Szorzat

Definíció. Legyen $\mathcal{C}$ kategória, $A_1, A_2 : \mathcal{C}_o$. Ekkor az $A_1 \times A_2 : \mathcal{C}_o$ *szorzatobjektum* a $\mathrm{pr}_i : \mathrm{Hom}(A_1 \times A_2; A_i)$ ($i = 1; 2$) projekciókkal, ha minden $C : \mathcal{C}_o$-re és $f_i : \mathrm{Hom}(C; A_i)$-re ($i = 1; 2$) egyértelműen létezik az az $f_1 \times f_2 : \mathrm{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ (*szorzatmorfizmus*), hogy az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{tikzcd} A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\ & C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dashed, "f_1 \times f_2"] \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

A $\mathcal{C}$ kategória *kartéziusi,* ha benne bármely két objektumnak van szorzata.

Megjegyzés. A morfizmusszorzás definiáló tulajdonságai tehát a

$$\mathrm{pr}_i \circ x = f_i \qquad (i = 1; 2)$$

egyenlőségek. Ha valami az x-be helyettesítve igazzá teszi ezeket az egyenlőségeket, akkor az a definíció egyértelműségi kitétele miatt *a* szorzatmorfizmus. Ezt sokszor használjuk szorzattal való egyenlőség igazolásánál.

Lemma (Konverziós szabályok).

$$\begin{aligned} \beta_i^\times : &\quad \mathrm{pr}_i \circ (f_1 \times f_2) = f_i \qquad && (i = 1; 2) \\ \eta^\times : &\quad (\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g && \end{aligned}$$

ahol $g : \mathrm{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ tetszőleges.

Bizonyítás. A $\beta^\times$-k a kommutálás következményei. $\eta^\times$ pedig a szorzatmorfizmus egyértelműségéből következik. A definícióból ugyanis, tetszőleges $g : \mathrm{Hom}(C; A_1 \times A_2)$-re az $f_i := \mathrm{pr}_i \circ g$ választással triviálisan következik, hogy $f_i = \mathrm{pr}_i \circ g$:

$$\begin{tikzcd} A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\ & C \arrow[ul, "\mathrm{pr}_1 \circ g"] \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ur, "\mathrm{pr}_2 \circ g"'] & \end{tikzcd}$$

de ilyenből csak egy van, ami a $(\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g)$ szorzatmorfizmus, így:

$$(\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g$$

Megjegyzés. $\eta^\times$ valójában ekvivalens a szorzatmorfizmus egyértelműségével. Tegyük fel ugyanis, hogy a definícióban az egyértelműség *helyett* az $(\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g$ egyenlőséget követeljük meg minden $g : \mathrm{Hom}(C; A_1 \times A_2)$-re. Legyen g tehát olyan, hogy teljesíti a kommutálási feltételt: $\mathrm{pr}_i \circ g = f_i$. Ekkor

$$f_1 \times f_2 = (\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g,$$

vagyis a szorzatmorfizmus az egyetlen olyan, ami teljeseíti $\beta^\times$ szabályokat.

Lemma (A morfizmusszorzás kongruenciája).

$$(f_1 \times f_2) \circ h = (f_1 \circ h) \times (f_2 \circ h)$$

ahol $h : \mathrm{Hom}(D; C)$ tetszőleges, a definíció jelöléseivel.

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy $(f_1 \times f_2) \circ h$ teljesíti az $(f_1 \circ h) \times (f_2 \circ h)$ morfizmusszorzat definiáló tulajdonságait, azaz a következőket:

$$\mathrm{pr}_i \circ x = f_i \circ h \qquad (i = 1; 2).$$

Nyilván

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\
& C \arrow[u, dashed, "f_1 \times f_2"] \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] & \\
& D \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[uul, "f_1 \circ h"] \arrow[uur, "f_2 \circ h"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutál, tehát

$$\mathrm{pr}_i \circ ((f_1 \times f_2) \circ h) = (\mathrm{pr}_i \circ (f_1 \times f_2)) \circ h = f_i \circ h.$$

