

UNIwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki UJ
Instytut Matematyki
Studia stacjonarne

Praca magisterska

Nr albumu: 1163329

Maciej Żurawski

Indeksy akceptowalności oraz ich
zastosowania w matematyce finansowej

Opiekun pracy magisterskiej:
dr Marcin Piłera

Kraków 2025

Spis treści

Wstęp	3
1 Pomiar użyteczności i ryzyka	4
1.1 Klasyczny pomiar użyteczności i równoważnik pewności	4
1.2 Miary ryzyka i ich reprezentacja dualna	6
2 Indeksy akceptowalności	11
2.1 Indeksy akceptowalności oraz ich własności	11
2.2 Związki pomiędzy miarami ryzyka i indeksami akceptowalności	15
2.3 Indeksy akceptowalności oparte na wklęsłych zniekształceniach	17
2.4 Indeksy akceptowalności oparte na użyteczności	19
3 Wybrane zastosowania indeksów akceptowalności do ewaluacji pozycji finansowej	23
3.1 Zastosowanie indeksów akceptowalności do wyceny stożkowej i arbitrażu	23
3.2 Związek indeksów akceptowalności z testowaniem wstecznym	28
3.3 Pomiar efektywności i awersji do ryzyka portfeli finansowych	32
4 Analiza empiryczna	42
4.1 Rozważane dane oraz informacje techniczne	42
4.2 Metodologia i cel badań	42
4.3 Wnioski empiryczne	51
Zakończenie	53
A Dowody twierdzeń i własności	54
Bibliografia	60

Wstęp

W zarządzaniu portfelem finansowym istotne jest nie tylko oszacowanie poziomu ryzyka danej pozycji, lecz także ocena jej *akceptowalności* w świetle przyjętych kryteriów normatywnych. Narzędziem odpowiadającym na tę potrzebę są *indeksy akceptowalności* — odwzorowania skonstruowane w sposób aksjomatyczny, zapewniające przejrzystą interpretację ekonomiczną i umożliwiające bezpośrednie porównywanie atrakcyjności różnych strategii inwestycyjnych. Co istotne, indeksy akceptowalności pozostają ściśle powiązane z miarami ryzyka, z których często są konstruowane lub z którymi współlistnieją w ramach jednolitej teorii.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie normatywnego ujęcia indeksów akceptowalności oraz ukazanie ich użyteczności w matematyce finansowej. Praca wypełnia lukę pomiędzy teorią ryzyka a potrzebami praktyki inwestycyjnej: porządkuje rozproszone w literaturze wyniki, przedstawia powstałe niedawno i ciągle nie w pełni zbadane indeksy akceptowalności oparte o użyteczność, a zarazem wykazuje, że narzędzia te mogą stać się integralną częścią procesu zarządzania kapitałem.

W pracy przeprowadzono analizę i konsolidację kluczowych opracowań dotyczących teoretycznych aspektów indeksów akceptowalności. Przedstawiono wyniki pracy Artzner et al. (1999), w której wprowadzono pojęcie *koherentnej miary ryzyka* oraz jej *reprezentacji dualnej*. Omówiono również rezultaty Föllmer and Schied (2002), odnoszące się do *wypukłych miar ryzyka*, stanowiące uogólnienie wcześniejszych koncepcji. Szczególną uwagę poświęcono pracy Cherny and Madan (2009), w której przedstawiono definicję *koherentnego indeksu akceptowalności*, jego reprezentację dualną oraz związki z koherentnymi miarami ryzyka. Kolejnym ważnym punktem odniesienia była publikacja Gianin and Sgarra (2013), w której wprowadzono pojęcie *quasi-wklęsłych indeksów akceptowalności*, nazywanych w tej pracy po prostu indeksami akceptowalności, wraz z ich reprezentacją dualną i powiązaniem z wypukłymi miarami ryzyka. Kluczową część pracy stanowi podejście Pitera and Rásonyi (2024), w którym zdefiniowano *indeksy akceptowalności oparte na użyteczności*.

Praca obejmuje również analizę i konsolidację opracowań dotyczących praktycznych aspektów indeksów akceptowalności — w Cherny and Madan (2010) przedstawiono wykorzystanie koherentnych indeksów akceptowalności do wyceny stożkowej oraz arbitrażu; w Moldenhauer and Pitera (2019) zbadano związek tych indeksów z testowaniem wstecznym; natomiast w Pitera and Rásonyi (2024) omówiono zagadnienia pomiaru efektywności i awersji do ryzyka portfeli finansowych.

Część empiryczna obejmuje analizę wykorzystania indeksów akceptowalności do pomiaru efektywności oraz awersji do ryzyka portfeli finansowych.

Usystematyzowane podejście umożliwiło przedstawienie jednolitej teorii normatywnej, a przeprowadzona weryfikacja empiryczna na danych rynkowych wykazała rzeczywistą przydatność indeksów akceptowalności opartych na użyteczności.

Rozdział 1

Pomiar użyteczności i ryzyka

Ocena użyteczności oraz ryzyka finansowego odgrywa kluczową rolę w zarządzaniu portfelami inwestycyjnymi, regulacjach nadzorczych oraz decyzjach strategicznych podejmowanych przez uczestników rynku. W tym rozdziale przedstawiamy formalne podstawy matematycznego ich pomiaru.

Przez całą pracę zakładać będziemy, że dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, na której zdefiniowane są wszystkie rozważane obiekty. Wszystkie równości i nierówności rozumiemy w sensie \mathbb{P} -prawie wszędzie. Zbiór istotnie ograniczonych zmiennych losowych przyjmujących wartości rzeczywiste oznaczamy przez $L^\infty := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zmienne te mogą być interpretowane jako przyszłe zyski lub straty pozycji finansowych, często oznaczane w finansach jako tzw. wektory P&L (ang. *Profits and Losses*) lub jako przepływy pieniężne inwestycji finansowych. Dodatkowo, przez $L^0 := L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oznaczamy zbiór wszystkich skończonych rzeczywistych zmiennych losowych, a przez $L^1 := L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — zbiór całkowalnych rzeczywistych zmiennych losowych. Dla uproszczenia, w tym i kolejnym rozdziale podajemy wszystkie definicje dla przestrzeni L^∞ mając na uwadze, że mogą one być rozszerzone na inne przestrzenie, np. L^1 . Ponadto przyjmujemy konwencję, że symbol (X_n) będzie oznaczał ciąg dyskretny $(X_n)_{n=1}^\infty$.

1.1 Klasyczny pomiar użyteczności i równoważnik pewności

Podejście do pomiaru użyteczności i ryzyka opartego na użyteczności ma długą historię w teorii decyzji oraz ekonomii matematycznej. Bernoulli (1738) zauważył, że ludzie podejmując decyzje w warunkach ryzyka nie kierują się wyłącznie oczekiwaną wartością majątku, lecz subiektywną oceną korzyści — użytecznością.

Fundamentem współczesnego formalizmu stała się aksjomatyczna teoria oczekiwanej użyteczności, sformułowana w pracy von Neumann and Morgenstern (1944). Autorzy ci zdefiniowali zbiór aksjomatów racjonalności, pod którymi można zagwarantować istnienie funkcji użyteczności $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dla której preferencje decydenta są reprezentowane przez oczekiwaną wartość $\mathbb{E}[U(X)]$.

Od tego czasu teoria oczekiwanej użyteczności stała się fundamentem nie tylko klasycznej teorii wyboru, ale również wielu zastosowań w matematyce finansowej. Funkcje użyteczności są powszechnie wykorzystywane nie tylko do modelowania preferencji inwestorów (von Neumann and Morgenstern, 1944), ale również do konstrukcji funkcji kosztu/zysku w zadaniach optymalizacji portfela (Merton, 1971), a także jako punkt wyjścia w teorii pomiaru ryzyka — poprzez pojęcie równoważnika pewności i jego odwrotności (Acemoglu and Scott, 1991).

Współcześnie, pomiar ryzyka z wykorzystaniem użyteczności stanowi jedno z głównych podejść do konstruowania akceptowalnych mierników ryzyka, szczególnie w kontekście *miar opartych na użyteczności* (ang. *utility-based risk measures*).

W tym podrozdziale przedstawiamy podstawowe własności związane z funkcją użyteczności, a także pojęcie równoważnika pewności, które umożliwia przekształcenie oceny losowego przepływu pieniężnego na wartość deterministyczną.

Definicja 1.1.1 (Funkcja użyteczności)

Niech $S \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Funkcję $U: S \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją użyteczności*, gdy jest ciągła, wklęsła oraz ściśle rosnąca.

Zauważmy, że założenia narzucone na funkcję użyteczności U gwarantują istnienie funkcji odwrotnej U^{-1} . Przedstawmy dwa przykłady funkcji użyteczności, które będą odkrywały ważną rolę w dalszej części pracy.

Przykład 1.1.2 (Eksponencjalna funkcja użyteczności)

Niech $\gamma > 0$. Funkcja $U_\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem:

$$U_\gamma(x) = \frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma x}),$$

jest funkcją użyteczności i nazywamy ją *eksponencjalną funkcją użyteczności*.

Przykład 1.1.3 (Potęgowa funkcja użyteczności)

Niech $p < 1$ oraz $p \neq 0$. Funkcja $U_p: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem:

$$U_p(x) = \frac{x^p}{p},$$

jest funkcją użyteczności i nazywamy ją *potęgową funkcją użyteczności*.

W oparciu o funkcję użyteczności możemy zdefiniować tzw. *równoważnik pewności* (ang. *certainty equivalent*), który reprezentuje deterministyczną wartość, której użyteczność jest taka sama jak oczekiwana użyteczność pozycji X .

Definicja 1.1.4 (Równoważnik pewności)

Niech $U: S \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją użyteczności oraz $X \in L^\infty$. *Równoważnikiem pewności* C_X^U nazywamy taką liczbę rzeczywistą, która spełnia równość:

$$\mathbb{E}[U(X)] = U(C_X^U).$$

Zauważmy, że mając zagwarantowane istnienie U^{-1} możemy wyrazić równoważnik pewności w postaci:

$$C_X^U = U^{-1}(\mathbb{E}[U(X)]).$$

Postać ta okaże się kluczowa później, gdy w oparciu o nią będziemy definiować odwzorowania, które będą mierzyć ryzyko.

1.2 Miary ryzyka i ich reprezentacja dualna

Do pomiaru ryzyka w finansach można również podejść w sposób normatywny. To alternatywne ujęcie zyskało popularność po pracy Artzner et al. (1999), w której zaproponowano formalną definicję *koherentnych miar ryzyka* (ang. *coherent risk measures*). Tego rodzaju podejście znalazło szerokie zastosowanie zarówno w teorii, jak i w praktyce — m.in. w regulacjach nadzorczych (BCBS, 2016).

Poniższy podrozdział rozpoczniemy od przedstawienia trzech fundamentalnych definicji. Pierwsza z nich dotyczy monetarnej miary ryzyka, czyli funkcji przypisującej wartość liczbową każdej pozycji finansowej, określając minimalną kwotę kapitału dodatkowego, który należy dodać do tej pozycji, aby uczynić ją akceptowalną dla regulatora lub inwestora. W analizie ryzyka miary te pełnią kluczową rolę w zarządzaniu kapitałem oraz w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych.

Definicja 1.2.1 (Monetarna miara ryzyka)

Odwzorowanie $\rho: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *monetarną miarą ryzyka*, jeśli dla dowolnych $X, Y \in L^\infty$ spełnia warunek:

1. **Przeciwna monotoniczność:** Jeżeli $X \leq Y$, to $\rho(X) \geq \rho(Y)$.
2. **Niezmienniczość na przesunięcia:** $\rho(X + c) = \rho(X) - c$, dla każdego $c \in \mathbb{R}$.

Aksjomaty definiujące monetarną miarę ryzyka mają naturalną interpretację ekonomiczną. Przeciwna monotoniczność oznacza, że portfel, który generuje mniejsze straty, powinien być oceniany jako mniej ryzykowny. Niezmienniczość na przesunięcia zapewnia, że ryzyko można obniżyć przez dodanie do portfela sumy wolnej od ryzyka.

Jeżeli od monetarnej miary ryzyka zażądamy dodatkowej własności wypukłości, to taką miarę nazywamy wypukłą miarą ryzyka.

Definicja 1.2.2 (Wypukła miara ryzyka)

Odwzorowanie $\rho: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą miarą ryzyka*, jeśli dla dowolnych $X, Y \in L^\infty$ spełnia następujące warunki:

1. **Przeciwna monotoniczność:** Jeżeli $X \leq Y$, to $\rho(X) \geq \rho(Y)$.
2. **Niezmienniczość na przesunięcia:** $\rho(X + c) = \rho(X) - c$ dla każdego $c \in \mathbb{R}$.
3. **Wypukłość:** Dla dowolnej $\lambda \in [0, 1]$ mamy:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$

Wypukłość odzwierciedla zasadę, że rozproszenie środków między różne aktywa nie zwiększy ryzyka pozycji inwestora.

Jeżeli jednak od monetarnej miary ryzyka, zażądamy dodatkowych własności subaddytywności oraz dodatniej jednorodności, to taką miarę nazywamy koherentną miarą ryzyka.

Definicja 1.2.3 (Koherentna miara ryzyka)

Odwzorowanie $\rho: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *koherentną miarą ryzyka*, jeżeli dla dowolnych $X, Y \in L^\infty$ spełnia:

1. **Przeciwna monotoniczność:** Jeżeli $X \leq Y$, to $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

2. **Niezmienniczość na przesunięcia:** $\rho(X + c) = \rho(X) - c$, dla każdego $c \in \mathbb{R}$.
3. **Subaddytywność:** $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
4. **Dodatnia jednorodność:** $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$, dla każdego $\lambda \geq 0$.

Subaddytywność jest wyrazem korzyści dywersyfikacji. Ryzyko połączonych portfeli nie powinno przekraczać sumy ich ryzyk. Dodatnia jednorodność zaś oznacza, że proporcjonalne skalowanie pozycji skutkuje proporcjonalnym skalowaniem ryzyka.

Warto zauważyć, że wypukłość jest warunkiem słabszym niż równoczesne spełnienie subaddytywności i dodatniej jednorodności. Stąd każda koherentna miara ryzyka jest również wypukłą miarą ryzyka, ale nie każda wypukła miara ryzyka jest koherentną miarą ryzyka. Przykład takiej miary zostanie przedstawiony w Przykładzie 1.2.10. Warte podkreślenia jest to, że koherentne miary ryzyka są "bardzo porządne" z punktu widzenia zarządzania ryzykiem — promują dywersyfikację i są jednorodne względem skali portfela.

Ważnym narzędziem w analizie miar ryzyka jest koncepcja *zbiorów akceptacji*. Zamiast przypisywać każdej pozycji liczbową wartość ryzyka, możemy określić zbiór wszystkich portfeli uznawanych za akceptowalne, czyli niewymagających dodatkowego kapitału zabezpieczającego.

Definicja 1.2.4 (Zbiory akceptacji)

Niech ρ będzie monetarną miarą ryzyka. *Zbiorem akceptacji* zdefiniowanym przez ρ nazywamy zbiór:

$$A_\rho := \{X \in L^\infty : \rho(X) \leq 0\}. \quad (1.1)$$

Jest to zbiór wszystkich pozycji finansowych uznawanych przez ρ za akceptowalne, tzn. niewymagające dodatkowego kapitału.

Ta alternatywna perspektywa pozwala na konstrukcję monetarnych miar ryzyka w sposób geometryczny i ułatwia ich badanie. W szczególności we Własności 1.2.5 pokazujemy, że wypukłość oraz koherencja miary ryzyka znajdują swoje odpowiedniki w geometrycznych własnościach zbioru akceptacji.

Własność 1.2.5

Niech $\rho: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ będzie monetarną miarą ryzyka i niech A_ρ będzie jej zbiorem akceptacji. Wówczas:

1. ρ jest wypukłą miarą ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy A_ρ jest wypukły,
2. ρ jest koherentną miarą ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy A_ρ jest wypukłym stożkiem.

Ponadto, dla ustalonego niepustego zbioru $A \subset L^\infty$ definiujemy funkcjonal:

$$\rho_A(X) := \inf \{m \in \mathbb{R} : m + X \in A\}.$$

Wówczas:

1. ρ_A jest wypukłą miarą ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy A jest wypukły,
2. ρ_A jest koherentną miarą ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy A jest wypukłym stożkiem.

Dowód Własności 1.2.5 znajduje się w Dodatku A.0.1.

Przedstawimy teraz prosty przykład, który pomoże zobrazować związek między monetarną miarą ryzyka, a jej zbiorem akceptacji.

Przykład 1.2.6 (Najgorszy rezultat)

Najgorszy rezultat pozycji finansowej $X \in L^\infty$ definiujemy jako:

$$\rho_w(X) := -\operatorname{ess\,inf}_\Omega(X). \quad (1.2)$$

Zbiór akceptacji związany z odwzorowaniem ρ_w to zbiór wszystkich nieujemnych funkcji z L^∞ :

$$\mathcal{A}_{\rho_w} = \{X \in L^\infty \mid X \geq 0\}, \quad (1.3)$$

który jest naturalnie stożkiem wypukłym. Zatem korzystając z Własności 1.2.5, odwzorowanie ρ_w jest koherentną miarą ryzyka.

Istnieje również ujęcie dualne, które pozwala na interpretację wypukłych oraz koherentnych miar ryzyka w kontekście tzw. *uogólnionych miar ryzyka scenariuszowego* (ang. *generalized scenario risk measures*). W szczególności koherentne miary ryzyka mogą być reprezentowane poprzez supremum funkcji oczekiwanej przy różnych modyfikacjach pierwotnej miary \mathbb{P} , a wypukłe miary ryzyka podobnie jak koherentne, lecz z dodaną pewną „karą” za odejście od wyjściowej miary probabilistycznej. Poniższe twierdzenie podaje ogólną postać takiej reprezentacji dualnej.

Twierdzenie 1.2.7 (Charakteryzacja wypukłych i koherentnych miar ryzyka)

Odwzorowanie $\rho: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające *własność Fatou*¹ jest wypukłą miarą ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór \mathcal{D} miar probabilistycznych, absolutnie ciągłych względem \mathbb{P} i funkcja $\pi: \mathcal{D} \rightarrow (-\infty, \infty]$, takie że:

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{D}} \{ \mathbb{E}^Q[-X] - \pi(Q) \}. \quad (1.4)$$

Ponadto, $\rho: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ jest koherentną miarą ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi(Q) \equiv 0$. Wówczas

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{D}} \mathbb{E}^Q[-X]. \quad (1.5)$$

Dowód Twierdzenia 1.2.7 można znaleźć w pracy Föllmer and Schied (2002, Theorem 6).

Warto podkreślić, że własność Fatou odwzorowania ρ jest potrzebna, jeżeli rozważamy przypadek, w którym Ω nie jest dyskretna, by zagwarantować domknięcie zbioru \mathcal{A}_ρ w topologii $\sigma(L^\infty, L^1)$. Szczegóły zagadnienia można znaleźć w Föllmer and Schied (2002, Chapter 2).

Następna własność pokazuje, że *funkcja kary* π z reprezentacji (1.4) daje się też wyrazić poprzez odniesienie do zbioru akceptacji.

¹*Własność Fatou* zapewnia dolną półciągłość funkcjonalu względem zbieżności prawie na pewno (lub w sensie L^∞), tj. jeżeli $X_n \xrightarrow{1} X$ i $\sup_n \|X_n\|_\infty < \infty$, to $\rho(X) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n)$.

Własność 1.2.8

Funkcja π z reprezentacji (1.4) może być wyrażona jako:

$$\pi(Q) = \sup_{X \in A_\rho} \mathbb{E}^Q[-X],$$

gdzie A_ρ to zbiór akceptacji wypukłej miary ryzyka ρ .

Dowód Własności 1.2.8 można znaleźć w pracy Föllmer and Schied (2002, Proposition 7).

Na koniec tego rozdziału podamy przykłady monetarnej, wypukłej oraz koherentnej miary ryzyka. Dla dwóch ostatnich przedstawimy również ich reprezentacje dualne.

Przykład 1.2.9 (Wartość zagrożona ryzykiem)

Definiujemy odwzorowanie VaR^α (ang. *Value at Risk*) poziomu $\alpha \in (0, 1)$ i $X \in L^\infty$ następująco:

$$\text{VaR}^\alpha(X) := \inf \{x \in \mathbb{R}: \mathbb{P}[-X > x] \leq \alpha\}.$$

Zatem $\text{VaR}^\alpha(X)$ jest najmniejszą kwotą dodatkowego kapitału x , która sprawia, że prawdopodobieństwo poniesienia straty przekraczającej x nie przekracza poziomu α . VaR^α możemy także zaprezentować w alternatywnej postaci:

$$\text{VaR}^\alpha(X) = F_{-X}^\leftarrow(1 - \alpha),$$

gdzie F_{-X}^\leftarrow jest uogólnioną przeciwdystrybuantą zmiennej losowej $-X$. Funkcja VaR^α spełnia warunki przeciwnej monotoniczności oraz niezmienniczości na przesunięcia, co sprawia, że VaR^α jest monetarną miarą ryzyka. Jednakże, VaR^α nie jest odwzorowaniem wypukłym, zatem nie jest wypukłą, a tym bardziej koherentną miarą ryzyka.

Przykład 1.2.10 (Entropijna miara ryzyka)

Klasycznym przykładem wypukłej, lecz niekoherentnej miary ryzyka jest tzw. *miara entropijna* (ang. *entropic risk measure*), zdefiniowana dla $\gamma > 0$ wzorem:

$$\rho_{\text{ent}}^\gamma(X) = \frac{1}{\gamma} \ln \left(\mathbb{E}[e^{-\gamma X}] \right).$$

Jest ona wypukła ze względu na ściśle wypukłą funkcję eksponencjalną i liniowy operator wartości oczekiwanej, lecz nie jest koherentna, gdyż nie spełnia własności dodatniej jednorodności.

Dla entropijnej miary ryzyka zachodzi następująca reprezentacja dualna:

$$\rho_{\text{ent}}^\gamma(X) = \sup_{Q \in \mathcal{D}} \left\{ \mathbb{E}^Q[-X] - \frac{1}{\gamma} H(Q \| \mathbb{P}) \right\},$$

gdzie:

$$H(Q \| \mathbb{P}) = \begin{cases} \mathbb{E}^Q \left[\ln \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \right], & Q \in \mathcal{D}, \\ \infty, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

jest tzw. *entropią* Q względem \mathbb{P} .

Dowód tych faktów można znaleźć w Föllmer and Schied (2002, Section 3.2).

W tym przypadku karę stanowi względna entropia $H(Q \| \mathbb{P})$, nazywana też dywergencją Kullbacka-Leiblera. Im bardziej Q różni się od \mathbb{P} , tym większą wartość osiąga entropia, co sprawia, że miary Q istotnie odbiegające od \mathbb{P} są mniej korzystne w procesie optymalizacji. Taka konstrukcja pozwala zatem na kontrolowanie, jak bardzo zakładamy możliwą zmianę „scenariuszy” względem miary bazowej.

