

## Szorzat

**Definíció.** Legyen  $\mathcal{C}$  kategória,  $A_1, A_2 : \mathcal{C}_o$ . Ekkor az  $A_1 \times A_2 : \mathcal{C}_o$  *szorzatobjektum* a  $\text{pr}_i : \text{Hom}(A_1 \times A_2; A_i)$  ( $i = 1; 2$ ) projekciókkal, ha minden  $C : \mathcal{C}_o$ -re és  $f_i : \text{Hom}(C; A_i)$ -re ( $i = 1; 2$ ) egyértelműen létezik az az  $f_1 \times f_2 : \text{Hom}(C; A_1 \times A_2)$  (*szorzatmorfizmus*), hogy az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{array}{ccccc} & & A_1 & \xleftarrow{\text{pr}_1} & A_1 \times A_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & A_2 \\ & & \swarrow f_1 & & \uparrow f_1 \times f_2 & & \searrow f_2 \\ & & C & & C & & \end{array}$$

A  $\mathcal{C}$  kategória *kartéziusi*, ha benne bármely két objektumnak van szorzata.

*Megjegyzés.* A morfizmusszorzás definiáló tulajdonságai tehát a

$$\text{pr}_i \circ x = f_i \quad (i = 1; 2)$$

egyenlőségek. Ha valami az  $x$ -be helyettesítve igazá teszi ezeket az egyenlőségeket, akkor az a definíció egyértelműségi kitétele miatt a szorzatmorfizmus. Ezt sokszor használjuk szorzattal való egyenlőség igazolásánál.

**Lemma** (Konverziós szabályok).

$$\begin{aligned} \beta_i^\times : \quad & \text{pr}_i \circ (f_1 \times f_2) = f_i \\ \eta^\times : \quad & (\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g \end{aligned} \quad (i = 1; 2)$$

ahol  $g : \text{Hom}(C; A_1 \times A_2)$  tetszőleges.

*Bizonyítás.* A  $\beta^\times$ -k a kommutálás következményei.  $\eta^\times$  pedig a szorzatmorfizmus egyértelműségéből következik. A definícióból ugyanis, tetszőleges  $g : \text{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ -re az  $f_i := \text{pr}_i \circ g$  választással triviálisan következik, hogy  $f_i = \text{pr}_i \circ g$ :

$$\begin{array}{ccccc} & & A_1 & \xleftarrow{\text{pr}_1} & A_1 \times A_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & A_2 \\ & & \swarrow \text{pr}_1 \circ g & & \uparrow g & & \searrow \text{pr}_2 \circ g \\ & & C & & C & & \end{array}$$

de ilyenből csak egy van, ami a  $(\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g)$  szorzatmorfizmus, így:

$$(\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g$$

*Megjegyzés.*  $\eta^\times$  valójában ekvivalens a szorzatmorfizmus egyértelműségével. Tegyük fel ugyanis, hogy a definícióban az egyértelműség *helyett* az  $(\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g$  egyenlőséget követeljük meg minden  $g : \text{Hom}(C; A_1 \times A_2)$ -re. Legyen  $g$  tehát olyan, hogy teljesíti a kommutálási feltételt:  $\text{pr}_i \circ g = f_i$ . Ekkor

$$f_1 \times f_2 = (\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g,$$

vagyis a szorzatmorfizmus az egyetlen olyan, ami teljesíti  $\beta^\times$  szabályokat.

**Lemma** (A morfizmusszorzás kongruenciája).

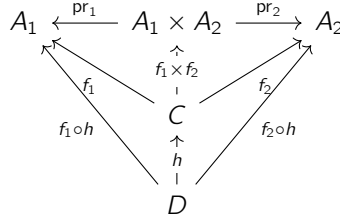
$$(f_1 \times f_2) \circ h = (f_1 \circ h) \times (f_2 \circ h)$$

ahol  $h : \text{Hom}(D; C)$  tetszőleges, a definíció jelöléseivel.