Definíció (Torii). Legyen $\mathcal{C}$ kartéziusi kategória, $A_1, A_2, C_1, C_2 : \mathcal{C}_o$, $f_i : \mathrm{Hom}(C_i; A_i)$ $(i = 1; 2)$. Ekkor f_1 és f_2 torii-val jelölt szorzata:

$$f_1 \mathbin{\sqcap\!\!\!\!-} f_2 \overset{\text{def.}}{=} (f_1 \circ \mathrm{pr}_1) \times (f_2 \circ \mathrm{pr}_2).$$

Megjegyzés. Kommutatív diagramban ábrázolva a torii középen van:

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\
C_1 \arrow[u, "f_1"] & C_1 \times C_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[u, dashed, "(f_1 \circ \mathrm{pr}_1) \times (f_2 \circ \mathrm{pr}_2)"] & C_2 \arrow[u, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

Később látni fogjuk, hogy egy karteziánus $\mathcal{C}$ kategória $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ bifunktoriális szorzatművelete maga a torii, amit már most is lehet látni a diagramon.

Lemma (Egyenlőségek torii-ra).

$$\begin{aligned}
\beta_i^{\sqcap\!\!\!\!-} :&\quad \mathrm{pr}_i \circ (f_1 \mathbin{\sqcap\!\!\!\!-} f_2) = f_i \circ \mathrm{pr}_i && (i = 1; 2) \\
(\eta^{\sqcap\!\!\!\!-} :&\quad (\mathrm{pr}_1 \circ g) \times (\mathrm{pr}_2 \circ g) = g) \\
\sqcap\!\!\!\!- \circ :&\quad (f_1 \mathbin{\sqcap\!\!\!\!-} f_2) \circ h = (f_1 \circ \mathrm{pr}_1 \circ h) \times (f_2 \circ \mathrm{pr}_2 \circ h)
\end{aligned}$$

Exponenciális

Definíció. Legyen $\mathcal{C}$ kartéziusi kategória, $A, B : \mathcal{C}_o$. Ekkor a $B^A : \mathcal{C}_o$ *exponenciális objektum* az $ev : \mathrm{Hom}(B^A \times A; B)$ evaluációval, ha minden $C : \mathcal{C}_o$-re és $f : \mathrm{Hom}(C \times A; B)$-re egyértelműen létezik az a $\lambda f : \mathrm{Hom}(C; B^A)$ (*exponenciális adjungált*), hogy az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] & C \times A \arrow[d, dashed, "(\lambda f) \mathbin{\sqcap\!\!\!\!-} id_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B^A & B^A \times A \arrow[r, "ev"'] & B
\end{tikzcd}$$

Ha a $\mathcal{C}$ kartéziusi kategóriában bármely két objektumank van exponenciálisa, akkor $\mathcal{C}$-t *kartéziusian zárt kategóriának* nevezzük.

Megjegyzés. Tehát a hatványmorfizmus vagy exponenciális adjungált definiáló egyenlete:

$$ev \circ (x \prod id_A) = f$$

Ha ez teljesül x helyére téve egy morfizmusra, akkor az az adjungált.

Lemma (Konverziós szabályok).

$$\begin{aligned} \beta^{\to}: &\quad ev \circ ((\lambda f) \prod id_A) = f \\ \eta^{\to}: &\quad \lambda(ev \circ (g \prod id_A)) = g \end{aligned}$$

minden $g : \mathrm{Hom}(C; B^A)$-ra.

Bizonyítás. Az első azonos a kommutatív tulajdonsággal. A másodikhoz azt kell megmutatni, hogy van olyan f, amire teljesül, hogy

$$ev \circ (g \prod id_A) = f$$

márpedig ez az f triviálisan az $ev \circ (g \prod id_A)$. Így az egyértelműségből következik az η szabály.