Przykład 1.2.11 (Expected Shortfall)

Dla ustalonego poziomu ufności $\alpha \in (0, 1)$ i $X \in L^\infty$ definiujemy:

$$\text{ES}^\alpha(X) := \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}^u(X) du,$$

gdzie VaR^u to wartość zagrożona ryzykiem na poziomie u , tak jak w Przykładzie 1.2.9. Funkcja ES^α jest koherentną miarą ryzyka, a jej reprezentacja dualna ma postać:

$$\text{ES}^\alpha(X) = \sup_{Q \in \mathcal{D}} \mathbb{E}^Q[-X],$$

gdzie \mathcal{D} to zbiór wszystkich miar Q spełniających:

$$0 \leq \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\alpha},$$

gdzie $\frac{dQ}{d\mathbb{P}}$ to *pochodna Radona-Nikodyma*. Dowód tych faktów można znaleźć w McNeil et al. (2015, Theorem 8.14).

Rozdział 2

Indeksy akceptowalności

W tym rozdziale wprowadzimy pojęcie *indeksów akceptowalności* — narzędzi umożliwiających ocenę „atrakcyjności” pozycji finansowych z perspektywy spełniania kryteriów normatywnych. Stanowią one alternatywę wobec wcześniej wprowadzonych monetarnych miar ryzyka. Zamiast oceniać poziom ryzyka bezwzględnie, pozwalają one mierzyć „atrakcyjność” pozycji – czyli jak dobrze spełnia ona normatywne oczekiwania inwestora.

Uwagę poświęcimy również związkom między miarami ryzyka a indeksami akceptowalności, które pozwalają na ich spójne traktowanie w ramach jednolitej teorii. Pod koniec tego rozdziału skupimy się na pomiarze akceptowalności pozycji finansowej określanym na podstawie użyteczności inwestora.

2.1 Indeksy akceptowalności oraz ich własności

Pojęcie indeksu akceptowalności wprowadzone zostało w Cherny and Madan (2009) i rozszerzone w Rosazza Gianin and Sgarra (2013). W skrócie można powiedzieć, że indeks akceptowalności danej pozycji finansowej mierzy poziom „satysfakcji” lub „atrakcyjności” tej pozycji, co jest odzwierciedlone w normatywnych własnościach nałożonych na tego typu obiekt. Zaczniemy od formalnego zdefiniowania indeksów akceptowalności.

Definicja 2.1.1 (Indeks akceptowalności)

Odwzorowanie $\alpha: L^\infty \rightarrow [0, +\infty]$ nazywamy *indeksem akceptowalności*, jeżeli spełnia następujące warunki:

1. **Quasi-wklęsłość:** Dla dowolnych $X, Y \in L^\infty$ i $\lambda \in [0, 1]$ zachodzi:

$$\alpha(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \geq \min\{\alpha(X), \alpha(Y)\}.$$

2. **Monotoniczność:** Jeżeli $X \leq Y$, to $\alpha(X) \leq \alpha(Y)$.
3. **Nieskończona akceptowalność zera:** $\alpha(0) = +\infty$.
4. **Ciągłość z góry:** Jeżeli $(X_n) \subset L^\infty$ to ciąg zmiennych losowych takich, że:

$$X_n \searrow X \quad \text{p.n.,}$$

$$\text{to } \alpha(X_n) \rightarrow \alpha(X).$$

Aksjomaty definiujące indeks akceptowalności również mają naturalną interpretację ekonomiczną.

Quasi-wklęsłość oznacza, że inwestorzy preferują dywersyfikację. Jeżeli dwa portfele są wystarczająco dobre, ich mieszanka również powinna być dobra. Monotoniczność wyraża preferencję dla portfeli o większej wypłacie. Nieskończona akceptowalność zera oznacza, że dla inwestora zerowa pozycja jest nieskończenie akceptowalna. Ciągłość z góry gwarantuje stabilność indeksu w sytuacjach granicznych, przy zbieżności ciągu portfeli.

Przyjęta aksjomatyzacja może zostać zmieniona poprzez zastąpienie warunku ciągłości z góry przez własność Fatou o czym mówi poniższa własność.

Własność 2.1.2 (Równoważność ciągłości z góry i własności Fatou)

Jeżeli odwzorowanie $\alpha: L^\infty \rightarrow [0, +\infty]$ spełnia równocześnie własności quasi-wklęsłości oraz monotoniczności to ciągłość z góry jest równoważna temu, że jeśli $(X_n) \subset L^\infty$ to ciąg zmiennych losowych takich, że:

$$|X_n| \leq 1 \quad \text{ i } \quad \alpha(X_n) \geq x \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ oraz $X_n \xrightarrow{1} X$ dla pewnej $X \in L^\infty$, to wówczas $\alpha(X) \geq x$. Własność tę nazywamy *własnością Fatou*.

Dowód tej własności można odnaleźć w Frittelli and Maggis (2011, Proposition 2.5).

Możemy również zauważyć, że zakładając quasi-wklęsłość oraz nieskończoną akceptowalność zera uzyskujemy odpowiednie skalowanie indeksu akceptowalności, czego tematem jest poniższa własność.

Własność 2.1.3 (Skalowanie indeksu akceptowalności)

Niech $\alpha: L^\infty \rightarrow [0, +\infty]$ będzie indeksem akceptowalności. Wtedy:

1. Dla dowolnej $\lambda \in (0, 1)$ otrzymujemy:

$$\alpha(\lambda X) \geq \alpha(X).$$

2. Dla dowolnej $\lambda > 1$ otrzymujemy:

$$\alpha(\lambda X) \leq \alpha(X).$$

Oznacza to, że akceptowalność proporcjonalnie większego portfela nie jest bardziej akceptowalna niż wyjściowy portfel.

Dowód Własności 2.1.3 jest bardzo prosty i opiera się na zastosowaniu własności quasi-wklęsłości oraz akceptowalności zera, dlatego go pomijamy.

Od odwzorowania α możemy jednak zażądać, aby było niezmiennicze na skalowanie, tzn. by osiągnięte były równości we Własności 2.1.3. Oznacza to, że pozycja jest akceptowalna na równym poziomie, niezależnie od ilości środków w nią zainwestowanych. Narzucenie takiego warunku prowadzi nas do definicji *koherentnego indeksu akceptowalności*.

Definicja 2.1.4 (Koherentny indeks akceptowalności)

Odwzorowanie $\alpha: L^\infty \rightarrow [0, +\infty]$ istotnie przyjmujące wartość $+\infty$ nazywamy *koherentnym indeksem akceptowalności*, jeżeli spełnia następujące warunki:

1. **Quasi-wklęsłość:** Dla dowolnych $X, Y \in L^\infty$ i $\lambda \in [0, 1]$ zachodzi:

$$\alpha(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \geq \min\{\alpha(X), \alpha(Y)\}.$$

2. **Monotoniczność:** Jeżeli $X \leq Y$, to $\alpha(X) \leq \alpha(Y)$.

3. **Niezmienniczość na skalowanie:** Dla dowolnych $X \in L^\infty$ oraz $\lambda > 0$ zachodzi:

$$\alpha(\lambda X) = \alpha(X).$$

4. **Ciągłość z góry:** Jeżeli $(X_n) \subset L^\infty$ to ciąg zmiennych losowych takich, że:

$$X_n \searrow X \quad \text{p.n.}$$

$$\text{to } \alpha(X_n) \rightarrow \alpha(X)$$

W szczególności z quasi-wklęsłości, monotoniczności oraz z niezmienniczości na skalowanie wynika $\alpha(0) = +\infty$, zatem każdy koherentny indeks akceptowalności jest indeksem akceptowalności.

Definicje 2.1.1 oraz 2.1.4 można przeformułować na język zbiorów akceptacji, analogicznie do podejścia stosowanego w teorii miar ryzyka, o czym mówi Własność 2.1.5.

Własność 2.1.5

Mając dany indeks akceptowalności $\alpha: L^\infty \rightarrow [0, +\infty]$ oraz $x \geq 0$ dla zbioru:

$$A_x := \{X \in L^\infty: \alpha(X) \geq x\}.$$

gdy $0 \leq x \leq y$ otrzymujemy $A_x \supseteq A_y$, przy czym $A_0 = L^\infty$. Ponadto:

1. α jest quasi-wklęsłe to zbiór A_x wtedy i tylko wtedy, gdy wypukły;
2. α jest monotoniczne wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A_x jest monotoniczny;
3. α jest niezmiennicze na skalowanie wtedy i tylko wtedy, gdy A_x jest stożkiem;
4. α spełnia własność Fatou wtedy i tylko wtedy, gdy A_x jest domknięty w topologii $\sigma(L^\infty, L^1)$;
5. α spełnia nieskończoną akceptowalność zera wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \mathbb{R}_+$ A_x zawiera 0.

Dowód Własności 2.1.5 jest stosunkowo prosty i go pomijamy — zob. Cherny and Madan (2009, Theorem 1).

Warunki normatywne narzucone indeksom akceptowalności nie wyczerpują wszystkich oczekiwanych praktycznych własności, które odwzorowanie mające na celu ocenę akceptowalności pozycji finansowej powinno spełniać. Poniżej prezentujemy propozycję pozostałych własności. Mogą one służyć zarówno jako własności normatywne dla zawężonej klasy indeksów akceptowalności, jak i jako dodatkowe testy badające sens ekonomiczny zastosowania rozważanego indeksu akceptowalności.

Mówimy, że $\alpha: L^\infty \rightarrow [0, +\infty]$ jest:

1. **Niezmiennicze względem rozkładu:** Jeśli $X \stackrel{d}{=} Y$, to $\alpha(X) = \alpha(Y)$.

Własność ta zakłada, że jeżeli dwa przepływy pieniężne mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa, to powinny być oceniane identycznie pod względem akceptowalności.

2. **Zgodne z arbitrażem:** $\alpha(X) = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \geq 0$.

Zgodność z arbitrażem zapewnia, że pozycje dające niemal pewny zysk są uznawane za w pełni akceptowalne, co formalnie wyraża się przypisaniem im nieskończonej wartości indeksu akceptowalności.

3. **Zgodne względem straty:** Jeżeli $X < 0$, to $\alpha(X) = 0$.

Zgodność względem straty zapewnia, że indeks akceptowalności przypisuje wartość zero pozycjom które na pewno przyniosą stratę, co gwarantuje zgodność z podstawową oceną rentowności inwestycji.

4. **Zgodne względem wartości oczekiwanej:** Jeżeli $\mathbb{E}[X] < 0$, to $\alpha(X) = 0$. Jeśli $\mathbb{E}[X] > 0$, to $\alpha(X) > 0$.

Zgodność względem wartości oczekiwanej zapewnia, że indeks akceptowalności przypisuje zerową wartość pozycjom o ujemnej wartości oczekiwanej oraz dodatnią wartość tym, których oczekiwana stopa zwrotu jest dodatnia.

Zauważmy, że zgodność względem wartości oczekiwanej jest własnością mocniejszą, niż zgodność względem straty.

5. **Zgodne z dominacją stochastyczną drugiego rzędu:** Jeśli $X \preceq_2 Y$, to $\alpha(X) \leq \alpha(Y)$.

Własność ta zakłada, że jeśli pewna transakcja jest preferowana względem innej przez dowolnego uczestnika rynku, to powinna być oceniona jako bardziej akceptowalna.

W dalszej części przedstawimy dwa odwzorowania stosowane w praktyce do oceny akceptowalności pozycji. Pierwsze nie spełnia jednocześnie wszystkich warunków definicyjnych, podczas gdy drugie odwzorowanie spełnia wszystkie wymagane własności koherentnego indeksu akceptowalności.

Przykład 2.1.6 (Współczynnik Sharpe'a)

Współczynnik Sharpe'a (ang. *Sharpe Ratio*) dla $X \in L^\infty$ definiujemy jako:

$$SR(X) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{Var}(X)}}, & \text{jeśli } \mathbb{E}[X] \geq 0 \text{ oraz } \text{Var}(X) > 0, \\ +\infty, & \text{jeśli } \mathbb{E}[X] \geq 0 \text{ oraz } \text{Var}(X) = 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Wartość ta odzwierciedla pragnienie inwestora osiągnięcia wyższej wartości oczekiwanej wypłaty oraz potrzebę ograniczenia ryzyka, tutaj mierzonego za pomocą wariancji.

Współczynnik Sharpe'a spełnia własności quasi-wklęsłości, niezmienniczości na podskalowanie oraz Fatou, jednakże nie jest monotoniczny, zatem nie jest indeksem akceptowalności. Aby to zaobserwować, wystarczy rozważyć $X = 1$ oraz $Y \sim U([1, 2])$. Wtedy pomimo nierówności $X \leq Y$ zachodzi:

$$SR(X) \geq SR(Y).$$

Przykład 2.1.7 (Współczynnik GLR)

Współczynnik GLR (ang. *Gain-Loss Ratio*) dla $X \in L^\infty$ definiujemy jako:

$$GLR(X) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X^-]}, & \text{jeśli } \mathbb{E}[X] \geq 0 \text{ oraz } \mathbb{E}[X^-] > 0, \\ \infty, & \text{jeśli } \mathbb{E}[X] \geq 0 \text{ oraz } \mathbb{E}[X^-] = 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

gdzie $X^- := \max\{0, -X\}$.

Odwzorowanie GLR przedstawia zatem stosunek oczekiwanego przepływu do oczekiwanej straty, co może być także interpretowane jako średnia wypłata pozycji w przeliczeniu na jednostkę oczekiwanej straty, którą ona może przynieść.

GLR jest koherentnym indeksem akceptowalności. Dowód tego faktu znajduje się w Dodatku A.0.2. Pomimo tego, GLR ma też jedną ważną wadę z punktu widzenia praktycznego. Przy jego użyciu bardzo duże straty są ograniczane do pewnego poziomu, zamiast być „wylobryzmione” do nieskończoności, co byłoby bardziej realistyczne z ekonomicznego punktu widzenia. Rezultat ten można zauważyć, badając tzw. *miarę ekstremalną*, co ujęte jest w Cherny and Madan (2009, Chapter 3.2).

Warto podkreślić, że w praktyce używany jest także inny wariant tego współczynnika, czyli:

$$\widetilde{GLR} = \frac{\mathbb{E}[X^+]}{\mathbb{E}[X^-]}.$$

Ta wersja odwzorowania nie jest indeksem akceptowalności, ponieważ nie jest quasi-wypukłą.

Po omówieniu aksjomatyki oraz przykładów indeksów akceptowalności przejdziemy do analizy ich powiązań z miarami ryzyka. W szczególności interesuje nas, w jaki sposób można skonstruować indeks akceptowalności na podstawie odpowiednio dobranej rodziny miar ryzyka — wypukłych lub koherentnych.

2.2 Związki pomiędzy miarami ryzyka i indeksami akceptowalności

Celem tego podrozdziału jest przedstawienie podstawowych twierdzeń określających powiązanie między indeksami akceptowalności a rodziną wypukłych oraz koherentnych miar ryzyka.

Najpierw, w Twierdzeniu 2.2.1, charakteryzujemy wypukłe miary ryzyka z punktu widzenia indeksów akceptowalności, a następnie, w Twierdzeniu 2.2.2, pokazujemy, jak analogiczna konstrukcja działa w przypadku koherentnych miar ryzyka. Zarówno (2.1) w jednym, jak i w drugim twierdzeniu ujmują ten sam mechanizm: wyszukiwanie największego poziomu x , dla którego odpowiednia koherentna lub wypukła miara ryzyka ρ_x ocenia pozycję X jako „bezpieczną”, tzn. $\rho_x(X) \leq 0$.

W obu twierdzeniach przyjmujemy konwencję, że $\inf \emptyset = \infty$ oraz $\sup \emptyset = 0$.

Twierdzenie 2.2.1 (Charakteryzacja indeksów akceptowalności)

Odwzorowanie $\alpha: L^\infty \rightarrow [0, +\infty]$ spełniające warunek:

$$\alpha(c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}_-,$$

jest indeksem akceptowalności wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $X \in L^\infty$ istnieje rodzina $(\rho_x)_{x \in \mathbb{R}_+}$ wypukłych miar ryzyka dodatkowo spełniająca warunek:

$$\rho_x(c) = -c \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

która jest *rosnąca* ze względu na parametr x , tzn. $x \mapsto \rho_x(X)$ jest niemalejąca, taka że zachodzi:

$$\alpha(X) = \sup \{x \in \mathbb{R}_+ : \rho_x(X) \leq 0\}. \quad (2.1)$$

Dowód Twierdzenia 2.2.1 można znaleźć w Rosazza Gianin and Sgarra (2013, Proposition 3).

Twierdzenie 2.2.2 (Charakteryzacja koherentnych indeksów akceptowalności)

Odwzorowanie $\alpha: L^\infty \rightarrow [0, +\infty]$ jest koherentnym indeksem akceptowalności wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $X \in L^\infty$ istnieje rodzina $(\rho_x)_{x \in \mathbb{R}_+}$ koherentnych miar ryzyka, która jest *rosnąca* ze względu na parametr x , tzn. $x \mapsto \rho_x(X)$ jest niemalejąca i zachodzi:

$$\alpha(X) = \sup \{x \in \mathbb{R}_+ : \rho_x(X) \leq 0\}. \quad (2.2)$$

Dowód Twierdzenia 2.2.2 można znaleźć w pracy Cherny and Madan (2009, Theorem 1).

Przedstawimy teraz dwa przykłady ilustrujące relacje pomiędzy indeksami akceptowalności a rodzinami koherentnych miar ryzyka. W pierwszym z nich pokażemy, jak mając rosnącą rodzinę koherentnych miar ryzyka, można skonstruować odpowiadający jej koherentny indeks akceptowalności. W drugim przykładzie przeprowadzimy operację odwrotną — rozpoczniemy od koherentnego indeksu akceptowalności, a następnie wyprowadzimy z niego rosnącą rodzinę koherentnych miar ryzyka.

Przykład 2.2.3 (Indeks Akceptowalności na podstawie ES)

Przypomnijmy, że Expected Shortfall jest koherentną miarą ryzyka — zob. Przykład 1.2.11. A zatem dla każdego $X \in L^\infty$ rozważmy rosnącą rodzinę koherentnych miar ryzyka $(ES^{\frac{1}{1+x}})_{x \in \mathbb{R}_+}$ za pomocą której możemy zbudować *koherentny indeks akceptowalności AIT* (ang. *Acceptability Index Tail*) dany przez:

$$AIT(X) = \sup \{x \in \mathbb{R}_+ : ES^{\frac{1}{1+x}}(X) \leq 0\} = \sup \{x \in \mathbb{R}_+ : \int_0^{\frac{1}{1+x}} \text{VaR}^u(X) du \leq 0\}.$$

Zarazem, postać ta wskazuje, że $AIT(X)$ dostarcza informacji, jaki jest najmniejszy zakres, po którym uśredniony VaR pozostaje niedodatni. Zauważmy, że AIT mierząc akceptowalność pozycji X bierze pod uwagę tylko jej lewy ogon rozkładu.

Przykład 2.2.4 (Dualna reprezentacja GLR)

Przypomnijmy, że GLR jest koherentnym indeksem akceptowalności — zob. Przykład 2.1.7. Aby przedstawić jedną z odpowiadających mu rosnących rodzin koherentnych miar ryzyka, potrzebujemy pojęcia *ekspantyla* (ang. *expectile*), czyli takiej liczby $e_q(X)$ dla ustalonej zmiennej losowej $X \in L^\infty$ oraz parametru $q \in (0, 1)$, która spełnia równość:

$$q\mathbb{E}[(X - e_q(X))^+] = (1 - q)\mathbb{E}[(X - e_q(X))^-].$$

Za jej pomocą definiujemy *ekspektylowy VaR* (ang. *expectile-VaR*) jako:

$$\text{EVaR} := -e_q(X), \quad q \leq \frac{1}{2}.$$

Wtedy:

$$GLR(X) = \sup\{x \in \mathbb{R}_+ : \text{EVaR}_{\frac{1}{2+x}}(X) \leq 0\}.$$

Dowód tego faktu można odnaleźć w Kováčová et al. (2022, Section 2.3).

Alternatywnie, możemy postać dualną przedstawić jako:

$$\rho_x^{GLR}(X) = \inf_{Q \in \mathcal{D}_x} \mathbb{E}^Q[-X], \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

gdzie

$$\mathcal{D}_x = \{c(1+Y) : c \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq Y \leq x, \quad \mathbb{E}[c(1+Y)] = 1\}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Rodzina ta dla każdego $X \in L^\infty$ spełnia równość:

$$GLR(X) = \sup\{x \in \mathbb{R}_+ : \rho_x^{GLR}(X) \leq 0\}.$$

Dowód tego faktu można odnaleźć w Cherny and Madan (2009, Proposition 2).

2.3 Indeksy akceptowalności oparte na wklęsłych zniekształceniach

Alternatywnym podejściem do budowy indeksów akceptowalności jest zastosowanie zniekształconych wartości oczekiwanych opartych na transformacjach dystrybucyjności pozycji finansowej. Takie ujęcie umożliwia modelowanie pesymistycznego postrzegania ryzyka i naturalnie prowadzi do indeksów czułych na ogony rozkładu — szczególnie przydatnych w kontekście stresowych scenariuszy rynkowych.

W pracy Cherny and Madan (2009) autorzy zaproponowali konstrukcję koherentnych indeksów akceptowalności za pomocą tzw. *parametrycznej rodziny wklęsłych zniekształceń* (ang. *concave distortions*). Na początku przedstawimy formalną definicję *rodziny wklęsłych zniekształceń*, która służyć nam będzie do zdefiniowania rozważanego indeksu akceptowalności.

Definicja 2.3.1 (Rodzina wklęsłych zniekształceń)

Rodzinę funkcji $(\Psi^\gamma)_{\gamma \geq 0} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ nazywamy *rodziną wklęsłych zniekształceń*, jeżeli dla każdego $\gamma \geq 0$ spełnia ona warunki:

1. $\Psi^\gamma(0) = 0$ i $\Psi^\gamma(1) = 1$,
2. Ψ^γ jest funkcją niemalejącą,
3. Ψ^γ jest wklęsła,

a ponadto, funkcja $\gamma \mapsto \Psi^\gamma(\cdot)$ jest rosnąca.

Mając definicję rodziny wklęsłych zniekształceń, możemy za jej pomocą zdefiniować *indeksy akceptowalności oparte na wklęsłych zniekształceniach*.

Definicja 2.3.2 (Indeks akceptowalności oparty na wklęsłych zniekształceniach)

Niech $X \in L^\infty$ będzie zmienną losową o dystrybucji F_X oraz niech $(\Psi^\gamma)_{\gamma \geq 0}$ będzie rodziną wklęsłych zniekształceń. Odwzorowanie $\alpha^\Psi : L^\infty \rightarrow [0, +\infty]$ zadane jako:

$$\alpha^\Psi(X) = \sup \left\{ \gamma \geq 0 : \int_{-\infty}^{\infty} y d\Psi^\gamma(F_X(y)) \geq 0 \right\}, \quad (2.3)$$

nazywamy *indeksem akceptowalności opartym na wklęsłych zniekształceniach*.

Wartość $\alpha(X)$ w tym podejściu odpowiada największemu poziomowi zniekształcenia rozkładu, przy którym oczekiwana wartość pozycji X nadal pozostaje nieujemna. Im bardziej pesymistyczne przekształcenie, tzn. większy parametr γ , tym trudniej uzyskać pozytywny wynik — co dobrze odzwierciedla odporność danej pozycji na stres rynkowy.