*Bizonyítás.* Azt kell belátni, hogy  $(f_1 \times f_2) \circ h$  teljesíti az  $(f_1 \circ h) \times (f_2 \circ h)$  morfizmusszorzat definiáló tulajdonságait, azaz a következőket:

$$\text{pr}_i \circ x = f_i \circ h \quad (i = 1; 2).$$

Nyilván



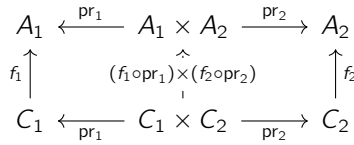
kommutál, tehát

$$\text{pr}_i \circ ((f_1 \times f_2) \circ h) = (\text{pr}_i \circ (f_1 \times f_2)) \circ h = f_i \circ h.$$

**Definíció** (Torii). Legyen  $\mathcal{C}$  kartéziusi kategória,  $A_1, A_2, C_1, C_2 : \mathcal{C}_o$ ,  $f_i : \text{Hom}(C_i; A_i)$  ( $i = 1; 2$ ). Ekkor  $f_1$  és  $f_2$  torii-val jelölt szorzata:

$$f_1 \boxtimes f_2 \stackrel{\text{def.}}{=} (f_1 \circ \text{pr}_1) \times (f_2 \circ \text{pr}_2).$$

*Megjegyzés.* Kommutatív diagramban ábrázolva a torii középen van:



Később látni fogjuk, hogy egy karteziánus  $\mathcal{C}$  kategória  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  bifunktoriális szorzatművelete maga a torii, amit már most is lehet látni a diagramon.

**Lemma** (Egyenlőségek torii-ra).

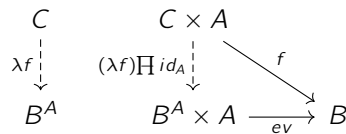
$$\beta_i^\boxtimes : \text{pr}_i \circ (f_1 \boxtimes f_2) = f_i \circ \text{pr}_i \quad (i = 1; 2)$$

$$(\eta^\boxtimes : (\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) = g)$$

$$\boxtimes \circ : (f_1 \boxtimes f_2) \circ h = (f_1 \circ \text{pr}_1 \circ h) \times (f_2 \circ \text{pr}_2 \circ h)$$

## Exponenciális

**Definíció.** Legyen  $\mathcal{C}$  kartéziusi kategória,  $A, B : \mathcal{C}_o$ . Ekkor a  $B^A : \mathcal{C}_o$  *exponenciális objektum* az  $\text{ev} : \text{Hom}(B^A \times A; B)$  evaluációval, ha minden  $C : \mathcal{C}_o$ -re és  $f : \text{Hom}(C \times A; B)$ -re egyértelműen létezik az a  $\lambda f : \text{Hom}(C; B^A)$  (*exponenciális adjungált*), hogy az alábbi diagram kommutál:



Ha a  $\mathcal{C}$  kartéziusi kategóriában bármely két objektumunk van exponenciálisa, akkor  $\mathcal{C}$ -t *kartéziusian zárt kategóriának* nevezzük.

*Megjegyzés.* Tehát a hatványmorfizmus vagy exponenciális adjungált definiáló egyenlete:

$$ev \circ (x \text{ } \text{H} \text{ } id_A) = f$$

Ha ez teljesül  $x$  helyére téve egy morfizmusra, akkor az az adjungált.

**Lemma** (Konverziós szabályok).

$$\begin{aligned} \beta^{\rightarrow} : \quad & ev \circ ((\lambda f) \text{ } \text{H} \text{ } id_A) = f \\ \eta^{\rightarrow} : \quad & \lambda(ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)) = g \end{aligned}$$

minden  $g : \text{Hom}(C; B^A)$ -ra.

*Bizonyítás.* Az első azonos a kommutatív tulajdonsággal. A másodikhoz azt kell megmutatni, hogy van olyan  $f$ , amire teljesül, hogy

$$ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A) = f$$

márpedig ez az  $f$  triviálisan az  $ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)$ . Így az egyértelműségből következik az  $\eta$  szabály.

*Megjegyzés.* Nyilván itt is igaz az, hogy az egyértelműségi kitétel ekvivalens az  $\eta$  szabállyal. Valóban! Tegyük fel, hogy teljesül  $ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A) = f$ . Ekkor

$$\lambda f = \lambda(ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)) = g.$$

Az egyik legfontosabb technika az exponenciálisra vonatkozóan a Currying–unCurrying.