Megjegyzés. Nyilván itt is igaz az, hogy az egyértelműségi kitétel ekvivalens az η szabállyal. Valóban! Tegyük fel, hogy teljesül $ev \circ (g \prod id_A) = f$. Ekkor

$$\lambda f = \lambda(ev \circ (g \prod id_A)) = g.$$

Az egyik legfontosabb technika az exponenciálisra vonatkozóan a Currying–unCurrying.

Lemma (Természetes izomorfia 1). Ha $\mathcal{C}$ kartéziusian zárt kategória, akkor az alábbi Set-izomorfizmus teljesül:

$$\mathrm{Hom}(C \times A; B) \cong \mathrm{Hom}(C; B^A)$$

Bizonyítás. A definiáló diagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] \arrow[d, bend left, "g"] & C \times A \arrow[d, dashed, "g \prod id_A"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[dr, bend left, "ev \circ (g \prod id_A)"] & \\ B^A & B^A \times A \arrow[r, "ev"'] & B \end{tikzcd}$$

alapján, legyen:

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathrm{Hom}(C \times A; B) \to \mathrm{Hom}(C; B^A), \quad \Phi(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda f \\ \Psi &: \mathrm{Hom}(C; B^A) \to \mathrm{Hom}(C \times A; B), \quad \Psi(g) \stackrel{\text{def.}}{=} ev \circ (g \prod id_A). \end{aligned}$$

Set-ben az izomorfizmusok bijekció, ezért azt kell belátni, hogy

$$\Phi(\Psi(g)) = g \quad \text{és} \quad \Psi(\Phi(f)) = f$$

Rendre az η és β szabályok alapján:

$$\Phi(\Psi(g)) = \lambda(ev \circ (g \prod id_A)) = g$$

és

$$\Psi(\Phi(f)) = ev \circ ((\lambda f) \prod id_A) = f$$

Lemma (Kongruencia).

$$\lambda(f \circ (h \prod id_A)) = (\lambda f) \circ h$$

minden $h : \mathrm{Hom}(D; C)$-re.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy $(\lambda f) \circ h$ teljesíti az $\lambda(f \circ (h \prod id_A))$ definiáló egyenlőségét, azaz

$$ev \circ (((\lambda f) \circ h) \prod id_A) = f \circ (h \prod id_A).$$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "h"] \arrow[dd, bend right=60, dashed, "\lambda(f\circ(h\prod id_A))"'] \arrow[dd, bend left=40, "(\lambda f)\circ h"] & & D \times A \arrow[d, "h\prod id_A"'] \arrow[ddr, "f\circ(h\prod id_A)"] & \\
C \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] & & C \times A \arrow[d, dashed, "(\lambda f)\prod id_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B^A & & B^A \times A \arrow[r, "ev"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$ev \circ (((\lambda f) \circ h) \prod id_A) = ev \circ (((\lambda f) \circ h \circ pr_1) \times (id_A \circ pr_2)) =$$

Lemma (Természetes izomorfia 2). Ha $\mathcal{C}$ kartéziusian zárt kategória, akkor az alábbi Set-izomorfizmus természetes C-ben:

$$\Phi : \mathrm{Hom}(C \times A; B) \to \mathrm{Hom}(C; B^A); f \mapsto \lambda f$$

Bizonyítás. Rögzítsük A, B-t. A két funktor, ami között Φ vált két reprezentációja $\mathcal{C}$-nek:

$$F_\times : \mathcal{C}^{op} \to \mathsf{Set}, F_\times(C) = \mathrm{Hom}(C \times A; B); F_\times(f) = f \circ \_$$

$$F_\uparrow : \mathcal{C}^{op} \to \mathsf{Set}, F_\uparrow(C) = \mathrm{Hom}(C; B^A); F_\uparrow(f) = f \circ \_$$

Ezek valóban funktorok, mert $(F(f) \circ F(g))(h) = F(f)(F(g)(h)) = F(f)(g \circ h) = f \circ g \circ h = F(f \circ g)(h)$ és $F(id) = id \circ \_ = \_$. Ezek egyben izofunktorok, mert invertálhatók, ezért legitim reprezentációnak nevezni őket. $F_\times$ és $F_\uparrow$ inverze rendre:

$$G_\times(\mathrm{Hom}(C \times A; B)) = C;\ G_\times(f') = f'(id), \quad G_\uparrow(\mathrm{Hom}(C; B^A)) = C;\ G_\uparrow(f') = f'(id)$$