Naturalnie nasuwa się pytanie, czy indeks akceptowalności oparty na wklęsłych zniekształceniach spełnia definicję indeksu akceptowalności. Odpowiedzi na to pytanie udziela Własność 2.3.3.

Własność 2.3.3

Odwzorowanie α^Ψ zdefiniowane jak w Definicji 2.3.2 jest koherentnym indeksem akceptowalności.

Dowód Własności 2.3.3 opiera się na pokazaniu, że dla $X \in L^\infty$ rodzina odwzorowań $(\rho_x)_{x \in \mathbb{R}_+}$ zadana wzorem:

$$\rho_x^\Psi(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} y d\Psi^x(F_X(y)), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

jest rosnącą ze względu na parametr $x \in \mathbb{R}_+$ rodziną koherentnych miar ryzyka, a następnie skorzystania z Twierdzenia 2.2.2. Fakt, że $\rho_x^\Psi(X)$ jest rosnącą ze względu na parametr x wynika bezpośrednio z tego, że funkcja $\gamma \mapsto \Psi^\gamma(\cdot)$ jest rosnącą. Koherencja za to jest łatwo widoczna, gdy zastosujemy podstawienie $y = F_X(\alpha)$ otrzymując:

$$\rho_x(X) = - \int_0^1 F_X^{-1}(y) d\Psi^x(\alpha).$$

Jedynym trudnym warunkiem do sprawdzenia jest subaddytywność, lecz można zastosować własność przedstawioną m. in. w Sereda et al. (2010, Section 25.4) mówiącą, że zniekształcona miara ryzyka jest subaddytywna wtedy i tylko wtedy, gdy zniekształcenie jest wklęsłe.

Zauważmy, że wartość:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x d\Psi^\gamma(F_X(x)), \quad (2.4)$$

jest równa wartości oczekiwanej zmiennej losowej X pod nową miarą prawdopodobieństwa $Q^\gamma(X)$. Intuicyjnie można myśleć o parametrze γ jako o poziomie stresu nałożonego na przepływ pieniężny X . Jeśli mimo takiego stresu uśredniona zniekształcona wartość oczekiwana nadal pozostaje dodatnia, to uznajemy X za akceptowalny przy tym poziomie stresu.

Wyrażenie (2.4) jest łatwe do obliczenia numerycznie, gdy znamy dystrybuantę $F_X(x)$. W szczególności, jeśli dysponujemy próbką x_1, x_2, \dots, x_N , to można wykorzystać dystrybuantę empiryczną, co prowadzi do postaci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x d\Psi^\gamma(F_X(x)) = \sum_{n=1}^N x_{(n)} \left(\Psi^\gamma\left(\frac{n}{N}\right) - \Psi^\gamma\left(\frac{n-1}{N}\right) \right), \quad (2.5)$$

gdzie $x_{(n)}$ oznacza n -tą statystykę.

W kolejnym podrozdziale skoncentrujemy się na przykładach rosnących rodzin wypukłych miar ryzyka, z których można zbudować odpowiadające im już niekoherentne indeksy akceptowalności.

2.4 Indeksy akceptowalności oparte na użyteczności

W tej części podobnie jak w przypadku indeksów opartych na wklęsłych zniekształceniach, rozważamy alternatywne podejście, w którym poziom akceptowalności pozycji finansowej określany jest na podstawie rodziny miar ryzyka, tym razem jednak zbudowanej w oparciu o funkcję użyteczności inwestora. Takie ujęcie pozwala w sposób naturalny uwzględnić subiektywne preferencje decydenta, w szczególności jego awersję do ryzyka. Dzięki wykorzystaniu funkcji użyteczności możliwe jest skonstruowanie indeksów, które nie tylko spełniają pożądane aksjomaty normatywne, ale także mają bezpośrednią interpretację ekonomiczną. Podrozdział ten opiera się na wynikach przedstawionych w pracy Pitera and Rásonyi (2024).

Przyjmujemy, że dana jest funkcja użyteczności $U \in C^2(\mathbb{R})$, ściśle wklęsła, ściśle rosnąca i ograniczona z góry. Dla wygody przyjmujemy oznaczenie $U(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} U(x)$. Definiujemy skalowaną rodzinę funkcji użyteczności $(U_\gamma)_{\gamma > 0}$ przez $U_\gamma(x) := U(\gamma x)$. Każda U_γ jest wklęsła i ściśle rosnąca. Wprowadzamy następnie rodzinę odwzorowań $(\mu_\gamma)_{\gamma > 0}$, gdzie:

$$\mu_\gamma(X) := -U_\gamma^{-1}(\mathbb{E}[U_\gamma(X)]) = -\frac{1}{\gamma}U^{-1}(\mathbb{E}[U(\gamma X)]). \quad (2.6)$$

Naszym celem będzie użycie rodziny $(\mu_\gamma)_{\gamma > 0}$ i zbudowanie w jej oparciu indeksu akceptowalności, korzystając z dualnej charakteryzacji, jak przedstawiono to w Podrozdziale 2.2. Aby to zrobić, chcemy, aby odwzorowanie $\gamma \mapsto \mu_\gamma(X)$ było niemalejące, co formalizuje Definicja 2.4.1.

Definicja 2.4.1 (Regularność skali awersji)

Funkcja U jest *regularna względem skali awersji*, jeśli dla każdego $X \in L^\infty$ i $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2$ zachodzi:

$$\mu_{\gamma_1}(X) \leq \mu_{\gamma_2}(X).$$

Regularność skali awersji łączy się z miarą *awersji Arrowa–Pratta*, zdefiniowaną w typowy sposób:

$$A_\gamma(x) := -\frac{U''_\gamma(x)}{U'_\gamma(x)} = -\gamma \frac{U''(\gamma x)}{U'(\gamma x)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Zachowanie niemalejące funkcji $\gamma \mapsto A_\gamma(x)$ okazuje się równoważne regularności z Definicji 2.4.1.

Własność 2.4.2

Funkcja użyteczności U jest regularną względem skali awersji wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie:

$$\gamma \mapsto A_\gamma(x),$$

jest funkcją niemalejącą dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Dowód Własności 2.4.2 znajduje się w Dodatku A.0.3.

Warto także przyjrzeć się rozkładowi Taylora do drugiego rzędu funkcji μ_γ wokół $\gamma = 0$, co prowadzi do przybliżenia:

$$\mu_\gamma(X) \approx -\mathbb{E}[X] + A_\gamma(\mathbb{E}[X])\text{Var}[X].$$

W tym kontekście $\gamma > 0$ można traktować jako parametr określający kompromis między nagrodą, mierzoną przez wartość oczekiwaną, a ryzykiem, mierzonym przez

wariancję, przy ocenie wydajności pozycji. Tu oczekiwaliśmy, by funkcja $\gamma \rightarrow A_\gamma(\cdot)$ była niemalejąca.

Pokażemy teraz, że rodzina odwzorowań $(\mu_\gamma)_{\gamma>0}$ spełnia wybrane właściwości normatywne.

Własność 2.4.3

Niech U będzie funkcją użyteczności regularną względem skali awersji. Wówczas rodzina $(\mu_\gamma)_{\gamma>0}$ zdefiniowana przez (2.6) spełnia następujące własności dla dowolnych $\gamma > 0$ oraz $X, Y \in L^\infty$:

1. **Quasi-wypukłość:** $\mu_\gamma(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \max\{\mu_\gamma(X), \mu_\gamma(Y)\}$.
2. **Monotoniczność:** Jeśli $X \geq Y$, to $\mu_\gamma(X) \leq \mu_\gamma(Y)$.
3. **Niezmienniczość względem rozkładu:** Jeśli $X \stackrel{d}{=} Y$, to $\mu_\gamma(X) = \mu_\gamma(Y)$.
4. **Normalizacja:** $\mu_\gamma(c) = -c$ dla każdej stałej c .
5. **Monotoniczność względem parametru:** Jeśli $\gamma_1 \leq \gamma_2$, to $\mu_{\gamma_1}(X) \leq \mu_{\gamma_2}(X)$.
6. **Ciągłość względem γ :** Funkcja $\gamma \mapsto \mu_\gamma(X)$ jest ciągła.
7. **Granica lewej strony:** $\mu_\gamma(X) \rightarrow -\mathbb{E}[X]$ przy $\gamma \rightarrow 0$.
8. **Granica prawej strony:** Jeśli $\frac{U(\gamma x_1) - U(\infty)}{U(\gamma x_2) - U(\infty)} \rightarrow 0$ przy $\gamma \rightarrow \infty$ dla dowolnych $x_1 > x_2$, to $\mu_\gamma(X) \rightarrow -\text{essinf} X$ przy $\gamma \rightarrow \infty$.

Dowód można znaleźć w Pitera and Rásonyi (2024, Proposition 2.3). Kluczowe kroki w powyższym rozumowaniu opierają się na zastosowaniu monotoniczności i ściśle rosnącej własności funkcji użyteczności U_γ , włącznie z jej odwrotnością, wklęsłości U_γ (w tym tzw. *nierówności Jensena*) oraz regularności względem skali awersji, która wprost zapewnia monotoniczność funkcjonału μ_γ względem parametru γ . Techniki te pozwalają w sposób standardowy wykazać właściwości normatywne, takie jak quasi-wypukłość czy ciągłość w γ oraz graniczne zachowania $\mu_\gamma(X)$ przy $\gamma \rightarrow 0$ i $\gamma \rightarrow \infty$.

Własności 1–5 obowiązują również dla szerszych klas zmiennych losowych L^0 oraz L^1 , a także w przypadku, gdy U jest tylko słabo ograniczona od góry przy dołożeniu dodatkowych założeń. Szczegóły dotyczące tego zagadnienia można znaleźć w pracy Pitera and Rásonyi (2024, Remark 2.4).

W dalszej części wprowadzamy pojęcie *indeksu akceptowalności opartego na użyteczności* (ang. *Utility-based acceptability index (UAI)*), uzyskiwanego z rodziny $(\mu_\gamma)_{\gamma>0}$. Jak potem zobaczymy, przy założeniu regularności funkcji użyteczności, otrzymane odwzorowanie spełnia aksjomaty indeksu akceptowalności.

Definicja 2.4.4 (Indeks akceptowalności oparty na użyteczności)

Niech U będzie funkcją użyteczności regularną względem skali awersji. Indeks akceptowalności $\alpha: L^\infty \rightarrow [0, +\infty]$ oparty na użyteczności U określamy wzorem:

$$\alpha(X) := \sup\{\gamma > 0: \mu_\gamma(X) \leq 0\}, \quad X \in L^\infty, \quad (2.8)$$

gdzie μ_γ jest zadana wzorem (2.6). Jeżeli zbiór jest pusty, to przyjmujemy konwencję $\sup \emptyset = 0$.

Poniższa Własność 2.4.5 pokazuje, że tak zdefiniowane odwzorowanie spełnia szereg własności, a w szczególności aksjomaty indeksu akceptowalności.

Własność 2.4.5 (Własności UAI)

Niech U będzie funkcją użyteczności regularną względem skali awersji. Wówczas odwzorowanie α , zdefiniowane wzorem (2.8), spełnia następujące własności dla dowolnych $X, Y \in L^\infty$:

1. **Quasi-wklęsłość:** $\alpha(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \geq \min\{\alpha(X), \alpha(Y)\}$ dla $\lambda \in [0, 1]$.
2. **Monotoniczność:** Jeśli $X \leq Y$, to $\alpha(X) \leq \alpha(Y)$.
3. **Nieskończona akceptowalność zera:** $\alpha(0) = +\infty$.
4. **Własność Fatou:** Jeżeli $X_n \xrightarrow{1} X$ i $\alpha(X_n) \geq x$ dla każdego n , to $\alpha(X) \geq x$.
5. **Niezmienniczość względem rozkładu:** Jeżeli $X \stackrel{d}{=} Y$, to $\alpha(X) = \alpha(Y)$.
6. **Zgodność z arbitrazem:** $\alpha(X) = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \geq 0$.
7. **Spójność względem straty:** Jeżeli $X < 0$, to $\alpha(X) = 0$.
8. **Spójność względem wartości oczekiwanej:** Jeżeli $\mathbb{E}[X] < 0$, to $\alpha(X) = 0$.
Jeżeli $\mathbb{E}[X] > 0$, to $\alpha(X) > 0$.
9. **Spójność z dominacją stochastyczną drugiego rzędu:** Jeżeli $X \preceq_2 Y$, to $\alpha(X) \leq \alpha(Y)$.
10. **Dodatnia odwrotna jednorodność:** Dla $\lambda > 0$ mamy $\alpha(\lambda X) = \lambda^{-1}\alpha(X)$.

Zatem α spełniające własności quasi-wklęsłości, monotoniczności, nieskończonej akceptacji zera oraz własności Fatou rzeczywiście jest indeksem akceptowalności.

Dowód Własności 2.4.5 można znaleźć w Pitera and Rásonyi (2024, Proposition 3.2).

Dla podpunktów 1-3, 5-7 oraz 10 z powyższych własności nie jest konieczne ograniczenie się do przestrzeni L^∞ ; mogą one być formułowane także na klasach L^0 czy L^1 . Szczegóły dotyczące tego zagadnienia można znaleźć w Pitera and Rásonyi (2024, Remark 3.3). Warto także zwrócić uwagę na własność dodatniej odwrotnej jednorodności, która wyróżnia tę rodzinę indeksów akceptowalności.

Na zakończenie tego podrozdziału przedstawimy przykłady analitycznych wartości indeksu akceptowalności opartych o konkretną użyteczność, tu eksponencjalną, dla zmiennych losowych o rozkładzie normalnym.

Przykład 2.4.6 (Indeks akceptowalności oparty na eksponencjalnej użyteczności)

Niech $U(x) = 1 - e^{-x}$. Jest to funkcja użyteczności, wklęsła, rosnąca i ograniczona z góry. Jej miara awersji Arrowa–Pratta jest stała i równa 1, co na mocy Własności 2.4.2 implikuje regularność względem skali awersji.

Dla dowolnego $X \in L^\infty$ otrzymujemy:

$$\mu_\gamma(X) = \frac{1}{\gamma} \ln(\mathbb{E}[e^{-\gamma X}]).$$

Czyli otrzymaliśmy miarę entropijną, rozważaną w Przykładzie 1.2.10.

Jeżeli założymy $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dla $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $\sigma > 0$ to otrzymujemy:

$$\mu_\gamma(X) = \frac{1}{\gamma} \ln \left(e^{\frac{1}{2}\gamma^2\sigma^2 - \gamma\mu} \right) = \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 - \mu.$$

Zbudowany na jej podstawie indeks akceptowalności dla $\mu \geq 0$ jest postaci

$$\alpha(X) = \sup\{\gamma > 0: \mu_\gamma(X) \leq 0\} = \sup\{\gamma > 0: \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 \leq \mu\} = \frac{2\mu}{\sigma^2}.$$

Jeżeli $\mu < 0$ to:

$$\alpha(X) = 0.$$

Rozdział 3

Wybrane zastosowania indeksów akceptowalności do ewaluacji pozycji finansowej

Po przedstawieniu normatywnej teorii indeksów akceptowalności, w tym rozdziale skupiamy się na wybranych zastosowaniach tych narzędzi w kontekście oceny pozycji finansowych. Przykłady te ukazują, jak teoretyczne konstrukcje mogą zostać wykorzystane do modelowania sytuacji rynkowych, takich jak arbitraż, wycena instrumentów pochodnych, testowanie wsteczne czy ocena efektywności portfela. Podrozdziały tego rozdziału odpowiadają kolejno wymienionym zastosowaniom. Rozdział ten bazuje w dużej mierze na pracach Cherny and Madan (2010), Pitera and Schmidt (2018), Moldenhauer and Pitera (2019) oraz Pitera and Rásonyi (2024).

3.1 Zastosowanie indeksów akceptowalności do wyceny stożkowej i arbitrażu

Celem tej części jest ukazanie, w jaki sposób indeksy akceptowalności umożliwiają ujęcie klasycznych zagadnień teorii wyceny, takich jak arbitraż i prawo jednej ceny, w nowym, bardziej ogólnym podejściu nazywanym *teorią finansów stożkowych*.

W *klasycznej teorii finansów* rynki postrzega się jako *kontrahenta* (ang. *counterparty*), który przyjmuje dowolne ilości aktywów finansowych po jednolitej cenie. Oznacza to istnienie tylko jednej ceny, bez względu na to, czy transakcja polega na kupnie, czy sprzedaży. Kluczowym założeniem jest wówczas *prawo jednej ceny*, a wszelkie przepływy pieniężne mogą być wymieniane z rynkiem według stałego kursu kupna i sprzedaży.

W podejściu *finansów stożkowych* (ang. *conic finance*) rezygnuje się jednak z powyższej, zbyt uproszczonej jednorodności cen kupna i sprzedaży, zamiast tego opierając się na następujących założeniach:

1. Istnieje *stożek rynkowy* (ang. *marketed cone*) — zbiór przepływów pieniężnych przyjmowanych przez rynek bez dodatkowego kosztu, domknięty ze względu na dodawanie i skalowanie, a przy tym zawierający wszystkie przepływy nieujemne.
2. Pojawiają się dwie różne ceny: *bid*, czyli cena kupna z punktu widzenia rynku, kiedy inwestor sprzedaje instrument rynkowi oraz *ask*, czyli cena sprzedaży z punktu widzenia rynku, kiedy inwestor kupuje instrument od rynku.

3. Rzeczywiste rynki mogą kształtować te ceny asymetrycznie. W typowej sytuacji ask jest wyższa od bid, co przekłada się na niezerowe *widelki bid-ask* (ang. *bid-ask spread*).

W tym ujęciu otrzymuje się formuły wyznaczające ceny bid i ask w zależności od przyjętej struktury stożka rynkowego, na przykład poprzez wykorzystanie rodziny wklęsłych zniekształceń — zob. Podrozdział 2.3. Prowadzi to do wyrażeń analitycznych pozwalających precyzyjnie wyznaczać ceny bid i ask dla standardowych instrumentów, takich jak opcje kupna i sprzedaży, a także dla bardziej złożonych produktów, np. strukturyzowanych.

Warto wspomnieć, że w klasycznym ujęciu wyceny, jedna cena często jest związana z istnieniem jedynej *miary martyngałowej*, podczas gdy istnienie cen bid i ask związane jest z istnieniem wielu miar, z których bierzemy supremum i minimum, co w pewnym sensie odpowiada reprezentacji dualnej koherentnych miar ryzyka i powiązanych z nimi koherentnych indeksów akceptowalności.

Celem tego podrozdziału opartego o pracę Cherny and Madan (2010) będzie przedstawienie zastosowania koherentnych indeksów akceptowalności w teorii finansów stożkowych. Na początku pokażemy związek koherentnych indeksów akceptowalności z *arbitrażem* oraz *widełkami bid-ask*, a w kolejnej części pokażemy, jak za pomocą koherentnych indeksów akceptowalności zbudowanych za pomocą rodziny wklęsłych zniekształceń możemy wyznaczyć ceny bid i ask dla standardowych instrumentów, takich jak europejskie opcje kupna i sprzedaży.

3.1.1 Związek pomiędzy indeksami akceptowalności a arbitrażem i widełkami bid-ask

Klasyczny wymóg braku arbitrażu stanowi fundamentalną zasadę wyceny — gwarantuje istnienie spójnego systemu cen w modelu. Relacja tej zasady z koherentnymi indeksami akceptowalności przejawia się następująco — jeśli w modelu istnieje arbitraż, to każdy koherentny indeks akceptowalności przypisze takiej strategii wartość $+\infty$. Aby to pokazać, przedstawmy formalną definicję wystąpienia arbitrażu.

Definicja 3.1.1 (Arbitraż w modelu dyskretnym)

Strategia generująca wypłatę $X \in L^\infty$ jest *arbitrażem*, jeśli $X \geq 0$ oraz $\mathbb{P}[X > 0] > 0$.

Definicja ta pozwala formalnie uchwycić pojęcie arbitrażu, czyli sytuacji gdy występuje brak ryzyka straty i dodatnia szansa zysku. Teraz pokażemy, w jaki sposób wpływa ona na wartości przypisywane przez koherentne indeksy akceptowalności.

Własność 3.1.2 (Arbitraż a akceptowalność)

Jeżeli strategia generująca wypłatę $X \in L^\infty$ jest arbitrażem, to dla dowolnego koherentnego indeksu akceptowalności $\alpha: L^\infty \rightarrow [0, \infty]$ zachodzi równość $\alpha(X) = +\infty$.

Dowód. Zauważmy, że dla każdego koherentnego indeksu akceptowalności $\alpha: L^\infty \rightarrow [0, \infty]$ zachodzi równość $\alpha(0) = +\infty$, zatem w przypadku arbitrażu warunek $X \geq 0$ implikuje $\alpha(X) \geq \alpha(0) = +\infty$. \square

Możemy również pokazać to samo, nie odwołując się bezpośrednio do aksjomatów koherentnego indeksu akceptowalności. Otóż w przypadku wystąpienia arbitrażu, skoro $X \geq 0$ oraz $\mathbb{P}[X > 0] > 0$, to dla dowolnej miary Q równoważnej \mathbb{P} otrzymujemy

$E^Q[X] \geq 0$. Zatem, zgodnie z reprezentacją dualną koherentnych miar ryzyka (zob. Twierdzenie 1.2.7) oraz reprezentacją dualną koherentnych indeksów akceptowalności (zob. Twierdzenie 2.2.1), oznacza to, że dla koherentnego indeksu akceptowalności zachodzi $\alpha(X) = +\infty$.

Wynik ten pokazuje, że pozycje arbitrażowe zawsze otrzymują najwyższą możliwą wartość indeksu — są „skrajnie akceptowalne”, co potwierdza intuicję inwestora gotowego przyjąć pozycję o zerowym ryzyku i dodatnim zysku.

Warto podkreślić, że implikacja w drugą stronę nie musi zachodzić dla koherentnego indeksu akceptowalności, tak jak zostało to przedstawione w Przykładzie 3.1.3.

Przykład 3.1.3 (Binarna akceptacja strat)

Odwzorowanie $\alpha: L^\infty \rightarrow [0, +\infty]$ określone wzorem:

$$\alpha(X) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } X < 0, \\ +\infty, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

spełnia wszystkie aksjomaty z Definicji 2.1.1, zatem jest koherentnym indeksem akceptowalności. Przyjmuje wartość $+\infty$ nie tylko dla $X \geq 0$.

W klasycznej teorii arbitrażu (bez kosztów transakcyjnych) obowiązuje prawo jednej ceny: w danych warunkach rynkowych każdy instrument finansowy ma jedną obiektywną cenę. W praktyce jednak na wielu rynkach występują widełki bid-ask. Odzwierciedla to koszty transakcyjne, płynnościowe oraz niekompletność rynku – strona sprzedająca żąda wyższej ceny, tutaj ceny ask, a strona kupująca oferuje niższą cenę, tutaj cenę bid.

Teoria stożkowej wyceny rozwinięta w Cherny and Madan (2010) tłumaczy prawo dwóch cen za pomocą koherentnych indeksów akceptowalności. Podstawową ideą jest narzucenie warunku, aby transakcja była akceptowalna dla każdej ze stron. Oznacza to, że cena transakcyjna powinna być taka, by zarówno portfel sprzedającego, jak i kupującego pozostał akceptowalny na pewnym minimalnym poziomie po dokonaniu transakcji.

