

Szorzat

Definíció. Legyen \mathcal{C} kategória, $A_1, A_2 : \mathcal{C}_o$. Ekkor az $A_1 \times A_2 : \mathcal{C}_o$ *szorzatobjektum* a $\text{pr}_i : \text{Hom}(A_1 \times A_2; A_i)$ ($i = 1; 2$) projekciókkal, ha minden $C : \mathcal{C}_o$ -re és $f_i : \text{Hom}(C; A_i)$ -re ($i = 1; 2$) egyértelműen létezik az az $f_1 \times f_2 : \text{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ (*szorzatmorfizmus*), hogy az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xleftarrow{\text{pr}_1} & A_1 \times A_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & A_2 \\ & \searrow f_1 & \uparrow f_1 \times f_2 & \nearrow f_2 & \\ & & C & & \end{array}$$

A \mathcal{C} kategória *kartéziusi*, ha benne bármely két objektumnak van szorzata.

Megjegyzés. A morfizmusszorzás definiáló tulajdonságai tehát a

$$\text{pr}_i \circ x = f_i \quad (i = 1; 2)$$

egyenlőségek. Ha valami az x -be helyettesítve igazá teszi ezeket az egyenlőségeket, akkor az a definíció egyértelműségi kitétele miatt a szorzatmorfizmus. Ezt sokszor használjuk szorzattal való egyenlőség igazolásánál.

Lemma (Konverziós szabályok).

$$\begin{aligned} \beta_i^\times : \quad & \text{pr}_i \circ (f_1 \times f_2) = f_i \\ \eta^\times : \quad & (\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g \end{aligned} \quad (i = 1; 2)$$

ahol $g : \text{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ tetszőleges.

Bizonyítás. A β^\times -k a kommutálás következményei. η^\times pedig a szorzatmorfizmus egyértelműségéből következik. A definícióból ugyanis, tetszőleges $g : \text{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ -re az $f_i := \text{pr}_i \circ g$ választással triviálisan következik, hogy $f_i = \text{pr}_i \circ g$:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xleftarrow{\text{pr}_1} & A_1 \times A_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & A_2 \\ & \searrow \text{pr}_1 \circ g & \uparrow g & \nearrow \text{pr}_2 \circ g & \\ & & C & & \end{array}$$

de ilyenből csak egy van, ami a $(\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g)$ szorzatmorfizmus, így:

$$(\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g$$

Megjegyzés. η^\times valójában ekvivalens a szorzatmorfizmus egyértelműségével. Tegyük fel ugyanis, hogy a definícióban az egyértelműség *helyett* az $(\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g$ egyenlőséget követeljük meg minden $g : \text{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ -re. Legyen g tehát olyan, hogy teljesíti a kommutálási feltételt: $\text{pr}_i \circ g = f_i$. Ekkor

$$f_1 \times f_2 = (\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g,$$

vagyis a szorzatmorfizmus az egyetlen olyan, ami teljesíti β^\times szabályokat.

Lemma (A morfizmusszorzás kongruenciája).

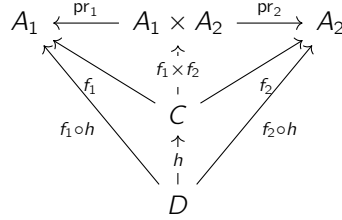
$$(f_1 \times f_2) \circ h = (f_1 \circ h) \times (f_2 \circ h)$$

ahol $h : \text{Hom}(D; C)$ tetszőleges, a definíció jelöléseivel.

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy $(f_1 \times f_2) \circ h$ teljesíti az $(f_1 \circ h) \times (f_2 \circ h)$ morfizmusszorzat definiáló tulajdonságait, azaz a következőket:

$$\text{pr}_i \circ x = f_i \circ h \quad (i = 1; 2).$$

Nyilván



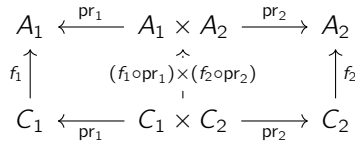
kommutál, tehát

$$\text{pr}_i \circ ((f_1 \times f_2) \circ h) = (\text{pr}_i \circ (f_1 \times f_2)) \circ h = f_i \circ h.$$

Definíció (Torii). Legyen \mathcal{C} kartéziusi kategória, $A_1, A_2, C_1, C_2 : \mathcal{C}_o$, $f_i : \text{Hom}(C_i; A_i)$ ($i = 1; 2$). Ekkor f_1 és f_2 torii-val jelölt szorzata:

$$f_1 \boxtimes f_2 \stackrel{\text{def.}}{=} (f_1 \circ \text{pr}_1) \times (f_2 \circ \text{pr}_2).$$

Megjegyzés. Kommutatív diagramban ábrázolva a torii középen van:



Később látni fogjuk, hogy egy karteziánus \mathcal{C} kategória $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ bifunktoriális szorzatművelete maga a torii, amit már most is lehet látni a diagramon.

Lemma (Egyenlőségek torii-ra).

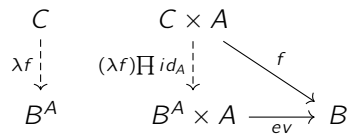
$$\beta_i^\boxtimes : \text{pr}_i \circ (f_1 \boxtimes f_2) = f_i \circ \text{pr}_i \quad (i = 1; 2)$$

$$(\eta^\boxtimes : (\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g)$$

$$\boxtimes \circ : (f_1 \boxtimes f_2) \circ h = (f_1 \circ \text{pr}_1 \circ h) \times (f_2 \circ \text{pr}_2 \circ h)$$

Exponenciális

Definíció. Legyen \mathcal{C} kartéziusi kategória, $A, B : \mathcal{C}_o$. Ekkor a $B^A : \mathcal{C}_o$ *exponenciális objektum* az $\text{ev} : \text{Hom}(B^A \times A; B)$ evaluációval, ha minden $C : \mathcal{C}_o$ -re és $f : \text{Hom}(C \times A; B)$ -re egyértelműen létezik az a $\lambda f : \text{Hom}(C; B^A)$ (*exponenciális adjungált*), hogy az alábbi diagram kommutál:



Ha a \mathcal{C} kartéziusi kategóriában bármely két objektumunk van exponenciálisa, akkor \mathcal{C} -t *kartéziusian zárt kategóriának* nevezzük.