Yoneda-tételkör

Motiváció – Homset reprezentáció

$$\mathcal{C}_o \ni \qquad A \cong B \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Hom}(\_\,, A) \cong \mathrm{Hom}(\_\,, B) \qquad \in \mathsf{Set}$$

„Egy objektumot egyértelműen meghatároz a többi objektumhoz való viszonya"
Ezzel pl. $A^1 \cong A$ igazolható így: minden X-re

$$\mathrm{Hom}(X\,, A^1) \overset{\Psi_X}{\to} \mathrm{Hom}(X \times 1\,, A) \overset{\mathrm{Hom}(\varphi_X, A)}{\to} \mathrm{Hom}(X\,, A)$$

ahol Ψ_X az uncurrying, és

$$X \times 1 \overset{\varphi_X}{\leftarrow} X \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Hom}(X \times 1\,, A) \overset{\mathrm{Hom}(\varphi_X, A)}{\to} \mathrm{Hom}(X\,, A)$$

$\mathrm{Hom}(\varphi_X, A)$ a Yoneda-megfeleltetés. $\mathrm{Hom}(\varphi_X, A) \circ \Psi_X$ szintén izomorfizmus és természetes transzformáció, így a két Homset izomorf.

Funktor

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "id"] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & {} \arrow[d, "f"] \\ & {} \end{tikzcd} \quad F(id_A)=id_{F(A)} \quad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[loop left] \arrow[r, "F(g)"] \arrow[dr] & {} \arrow[d, "F(f)"] \\ & {} \end{tikzcd} \quad F(f\circ g)=F(f)\circ F(g)$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & {} \arrow[d, "f"] \\ & {} \end{tikzcd} \quad F^{op}(g)\circ F^{op}(f)=F^{op}(f\circ g) \quad \begin{tikzcd} {} & {} \arrow[l, "F^{op}(g)"'] \\ & {} \arrow[ul] \arrow[u, "F^{op}(f)"'] \end{tikzcd}$$

Az első a kovariáns funktor, a másik a kontravariáns. Példa funktorokra: a kategóriából az oppozit kategóriába menő $(\_)^{op} : X \mapsto X, f \mapsto f^{op}$; $\mathrm{Hom}(\_\,, A)$; $\mathrm{Hom}(\_ \times A\,, B)$. Ez a két utóbbi Set-be menő és kontravariáns, azaz "presheaf" ($\mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$).

Yoneda-lemma

Lemma (Yoneda-lemma 1, Nat-os alak) Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória, $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, és $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ egy kontravariáns funktor. Ekkor az alábbi izomorfia fennáll:

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F) \cong F(A)$$

azaz van olyan $\Phi : \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F) \to F(A)$ és $\Psi : F(A) \to \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F)$, amelyek egymás inverzei.

Bizonyítás. (Φ) Legyen $\eta \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F)$ tetszőleges, kell ehhez egy alkalmas $F(A)$-beli elem. Tetszőleges $X \in \mathcal{C}_0$-ra $\eta_X : \mathrm{Hom}(X, A) \to F(X)$ morfizmus, ezért

$$\Phi(\eta) \overset{\text{def.}}{=} \eta_A(\mathrm{id}_A) \in F(A).$$

(Ψ) Legyen $x \in F(A)$. Kell egy alkalmas $\Psi(x) \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F)$ természetes transzformáció. Legyen $X \in \mathcal{C}_0$ és $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$ tetszőleges. Ekkor:

$$\Psi(x)_X(f) \overset{\text{def.}}{=} (F(f))(x) \in F(X)$$

amivel $\Psi(x) : \mathrm{Hom}(X, A) \to F(X)$ lesz.
Még azt kell igazolni, hogy $\Psi(x)$ **természetes transzformáció.**
Legyen $g : Y \to X$ morfizmus,