**Lemma** (Természetes izomorfia 1). Ha  $\mathcal{C}$  kartéziusian zárt kategória, akkor az alábbi Set-izomorfizmus teljesül:

$$\text{Hom}(C \times A; B) \cong \text{Hom}(C; B^A)$$

*Bizonyítás.* A definiáló diagram

$$\begin{array}{ccc} C & & C \times A \\ \downarrow \lambda f & \searrow g & \downarrow g \text{ } \text{H} \text{ } id_A \\ B^A & & B^A \times A \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{ev} B \\ \nwarrow f \\ \xrightarrow{ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)} \end{array}$$

alapján, legyen:

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Hom}(C \times A; B) &\rightarrow \text{Hom}(C; B^A), & \Phi(f) &\stackrel{\text{def.}}{=} \lambda f \\ \Psi : \text{Hom}(C; B^A) &\rightarrow \text{Hom}(C \times A; B), & \Psi(g) &\stackrel{\text{def.}}{=} ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A). \end{aligned}$$

Set-ben az izomorfizmusok bijekció, ezért azt kell belátni, hogy

$$\Phi(\Psi(g)) = g \quad \text{és} \quad \Psi(\Phi(f)) = f$$

Rendre az  $\eta$  és  $\beta$  szabályok alapján:

$$\Phi(\Psi(g)) = \lambda(ev \circ (g \text{ } \text{H} \text{ } id_A)) = g$$

és

$$\Psi(\Phi(f)) = ev \circ ((\lambda f) \sqcup id_A) = f$$

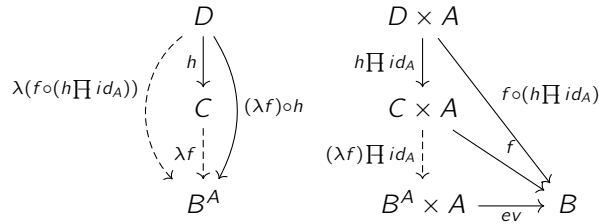
**Lemma** (Kongruencia).

$$\lambda(f \circ (h \sqcup id_A)) = (\lambda f) \circ h$$

minden  $h : \text{Hom}(D; C)$ -re.

*Bizonyítás.* Elég belátni, hogy  $(\lambda f) \circ h$  teljesíti az  $\lambda(f \circ (h \sqcup id_A))$  definiáló egyenlőségét, azaz

$$ev \circ (((\lambda f) \circ h) \sqcup id_A) = f \circ (h \sqcup id_A).$$



$$ev \circ (((\lambda f) \circ h) \sqcup id_A) = ev \circ (((\lambda f) \circ h \circ pr_1) \times (id_A \circ pr_2)) =$$

**Lemma** (Természetes izomorfia 2). Ha  $\mathcal{C}$  kartéziusian zárt kategória, akkor az alábbi Set-izomorfizmus természetes  $\mathcal{C}$ -ben:

$$\Phi : \text{Hom}(C \times A; B) \rightarrow \text{Hom}(C; B^A); f \mapsto \lambda f$$

*Bizonyítás.* Rögzítsük  $A, B$ -t. A két funktor, ami között  $\Phi$  vált két reprezentációja  $\mathcal{C}$ -nek:

$$F_{\times} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}, F_{\times}(C) = \text{Hom}(C \times A; B); F_{\times}(f) = f \circ \_$$

$$F_{\uparrow} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}, F_{\uparrow}(C) = \text{Hom}(C; B^A); F_{\uparrow}(f) = f \circ \_$$

Ezek valóban funktorok, mert  $(F(f) \circ F(g))(h) = F(f)(F(g)(h)) = F(f)(g \circ h) = f \circ g \circ h = F(f \circ g)(h)$  és  $F(id) = id \circ \_ = \_$ . Ezek egyben izofunktorok, mert invertálhatók, ezért legitim reprezentációnak nevezni őket.  $F_{\times}$  és  $F_{\uparrow}$  inverze rendre:

$$G_{\times}(\text{Hom}(C \times A; B)) = C; G_{\times}(f') = f'(id), \quad G_{\uparrow}(\text{Hom}(C; B^A)) = C; G_{\uparrow}(f') = f'(id)$$