W tym podejściu cena ask to minimalna kwota, za jaką inwestor zgodzi się sprzedać instrument o wypłacie X za cenę p . Warunek akceptowalności transakcji oznacza $\alpha(p - X) \geq c$. Podobnie cena bid to maksymalna kwota p jaką inwestor jest skłonny zapłacić za nabycie instrumentu X . Warunek akceptowalności oznacza $\alpha(X - p) \geq c$. Możemy te pojęcia sformalizować w Definicji 3.1.4.

Definicja 3.1.4 (Ceny ask i bid w teorii stożkowej wyceny)

Przyjmijmy, że α jest ustalonym indeksem akceptowalności, a $c > 0$ wyznacza ustalony minimalny wymagany poziom akceptowalności. Niech $X \in L^\infty$ będzie zmienną losową opisującą przyszły przepływ pieniężny w czasie T . Wówczas definiujemy ceny ask a_c oraz bid b_c wypłaty X jako:

$$a_c(X) := \inf\{p \in \mathbb{R}: \alpha(p - X) \geq c\},$$

$$b_c(X) := \sup\{p \in \mathbb{R}: \alpha(X - p) \geq c\}.$$

Z powyższych definicji wynika natychmiast nierówność $b_c(X) \leq a_c(X)$. Szczególny przypadek, tzn. $b_c(X) < a_c(X)$, tworzy widełki bid-ask zgodne z obserwacją rynkową.

Jeśli jednak X jest w pełni doskonale zabezpieczalny, tak jak jest to w modelu kompletnym bez kosztów, to ryzyko można wyeliminować i wówczas widełki cenowe zamykają się do jednej ceny, co oznacza, że odzyskujemy prawo jednej ceny jako przypadek graniczny.

Warto podkreślić, że parametr c można traktować jako zadany poziom bezpieczeństwa, który jest wymagany przez inwestora bądź regulatora. Wyższa wartość c oznacza silniejsze kryterium akceptowalności.

Wykorzystując reprezentację koherentnego indeksu akceptowalności przez rodziny miar \mathcal{D}_c (zob. Twierdzenia 1.2.7 oraz 2.2.2), można wyrazić ceny bid-ask w postaci ekstremalnych wartości oczekiwanej wypłaty X .

Własność 3.1.5 (Ceny bid i ask jako ekstremalne wartości oczekiwane)

Niech \mathcal{D}_c będzie zbiorem miar probabilistycznych odpowiadających poziomowi akceptowalności $c > 0$. Wtedy dla $X \in L^\infty$:

$$\alpha(X) \geq c \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}^Q[X] \geq 0 \quad \text{dla każdego } Q \in \mathcal{D}_c.$$

Wówczas cena ask i cena bid pozycji X mogą być wyrażone jako odpowiednio:

$$a_c(X) = \sup_{Q \in \mathcal{D}_c} \mathbb{E}^Q[X], \quad b_c(X) = \inf_{Q \in \mathcal{D}_c} \mathbb{E}^Q[X].$$

Dowód jest natychmiastowy, gdy skorzystamy z Twierdzeń 1.2.7 oraz 2.2.2.

Widzimy więc, że $a_c(X)$ to najgorszy dla sprzedającego oczekiwany scenariusz wartości X — sprzedawca musi zażądać co najmniej tyle, ile X jest warte w najbardziej niekorzystnym scenariuszu ze zbioru \mathcal{D}_c . Analogicznie $b_c(X)$ to najgorszy dla kupującego oczekiwany scenariusz — nabywca zapłaci najwyżej tyle, ile X jest warte w najbardziej pesymistycznym z jego perspektywy scenariuszu. Zbiór \mathcal{D}_c można tu interpretować jako dopuszczalne miary wyceny zgodne z ograniczeniem ryzyka. Jeśli zbiór ten zawiera tylko jedną miarę Q , którą jest np. jedyna miara martyngałowa w rynku kompletnym, to obie ceny zlewają się w $\mathbb{E}^Q[X]$. W przypadku rynków niekompletnych lub uwzględniających koszty, zbiór \mathcal{D}_c jest wieloelementowy, a powyższe supremum i infimum dają przedział cen.

3.1.2 Wyznaczanie cen ask i bid opcji europejskich przy użyciu koherentnych indeksów akceptowalności opartych na wklęsłych zniekształceniach

Wycena instrumentów pochodnych, takich jak opcje europejskie, tradycyjnie opiera się na modelach typu Black-Scholes-Merton, zakładających pełną replikowalność pozycji. Podejście oparte na indeksach akceptowalności umożliwia alternatywną konstrukcję przedziałów cenowych, które uwzględniają subiektywne preferencje ryzyka i niepewność co do scenariuszy rynkowych.

Ustalmy teraz dowolną rodzinę wklęsłych zniekształceń $(\Psi^\gamma)_{\gamma \geq 0}$, taką jak w Podrozdziale 2.3. Niech α^Ψ będzie skonstruowanym na jej podstawie koherentnym indeksem akceptowalności — zob. Definicja 2.3.2 oraz Własność 2.3.3. Za jego pomocą możemy wyznaczyć cenę ask dla przepływu pieniężnego $X \in L^\infty$ i ustalonego poziomu akceptowalności $c > 0$ zgodnie z Definicją 3.1.4 jako:

$$a_c(X) := \inf \{p \in \mathbb{R} : \alpha^\Psi(p - X) \geq c\}.$$

Zauważmy jednak, że mamy poniższą równowagę:

$$\alpha^\Psi(p - X) \geq c \iff \int_{-\infty}^{\infty} x d\Psi^c(F_{p-X}(x)) \geq 0.$$

Przekształcając prawą stronę, otrzymujemy:

$$\alpha^\Psi(p - X) \geq c \iff p + \int_{-\infty}^{\infty} x d\Psi^c(F_{-X}(x)) \geq 0.$$

Stąd:

$$a_c(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} x d\Psi^c(F_{-X}(x)). \quad (3.1)$$

Otrzymujemy w ten sposób interpretację, że cena ask jest po prostu ujemną zniekształconą wartością oczekiwaną przepływu pieniężnego $-X$.

Analogicznie można zaprezentować cenę bid dla $X \in L^\infty$ jako:

$$b_c(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x d\Psi^c(F_X(x)). \quad (3.2)$$

Zatem cena bid jest w tym ujęciu zniekształconą wartością oczekiwaną samej zmiennej X .

Jesteśmy teraz gotowi na przejścia do głównego rezultatu tego podrozdziału, czyli przedstawienia zamkniętych formuł na ceny ask i bid dla opcji europejskich. Niech S_T będzie zmienną losową opisującą cenę instrumentu bazowego w chwili T . Rozważmy opcję europejską kupna o wypłacie:

$$C = (S - K)^+ = \max\{S - K, 0\},$$

oraz opcję europejską sprzedaży o wypłacie:

$$P = (K - S)^+ = \max\{K - S, 0\}.$$

Niech F oznacza dystrybucję zmiennej S_T .

Twierdzenie 3.1.6 (Ceny ask i bid dla opcji europejskiej kupna i sprzedaży)

Dla zdefiniowanej wyżej opcji kupna C i opcji sprzedaży P otrzymujemy następujące zamknięte wzory cen ask i bid:

$$a_c(C) = \int_K^\infty \Psi^c(1 - F(x)) dx, \quad (3.3)$$

$$b_c(C) = \int_K^\infty [1 - \Psi^c(F(x))] dx, \quad (3.4)$$

$$a_c(P) = \int_0^K \Psi^c(F(x)) dx, \quad (3.5)$$

$$b_c(P) = \int_0^K [1 - \Psi^c(1 - F(x))] dx. \quad (3.6)$$

Dowód Twierdzenia 3.1.6 można znaleźć w Dodatku A.0.4.

Wzory te dostarczają analitycznych wyrażeń na ceny bid i ask dla europejskich opcji call i put, w zależności od zniekształcenia Ψ^c oraz dystrybucji aktywa bazowego. Ich interpretacja wskazuje, że ceny te odzwierciedlają ocenę wartości opcji w warunkach niepewności modelowej przy uwzględnieniu pesymistycznych scenariuszy ocenianych przez Ψ^c .

Mając narzędzia do wyceny arbitrażu i instrumentów pochodnych, przechodzimy teraz do zagadnienia testowania modeli ryzyka.

3.2 Związek indeksów akceptowalności z testowaniem wstecznym

Testowanie wsteczne (ang. *backtesting*) jest jednym z kluczowych narzędzi ilościowych wykorzystywanych przez regulatorów do oceny konserwatywności metodologii pomiaru ryzyka. Polega na porównaniu historycznych strat portfela z oszacowanymi rezerwami kapitałowymi, aby zweryfikować dokładność i adekwatność stosowanych modeli ryzyka.

Metodologia VaR jest w ogólności łatwo poddawana testowaniu wstecznemu. Wiąże się to z faktem, że VaR jest *elicytowalny* (ang. *elicitable*), co oznacza, że istnieje *funkcja scoringowa* (ang. *scoring function*), względem której VaR jest jedynym minimizatorem wartości oczekiwanej – zob. Gneiting (2011, Section 3.3). Dzięki temu może być łatwo testowana wstecznie przy użyciu naturalnej statystyki testowej, która polega na zliczaniu liczby przekroczeń poziomu VaR w rzeczywistych danych.

Z drugiej strony, miara ES nie jest elicytowalna, co prowadzi do trudności w jej testowaniu wstecznym. Mówiąc ogólnie, nie istnieje ściśle zgodna funkcja scoringowa $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, taka że dla dowolnej całkownej zmiennej losowej Y zachodzi:

$$ES_\alpha(Y) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[S(x, Y)].$$

Zob. Pitera and Schmidt (2018) dla szczegółowej analizy.

Celem tego podrozdziału, opracowanego na podstawie Moldenhauer and Pitera (2019), jest przedstawienie, w jaki sposób można wykorzystać reprezentację dualną indeksów akceptowalności do zdefiniowania odpowiedniej statystyki testowej umożliwiającej testowanie wsteczne ES.

Przez $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy liczbę dni użytych w testowaniu wstecznym, czyli długość okna testowania wstecznego. Dla $i = 1, \dots, n$ oznaczamy przez X_i zrealizowany wynik pozycji X w dniu i oraz przez $\hat{\rho}_i$ odpowiadający mu kapitałowy bufor rezerwowy mający na celu ochronę przed fluktuacjami przyszłej wartości portfela finansowego, obliczony przy użyciu wybranej metodologii w modelu wewnętrznym (ang. *internal model approach*)¹, na podstawie danych dostępnych do dnia $i - 1$. Definiujemy wektor wartości zabezpieczonej $y = (y_1, \dots, y_n)$ gdzie:

$$y_i := X_i + \hat{\rho}_i \tag{3.7}$$

jest realizacją wartości zabezpieczonej w dniu i .

3.2.1 Testowanie wsteczne VaR

Standardowym narzędziem do testowania wstecznego VaR jest *test częstości przekroczeń* (ang. *breach test*) — zob. Alexander (2009).

¹Model wewnętrzny (ang. *Internal Model Approach, IMA*) to zazwyczaj zaawansowany model matematyczny stosowany przez instytucje finansowe do wyznaczania wymogów kapitałowych na ryzyko rynkowe, kredytowe lub operacyjne. W przeciwieństwie do standardowych metod regulacyjnych, które opierają się na narzuconych przez nadzorców uproszczonych formułach, model wewnętrzny jest dostosowywany do specyfiki danej instytucji, jej portfela oraz strategii zarządzania ryzykiem.

Mając wektor wartości zabezpieczonej y zdefiniowany jak we wzorze (3.7), definiujemy statystykę testową zliczającą częstość przekroczeń T_n przez:

$$T_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{y_i < 0\}}. \quad (3.8)$$

Wiążemy tu poprawną specyfikację bazowego modelu VaR z jego własnością polegającą na generowaniu poprawnej liczby przekroczeń ustalonej wartości 0, o rozkładzie Bernoulliego. Jest to znacznie mniej restrykcyjne niż narzucenie założenia i.i.d. na wektor X używany w historycznym estymatorze VaR. Szczegóły tego zagadnienia znajdują się w Moldenhauer and Pitera (2019, Section 2).

Poziom kwantyla	Wartość kwantyla
95%	5
99,99%	10

Tabela 1: Wartości kwantyli dla rozkładu Bernoulliego z $n = 250$, $p = 0,01$.

Warto zwrócić uwagę na praktyczne zastosowanie tej statystyki testowej. Aby ocenić skuteczność wewnętrznego modelu wykorzystywanego do obliczeń kapitału na ryzyko rynkowe, regulator definiuje trzy strefy w zależności od liczby naruszeń testowania wstecznego zaobserwowanych w ciągu roku. Poprawnie określony model dla referencyjnej miary ryzyka VaR na poziomie 1% powinien generować średnio 2 lub 3 naruszenia w ciągu $n = 250$ dni roboczych. Korzystając z wartości kwantyli dla rozkładu Bernoulliego dla rozważanych parametrów (zob. Tabela 1) i budując na ich podstawie przedziały ufności wokół oczekiwanej liczby naruszeń, model wewnętrzny klasyfikowany jest do jednej z trzech stref:

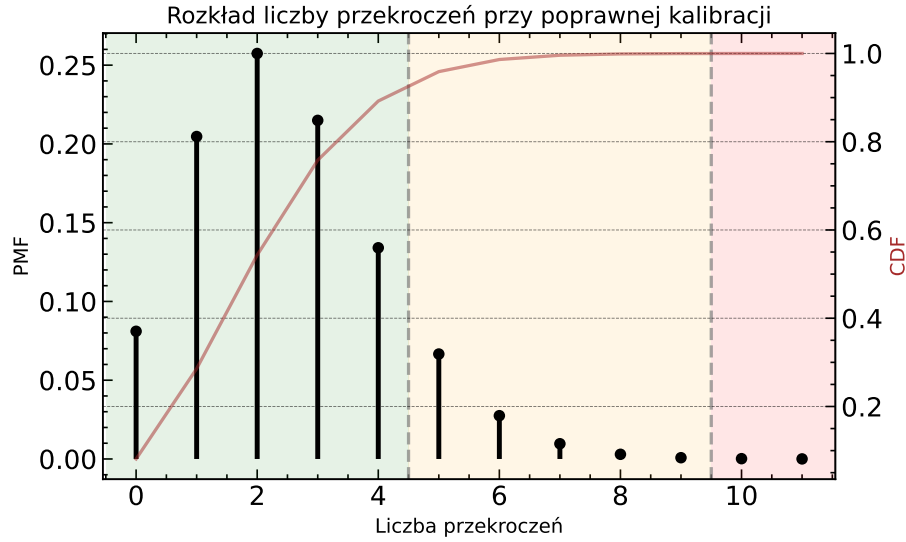
- **strefa zielona**, jeśli liczba naruszeń wynosi mniej niż 5: w poprawnie skalibrowanym modelu jest to oczekiwane w około 90% przypadków i odpowiada wartości $T_n \in [0.00, 0.02]$;
- **strefa żółta**, jeśli liczba naruszeń mieści się w przedziale od 5 do 9. W poprawnie skalibrowanym modelu jest to oczekiwane w około 10% przypadków i odpowiada wartości $T_n \in [0.02, 0.04]$;
- **strefa czerwona**, jeśli liczba naruszeń wynosi 10 lub więcej. W poprawnie skalibrowanym modelu jest to oczekiwane w mniej niż 0,01% przypadków i odpowiada wartości $T_n \in [0.04, 1.00]$.

Zauważmy, że dla lepszej przejrzystości użyta została nominalna liczba naruszeń $n \cdot T_n$. Aby ułatwić interpretację systemu 3 stref, przedstawiamy Rysunek 1. Więcej szczegółów na temat regulacyjnego testowania wstecznego zgodnie z regulacjami Basel można znaleźć w BCBS (2016).

Następnie dla ustalonego poziomu ufności $\alpha \in (0, 1]$ oraz dowolnej próbki $x = (x_1, \dots, x_n)$ definiujemy historyczny estymator VaR:

$$\widehat{\text{VaR}}_n^\alpha(x) := -x_{(\lfloor n\alpha \rfloor + 1)}, \quad (3.9)$$

gdzie $x_{(k)}$ oznacza k -tą statystycznie uporządkowaną obserwację z próbki x . Statystyki testowe T_n oraz $\widehat{\text{VaR}}_n^\alpha$ są ze sobą ściśle związane, co jest ujęte we Własności 3.2.1.



Rysunek 1: Rozkład liczby przekroczeń przy poprawnej kalibracji.

Własność 3.2.1 (Reprezentacja dualna T_n)

Niech y będzie zdefiniowany jak we wzorze (3.7), T_n jak w (3.8), a $\widehat{\text{VaR}}_n^\alpha$ jak w (3.9). Wówczas:

$$T_n = \inf \left\{ \alpha \in (0, 1] : \widehat{\text{VaR}}_n^\alpha(y) \leq 0 \right\}, \quad (3.10)$$

z przyjętą konwencją $\inf \emptyset = 1$.

Dowód Własności 3.2.1 można odnaleźć w Dodatku A.0.5.

Przedstawiona zależność wskazuje, że T_n można interpretować jako estymator indeksu akceptowalności odpowiadającemu rodzinie VaR^α . Należy jednak zauważyć, że indeksy akceptowalności zostały zdefiniowane na przestrzeni parametrów \mathbb{R}^+ , a nie na $(0, 1]$. Niemniej jednak jest to jedynie schemat normalizacji, tzn. poprzez zastosowanie monotonicznej funkcji $g(x) = \frac{1}{1+x}$ możemy zmienić parametryzację, podobnie jak zastosowano to w Przykładzie 2.2.3.

Podobne podejście do testowania wstecznego można zaaplikować w przypadku ES, co jest przedmiotem kolejnego podrozdziału.

3.2.2 Testowanie wsteczne ES

Motywacja stojąca za wyborem funkcji testowania wstecznego wynika z dualnej reprezentacji koherentnych miar ryzyka (zob. Twierdzenie 1.2.7) oraz koherentnych indeksów akceptowalności (zob. Twierdzenie 2.2.2). Podobnie jak w Podrozdziale 3.2.1, definiujemy wektor y jak we wzorze (3.7) oraz statystykę testową zliczającą częstość przekroczeń G_n przez:

$$G_n := \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\sum_{j=1}^i y_{(j)} < 0\}}, \quad (3.11)$$

gdzie $(y_{(1)}, \dots, y_{(n)})$ jest uporządkowaną statystycznie próbką y .

Obliczając G_n szukamy więc największej liczby najgorszych realizacji zabezpieczonej pozycji, które sumują się do wartości ujemnej, a następnie dzielimy wynik przez n . Takie podejście jest naturalne dla ES — zamiast mierzyć całkowitą liczbę naruszeń,

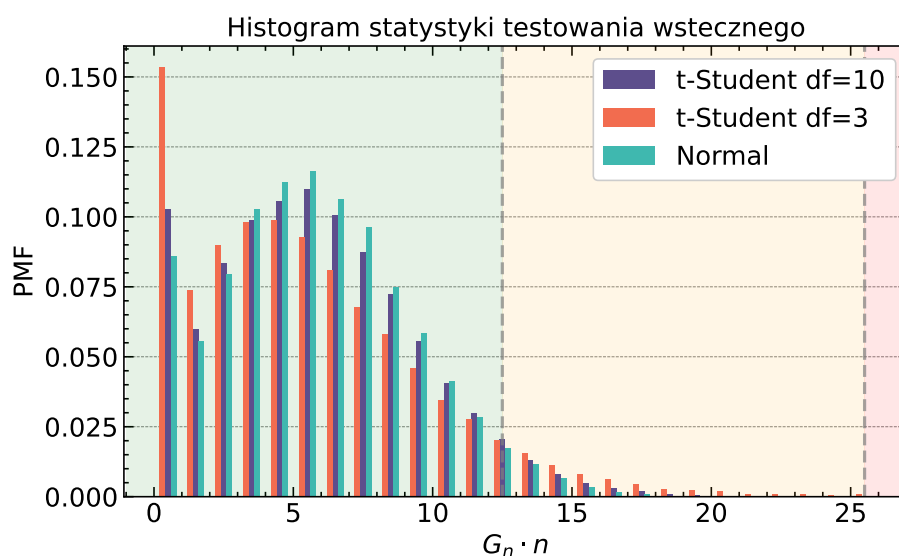
koncentrujemy się na ocenie najgorszych skumulowanych strat, będąc bardziej precyzyjnym, ich średniej.

Również kwestia regulacyjnego systemu sygnalizacji świetlnej może być zaaplikowana do statystyki zdefiniowanej wzorem (3.11). Zgodnie z wytycznymi BCBS (2016) przyjmujemy jako referencyjną miarę ryzyka ES na poziomie $\alpha = 2.5\%$ (zamiast VaR na poziomie $\alpha = 1\%$). Dla uproszczenia oraz dla większej zgodności z ramami VaR odnosimy się do nominalnej liczby składowych sumy $n \cdot G_n$ zamiast do wartości średnich.

Poprawnie określony model dla referencyjnej miary ryzyka ES na poziomie 2.5% powinien generować ujemną skumulowaną sumę dla maksymalnie 6 lub 7 najgorszych zabezpieczonych pozycji w ciągu $n = 250$ dni roboczych. Budując pasmo ufności wokół tych wartości, model wewnętrzny klasyfikowany jest do jednej z trzech stref:

- **strefa zielona**, jeśli suma 12 najmniejszych wartości y jest dodatnia: w poprawnym modelu jest to oczekiwane w około 90% przypadków i odpowiada wartości $G_n \in [0.00, 0.05]$;
- **strefa żółta**, jeśli suma 12 najmniejszych wartości y jest ujemna, ale suma 25 najmniejszych wartości y jest dodatnia: w poprawnym modelu jest to oczekiwane w około 10% przypadków i odpowiada wartości $G_n \in [0.05, 0.10]$;
- **strefa czerwona**, jeśli suma 25 najmniejszych wartości y jest ujemna: w poprawnym modelu jest to oczekiwane w mniej niż 0,01% przypadków i odpowiada wartości $G_n \in [0.10, 1.00]$.

Warto podkreślić, że w przypadku VaR rozkład $T_n \cdot n$ odpowiada rozkładowi Bernoulliego z parametrem sukcesu równym 0,99. Natomiast dla statystyki G_n wartości skumulowanych prawdopodobieństw zależą od rozkładu danych. Rozkład statystyki testowej przy założeniu poprawnej kalibracji dla wybranych rozkładów został przedstawiony na Rysunku 2. Dalsze szczegóły dotyczące ustalenia szerokości stref można



Rysunek 2: Rozkład liczby przekroczeń przy poprawnej kalibracji modelu ES.

znaleźć w Moldenhauer and Pitera (2019, Chapter 5).

Teraz, podobnie jak w przypadku historycznego estymatora VaR (zob. wzór (3.10)) definiujemy historyczny estymator ES:

$$\widehat{\text{ES}}_n^\alpha(x) := -\frac{\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{1}_{\{x_i + \widehat{\text{VaR}}_n^\alpha(x) \leq 0\}}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_i + \widehat{\text{VaR}}_n^\alpha(x) \leq 0\}}}, \quad (3.12)$$

gdzie $\widehat{\text{VaR}}_n^\alpha$ jest historycznym estymatorem VaR, zgodnie ze wzorem (3.9).