$$\begin{tikzcd} X & \mathrm{Hom}(X, A) \arrow[r, "\Psi(x)_X"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(g,A)"'] & F(X) \arrow[d, "F(g)"] \\ Y \arrow[u, "g"] & \mathrm{Hom}(Y, A) \arrow[r, "\Psi(x)_Y"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Definíciója szerint $\mathrm{Hom}(g, A) : \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(Y, A), f \mapsto f \circ g$, így tetszőleges $f \in \mathrm{Hom}(X, A)$-re:

$$(F(g) \circ \Psi(x)_X)(f) = F(g)(F(f)(x)) = (F(g) \circ F(f))(x) = F(f \circ g)(x) =$$

$$= \Psi(x)_Y(f \circ g) = \Psi(x)_Y(\mathrm{Hom}(g, A)(f)) = (\Psi(x)_Y \circ \mathrm{Hom}(g, A))(f).$$

Kell $\Phi \circ \Psi = id_{F(A)}$. Legyen $x \in F(A)$.

$$(\Phi \circ \Psi)(x) = \Phi(\Psi(x)) = \Psi(x)_A(\mathrm{id}_A) = F(\mathrm{id}_A)(x) = \mathrm{id}_{F(A)}(x) = x$$

Kell $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_,A),F)}$. Legyen $\eta \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), F)$ természetes transzformáció, $X \in \mathcal{C}_0$ és $g \in \mathrm{Hom}(X, A)$.

$$(\Psi \circ \Phi)(\eta)(X)(g) = (\Psi(\Phi(\eta))(X)(g) = (\Psi(\eta_A(id_A)))(X)(g) = F(g)(\eta_A(id_A)) =$$

$$\begin{tikzcd}
A & \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(g,A)"'] & F(A) \arrow[d, "F(g)"] \\
X \arrow[u, "g"] & \mathrm{Hom}(X,A) \arrow[r, "\eta_X"'] & F(X)
\end{tikzcd}$$

kommutativitása miatt

$$= (\eta_X(\mathrm{Hom}(g, A)(id_A))) = (\eta_X(id_A \circ g)) = \eta(X)(g) = id_{\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_,A),F)}(\eta)(X)(g)$$

Lemma (Yoneda-lemma 2, reprezentált funktor alak) $\mathcal{C}$ kategória, $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Ekkor az alábbi izomorfia fennáll:

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\_, A), \mathrm{Hom}(\_, B) \cong \mathrm{Hom}(A, B)$$

Bizonyítás. $F(\_) := \mathrm{Hom}(\_, B)$.

Lemma (Objektumok izomorfiájának jellemzése) $\mathcal{C}$ kategória, $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Ekkor az alábbi ekvivalencia fennáll:

$$\mathrm{Hom}(\_, A) \cong \mathrm{Hom}(\_, B) \quad \Leftrightarrow \quad A \cong B$$

Összefoglaló

Szorzat

$$\begin{tikzcd}
A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & A_2 \\
& C \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dashed, "f_1 \times f_2"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$$f_i = pr_i \circ (f_1 \times f_2) \qquad (i = 1; 2)$$
$$g = (pr_1 \circ g) \times (pr_2 \circ g) \quad (\forall g : C \to A_1 \times A_2)$$

Terminális

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "!_A"] & 1 \end{tikzcd}$$

$$g = !_A \qquad \forall g : A \to 1$$

Iniciális

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, dashed, "!_A"] & A \end{tikzcd}$$

$$g = !_A \qquad \forall g : 0 \to A$$

Exponenciális

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "\lambda f"'] & C \times A \arrow[d, dashed, "(\lambda f) \Pi\, id_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B^A & B^A \times A \arrow[r, "ev"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$f = ev \circ ((\lambda f) \ \Pi\ id_A)$$
$$g = \lambda(ev \circ (g \ \Pi\ id_A)) \quad (\forall g : C \to B^A)$$