## Yoneda-tételkör

**Motiváció** – Homset reprezentáció

$$\mathcal{C}_o \ni \quad A \cong B \quad \Leftrightarrow \quad \text{Hom}(\_, A) \cong \text{Hom}(\_, B) \quad \in \text{Set}$$

„Egy objektumot egyértelműen meghatároz a többi objektumhoz való viszonya”

Ezzel pl.  $A^1 \cong A$  igazolható így: minden  $X$ -re

$$\text{Hom}(X, A^1) \xrightarrow{\Psi_X} \text{Hom}(X \times 1, A) \xrightarrow{\text{Hom}(\varphi_X, A)} \text{Hom}(X, A)$$

ahol  $\Psi_X$  az uncurrying, és

$$X \times 1 \xrightarrow{\varphi_X} X \quad \Rightarrow \quad \text{Hom}(X \times 1, A) \xrightarrow{\text{Hom}(\varphi_X, A)} \text{Hom}(X, A)$$

$\text{Hom}(\varphi_X, A)$  a Yoneda-megfeleltetés.  $\text{Hom}(\varphi_X, A) \circ \Psi_X$  szintén izomorfizmus és természetes transzformáció, így a két Homset izomorf.

## Funktor

$$\begin{array}{ccc}
 \text{id} \curvearrowright A & \xrightarrow{g} & F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)} \curvearrowright F(A) \\
 \searrow f & \downarrow f & \searrow F(f) \\
 & f \circ g & F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 & g & \\
 \searrow f & \downarrow f & \swarrow F^{op}(g) \\
 & f \circ g & F^{op}(g) \circ F^{op}(f) = F^{op}(f \circ g)
 \end{array}$$

Az első a kovariáns funktor, a másik a kontravariáns. Példa funktorokra: a kategóriából az oppozit kategóriába menő  $(\_)^{op} : X \mapsto X, f \mapsto f^{op}$ ;  $\text{Hom}(\_, A)$ ;  $\text{Hom}(\_ \times A, B)$ . Ez a két utóbbi Set-be menő és kontravariáns, azaz "presheaf" ( $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ ).

## Yoneda-lemma

**Lemma** (Yoneda-lemma 1, Nat-os alak) Legyen  $\mathcal{C}$  egy kategória,  $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , és  $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  egy kontravariáns funktor. Ekkor az alábbi izomorfia fennáll:

$$\text{Nat}(\text{Hom}(\_, A), F) \cong F(A)$$

azaz van olyan  $\Phi : \text{Nat}(\text{Hom}(\_, A), F) \rightarrow F(A)$  és  $\Psi : F(A) \rightarrow \text{Nat}(\text{Hom}(\_, A), F)$ , amelyek egymás inverzei.

*Bizonyítás.*  $(\Phi)$  Legyen  $\eta \in \text{Nat}(\text{Hom}(\_, A), F)$  tetszőleges, kell ehhez egy alkalmas  $F(A)$ -beli elem. Tetszőleges  $X \in \mathcal{C}_0$ -ra  $\eta_X : \text{Hom}(X, A) \rightarrow F(X)$  morfizmus, ezért

$$\Phi(\eta) \stackrel{\text{def.}}{=} \eta_A(\text{id}_A) \in F(A).$$

$(\Psi)$  Legyen  $x \in F(A)$ . Kell egy alkalmas  $\Psi(x) \in \text{Nat}(\text{Hom}(\_, A), F)$  természetes transzformáció. Legyen  $X \in \mathcal{C}_0$  és  $f \in \text{Hom}(X, A)$  tetszőleges. Ekkor:

$$\Psi(x)_X(f) \stackrel{\text{def.}}{=} (F(f))(x) \in F(X)$$

amivel  $\Psi(x) : \text{Hom}(X, A) \rightarrow F(X)$  lesz.

Még azt kell igazolni, hogy  $\Psi(x)$  **természetes transzformáció**.