Analogicznie jak w przypadku testowania wstecznego VaR, statystyki testowe G_n oraz $\widehat{\text{ES}}_n^\alpha$ są ze sobą ściśle związane, co jest ujęte we Własności 3.2.2.

Własność 3.2.2

Niech y będzie zdefiniowany jak we wzorze (3.7), G_n jak w (3.11), a $\widehat{\text{ES}}_n^\alpha$ jak w (3.12). Wówczas zachodzi równość:

$$G_n = \inf \left\{ \alpha \in (0, 1) : \widehat{\text{ES}}_n^\alpha(y) \leq 0 \right\},$$

przyjmując $\inf \emptyset = 1$.

Dowód można odnaleźć w Dodatku A.0.6.

Przedstawiona zależność wskazuje, że G_n można interpretować jako estymator koherentnego indeksu akceptowalności, odpowiadający koherentnej rodzinie miar ryzyka ES^α . Podobnie jak w przypadku VaR, możemy zastosować przekształcenie przez monotoniczną funkcję $g(x) = \frac{1}{1+x}$ aby zmienić parametryzację z przedziału $(0, 1]$ na \mathbb{R}_+ .

Możemy również spojrzeć na nasze wyniki z drugiej strony. Statystyka testowa G_n nie musi być od razu naturalnym kandydatem dla statystyki testowej wykorzystywanej w testowaniu wstecznym ES. Jednakże, wychodząc od statystyki $\widehat{\text{ES}}_n^\alpha$ i obliczając najmniejsze α dla której otrzymujemy niedodatnie $\widehat{\text{ES}}_n^\alpha$ na mocy Własności 3.2.2 uzyskujemy statystykę G_n . Świadczy to nie tylko o sensowności rozważania G_n , ale co więcej, o pewnego rodzaju domyślności wyboru właśnie tej statystyki testowania wstecznego.

3.3 Pomiar efektywności i awersji do ryzyka portfeli finansowych

Ocena efektywności portfela inwestycyjnego jest kluczowym zagadnieniem w finansach. Klasyczne miary, takie jak współczynnik Sharpe'a (zob. Przykład 2.1.6) czy GLR (zob. Przykład 2.1.7) często nie uwzględniają subiektywnej awersji do ryzyka inwestora. W tym podrozdziale rozważamy alternatywne podejście, w którym efektywność portfela mierzona jest przy użyciu indeksów akceptowalności opartych na użyteczności.

Niech $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ będzie filtracją w czasie ciągłym, gdzie $\mathbb{T} = [0, T]$. Jeżeli będziemy mówić o adaptowalności procesu stochastycznego, to rozumieć będziemy adaptowalność względem tej filtracji. Niech $(X_t)_{t \in T}$ będzie adaptowalnym semimartynałem² o

²Adaptowany proces $X = (X(t))$ nazywamy ciągłym semimartynałem gdy istnieją: lokalny martynał o ciągłych trajektoriach M oraz proces o skończonym wahanii A takie, że $M(0) = A(0) = 0$ oraz $X(t) = X(0) + M(t) + A(t)$, $\forall t \geq 0$. Semimartynały są dobrymi funkcjami całkującymi, będącymi najszerszą klasą względem której definiowana jest całka Ito.

wartościach w \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$, który jest prawostronnie ciągły z lewostronnymi granicami (càdlàg).

Zakładamy, bez straty ogólności, że inwestor posiada początkowy majątek $V_0 := 1$, tak że logarytmiczna stopa zwrotu portfela jest równa jego logarytmicznemu wzrostowi.

Niech Φ oznacza zbiór procesów adaptowalnych o wartościach w \mathbb{R}^d takich, że dla każdego $(\phi_t)_{t \in \mathbb{T}} \in \Phi$, odpowiadający proces wartości portfela $(V_t(\phi))_{t \in \mathbb{T}}$ dany przez:

$$V_t(\phi) := 1 + \int_0^t \phi_u dX_u, \quad t \in \mathbb{T},$$

jest niemal na pewno nieujemny, tj. $V_t(\phi) > 0$ dla $t \in \mathbb{T}$. Proces ϕ możemy traktować z ekonomicznego punktu widzenia jako strategię finansową, a Φ jako zbiór takich strategii.

W tym podrozdziale, przy założeniu regularności względem skali awersji funkcji użyteczności U , interesuje nas maksymalizacja *wartości końcowej* (ang. *terminal value*) względem momentu $t = 0$:

$$J_T(\phi, G) := \alpha(\ln V_T(\phi) - \ln G_T), \quad (3.13)$$

gdzie $G := (G_t)_{t \in T}$ odpowiada ustalonej wartości benchmarkowej. Wielkość (3.13) określa minimalną awersję do ryzyka, która sprawia, że zwrot względem benchmarku $\ln V_T(\phi) - \ln G_T$ jest akceptowalny. Takie podejście jest dualne wobec standardowego podejścia, w którym maksymalizujemy stopę zwrotu dla danej awersji do ryzyka.

Można pokazać, że przy odpowiednich założeniach problem:

$$J_T(\phi, G) \rightarrow \max, \quad (3.14)$$

może zostać rozwiązany, gdzie maksimum jest brane względem $\phi \in \Phi$, podczas gdy proces G oraz indeks akceptowalności α są ustalone. Twierdzenie to można znaleźć w (Pitera and Rásonyi, 2024, Theorem 4.1).

3.3.1 Pomiar awersji do ryzyka w oparciu o dane rynkowe stóp zwrotu

Przyjrzyjmy się teraz kilku przykładom pomiaru efektywności portfela w oparciu o indeksy akceptowalności opartych na eksponencjalnej użyteczności. Wiemy (zob. Przykład 2.4.6), że eksponencjonalna funkcja użyteczności $U(x) = 1 - e^{-x}$ jest regularna względem skali awersji oraz zadaje rodzinę entropijnych miar ryzyka:

$$\mu_\gamma(X) = \frac{1}{\gamma} \ln \left(\mathbb{E}[e^{-\gamma X}] \right). \quad (3.15)$$

Rodzina entropijnych miar ryzyka spełnia kluczową dla nas własność dotyczącą obliczania ryzyka sumy niezależnych zmiennych losowych, co jest ujęte we Własności 3.3.1.

Własność 3.3.1 (Addytywność entropijnej miary ryzyka)

Niech $(\mu_\gamma)_{\gamma > 0}$ będzie jak we wzorze (3.15). Wtedy dla ciągu niezależnych zmiennych losowych X_1, \dots, X_n zachodzi:

$$\mu_\gamma \left(\sum_{k=0}^n X_k \right) = \sum_{k=0}^n \mu_\gamma(X_k). \quad (3.16)$$

Dowód Własności 3.3.1 jest bardzo prosty i opiera się na podstawowych własnościach wartości oczekiwanej oraz funkcji eksponencjalnej, dlatego go pomijamy.

Dla uproszczenia, załóżmy, że mamy do czynienia z $G_t = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz $T \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy dyskretny proces stochastyczny $r_t := \ln \left(\frac{V_t(\phi)}{V_{t-1}(\phi)} \right)$. Będziemy zakładać, że ϕ jest takim procesem, że $(r_t)_{t=1, \dots, T}$ jest i.i.d.. Przykładem takiego procesu może być funkcja stale równa 1. Jeżeli X_t byłby ceną aktywa o wartości początkowej równej 1, to $V_t = X_t$, co przy założeniu niezależności i stacjonarności stóp zwrotów cen akcji gwarantowałoby spełnienie tego założenia.

Niech spełnione będą powyższe założenia. Wtedy:

$$\begin{aligned} \alpha (\ln V_T(\phi) - \lambda T) &= \alpha \left(\sum_{t=0}^{T-1} \ln \left(\frac{V_t(\phi)}{V_{t-1}(\phi)} \right) - \lambda T \right) \\ &= \alpha \left(\sum_{t=0}^{T-1} (r_{t+1} - \lambda) \right) \\ &= \sup \{ \gamma > 0 : \mu_\gamma \left(\sum_{t=0}^{T-1} (r_{t+1} - \lambda) \right) \leq 0 \} \\ &= \sup \{ \gamma > 0 : \sum_{t=0}^{T-1} \mu_\gamma (r_{t+1} - \lambda) \leq 0 \} \\ &= \sup \{ \gamma > 0 : \mu_\gamma (r_1 - \lambda) \leq 0 \}, \end{aligned}$$

gdzie w czwartej równości skorzystaliśmy z założenia niezależności procesu $(r_t)_{t=1, \dots, T}$ oraz Własności 3.3.1, a w piątej skorzystaliśmy z stacjonarności procesu $(r_t)_{t=1, \dots, T}$.

Jeżeli teraz zastosujemy założenie, że $r_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ oraz $\mu > \lambda$ i $\sigma > 0$. Wtedy korzystając z wyniku z Przykładu 2.4.6 otrzymujemy:

$$\alpha (\ln V_T(\phi) - \lambda T) = \frac{2(\mu - \lambda)}{\sigma^2}.$$

Wynik ten może być również odzwierciedlony graficznie, jak na Rysunku 3.

Zauważmy, że możemy zatem użyć logarytmicznych stóp zwrotu dowolnego portfela jako próby do oszacowania entropijnego ryzyka dla parametru $\gamma > 0$, a następnie odzyskać odpowiadającą mu awersję do ryzyka.

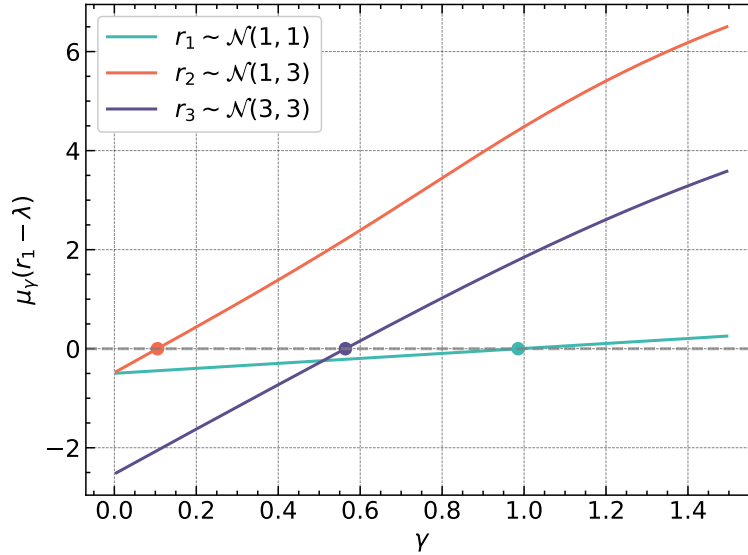
3.3.2 Związki z problemem portfelowej optymalizacji Mertona

Rozważmy teraz rynek finansowy składający się z aktywa wolnego od ryzyka o dodatnim procesie cenowym S_t^0 , reprezentującego rachunek oszczędnościowy oraz jednego aktywa ryzykownego o procesie cenowym S_t , reprezentujących akcje. Inwestor może inwestować na tym rynku w dowolnym momencie t , alokując liczbę udziałów α_t w aktywie ryzykownym. Oznaczając przez X_t wartość majątku w czasie t , liczba udziałów ulokowana w aktywie wolnym od ryzyka wynosi:

$$\frac{X_t - \alpha_t \cdot S_t}{S_t^0}.$$

Założenie o samofinansującym się portfelu prowadzi do ewolucji procesu majątkowego opisanego równaniem:

$$dX_t = \frac{X_t - \alpha_t S_t}{S_t^0} dS_t^0 + \alpha_t dS_t,$$



Rysunek 3: Relacja $\mu_\gamma(r_1 - \lambda)$ w zależności od poziomu awersji γ dla r_1 pochodzącego z rozkładu normalnego o wybranych parametrach oraz $\lambda = 0.5$, a także otrzymany na podstawie jej indeks akceptowalności α ($\ln V_T(\phi) - \lambda T$) przedstawiony jako kropki.

gdzie α_t to proces kontrolny przyjmujący wartości w zbiorze dopuszczalnych alokacji $A \subset \mathbb{R}$.

Problem alokacji portfela polega na wyborze optymalnej inwestycji w dostępne aktywa. Klasyczne podejścia modelujące zachowania i preferencje inwestorów to: *kryterium użyteczności oczekiwanej* oraz *kryterium średniej i wariancji*:

- Kryterium użyteczności oczekiwanej polega na maksymalizacji oczekiwanej użyteczności końcowego majątku w skończonym horyzoncie czasowym $T < \infty$:

$$\sup_{\alpha} \mathbb{E}[U(X_T)], \quad (3.17)$$

gdzie U oznacza funkcję użyteczności, a X_T jest wartością majątku w chwili końcowej T .

- Kryterium średniej i wariancji, wprowadzone w Markowitz (1952), opiera się na założeniu, że preferencje inwestora zależą wyłącznie od wartości oczekiwanej oraz wariancji jego dochodów losowych. Aby formalnie oddać fakt, że inwestor preferuje wyższy majątek i jednocześnie wykazuje awersję do ryzyka, kryterium to koncentruje się na portfelach efektywnych w sensie średniej i wariancji, tj. takich, które minimalizują wariancję dla zadanej wartości oczekiwanej. W naszym kontekście problem optymalizacji przyjmuje postać:

$$\inf_{\alpha} \{ \text{Var}(X_T) : \mathbb{E}[X_T] = m \}.$$

Można pokazać, że problem ten można zredukować do rozwiązania zagadnienia optymalizacji w postaci (3.17) z użyciem kwadratowej funkcji użyteczności:

$$U(x) = \lambda - x^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Więcej szczegółów można odnaleźć w pozycji (Pham, 2009, Section 2.2.1).

W naszym przypadku skupimy się na tym pierwszym z kryteriów. Rozważmy model Blacka-Scholesa-Mertona na skończonym horyzoncie czasowym T . Inwestor inwestuje w każdym momencie t część α_t swojego majątku w akcje o cenie S_t (modelowanej przez geometryczny ruch Browna), natomiast pozostałą część $1 - \alpha_t$ lokuje na rachunku wolnym od ryzyka o cenie S_t^0 i stałej stopie procentowej r . Ewolucja procesu majątkowego inwestora $X_t^{\alpha_t}$ opisana jest równaniem:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \alpha_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \alpha_t) \frac{dS_t^0}{S_t^0},$$

gdzie dynamika cen danych aktywów dana jest wzorami:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad \frac{dS_t^0}{S_t^0} = r dt.$$

Podstawiając powyższe do równania majątku, otrzymujemy:

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\alpha_t \mu + (1 - \alpha_t) r) dt + \alpha_t \sigma dW_t.$$

Oznaczmy przez \mathcal{A} zbiór progresywnie mierzalnych procesów sterowania α przyjmujących wartości w zbiorze A , dla których zachodzi warunek całkowalności:

$$\int_0^T |\alpha_s|^2 ds < +\infty.$$

Warunek ten gwarantuje istnienie i jednoznaczność silnego rozwiązania równania różniczkowego stochastycznego opisującego proces majątku sterowany przez $\alpha \in \mathcal{A}$, co można wykazać, rozważając logarytm dodatniego procesu majątku.

Dla danej strategii portfelowej $\alpha \in \mathcal{A}$ oznaczmy przez $X_{t,x}$ odpowiadający jej proces majątku poczynszy od kapitału początkowego $X_t = x > 0$ w chwili t . Celem inwestora jest maksymalizacja oczekiwanej użyteczności końcowego majątku w horyzoncie czasowym T .

Funkcję wartości problemu maksymalizacji użyteczności definiujemy jako:

$$V(t, x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[U \left(X_{t,x}^T \right) \right], \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+.$$

Kładąc za U potęgową funkcję użyteczności przedstawioną w Przykładzie 1.1.3:

$$U_p(x) = \frac{x^p}{p}, \quad x \geq 0, p < 1, p \neq 0$$

oraz rozwiązując równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana, można otrzymać gładkie rozwiązanie problemu (zob. Pham (2009, Section 3.6.1)), w którym optymalna strategia portfelowa jest stała i równa się:

$$\alpha = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1 - p)}, \quad (3.18)$$

a maksymalizowana użyteczność wynosi:

$$V(t, x) = \frac{x^\gamma}{\gamma} \exp \left(\gamma \left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2(1 - \gamma)\sigma^2} \right) t \right). \quad (3.19)$$

Otrzymany rezultat możemy bezpośrednio zaaplikować do problemu (3.14). Ustalmy $T = 1$ oraz stały benchmark $g := \ln G_T < \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}$ oraz $g \neq r$. Wtedy:

$$\begin{aligned}
\sup_{\phi \in \Phi} \alpha(\ln V_T(\phi) - \ln(G_T)) &= \sup_{\phi \in \Phi} [\sup\{\gamma > 0: \mu_\gamma(\ln V_T(\phi) - g) \leq 0\}] \\
&= \sup_{\phi \in \Phi} [\sup\{\gamma > 0: \mu_\gamma(\ln V_T(\phi)) \leq -g\}] \\
&= \sup_{\phi \in \Phi} [\sup\{\gamma > 0: \frac{1}{\gamma} \ln \mathbb{E}[\exp(-\gamma \ln V_T(\phi))] \leq -g\}] \\
&= \sup\{\gamma > 0: \sup_{\phi \in \Phi} [\mathbb{E}[(V_T(\phi))^{-\gamma}] \leq e^{-\gamma g}]\} \\
&= \sup\{\gamma > 0: e^{-\gamma(r + \frac{(\mu-r)^2}{2(1+\gamma)\sigma^2})} \leq e^{-\gamma g}\} \\
&= \frac{(\mu-r)^2}{2(g-r)\sigma^2} - 1.
\end{aligned}$$

Ukazany został tu związek z problemem Mertona. Powyższa optymalna strategia jest osiągana przez strategię utrzymującą stały udział $\alpha = \frac{\mu-r}{\sigma^2(1-p)}$.

3.3.3 Pomiar efektywności długoterminowej portfela w oparciu o indeksy akceptowalności oparte na użyteczności oraz związek z pamięcią procesu

Rozważając granicę $T \rightarrow \infty$ i przyjmując $G_t := e^{\lambda t}$ dla pewnego ustalonego $\lambda \in \mathbb{R}$, możemy również mierzyć efektywność portfela w nieskończonym horyzoncie czasowym. W tym ustawieniu możemy zdefiniować miarę efektywności długoterminowej w postaci:

$$J_\infty(\phi, \lambda) := \liminf_{T \rightarrow \infty} \alpha(\ln V_T(\phi) - \lambda T), \quad (3.20)$$

która określa poziom awersji do ryzyka, przy którym inwestor jest obojętny między inwestycją w pozycję ryzykowną $(V_t(\phi))_{t \in T}$, a inwestycją bezpieczną o stałym tempie wzrostu λ .

Przedstawione podejście pozwala rozszerzyć teorię indeksów akceptowalności na potrzeby długoterminowej analizy portfeli. Szczególnie cenne jest to w kontekście strategii inwestycyjnych wymagających odporności na zmienność oraz wrażliwości na preferencje inwestora w czasie. W szczególności możemy pokazać, jak *pamięć* wpływa w stacjonarnym, a w szczególności w Gaussowskim procesie, na przyrost wariancji sumy obserwacji oraz akceptowalność portfela.

Pojęcie pamięci w procesach stochastycznych odnosi się do tego, w jaki sposób autokorelacja zmienia się w czasie. Niech $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ będzie stacjonarnym procesem stochastycznym o wartości oczekiwanej $\mu = \mathbb{E}[X_t]$ i skończonej wariancji. Definiujemy jego funkcję autokowariancji jako:

$$\gamma(k) = \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mówimy, że proces ma:

- *Ujemną pamięć* (ang. *antypersistence*), jeśli występują wyraźne ujemne korelacje, tzn. $\gamma(k) < 0$ dla pewnego zakresu k , co skutkuje tendencją „znoszenia się” wzrostów i spadków;

- *Krótką pamięć* (ang. *short memory*), jeśli:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty,$$

co zwykle przekłada się na szybkie zanikanie autokorelacji;

- *Długą pamięć* (ang. *long memory*), jeśli

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| = +\infty,$$

to znaczy $\gamma(k)$ zanika znacznie wolniej – najczęściej w sposób potęgowy, czyli $\gamma(k) \sim |k|^{-\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in (0, 1)$.

Wiele własności dotyczących zależności długofalowych opisuje się za pomocą tzw. *parametr Hursta* $H \in (0, 1)$. Klasycznym przykładem procesu z tym parametrem jest *fraktalny ruch Browna* (ang. *fractional Brownian motion*), oznaczany zwykle B_t^H , który spełnia:

$$\mathbb{E}[B_t^H] = 0, \quad \text{Cov}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

Współczynnik H determinuje skalowanie wariancji przyrostów:

$$\text{Var}(B_{t+\tau}^H - B_t^H) = \mathbb{E}[(B_{t+\tau}^H - B_t^H)^2] \propto \tau^{2H}.$$

Przykłady fraktalnych ruchów Browna z wybranymi wartościami parametru Hursta zostały przedstawione na Rysunku 4.

Wzrost wariancji przyrostów procesu lub sum skumulowanych w funkcji czasu można formalnie wyrazić jako

$$\text{Var}\left(\sum_{t=1}^T X_t\right) \sim T^{2H}.$$

W zależności od wartości H , wyróżnia się reżimy:

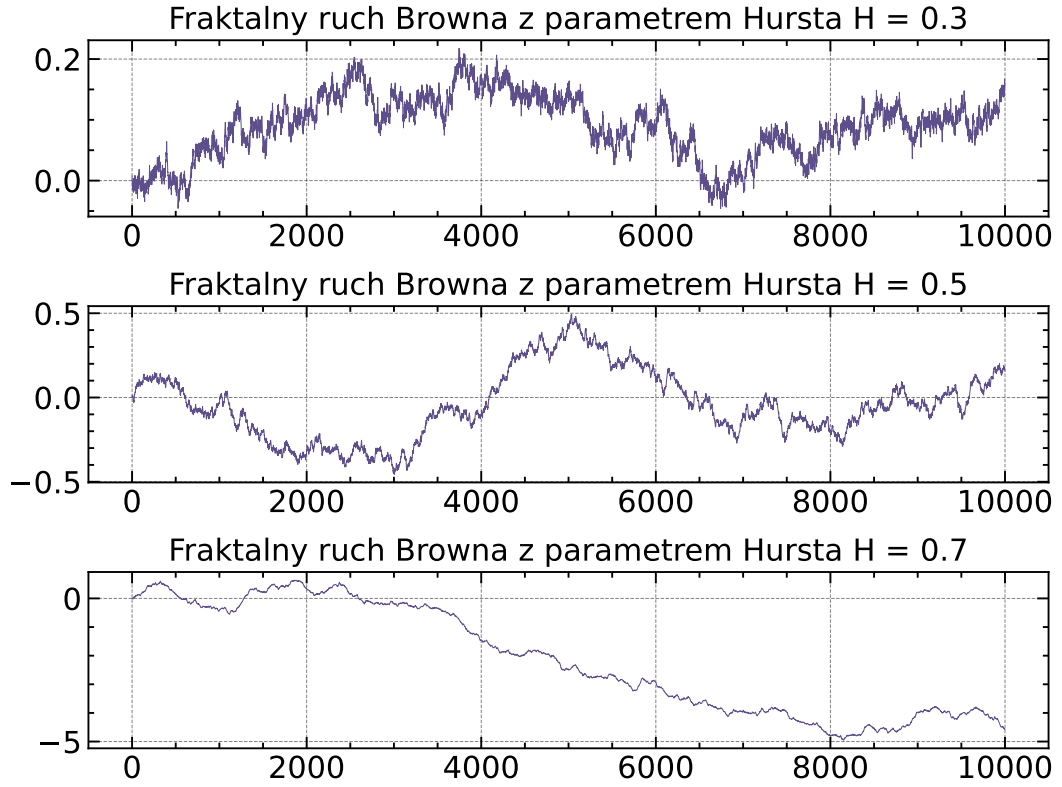
- $H < \frac{1}{2}$ – *reżim subdyfuzyjny*, przy którym wariancja rośnie wolniej niż $\sim T$. Taki proces wykazuje *ujemną pamięć*.
- $H = \frac{1}{2}$ – *normalna dyfuzja*, przy którym wariancja rośnie proporcjonalnie do T . Odpowiada to procesom o krótkiej pamięci.
- $H > \frac{1}{2}$ – *reżim superdyfuzyjny*, wówczas wariancja rośnie szybciej niż $\sim T$, co jest odpowiada procesom z długą pamięcią.

