B)) = C;\ G_\times(f') = f'(id), \quad G_\uparrow(\mathrm{Hom}(C; B^A)) = C;\ G_\uparrow(f') = f'(id)$$

Yoneda-tételkör

Motiváció – Homset reprezentáció

$$\mathcal{C}_o \ni \qquad A \cong B \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Hom}(\_\,, A) \cong \mathrm{Hom}(\_\,, B) \qquad \in \mathsf{Set}$$

„Egy objektumot egyértelműen meghatároz a többi objektumhoz való viszonya"
Ezzel pl. $A^1 \cong A$ igazolható így: minden X-re

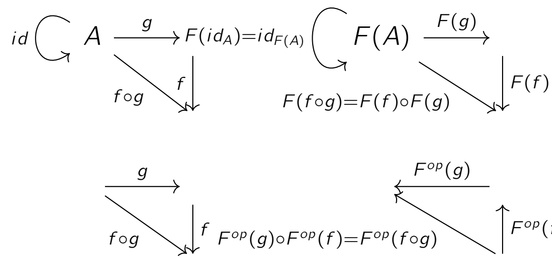
$$\mathrm{Hom}(X\,, A^1) \overset{\Psi_X}{\to} \mathrm{Hom}(X \times 1\,, A) \overset{\mathrm{Hom}(\varphi_X, A)}{\to} \mathrm{Hom}(X\,, A)$$

ahol Ψ_X az uncurrying, és

$$X \times 1 \overset{\varphi_X}{\leftarrow} X \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Hom}(X \times 1\,, A) \overset{\mathrm{Hom}(\varphi_X, A)}{\to} \mathrm{Hom}(X\,, A)$$

$\mathrm{Hom}(\varphi_X, A)$ a Yoneda-megfeleltetés. $\mathrm{Hom}(\varphi_X, A) \circ \Psi_X$ szintén izomorfizmus és természetes transzformáció, így a két Homset izomorf.

Funktor



Az első a kovariáns funktor, a másik a kontravariáns. Példa funktorokra: a kategóriából az oppozit kategóriába menő $(\_)^{op} : X \mapsto X, f \mapsto f^{op}$; $\mathrm{Hom}(\_\,, A)$; $\mathrm{Hom}(\_ \times A\,, B)$. Ez a két utóbbi Set-be menő és kontravariáns, azaz "presheaf" ($\mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$).

Yoneda-lemma

Lemma 0.1 (Yoneda-lemma, Nat-os alak)**.** Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória, $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, és $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ egy kontravariáns funktor. Ekkor létezik egy természetes izomorfizmus:

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F) \cong F(A)$$

Proof. Definiáljuk a $\Phi : \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F) \to F(A)$ leképezést:

$$\Phi(\eta) = \eta_A(\mathrm{id}_A)$$

Definiáljuk az inverz $\Psi : F(A) \to \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F)$ leképezést. Minden $x \in F(A)$ esetén $\Psi(x) = \eta^x$, ahol η^x komponensei $\eta^x_X : \mathrm{Hom}(X, A) \to F(X)$:

$$\eta^x_X(h) = F(h)(x)$$

1. η^x **természetességének ellenőrzése:** Azt kell belátnunk, hogy minden $k : Y \to X$ morfizmusra $\mathcal{C}$-ben a következő diagram kommutál:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X, A) \arrow[r, "\eta^x_X"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(k,A)"'] & F(X) \arrow[d, "F(k)"] \\
\mathrm{Hom}(Y, A) \arrow[r, "\eta^x_Y"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Mindkét útvonal $h : X \to A$ morfizmuson: $F(k)(\eta^x_X(h)) = F(k)(F(h)(x)) = F(h \circ k)(x)$. $\eta^x_Y(\mathrm{Hom}(k, A)(h)) = \eta^x_Y(h \circ k) = F(h \circ k)(x)$. A két oldal megegyezik, tehát η^x természetes.

2. Inverz ellenőrzés:

$$(\Phi \circ \Psi)(x) = \Phi(\eta^x) = \eta^x_A(\mathrm{id}_A) = F(\mathrm{id}_A)(x) = x$$

$$(\Psi \circ \Phi)(\eta) = \Psi(\eta_A(\mathrm{id}_A))$$

Jelölje $x_0 = \eta_A(\mathrm{id}_A)$. Azt kell megmutatnunk, hogy $\eta^{x_0} = \eta$, azaz $\eta^{x_0}_X(h) = \eta_X(h)$.

$$\eta^{x_0}_X(h) = F(h)(x_0) = F(h)(\eta_A(\mathrm{id}_A))$$

Mivel η természetes, a következő diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(A,A) & \xrightarrow{\eta_A} & F(A) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hom}(h,A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(h)} \\
\mathrm{Hom}(X,A) & \xrightarrow{\eta_X} & F(X)
\end{array}$$

Alkalmazva az $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ elemre:

$$F(h)(\eta_A(\mathrm{id}_A)) = \eta_X(\mathrm{Hom}(h, A)(\mathrm{id}_A)) = \eta_X(h \circ \mathrm{id}_A) = \eta_X(h).$$

Tehát $\eta^{x_0} = \eta$. Mivel Φ és Ψ egymás inverzei, Φ egy bijekció, és így a lemma igazolva van. $\square$

Összefoglaló

Szorzat

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[u, dashed, "f_1 \times f_2"] &
\end{tikzcd}$$

$$f_i = pr_i \circ (f_1 \times f_2) \qquad (i = 1; 2)$$
$$g = (pr_1 \circ g) \times (pr_2 \circ g) \quad (\forall g : C \to A_1 \times A_2)$$

Terminális

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dashed, "!_A"] & 1
\end{tikzcd}$$

$$g = !_A \qquad \forall g : A \to 1$$

Iniciális

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed, "!_A"] & A
\end{tikzcd}$$

$$g = !_A \qquad \forall g : 0 \to A$$

Exponenciális

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] & C \times A \arrow[d, dashed, "(\lambda f) \sqcap id_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B^A & B^A \times A \arrow[r, "ev"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$f = ev \circ ((\lambda f) \sqcap id_A)$$
$$g = \lambda(ev \circ (g \sqcap id_A)) \quad (\forall g : C \to B^A)$$