Legyen  $g : Y \rightarrow X$  morfizmus,

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & \text{Hom}(X, A) & \xrightarrow{\Psi(x)_X} & F(X) \\
 \uparrow g & & \downarrow \text{Hom}(g, A) & & \downarrow F(g) \\
 Y & & \text{Hom}(Y, A) & \xrightarrow{\Psi(x)_Y} & F(Y)
 \end{array}$$

Definíciója szerint  $\text{Hom}(g, A) : \text{Hom}(X, A) \rightarrow \text{Hom}(Y, A), f \mapsto f \circ g$ , így tetszőleges  $f \in \text{Hom}(X, A)$ -re:

$$\begin{aligned}
 (F(g) \circ \Psi(x)_X)(f) &= F(g)(F(f)(x)) = (F(g) \circ F(f))(x) = F(f \circ g)(x) = \\
 &= \Psi(x)_Y(f \circ g) = \Psi(x)_Y(\text{Hom}(g, A)(f)) = (\Psi(x)_Y \circ \text{Hom}(g, A))(f).
 \end{aligned}$$

Kell  $\Phi \circ \Psi = id_{F(A)}$ . Legyen  $x \in F(A)$ .

$$(\Phi \circ \Psi)(x) = \Phi(\Psi(x)) = \Psi(x)_A(id_A) = F(id_A)(x) = id_{F(A)}(x) = x$$

Kell  $\Psi \circ \Phi = id_{\text{Nat}(\text{Hom}(\_, A), F)}$ . Legyen  $\eta \in \text{Nat}(\text{Hom}(\_, A), F)$  természetes transzformáció,  $X \in \mathcal{C}_0$  és  $g \in \text{Hom}(X, A)$ .

$$(\Psi \circ \Phi)(\eta)(X)(g) = (\Psi(\Phi(\eta)))(X)(g) = (\Psi(\eta_A(id_A)))(X)(g) = F(g)(\eta_A(id_A)) =$$

$$\begin{array}{ccc} A & \text{Hom}(A, A) & \xrightarrow{\eta_A} F(A) \\ g \uparrow & \text{Hom}(g, A) \downarrow & \downarrow F(g) \\ X & \text{Hom}(X, A) & \xrightarrow{\eta_X} F(X) \end{array}$$

kommutativitása miatt

$$= (\eta_X(\text{Hom}(g, A)(id_A))) = (\eta_X(id_A \circ g)) = \eta(X)(g) = id_{\text{Nat}(\text{Hom}(\_, A), F)}(\eta)(X)(g)$$

**Lemma** (Yoneda-lemma 2, reprezentált funktor alak)  $\mathcal{C}$  kategória,  $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ . Ekkor az alábbi izomorfia fennáll:

$$\text{Nat}(\text{Hom}(\_, A), \text{Hom}(\_, B)) \cong \text{Hom}(A, B)$$

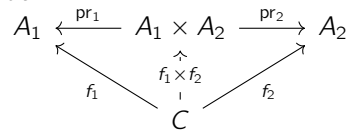
*Bizonyítás.*  $F(\_) := \text{Hom}(\_, B)$ .

**Lemma** (Objektumok izomorfijának jellemzése)  $\mathcal{C}$  kategória,  $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ . Ekkor az alábbi ekvivalencia fennáll:

$$\text{Hom}(\_, A) \cong \text{Hom}(\_, B) \Leftrightarrow A \cong B$$

## Összefoglaló

### Szorzat



$$\begin{aligned}
 f_i &= \text{pr}_i \circ (f_1 \times f_2) & (i = 1; 2) \\
 g &= (\text{pr}_1 \circ g) \times (\text{pr}_2 \circ g) & (\forall g : C \rightarrow A_1 \times A_2)
 \end{aligned}$$

### Terminális

$$A \xrightarrow{!_A} 1$$

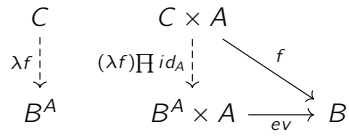
$$g = !_A \quad \forall g : A \rightarrow 1$$

### Iniciális

$$0 \xrightarrow{!_A} A$$

$$g = !_A \quad \forall g : 0 \rightarrow A$$

### Exponenciális



$$\begin{aligned}
 f &= ev \circ ((\lambda f) \boxtimes id_A) \\
 g &= \lambda(ev \circ (g \boxtimes id_A)) \quad (\forall g : C \rightarrow B^A)
 \end{aligned}$$