W takim kontekście rozważamy następującą konstrukcję — niech $(r_t)_{t \in \mathbb{N}}$ będzie stacjonarnym procesem Gaussowskim o dodatniej wartości średniej, oznaczmy ją $m - \lambda > 0$. Definiujemy zmienną:

$$S_T := \sum_{t=1}^T r_t = \ln V_T(\phi) - \lambda T,$$

czyli agregację T kolejnych realizacji procesu. Zdefiniujemy:

$$\mu_T := \mathbb{E}[S_T] = (m - \lambda)T \quad \text{oraz} \quad \sigma_T^2 := \text{Var}(S_T).$$



Rysunek 4: Fraktalne ruchy Browna z wybranymi wartościami parametru Hursta $H \in (0,3; 0,5; 0,8)$.

Zwykle przyjmuje się, że wielkość σ_T^2/T zbiega wraz z $T \rightarrow \infty$ do pewnej wartości, oznaczanej przez $\sigma^2 \in [0, \infty]$, co można znaleźć w Ibragimov and Linnik (1971, Theorems 18.2.2 oraz 18.5.2).

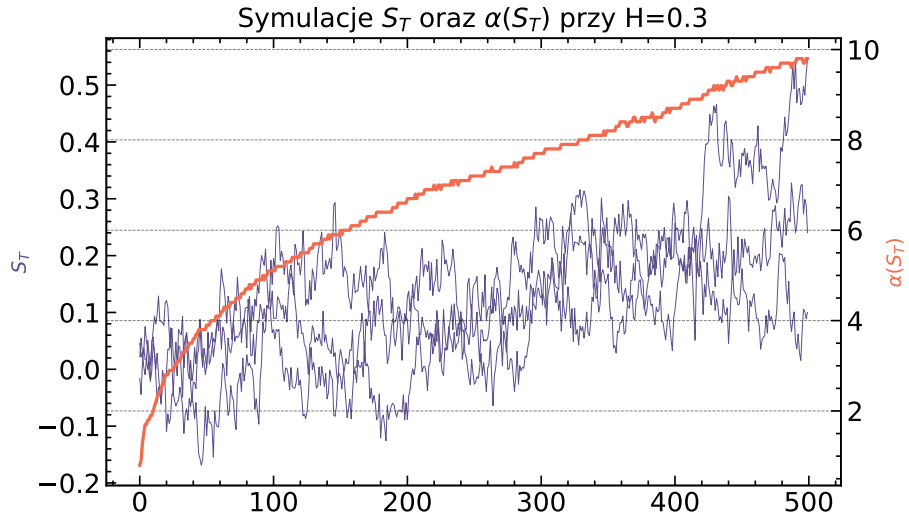
Ponieważ S_T jest zmienną Gaussowską, to na podstawie Przykładu 2.4.6 dla $T \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\alpha(S_T) = 2 \frac{(m - \lambda)T}{\sigma_T^2}.$$

Zauważmy zatem, że $J_\infty(\phi, \lambda)$ zdefiniowana jak we wzorze (3.20) bezpośrednio zależy od wartości σ^2 , co możemy powiązać z zaprezentowanym wcześniej konceptem reżimów:

1. Reżim subdyfuzyjny: $\sigma^2 = 0$, tzn. $\sigma_T^2/T \rightarrow 0$.

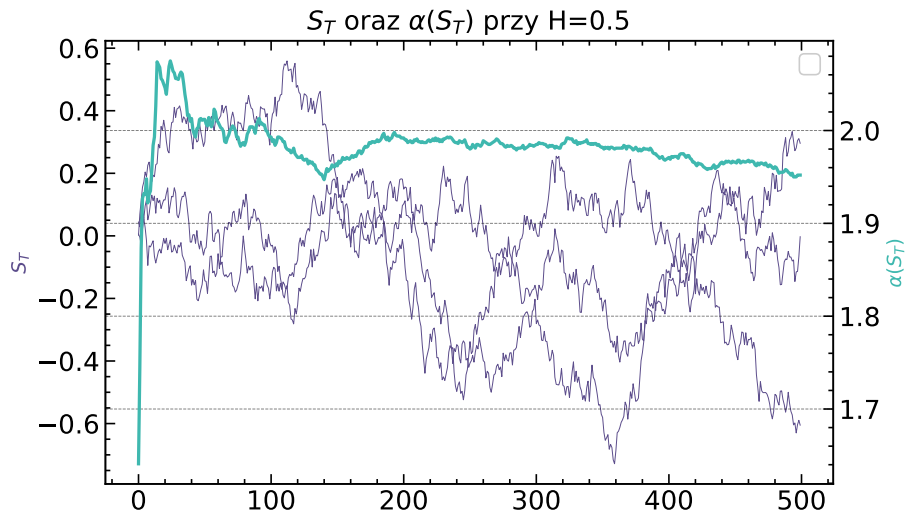
Przykładowo, gdy r_t jest *ujemnie* skorelowany. W tym reżimie uzyskuje się $J_{+\infty}(\phi, \lambda) = +\infty$. Rysunek 5 prezentuje przykładowe trajektorie skumulowanego procesu subdyfuzyjnego z wyraźnie rosnącą z czasem T wartością akceptowalności $\alpha(S_T)$.



Rysunek 5: Pierwsze trzy symulacje skumulowanego procesu subdyfuzyjnego ze stałą Hursta $H = 0.3$ wraz z trajektorią numerycznie wyliczonego indeksu akceptowalności na podstawie 50 000 symulacji trajektorii.

2. Reżim dyfuzyjny: $\sigma^2 \in (0, \infty)$.

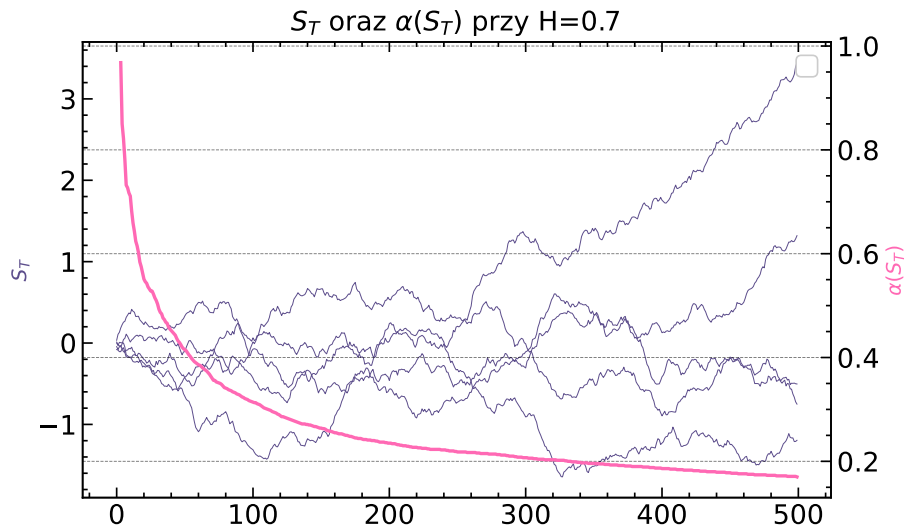
W tej sytuacji mamy wzrost liniowy $\text{Var}(S_T)$. Uzyskuje się wartość graniczną $0 < J_\infty(\phi, \lambda) < +\infty$. Rysunek 6 prezentuje przykładowe trajektorie skumulowanego procesu dyfuzyjnego z wyraźnie stabilizującą się z czasem T wartością akceptowalności $\alpha(S_T)$.



Rysunek 6: Pierwsze trzy symulacje skumulowanego procesu dyfuzyjnego ze stałą Hursta $H = 0.5$ wraz z trajektorią numerycznie wyliczonego indeksu akceptowalności na podstawie 50 000 symulacji trajektorii.

3. Reżim superdyfuzyjny: $\sigma^2 = \infty$, tzn. $\sigma_T^2/T \rightarrow \infty$.

Wówczas $J_\infty(\phi, \lambda) = 0$. Rysunek 7 prezentuje przykładowe trajektorie skumulowanego procesu dyfuzyjnego z wyraźnie zbiegającą do 0 z czasem T wartością akceptowalności $\alpha(S_T)$.



Rysunek 7: Pierwszych pięć symulacji skumulowanego procesu superdyfuzyjnego ze stałą Hursta $H = 0.7$ wraz z trajektorią numerycznie wyliczonego indeksu akceptowalności na podstawie 50 000 symulacji trajektorii.

Podsumowując, na efektywność długookresową mierzoną indeksem akceptowalności opartym na użyteczności eksponencjalnej wpływa pamięć procesu — innymi słowy, natura korelacji r_t w czasie. Korelacje ujemne powodują obniżanie tej miary efektywności długookresowej. Z kolei korelacje dodatnie i dalekozasięgowe powodują podwyższenie efektywności długookresowej.

Rozdział 4

Analiza empiryczna

Celem ostatniego rozdziału pracy będzie pokazanie w jaki sposób możemy korzystać z teorii indeksów akceptowalności, w szczególności dotyczących indeksów akceptowalności opartych na użyteczności, do pomiaru efektywności oraz awersji do ryzyka portfeli finansowych. Uzyskane informacje dotyczące entropijnego ryzyka inwestycji w fundusz inwestycyjny wykorzystamy do odzyskania odpowiadającej mu awersji do ryzyka, bazując na teorii przedstawionej w Rozdziale 3.3.1.

4.1 Rozważane dane oraz informacje techniczne

Analiza została przeprowadzona z wykorzystaniem języka programowania Python w wersji 3.12.9. Do analizy wykorzystano pakiety:

- pandas, wersja 2.22.2 — wykorzystywany do manipulacji danymi;
- numpy, wersja 1.23.4 — wykorzystywany do obliczeń na wektorach;
- matplotlib, wersja 3.9.0 — wykorzystywany do graficznej wizualizacji.

Analiza obejmuje pomiar efektywności oraz awersji do ryzyka funduszy inwestycyjnych przedstawionych w Tabeli 3. Wszystkie dane zostały pobrane z serwisu `wsj.com` w formacie plików CSV.

4.2 Metodologia i cel badań

Wszystkie rozważane fundusze można zakwalifikować jako *fundusze inwestycyjne otwarte* (ang. *mutual funds*). Gromadzą one środki wielu inwestorów i lokują je w zdywersyfikowany portfel aktywów, takich jak akcje czy obligacje, przy codziennej wycenie jednostek uczestnictwa. W odróżnieniu od innych funduszy, takich jak fundusze *ETF* czy *fundusze inwestycyjne zamknięte*, cechują się one wysoką płynnością i możliwością codziennego odkupu jednostek bezpośrednio przez fundusz.

Dla każdego z funduszy i odpowiadającemu mu benchmarkowi na każdy dzień notowań funduszu obliczona została wartość indeksu akceptowalności opartego na eksponencjalnej użyteczności, korzystając z tygodniowych stóp zwrotu na horyzoncie jednego roku. Wybór eksponencjalnej użyteczności jest podyktowany własnościami przedstawionymi w Podrozdziale 3.3.1.

Wartości indeksów akceptowalności obliczane zostały na dwa sposoby:

Fundusz	Benchmark	Okres	Krótki opis
Fidelity Magellan	S&P 500 Index	1987–2025	Sztandarowy, aktywnie zarządzany fundusz akcji dużych spółek USA, nastawiony na wzrost kapitału.
Fidelity Select Defense & Aerospace Portfolio	S&P 500 Index	1989–2025	Tematyczny portfel firm z sektora obrony i lotnictwa; co najmniej 80% aktywów w branży.
Sequoia Fund	S&P 500 Index	1990–2025	Skoncentrowany fundusz value, wyszukuje niedowartościowane spółki o trwałej przewadze konkurencyjnej.
Fidelity Trend	S&P 500 Total Return Index	2000–2012	Inwestuje w spółki o dynamicznym wzroście sprzedaży i zysków; selekcja bottom-up, ekspozycja wzrostowa.
Dodge & Cox Global Bond Fund	Bloomberg Global Aggregate (USD hedged)	2019–2025	Globalny fundusz obligacyjny, aktywnie zarządzany; ekspozycja na rynki rozwinięte i wschodzące, z zabezpieczeniem walutowym.
Dodge & Cox Income Fund	Bloomberg U.S. Aggregate Bond Index	1987–2025	Konserwatywny fundusz dochodowy inwestujący w amerykańskie obligacje wysokiej jakości z naciskiem na stabilność.

Tabela 3: Analizowane fundusze

1. Empiryczny — poprzez znajdowanie na rozważanej dziedzinie takiego największego parametru γ , dla którego entropijna miara ryzyka pozostaje niedodatnia, zgodnie ze wzorem:

$$\alpha_{\text{emp}} = \sup\{\gamma > 0: \mu_{\gamma}(r - \lambda) \leq 0\},$$

gdzie $(\mu_{\gamma})_{\gamma>0}$ to rodzina entropijnych miar ryzyka, r to logarytmiczna stopa zwrotu funduszu, a λ to wartość oczekiwana logarytmicznych stóp zwrotu benchmarku. Wyniki uzyskane tą metodą prezentowane będą za pomocą ciągłej linii;

2. Przy założeniu normalności stóp zwrotów, dla którego otrzymaliśmy w Podrozdziale 3.3.1 analityczny wzór na wartość indeksu akceptowalności:

$$\alpha_{\text{normal}} = \begin{cases} \frac{2(\mu - \lambda)}{\sigma^2}, & \text{jeśli } \mu > \lambda, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

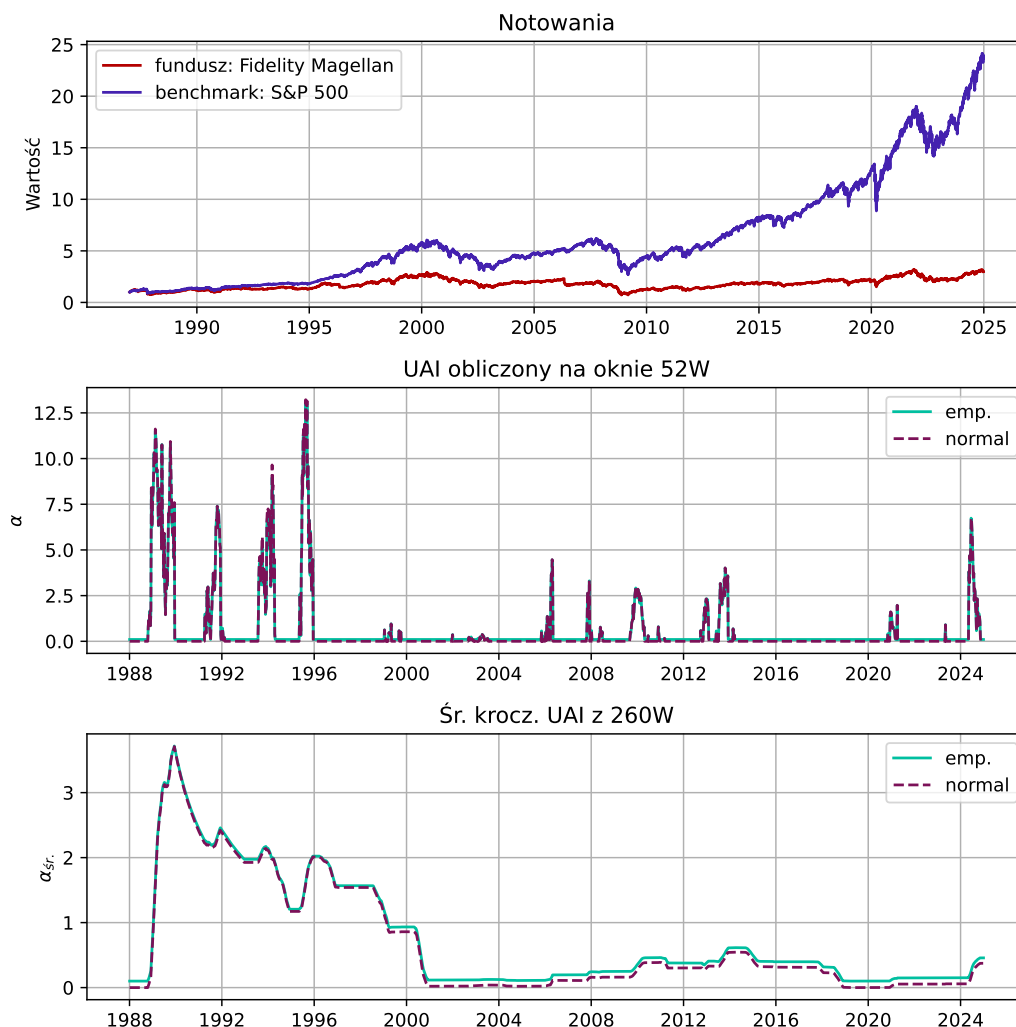
gdzie μ to wartość oczekiwana logarytmicznych stóp zwrotu funduszu, λ to wartość oczekiwana logarytmicznych stóp zwrotu benchmarku, a σ^2 to wariancja logarytmicznych stóp zwrotu funduszu. Metodę tę, z racji swojej analitycznej postaci, nazywać będziemy również *metodą średniej-wariancji*. Wyniki uzyskane tą metodą prezentowane będą za pomocą przerywanej linii.

W celu uzyskania bardziej reprezentatywnych i przejrzystych wyników analizy zastosowano średnią kroczącą obliczonego indeksu, obliczaną na standardowym w tym zagadnieniu horyzoncie pięciu lat. Podejście takie umożliwia odzwierciedlenie strategicznych celów funduszu, który zakłada dłuższy czas inwestycji, co może zostać nieprawidłowo odzwierciedlone w krótkookresowym, tu jednorocznym, pomiarze awersji do ryzyka. W wybranych przypadkach, gdy wiadomo, że w funduszu nie nastąpiła fundamentalna zmiana, prezentowana jest również średnia z całego rozważanego okresu, pozwalająca uwypuklić ogólną tendencję oraz zminimalizować wpływ pojedynczych zdarzeń ekstremalnych.

4.2.1 Fidelity Magellan Fund

Fidelity Magellan Fund (ticker: FMAGX) to amerykański fundusz zarządzany aktywnie przez *Fidelity Investments*. Jego celem inwestycyjnym jest długoterminowy wzrost kapitału poprzez inwestycje w akcje spółek o różnych kapitalizacjach, zarówno wzrostowych, jak i wartościowych, przy szerokiej dywersyfikacji portfela. Na maj 2025 całkowite aktywa pod jego zarządzaniem warte są około 36,8 mld USD. Jego benchmarkiem jest indeks *S&P 500*. Fundusz jest porównywany bezpośrednio do tego indeksu ze względu na charakter inwestycji w amerykańskie spółki o dużej kapitalizacji. Więcej informacji można znaleźć na stronie funduszu: [link](#).

Rysunek 8 pokazuje, że wartości indeksu akceptowalności dla tego funduszu w rozważanym okresie różnią się nieznacznie ze względu na metodę obliczenia. Wyraźnie zauważalna jest tu zmiana efektywności funduszu w 1996, kiedy to doszło do zmiany kierownictwa funduszu (Miller, 2007). Do tego momentu uśredniony indeks utrzymywał się na poziomie między 1 a 3,5, gdy po tym okresie rzadko przekraczał wartość 0,5.



Rysunek 8: Porównanie notowań funduszu *Fidelity Magellan* oraz indeksu *S&P 500* (góra), wartości indeksu akceptowalności α obliczanego w rocznych oknach 52-tygodniowych (środek) oraz jego średniej kroczącej z 260 tygodni (dół), wyznaczonej metodą empiryczną i przy założeniu normalności.

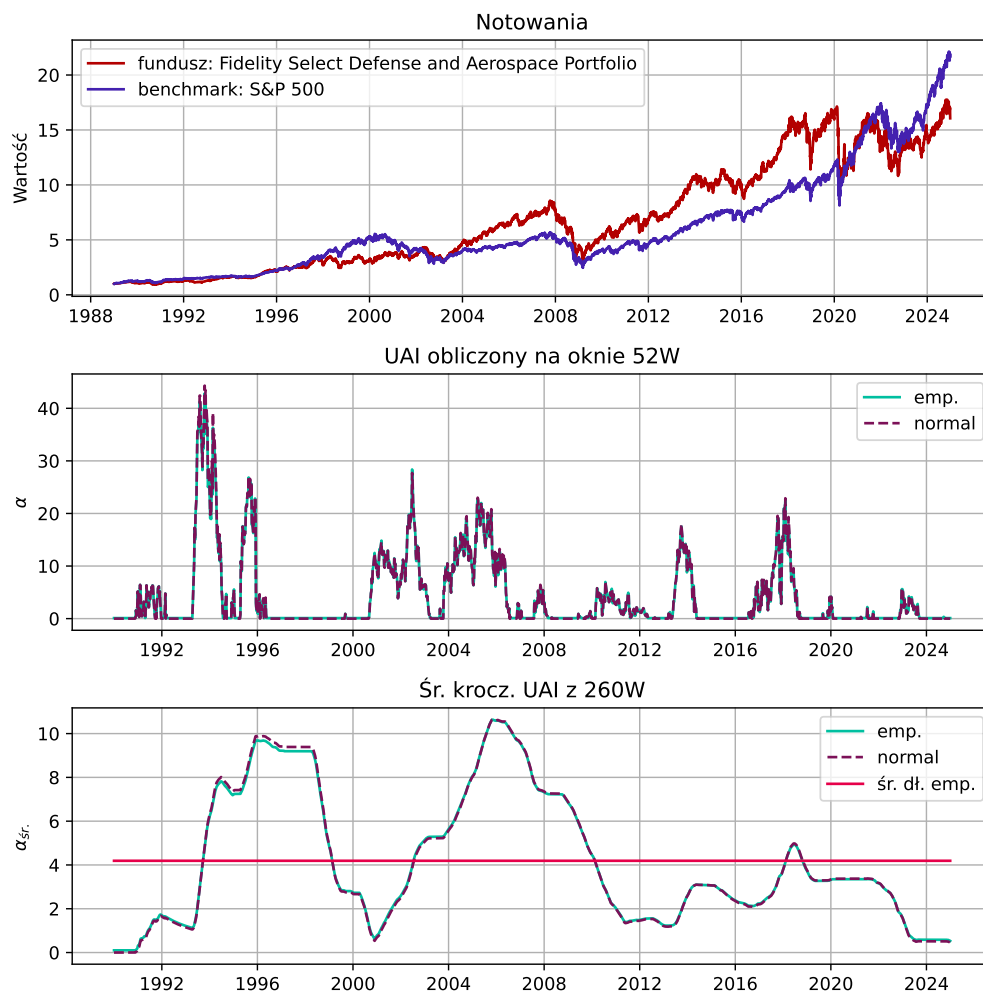
4.2.2 Fidelity Select Defense and Aerospace Portfolio

Fidelity Select Defense and Aerospace Portfolio (ticker: *FSDAX*) to również amerykański fundusz zarządzany aktywnie przez *Fidelity Investments*. Jego celem inwestycyjnym jest długoterminowy wzrost kapitału poprzez inwestycje w akcje spółek z branży obronnej i lotniczo-kosmicznej, zarówno amerykańskich, jak i zagranicznych. Fundusz inwestuje co najmniej 80% aktywów w ten sektor, wykorzystując analizy fundamentalne i sektorowe. Fundusz ma charakter niedywersyfikowany, co oznacza skoncentrowany portfel.