Megjegyzés. Tehát a hatványmorfizmus vagy exponenciális adjungált definiáló egyenlete:

$$ev \circ (x \text{ } \text{H} \text{ } id_A) = f$$

Ha ez teljesül x helyére téve egy morfizmusra, akkor az az adjungált.

Lemma (Konverziós szabályok).

$$\begin{aligned} \beta^{\rightarrow} : \quad & ev \circ ((\lambda f) \text{ } \text{H} \text{ } id_A) = f \\ \eta^{\rightarrow} : \quad & \lambda(ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)) = g \end{aligned}$$

minden $g : \text{Hom}(C; B^A)$ -ra.

Bizonyítás. Az első azonos a kommutatív tulajdonsággal. A másodikhoz azt kell megmutatni, hogy van olyan f , amire teljesül, hogy

$$ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A) = f$$

márpedig ez az f triviálisan az $ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)$. Így az egyértelműségből következik az η szabály.

Megjegyzés. Nyilván itt is igaz az, hogy az egyértelműségi kitétel ekvivalens az η szabállyal. Valóban! Tegyük fel, hogy teljesül $ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A) = f$. Ekkor

$$\lambda f = \lambda(ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)) = g.$$

Az egyik legfontosabb technika az exponenciálisra vonatkozóan a Curryng–unCurrying.

Lemma (Természetes izomorfia 1). Ha \mathcal{C} kartéziusian zárt kategória, akkor az alábbi Set-izomorfizmus teljesül:

$$\text{Hom}(C \times A; B) \cong \text{Hom}(C; B^A)$$

Bizonyítás. A definiáló diagram

$$\begin{array}{ccc} C & & C \times A \\ \downarrow \lambda f & \searrow g & \downarrow g \text{ } \text{H} \text{ } id_A \\ B^A & & B^A \times A \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{ev} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)} \\ \xrightarrow{f} \end{array} \quad B$$

alapján, legyen:

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Hom}(C \times A; B) &\rightarrow \text{Hom}(C; B^A), & \Phi(f) &\stackrel{\text{def.}}{=} \lambda f \\ \Psi : \text{Hom}(C; B^A) &\rightarrow \text{Hom}(C \times A; B), & \Psi(g) &\stackrel{\text{def.}}{=} ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A). \end{aligned}$$

Set-ben az izomorfizmusok bijekció, ezért azt kell belátni, hogy

$$\Phi(\Psi(g)) = g \quad \text{és} \quad \Psi(\Phi(f)) = f$$

Rendre az η és β szabályok alapján:

$$\Phi(\Psi(g)) = \lambda(ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)) = g$$

és

$$\Psi(\Phi(f)) = ev \circ ((\lambda f) \amalg id_A) = f$$

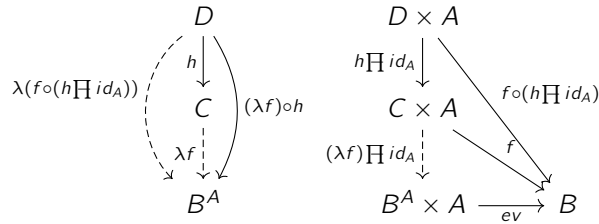
Lemma (Kongruencia).

$$\lambda(f \circ (h \amalg id_A)) = (\lambda f) \circ h$$

minden $h : \text{Hom}(D; C)$ -re.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy $(\lambda f) \circ h$ teljesíti az $\lambda(f \circ (h \amalg id_A))$ definiáló egyenlőségét, azaz

$$ev \circ (((\lambda f) \circ h) \amalg id_A) = f \circ (h \amalg id_A).$$



$$ev \circ (((\lambda f) \circ h) \amalg id_A) = ev \circ (((\lambda f) \circ h \circ pr_1) \times (id_A \circ pr_2)) =$$

Lemma (Természetes izomorfia 2). Ha \mathcal{C} kartéziusian zárt kategória, akkor az alábbi Set-izomorfizmus természetes \mathcal{C} -ben:

$$\Phi : \text{Hom}(C \times A; B) \rightarrow \text{Hom}(C; B^A); f \mapsto \lambda f$$

Bizonyítás. Rögzítsük A, B -t. A két funktor, ami között Φ vált két reprezentációja \mathcal{C} -nek:

$$F_{\times} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}, F_{\times}(C) = \text{Hom}(C \times A; B); F_{\times}(f) = f \circ _$$

$$F_{\uparrow} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}, F_{\uparrow}(C) = \text{Hom}(C; B^A); F_{\uparrow}(f) = f \circ _$$

Ezek valóban funktorok, mert $(F(f) \circ F(g))(h) = F(f)(F(g)(h)) = F(f)(g \circ h) = f \circ g \circ h = F(f \circ g)(h)$ és $F(id) = id \circ _ = _$. Ezek egyben izofunktorok, mert invertálhatók, ezért legitim reprezentációnak nevezni őket. F_{\times} és F_{\uparrow} inverze rendre:

$$G_{\times}(\text{Hom}(C \times A; B)) = C; G_{\times}(f') = f'(id), \quad G_{\uparrow}(\text{Hom}(C; B^A)) = C; G_{\uparrow}(f') = f'(id)$$