Na maj 2025 całkowite aktywa pod jego zarządzaniem warte są około 2,3 mld USD. Jego benchmarkiem jest indeks *S&P 500*. Fundusz jest porównywany do tego indeksu przy ocenie wyników inwestycyjnych, choć należy pamiętać, że *S&P 500* obejmuje szeroki rynek, a *FSDAX* koncentruje się na wąskim sektorze przemysłowym. Więcej informacji można znaleźć na stronie funduszu: [link](#).

Rysunek 9 pokazuje, że wartości indeksu akceptowalności dla tego funduszu w rozwa-

żanym okresie nie różnią się ze względu na metodę obliczenia i osiągają długookresową średnią na poziomie $\alpha_{\text{śr.}} = 4,19$.



Rysunek 9: Porównanie notowań funduszu *Fidelity Select Defense and Aerospace Portfolio* oraz indeksu *S&P 500* (góra), wartości indeksu akceptowalności α obliczanego w rocznych oknach 52-tygodniowych (środek) oraz jego średniej kroczącej z 260 tygodni (dół), wyznaczonej metodą empiryczną i przy założeniu normalności.

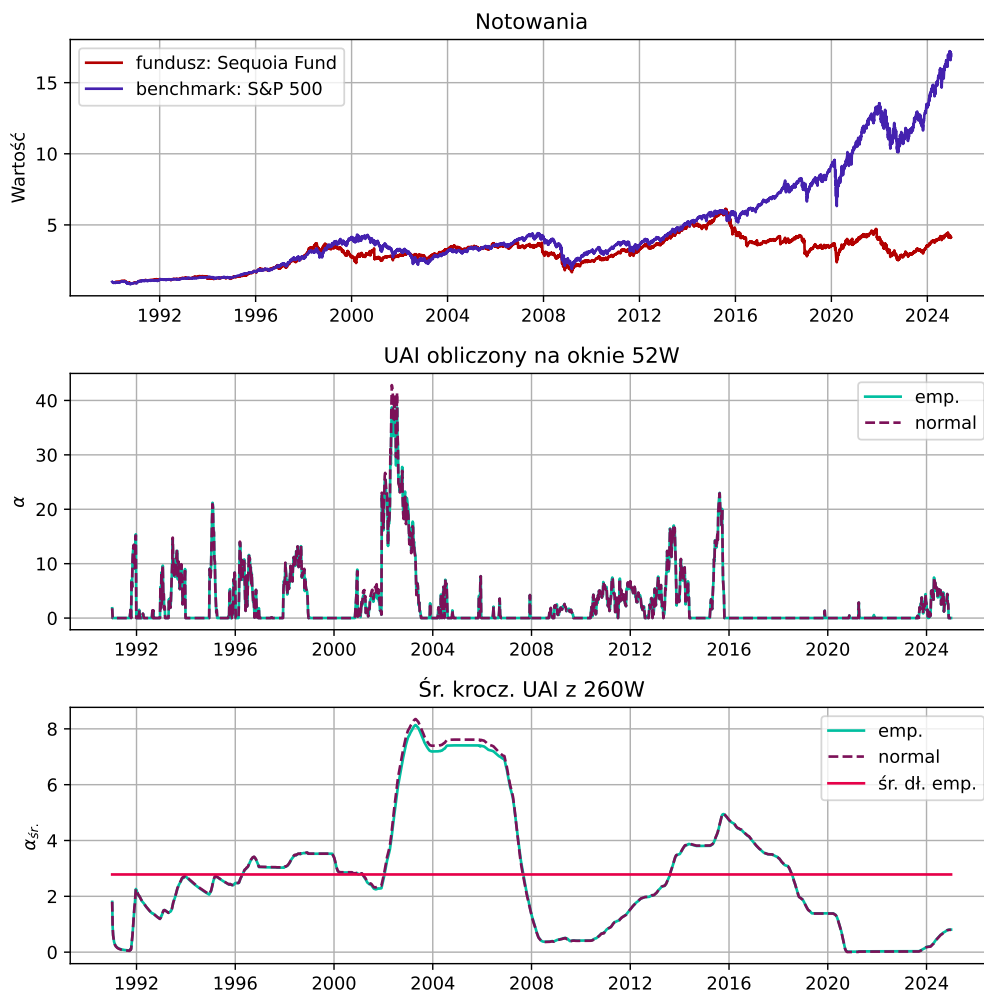
4.2.3 Sequoia Fund

Sequoia Fund (ticker: *SEQUX*) to amerykański fundusz zarządzany aktywnie przez firmę *Ruane, Cunniff & Goldfarb*. Jego strategia opiera się na inwestowaniu w akcje amerykańskich spółek, głównie o średniej i dużej kapitalizacji, z długoterminowym podejściem skoncentrowanym na analizie fundamentalnej i inwestowaniu w wartość. Fundusz koncentruje się na wysokiej jakości spółkach, w które inwestuje z perspektywą długoterminowego posiadania.

Na marzec 2025 całkowite aktywa pod jego zarządzaniem warte są około 3,1 mld USD. Jego benchmarkiem jest indeks *S&P 500*. Więcej informacji można znaleźć na stronie funduszu: [link](#).

Rysunek 10 pokazuje, że wartości indeksu akceptowalności dla tego funduszu w rozważanym okresie różnią się nieznacznie ze względu na metodę obliczenia i osiągają

długookresową średnią na poziomie $\alpha_{\text{śr.}} = 2,78$.



Rysunek 10: Porównanie notowań funduszu *Sequoia Fund* oraz indeksu *S&P 500* (góra), wartości indeksu akceptowalności α obliczanego w rocznych oknach 52-tygodniowych (środek) oraz jego średniej kroczącej z 260 tygodni (dół), wyznaczonej metodą empiryczną i przy założeniu normalności.

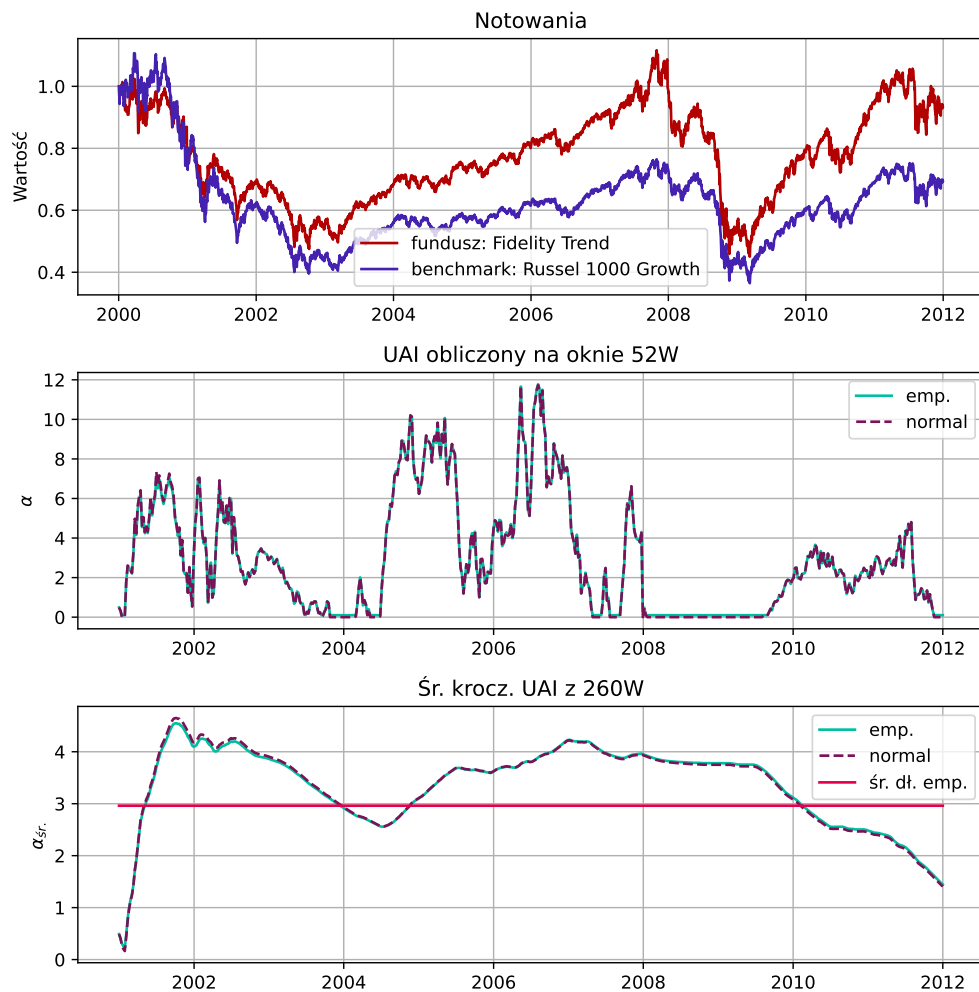
4.2.4 Fidelity Trend Fund

Fidelity Trend Fund (ticker: *FTRNX*) to amerykański fundusz zarządzany aktywnie przez *Fidelity Investments*. Jego celem inwestycyjnym jest długoterminowy wzrost kapitału poprzez inwestycje głównie w akcje dużych spółek wzrostowych w USA i na całym świecie, z szeroką dywersyfikacją portfela oraz akcentem na technologie i konsumpcję. Na maj 2025 całkowite aktywa pod jego zarządzaniem wynoszą około 3,8 mld USD. Jego benchmarkiem jest indeks *Russell 1000 Growth*. Więcej informacji można znaleźć na stronie funduszu: [link](#)

Rysunek 13 pokazuje, że wartości indeksu akceptowalności dla tego funduszu w rozważanym okresie różnią się nieznacznie ze względu na metodę obliczenia i osiągają długookresową średnią na poziomie $\alpha_{\text{śr.}} = 2,96$.

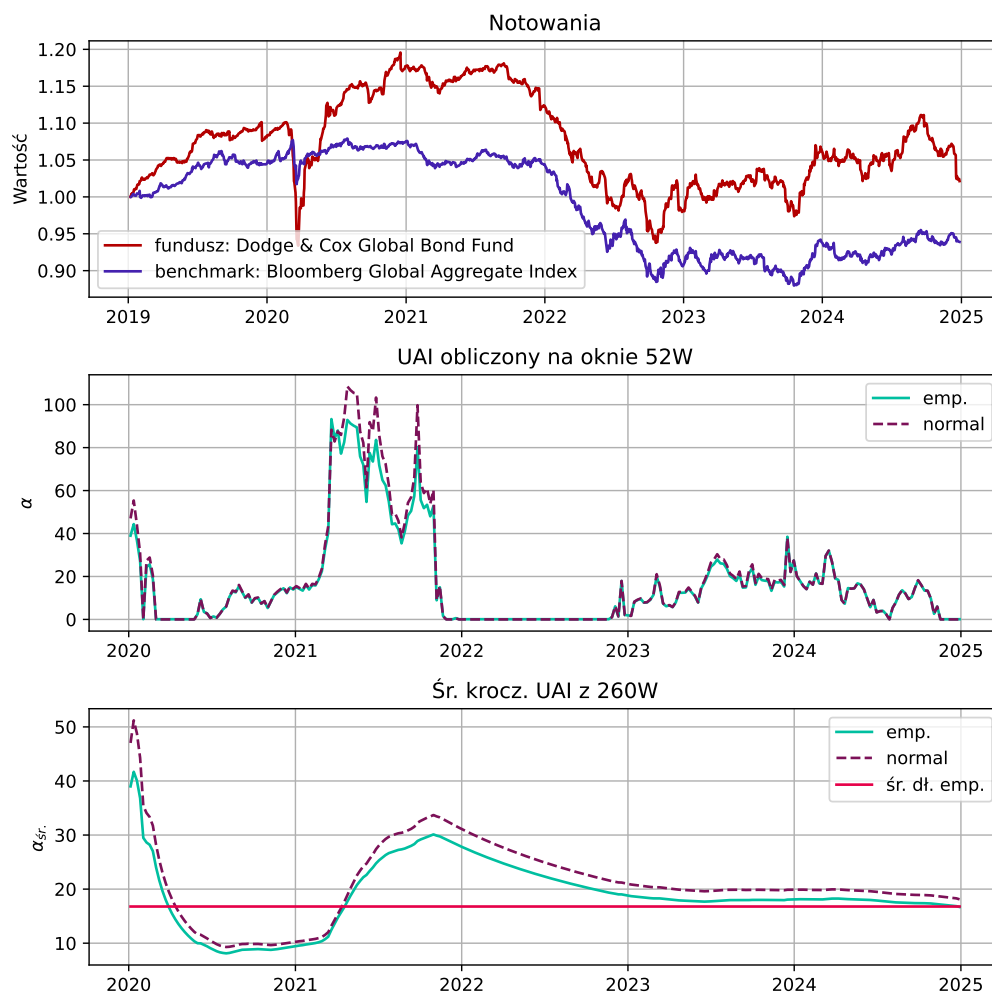
W okresie 2008–2010 indeks akceptowalności przyjmuje wartość zero, co wynika zarówno z definicyjnego dolnego ograniczenia odwzorowania, jak i z wyjątkowo nie-

sprzyjających warunków rynkowych podczas światowego kryzysu finansowego. Taki rezultat podkreśla ekstremalny charakter spadków wartości rozważanego indeksu w tym okresie.



Rysunek 11: Porównanie notowań funduszu *Fidelity Trend Fund* oraz indeksu *Russell 1000 Growth* (góra), wartości indeksu akceptowalności α obliczanego w rocznych oknach 52-tygodniowych (środek) oraz jego średniej kroczącej z 260 tygodni (dół), wyznaczonej metodą empiryczną i przy założeniu normalności.

4.2.5 Dodge & Cox Global Bond Fund



Rysunek 12: Porównanie notowań funduszu *Dodge & Cox Global Bond Fund* oraz indeksu *Bloomberg Global Aggregate Bond Index (USD-hedged)* (górną), wartości indeksu akceptowalności α obliczanego w rocznych oknach 52-tygodniowych (środek) oraz jego średniej kroczącej z 260 tygodni (dół), wyznaczonej metodą empiryczną i przy założeniu normalności.

Dodge & Cox Global Bond Fund (ticker: *DODLX*) to amerykański fundusz zarządzany aktywnie przez firmę *Dodge & Cox*. Jego celem inwestycyjnym jest osiągnięcie wysokiego i stabilnego łącznego zwrotu przy długoterminowym zachowaniu kapitału, poprzez inwestycje w zdywersyfikowane instrumenty dłużne na rynkach rozwiniętych i rozwijających się, uwzględniając czynniki makroekonomiczne, walutowe, kredytowe i ESG¹.

Na marzec 2025 całkowite aktywa pod jego zarządzaniem wynosiły około 3,3 mld USD. Jego benchmarkiem jest indeks *Bloomberg Global Aggregate Bond Index (USD-hedged)*. Fundusz jest porównywany do tego indeksu pod względem zwrotów

¹ESG (ang. *Environmental, Social and Governance*) to zestaw kryteriów pozafinansowych używanych do oceny wpływu działalności firmy na środowisko, społeczeństwo oraz sposób zarządzania uwzględniany przez inwestorów przy podejmowaniu decyzji inwestycyjnych.

na poziomie globalnych obligacji inwestycyjnych w dolarze. Więcej informacji można znaleźć na stronie funduszu: [link](#).

Rysunek 12 pokazuje, że wartości indeksu akceptowalności dla tego funduszu w rozważanym okresie różnią się w niewielkim stopniu ze względu na metodę obliczenia i osiągają długookresową średnią na poziomie $\alpha_{\text{sr.}} = 16,78$. Wartość ta jest znacząco wyższa niż w poprzednio rozważanych funduszach, co jest zgodne z oczekiwaniami, jako że fundusz w założeniach jest bardziej konserwatywny i przez to odpowiedni dla inwestora o wyższej awersji do ryzyka.

Różnice w otrzymanych rezultatach dla obu metod są oczekiwane, gdyż fundusz ten, w odróżnieniu od poprzednich rozważanych funduszy, nie inwestuje na rynku akcyjnym, lecz dłużnym, dla którego założenie o normalności rocznych stóp zwrotów nie ma podstaw teoretycznych.

W okresie 2022–2023 indeks akceptowalności przyjmuje wartość zero. Słabsze wyniki funduszu spowodowane były przede wszystkim agresywnym zacieśnianiem polityki pieniężnej związanym z niepewnością inflacyjną², kryzysem wywołanym wojną na Ukrainie³.

4.2.6 Dodge & Cox Income Fund

Dodge & Cox Income Fund (ticker: *DODIX*) to amerykański fundusz zarządzany aktywnie przez firmę *Dodge & Cox*. Jego celem inwestycyjnym jest osiągnięcie wysokiego i stabilnego bieżącego dochodu przy jednoczesnym zachowaniu realnej wartości kapitału. Fundusz inwestuje głównie w obligacje o ratingu inwestycyjnym, w tym papiery skarbowe, korporacyjne, hipoteczne oraz inne instrumenty dłużne, stosując podejście oparte na analizie fundamentalnej i długoterminowej perspektywie inwestycyjnej.

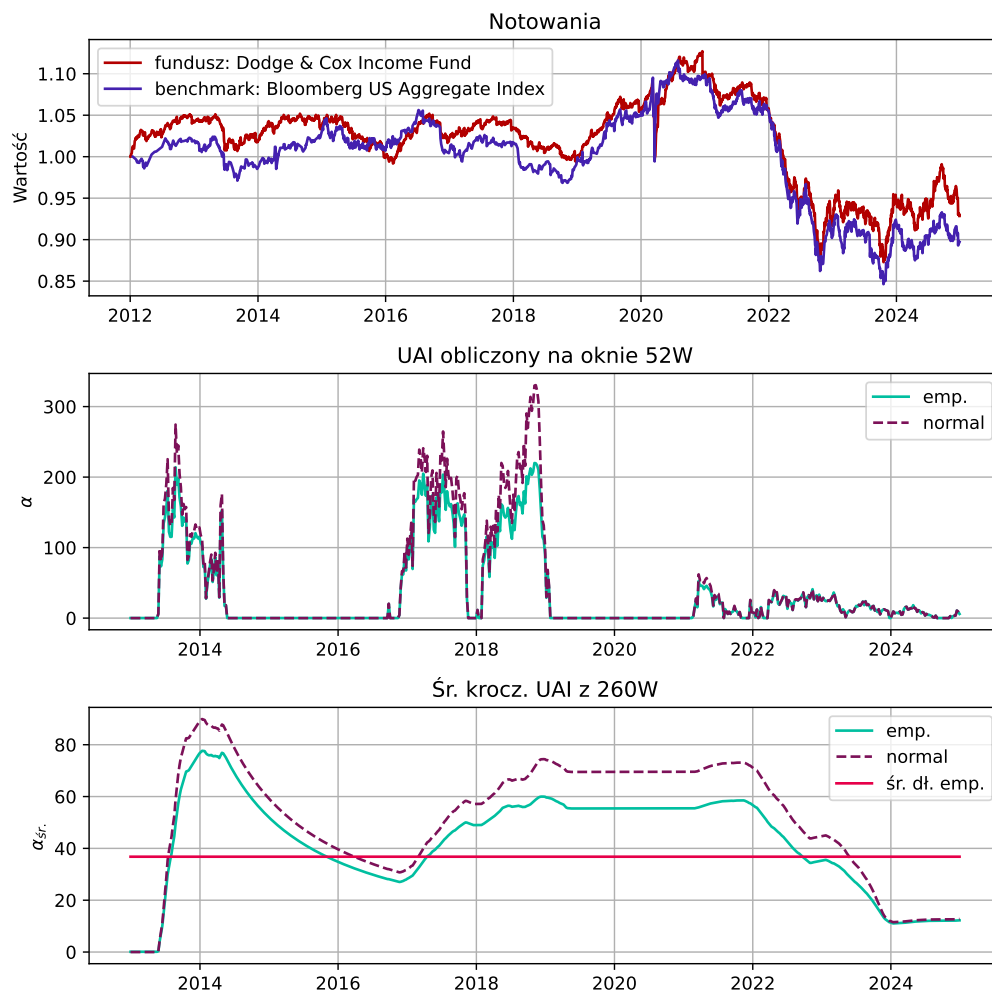
Na marzec 2025 całkowite aktywa pod jego zarządzaniem warte są około 94.7 mld USD. Jego benchmarkiem jest indeks *Bloomberg U.S. Aggregate Bond Index*. Fundusz jest porównywany bezpośrednio do tego indeksu jako reprezentatywnego dla amerykańskiego rynku obligacji o ratingu inwestycyjnym. Więcej informacji można znaleźć na stronie funduszu: [link](#).

Rysunek 12 pokazuje, że wartości indeksu akceptowalności dla tego funduszu w rozważanym okresie już znacząco różnią się ze względu na metodę obliczenia. W tym przypadku takie różnice w otrzymanych rezultatach dla obu metod są także oczekiwane, gdyż fundusz ten inwestuje w amerykańskie obligacje o wysokim ratingu. Dla takiego portfela założenie o normalności rocznych stóp zwrotów również nie ma podstaw teoretycznych.

Długookresowa średnia wartości indeksu akceptowalności wynosi $\alpha_{\text{sr.}} = 36,79$. Wartość ta jest najwyższa spośród rozważanych funduszy, co jest zgodne z oczekiwaniami, jako że fundusz w założeniach jest bardzo konserwatywny i przez to odpowiedni dla inwestora o wysokiej awersji do ryzyka.

²The Global Transmission of Inflation Uncertainty, Federal Reserve, 16 January 2025. <https://www.federalreserve.gov/econres/notes/feds-notes/the-global-transmission-of-inflation-uncertainty-20250116.html>

³Commodity forecasts are absurd, but China is key as Ukraine fades, Russell, Reuters, 20 December 2022. <https://www.reuters.com/markets/commodities/commodity-forecasts-are-absurd-china-is-key-ukraine-fades-russell-2022-12-20/>



Rysunek 13: Porównanie notowań funduszu *Dodge & Cox Income Fund* oraz indeksu *Bloomberg U.S. Aggregate Bond Index* (góra), wartości indeksu akceptowalności α obliczanego w rocznych oknach 52-tygodniowych (środek) oraz jego średniej kroczącej z 260 tygodni (dół), wyznaczonej metodą empiryczną i przy założeniu normalności.

4.3 Wnioski empiryczne

Przeprowadzona analiza empiryczna pozwala na sformułowanie kilku kluczowych wniosków dotyczących zastosowania indeksów akceptowalności opartych na funkcjach użyteczności do oceny efektywności funduszy inwestycyjnych oraz do odzyskiwania implikowanej awersji do ryzyka inwestorów.

Wartości $\alpha_{\text{śr.}}$ rosną wraz ze wzrostem konserwatyzmu portfela:

- $\alpha_{\text{śr.}} \approx 0,5\text{--}4,5$ dla funduszy akcyjnych;
- $\alpha_{\text{śr.}} \approx 17$ dla *Dodge & Cox Global Bond Fund*,
- $\alpha_{\text{śr.}} \approx 37$ dla *Dodge & Cox Income Fund*.

Oznacza to, że inwestor skłonny akceptować ryzyko portfela *Dodge & Cox Income Fund* musiałby charakteryzować się wielokrotnie wyższą awersją do ryzyka niż inwestor

akceptujący ryzyko funduszy akcyjnych. Indeks akceptowalności działa tu jako narzędzie odzyskania preferencji inwestora z obserwowanych danych rynkowych.

Otrzymane wyniki ilościowo potwierdzają tezę, że bardziej konserwatywne fundusze dostarczają wyższych wartości indeksu akceptowalności, a więc są preferowane przez inwestorów o wyższej awersji. Przedstawiona analiza wskazuje, że indeksy akceptowalności oparte na funkcjach użyteczności dostarczają spójnego, ilościowego narzędzia do pomiaru awersji do ryzyka.

Zastosowanie dwóch podejść – empirycznego i opartego na założeniu normalności logarytmicznych stóp zwrotu – pokazało, że dla portfeli akcyjnych (*Fidelity Magellan*, *Fidelity Select Defense & Aerospace Portfolio* *Sequoia Fund*, *Fidelity Trend*) oba podejścia dają zbliżone rezultaty, podczas gdy dla portfeli obligacyjnych (*Dodge & Cox Global Bond Fund*, *Dodge & Cox Income Fund*) użycie formuły opartej wyłącznie o średnią i wariancję prowadzi do istotnych zawyżeń wartości indeksu, co zostało przedstawione w Tabeli 4.

Fundusz	Metoda empiryczna	Metoda średnia-wariancja	Różnica relatywna [%]
Fidelity Magellan	0,62	0,62	0,00
Fidelity SD&A Portfolio	4,19	4,19	0,00
Sequoia Fund	2,78	2,81	+1,08
Fidelity Trend	2,96	2,95	−0,34
D&C Global Bond Fund	16,78	18,22	+8,58
D&C Income Fund	36,79	44,06	+19,75

Tabela 4: Wartości średniego indeksu akceptowalności α dla metody empirycznej i metody średniej-wariancji oraz względna różnica względem wartości obliczonych metodą empiryczną.

Zaprezentowane wyniki wskazują, że teoria oparta o indeksy akceptowalności może pozwalać na lepszą identyfikację preferencji, szczególnie dla portfeli obligacyjnych, w których pomiar akceptacji oparty o średnią i wariancję prowadzi do zawyżenia otrzymanej awersji do ryzyka.

Zakończenie

W niniejszej pracy przedstawiliśmy podejścia do pomiaru użyteczności i ryzyka oraz powiązaliśmy tę teorię z normatywną teorią indeksów akceptowalności. W szczególności przedstawiliśmy rodzinę indeksów akceptowalności opartych na użyteczności oraz przeanalizowaliśmy jej własności normatywne.

Przedstawiliśmy również kluczowe przykłady zastosowań indeksów akceptowalności, czyli wykorzystanie ich do wyceny stożkowej i arbitrażu, testowania wstecznego oraz do oceny efektywności portfela i pomiaru awersji do ryzyka.

Uzyskane w analizie empirycznej wyniki potwierdziły, że indeksy akceptowalności oparte na funkcjach użyteczności dostarczają spójnego, ilościowego narzędzia do pomiaru awersji do ryzyka. Ponadto, wyniki te wskazują, że teoria oparta o indeksy akceptowalności może pozwalać na lepszą identyfikację preferencji, szczególnie dla portfeli obligacyjnych, w których pomiar akceptacji oparty o średnią i wariancję prowadzi do zawyżenia otrzymanej awersji do ryzyka.

Praca usystematyzowała teorię indeksów akceptowalności oraz ukazała ich praktyczny potencjał — co zostało zaprezentowane w części empirycznej — zważywszy, że dotychczasowe badania koncentrowały się głównie na podejściu teoretycznym, podczas gdy indeksy te znajdują bezpośrednie i interesujące zastosowania empiryczne.

Dodatek A

Dowody twierdzeń i własności

W tej części prezentujemy dowody wybranych twierdzeń, własności i przykładów przytoczonych w głównej części pracy. Numeracja twierdzeń, przykładów i definicji odpowiada numeracji z rozdziałów wcześniejszych.

A.0.1 Dowód Własności 1.2.5.

Dowód. Udowodnijmy na początku pierwszą część własności:

1. Jeśli ρ jest wypukła, to dla dowolnych $X, Y \in \mathcal{A}_\rho$ oraz $\lambda \in [0, 1]$ zachodzi:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y) \leq 0,$$

a zatem pokazaliśmy, że \mathcal{A}_ρ jest wypukły.

Aby udowodnić implikację w drugą stronę weźmy dowolne $X, Y \in L^\infty$ i $\lambda \in [0, 1]$. Wtedy:

$$X - \rho(X) \in \mathcal{A}_\rho \quad \text{oraz} \quad Y - \rho(Y) \in \mathcal{A}_\rho.$$

Z wypukłości zbioru \mathcal{A}_ρ wynika, że:

$$\lambda[X - \rho(X)] + (1 - \lambda)[Y - \rho(Y)] \in \mathcal{A}_\rho,$$

co przekłada się na nierówność:

$$0 \geq \rho(\lambda[X - \rho(X)] + (1 - \lambda)[Y - \rho(Y)]).$$

Następnie, korzystając z niezmienniczości na przesunięcia, otrzymujemy:

$$0 \geq \rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) - \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$

Stąd już bezpośrednio widać, że:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y),$$

co dowodzi wypukłości ρ .

2. Załóżmy, że ρ jest koherentna. Jeśli $X \in \mathcal{A}_\rho$, to $\rho(X) \leq 0$. Z dodatniej jednorodności otrzymujemy:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \leq 0,$$

co pokazuje, że λX również należy do \mathcal{A}_ρ . Zbiór akceptacji zamyka się więc na mnożenie przez skalar $\lambda \geq 0$, czyli jest stożkiem.

Następnie, koherencja ρ zakłada także subaddytywność:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Jeśli $X, Y \in \mathcal{A}_\rho$, to mamy $\rho(X) \leq 0$ i $\rho(Y) \leq 0$. Z subaddytywności wynika:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \leq 0,$$

zatem $X + Y \in \mathcal{A}_\rho$. Otrzymujemy w ten sposób wypukłość zbioru \mathcal{A}_ρ . Łącznie dowodzi to, że \mathcal{A}_ρ jest wypukłym stożkiem.

Aby pokazać przeciwną implikację, weźmy $X \in L^\infty$. Wtedy $X + \rho(X) \in \mathcal{A}_\rho$. Zakładamy, że \mathcal{A}_ρ jest wypukłym stożkiem, zatem dla dowolnego $\lambda \geq 0$ mamy:

$$\lambda(X + \rho(X)) \in \mathcal{A}_\rho,$$

co oznacza:

$$0 \geq \rho(\lambda(X + \rho(X))).$$

Korzystając z niezmienniczości na przesunięcia, otrzymujemy:

$$\rho(\lambda X) \leq \lambda \rho(X).$$

Z drugiej strony, dla dowolnego $m \in \mathbb{R}$ takiego, że $m > \rho(X)$, mamy:

$$X + m \notin \mathcal{A}_\rho.$$

Ponieważ \mathcal{A}_ρ jest wypukłym stożkiem, to dla dowolnego $\lambda > 0$ zachodzi:

$$\lambda(X + m) \notin \mathcal{A}_\rho.$$

Wobec tego:

$$0 < \rho(\lambda(X + m)) = \rho(\lambda X) - \lambda m,$$

co prowadzi do nierówności:

$$\rho(\lambda X) > \lambda m.$$

Biorąc następnie infimum po wszystkich m spełniających $m > \rho(X)$, otrzymujemy:

$$\rho(\lambda X) \geq \inf \{ \lambda m : m > \rho(X) \} = \lambda \rho(X).$$

Ostatecznie uzyskujemy w ten sposób własność dodatniej jednorodności dla ρ . Aby otrzymać własność subaddytywności ρ , wystarczy skorzystać z wypukłości \mathcal{A}_ρ (por. podpunkt 1), co przekłada się na wypukłość samej miary ryzyka ρ . Dla dowolnych $X, Y \in L^\infty$ mamy:

$$\rho\left(\frac{1}{2}(X + Y)\right) = \rho\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y\right) \leq \rho\left(\frac{1}{2}X\right) + \rho\left(\frac{1}{2}Y\right),$$

a następnie, korzystając z dopiero co udowodnionej dodatniej jednorodności, otrzymujemy:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

W ten sposób uzyskujemy subaddytywność ρ .

Drugą część własności udowadnia się analogicznie jak pierwszą. □

A.0.2 Dowód Faktu 2.1.7 (Gain-Loss Ratio).

Dowód. Przypomnijmy, że dla $X \in L^\infty$ współczynnik GLR jest zdefiniowany wzorem:

$$GLR(X) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X^-]}, & \text{jeśli } \mathbb{E}[X] \geq 0 \text{ oraz } \mathbb{E}[X^-] > 0, \\ \infty, & \text{jeśli } \mathbb{E}[X] \geq 0 \text{ oraz } \mathbb{E}[X^-] = 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

gdzie $X^- := \max\{0, -X\}$.

Aby wykazać, że GLR jest koherentnym indeksem akceptowalności, należy udowodnić, że spełnia on aksjomaty z Definicji 2.1.4: quasi-wklęsłość, monotoniczność, niezmienniczość na skalowanie oraz ciągłość z góry.

1. **Quasi-wklęsłość.** Rozważmy $X, Y \in L^\infty$ oraz $\lambda \in [0, 1]$. Jeśli $GLR(X) \geq x$ i $GLR(Y) \geq x$ dla pewnego $x \geq 0$, to:

$$\mathbb{E}[X] \geq x\mathbb{E}[X^-], \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}[Y] \geq x\mathbb{E}[Y^-].$$

Z nierówności Jensena dla wklęsłej funkcji $u(z) = z^-$ wynika:

$$(\lambda X + (1 - \lambda)Y)^- \leq \lambda X^- + (1 - \lambda)Y^-.$$

Biorąc wartość oczekiwaną, otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[(\lambda X + (1 - \lambda)Y)^-] \leq \lambda \mathbb{E}[X^-] + (1 - \lambda)\mathbb{E}[Y^-].$$

Z kolei:

$$\mathbb{E}[\lambda X + (1 - \lambda)Y] = \lambda \mathbb{E}[X] + (1 - \lambda)\mathbb{E}[Y] \geq x(\lambda \mathbb{E}[X^-] + (1 - \lambda)\mathbb{E}[Y^-]).$$

W konsekwencji:

$$GLR(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \geq x.$$

To dowodzi quasi-wklęsłości.

2. **Monotoniczność.** Jeżeli $X \leq Y$ p.w., wówczas $X^- \geq Y^-$. Ponadto $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$. Jeśli $\mathbb{E}[Y] > 0$, to także $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$ nie przekreśla faktu, że $\mathbb{E}[X]$ może być dodatnia, ale w każdym przypadku mamy:

$$\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X^-]} \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[Y^-]}.$$

Stąd $GLR(X) \leq GLR(Y)$. Natomiast jeśli $\mathbb{E}[Y] \leq 0$, to $GLR(Y) = 0$, a z kolei $X \leq Y$ implikuje $\mathbb{E}[X] \leq 0$, zatem i $GLR(X) = 0$. Tak czy inaczej, $GLR(X) \leq GLR(Y)$.

3. **Niezmienniczość na skalowanie.** Dla $\lambda > 0$ zachodzi:

$$GLR(\lambda X) = \frac{\mathbb{E}[\lambda X]}{\mathbb{E}[(\lambda X)^-]} = \frac{\lambda \mathbb{E}[X]}{\lambda \mathbb{E}[X^-]} = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X^-]} = GLR(X).$$

4. **Ciągłość z góry.** Niech $(X_n)_{n=1}^\infty \subset L^\infty$. Dzięki twierdzeniu Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej można zamienić kolejność granicy i wartości oczekiwanej:

$$\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X], \quad \mathbb{E}[X_n^-] \rightarrow \mathbb{E}[X^-].$$

Zatem:

$$GLR(X_n) = \frac{\mathbb{E}[X_n]}{\mathbb{E}[(X_n)^-]} \rightarrow \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X^-]} = GLR(X).$$

Zatem wszystkie aksjomaty z Definicji 2.1.4 są spełnione, co kończy dowód. \square

A.0.3 Dowód Własności 2.4.2.

Dowód. Niech $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2$ oraz niech $U_{\gamma_1}, U_{\gamma_2}$ będą ściśle wklęsłymi, ściśle rosnącymi i dwukrotnie różniczkowalnymi funkcjami użyteczności ograniczonymi z góry. Ponieważ U_{γ_1} jest ściśle rosnąca, istnieje jej funkcja odwrotna $U_{\gamma_1}^{-1}$. Definiujemy:

$$F(x) := U_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)).$$

Najpierw obliczamy pierwszą pochodną F otrzymując:

$$F'(x) = \frac{U'_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))}{U'_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))}.$$

Druga pochodna wynosi:

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{U''_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)) \cdot [U_{\gamma_1}^{-1}(x)]' \cdot U'_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)) - U'_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)) \cdot U''_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)) \cdot [U_{\gamma_1}^{-1}(x)]'}{[U'_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))]^2} \\ &= \frac{U''_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)) - U'_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)) \cdot U'_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)) \frac{1}{U'_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))}}{[U'_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))]^2} \\ &= \frac{\frac{U''_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))}{U'_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))} \cdot U'_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)) - U'_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)) \cdot \frac{U''_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))}{U'_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))}}{[U'_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))]^2} \\ &= \frac{U'_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))}{[U'_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))]^2} [A_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)) - A_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x))]. \end{aligned}$$

Ponieważ pochodna U'_{γ_1} i U'_{γ_2} są dodatnie (funkcje ściśle rosnące), znak $F''(x)$ zależy wyłącznie od wyrażenia:

$$A_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)) - A_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}^{-1}(x)).$$

Zatem, jeżeli założymy, że odwzorowanie:

$$\gamma \mapsto A_{\gamma}(x)$$

jest funkcją niemalejącą dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to $F(x)$ jest wklęsła. A zatem dla każdego $X \in L^{\infty}$ możemy skorzystać z nierówności Jensena, otrzymując:

$$\mathbb{E}[U_{\gamma_2}(X)] = \mathbb{E}[(F \circ U_{\gamma_1})(X)] \leq F(\mathbb{E}[U_{\gamma_1}(X)]),$$

co jest równoważne z:

$$U_{\gamma_2}^{-1}(\mathbb{E}[U_{\gamma_2}(X)]) \leq U_{\gamma_1}^{-1}(\mathbb{E}[U_{\gamma_1}(X)]),$$

czyli otrzymujemy:

$$\mu_{\gamma_1}(X) \leq \mu_{\gamma_2}(X).$$

Aby pokazać implikację:

$$\mu_{\gamma_1}(X) \leq \mu_{\gamma_2}(X) \quad \forall X \in L^{\infty} \implies A_{\gamma_1} \leq A_{\gamma_2}$$

założymy, że istnieje takie x_0 , że $A_{\gamma_1}(x_0) \geq A_{\gamma_2}(x_0)$. Oznacza to, że istnieje otoczenie x_0 w którym F jest wypukła, co prowadzi do istnienia takiego $X \in L^{\infty}$, że $\mu_{\gamma_1}(X) > \mu_{\gamma_2}(X)$, co jest sprzeczne z założeniem. \square

A.0.4 Dowód Twierdzenia 3.1.6.

Dowód. Udowodnimy tylko wzór na cenę opcji kupna o wypłacie:

$$C = (S_T - K)^+,$$

gdzie S_T to cena instrumentu bazowego w momencie T , zaś K jest ceną wykonania. Reszta wzorów może być udowodniona za pomocą niemal identycznych technik oraz przejść.

Dzięki reprezentacji (3.2) cena bid $b_c(\cdot)$ ma postać:

$$b_c(C) = \int_0^\infty x d\Psi^c(F(x)).$$

Przechodzimy z miary $\Psi^c(F(x))$ na $\Psi^c(F(x))$ uwzględniając, że kiedy $x < K$, składnik $(S_T - K)^+ < x$ nie występuje; natomiast powyżej $x \geq K$ zaczyna się właściwy zakres. Otrzymujemy:

$$b_c(C) = \int_0^\infty x d\Psi^c(F(x)) = \int_K^\infty (x - K) d\Psi^c(F(x)).$$

Korzystamy z całkowania przez części:

$$\int_K^\infty (x - K) d\Psi^c(F(x)) = \left[(x - K) \Psi^c(F(x)) \right]_K^\infty - \int_K^\infty \Psi^c(F(x)) dx,$$

otrzymując ostatecznie:

$$b_c(C) = \int_K^\infty [1 - \Psi^c(F(x))] dx.$$

□

A.0.5 Dowód Własności 3.2.1.

Dowód. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $y = (y_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Załóżmy, że $y_{(n)} \geq 0$. Wtedy:

$$\begin{aligned} \inf\{\alpha \in (0, 1) : V\hat{\otimes} R_n^\alpha(y) \leq 0\} &= \inf\{\alpha \in (0, 1) : -y_{(\lfloor n\alpha \rfloor + 1)} \leq 0\} \\ &= \frac{1}{n} \inf\{k \in (0, n) : y_{(\lfloor k \rfloor + 1)} \geq 0\} \\ &= \frac{1}{n} \inf\{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : y_{(k+1)} \geq 0\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{y_{(k)} < 0\}}. \end{aligned}$$

Jeżeli $y_{(n)} < 0$ to zgodnie z przyjętą konwencją $\inf \emptyset = 1$.

□

A.0.6 Dowód Własności 3.2.2.

Dowód. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $y = (y_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Załóżmy, że $\sum_{i=1}^n y_i \geq 0$. Wtedy:

$$\begin{aligned}
\inf\{\alpha \in (0, 1): \hat{ES}_n^\alpha(y) \leq 0\} &= \inf\{\alpha \in (0, 1): -\frac{\sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{\{y_i + V \hat{\otimes} R_n^\alpha(y) \leq 0\}}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{y_i + V \hat{\otimes} R_n^\alpha(y) \leq 0\}}} \leq 0\} \\
&= \inf\{\alpha \in (0, 1): \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{\{y_i - y_{(\lfloor n\alpha \rfloor + 1)} \leq 0\}} \geq 0\} \\
&= \frac{1}{n} \inf\{k \in (0, n): \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{\{y_i - y_{(\lfloor k \rfloor + 1)} \leq 0\}} \geq 0\} \\
&= \frac{1}{n} \inf\{k \in \{1, \dots, n-1\}: \sum_{i=1}^n y_{(i)} \mathbf{1}_{\{y_{(i)} - y_{(k+1)} \leq 0\}} \geq 0\} \\
&= \frac{1}{n} \inf\{k \in \{1, \dots, n-1\}: \sum_{i=1}^{k+1} y_{(i)} \geq 0\} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{y_{(1)} + \dots + y_{(k)} < 0\}}.
\end{aligned}$$

Jeżeli $\sum_{i=1}^n y_i < 0$ to zgodnie z przyjętą konwencją $\inf \emptyset = 1$. □

Bibliografia

- Acemoglu, D. and Scott, A. (1991). Consumer confidence and rational expectations: Are agents' beliefs consistent with the theory? *Economic Journal*, 101(409):591--614.
- Alexander, C. (2009). *Market Risk Analysis, Value at Risk Models*, volume 4. John Wiley & Sons.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9:203--228.
- BCBS (2016). Minimum capital requirements for market risk. Technical report, Bank for International Settlements.
- Bernoulli, D. (1738). *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*. English translation: *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk*, *Econometrica*, 1954, vol. 22, pp. 23--36.
- Cherny, A. and Madan, D. (2009). New measures for performance evaluation. *The Review of Financial Studies*, 22(7):2571--2606.
- Cherny, A. and Madan, D. B. (2010). Markets as a counterparty: An introduction to conic finance. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13(8):1149--1177.
- Föllmer, H. and Schied, A. (2002). Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics*, 6(4):429--447.
- Frittelli, M. and Maggis, M. (2011). Dual representation of quasi-convex conditional maps. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2:357--382.
- Gianin, E. R. and Sgarra, C. (2013). Acceptability indexes via “g-expectations”: An application to liquidity risk. *Mathematics and Financial Economics*, 7:457--475.
- Gneiting, T. (2011). Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 106(494):746--762.
- Ibragimov, I. A. and Linnik, Y. V. (1971). *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*. Wolters-Noordhoff, Groningen.
- Kováčová, G., Rudloff, B., and Cialenco, I. (2022). Acceptability maximization. *Frontiers of Mathematical Finance*, 1(2):219--248.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77--91.

- McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools (Revised Edition)*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Merton, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3(4):373--413.
- Miller, R. (2007). Stansky's monster: A critical examination of fidelity magellan's 'frankenfund'. Technical Report SSRN 964824, State University of New York (SUNY) at Albany. Available via SSRN.
- Moldenhauer, F. and Pitera, M. (2019). Backtesting expected shortfall: A simple recipe? *Journal of Risk*, 22(1):1--26.
- Pham, H. (2009). *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, volume 61 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, New York.
- Pitera, M. and Rásonyi, M. (2024). Short communication: Utility-based acceptability indices. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 16(3):DOI: 10.1137/24M1632486. Short Communication.
- Pitera, M. and Schmidt, T. (2018). Unbiased estimation of risk. *Journal of Banking & Finance*, 91:133--145. Available online 26 April 2018.
- Rosazza Gianin, E. and Sgarra, C. (2013). Acceptability indexes via "g-expectations": An application to liquidity risk. *Math. Financ. Econ.*, 7:457--475.
- Sereda, E. N., Bronshtein, E. M., Rachev, S. T., Fabozzi, F. J., Sun, W., and Stoyanov, S. V. (2010). Distortion risk measures in portfolio optimization. In *Handbook of Portfolio Construction*, page 649. Springer.
- von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton.