Referat o martyngale co kończy dwojako i przebija bariery

KNMF 2024

Maciej Żurawski

Uniwersytet Jagielloński

maciej.zurawski@student.uj.edu.pl

9 kwietnia 2025

Plan prezentacji

Skąd wziąłem problem?

Skąd wziąłem problem?

An application of the Optional Sampling Theorem

Asked 13 years, 3 months ago Modified 3 months ago Viewed 495 times

6

let $S(k)$, $k \geq 0$ a discrete random process. Suppose $S(N)$ is with probability one either 100 or 0 and that $S(0) = 50$. Suppose further there is at least a sixty percent probability that the price will at some point dip below 40 and then subsequently rise above 60 before time N. How do you prove that $S(k)$ cannot be a martingale?

By advance, thank you very much for your help.

probability stochastic-processes martingales

Share Cite Edit Follow Flag

edited Jan 25, 2012 at 20:13
Srivatsan
26.3k ● 7 ■ 91 ▲ 144

asked Dec 8, 2010 at 21:10
akbar
61 ▲ 1

Skąd wziąłem problem?

An application of the Optional Sampling Theorem

Asked 13 years, 3 months ago Modified 3 months ago Viewed 495 times

6

let $S(k)$, $k \geq 0$ a discrete random process. Suppose $S(N)$ is with probability one either 100 or 0 and that $S(0) = 50$. Suppose further there is at least a sixty percent probability that the price will at some point dip below 40 and then subsequently rise above 60 before time N. How do you prove that $S(k)$ cannot be a martingale?

By advance, thank you very much for your help.

probability stochastic-processes martingales

Share Cite Edit Follow Flag

edited Jan 25, 2012 at 20:13
Srivatsan
26.3k ● 7 ■ 91 ▲ 144

asked Dec 8, 2010 at 21:10
akbar
61 ▲ 1

The upper bound on the probability of falling to 40 and then increasing to 60 seems to be $\frac{100-50}{100-40} \times \frac{40-0}{60-0} = \frac{5}{9} < 60\%$ taking into account the end points of 0 and 100 and the martingale – Henry
Aug 16, 2018 at 0:00

Add a comment

Skąd wziąłem problem?

1 Answer

Sorted by: Highest score (default)

0

Let's assume that X_t is a martingale and define

$\tau = \inf_{n \le N} \{n : X_n \le 40\}$,

$\sigma = \inf_{\tau \le n \le N} \{n : X_n \ge 60\}$, where we assume that $\inf \emptyset = +\infty$.

Since $0 \le \tau \wedge N \le \sigma \wedge N \le N$, from Doob's Theorem:

$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau \wedge N}) = \mathbb{E}(X_{\sigma \wedge N})$.

Because

$50 = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau \wedge N}) = \mathbb{E}(X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \le N\}} + X_N \mathbb{1}_{\{\tau > N\}}) = \mathbb{E}(X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \le N\}}) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\tau > N\}}) = 40$
$\cdot \mathbb{P}(\tau \le N) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\tau > N\}}) \le 40 \cdot \mathbb{P}(\tau \le N) + 100 \cdot \mathbb{P}(\tau > N) = 100 - 60 \cdot \mathbb{P}(\tau \le N)$

so we obtain inequality

$\mathbb{P}(\tau \le N) \le \frac{5}{6}$.

Then

$50 = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\sigma \wedge N}) = \mathbb{E}(X_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma \le N\}} + X_N \mathbb{1}_{\{\sigma > N\}}) = 60 \cdot \mathbb{P}(\sigma \le N)$
$+ \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma \ge \tau > N\}} + X_N \mathbb{1}_{\{\sigma \ge N \ge \tau\}}) \ge 60 \cdot \mathbb{P}(\sigma \le N) + 100 \cdot \mathbb{P}(\tau > N) + 0$

so we obtain

$100 \cdot \mathbb{P}(\tau \le N) \ge 60 \cdot \mathbb{P}(\sigma \le N) + 50$,

using first obtained inequality

$100 \cdot \frac{5}{6} \ge 60 \cdot \mathbb{P}(\sigma \le N) + 50$

and finally

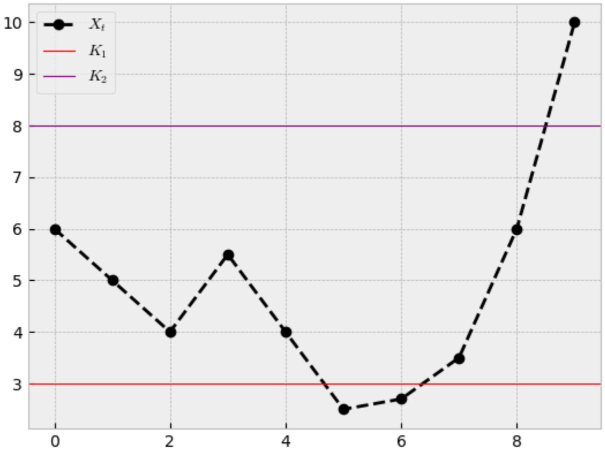
$\mathbb{P}(\sigma \le N) \le \frac{5}{9}$

Share Cite Edit Delete Flag

answered Dec 11, 2023 at 21:38
Mozqrt
41 ▲3

Add a comment

Wizualizacja



Dyskretne podejście

Dyskretne podejście

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n \in \{1,\ldots,N\}}, \mathbb{P})$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$.

Dyskretne podejście

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n \in \{1,...,N\}}, \mathbb{P})$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$.

Niech $X = (X_n, n \in \{0, ..., N\})$ będzie martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \{1,...,N\}}$, takim że $X_N \in \{0, M\}$.

Dyskretne podejście

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n\in\{1,\dots,N\}}, \mathbb{P})$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$.

Niech $X = (X_n, n \in \{0, \dots, N\})$ będzie martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\{1,\dots,N\}}$, takim że $X_N \in \{0, M\}$.

$\tau := \inf_{n\leqslant N}\{n : X_n \leqslant K_1\}$,

Dyskretne podejście

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n\in\{1,\dots,N\}}, \mathbb{P})$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$.

Niech $X = (X_n, n \in \{0, \dots, N\})$ będzie martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\{1,\dots,N\}}$, takim że $X_N \in \{0, M\}$.

$\tau := \inf_{n\leqslant N}\{n : X_n \leqslant K_1\}$,

$\sigma := \inf_{\tau\leqslant n\leqslant N}\{n : X_n \geqslant K_2\}$,

Dyskretne podejście

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n\in\{1,\dots,N\}}, \mathbb{P})$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$.

Niech $X = (X_n, n \in \{0, \dots, N\})$ będzie martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\{1,\dots,N\}}$, takim że $X_N \in \{0, M\}$.

$\tau := \inf_{n\leqslant N}\{n : X_n \leqslant K_1\}$,

$\sigma := \inf_{\tau\leqslant n\leqslant N}\{n : X_n \geqslant K_2\}$,

przy założeniu, że $K_1 < X_0 < K_2$ oraz $\inf \emptyset = +\infty$.

Dyskretne podejście

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n\in\{1,\ldots,N\}}, \mathbb{P})$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$.

Niech $X = (X_n, n \in \{0, \ldots, N\})$ będzie martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\{1,\ldots,N\}}$, takim że $X_N \in \{0, M\}$.

$\tau := \inf_{n\leqslant N}\{n : X_n \leqslant K_1\}$,

$\sigma := \inf_{\tau\leqslant n\leqslant N}\{n : X_n \geqslant K_2\}$,

przy założeniu, że $K_1 < X_0 < K_2$ oraz $\inf \emptyset = +\infty$.

Nasz cel – ile wynosi:

Dyskretne podejście

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n\in\{1,...,N\}}, \mathbb{P})$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$.

Niech $X = (X_n, n \in \{0, ..., N\})$ będzie martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\{1,...,N\}}$, takim że $X_N \in \{0, M\}$.

$\tau := \inf_{n\leqslant N}\{n : X_n \leqslant K_1\}$,

$\sigma := \inf_{\tau\leqslant n\leqslant N}\{n : X_n \geqslant K_2\}$,

przy założeniu, że $K_1 < X_0 < K_2$ oraz $\inf \emptyset = +\infty$.

Nasz cel – ile wynosi:

$\mathbb{P}(\sigma \leqslant N)$

Dyskretne podejście

Ustalmy przestrzeń probabilistyczną z filtracją $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n \in \{1,...,N\}}, \mathbb{P})$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$.

Niech $X = (X_n, n \in \{0, ..., N\})$ będzie martyngałem względem filtracji $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \{1,...,N\}}$, takim że $X_N \in \{0, M\}$.

$\tau := \inf_{n \leqslant N}\{n : X_n \leqslant K_1\}$,

$\sigma := \inf_{\tau \leqslant n \leqslant N}\{n : X_n \geqslant K_2\}$,

przy założeniu, że $K_1 < X_0 < K_2$ oraz $\inf \emptyset = +\infty$.

Nasz cel – ile wynosi:

$\mathbb{P}(\sigma \leqslant N) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\sigma \leqslant N\}})$

Kluczowe twierdzenie (Dooba)

Kluczowe twierdzenie (Dooba)

Twierdznie

Jeżeli X jest dyskretnym nadmartyngałem (podmartyngałem, martyngałem) a τ_i, $i = 1, 2$ są momentami stopu (Markowa), takimi, że:

1. $\tau_1 \leqslant \tau_2$,
2. dla pewnej liczby $N \in \mathbb{N}$, $\tau_2 \leqslant N$.

Wówczas proces $\tilde{X} = (X_{\tau_i}, \mathfrak{F}_{\tau_i})_{i=1,2}$ jest nadmartyngałem (podmartyngałem, martyngałem).

Rozwiązanie

Rozwiązanie

Nasz cel – ile wynosi:
$\mathbb{P}(\sigma \leqslant N) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\sigma \leqslant N\}})$

Rozwiązanie

Nasz cel – ile wynosi:
$\mathbb{P}(\sigma \leqslant N) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\sigma \leqslant N\}})$

Ponieważ $0 \leqslant \tau \wedge N \leqslant \sigma \wedge N \leqslant N$

Rozwiązanie

Nasz cel – ile wynosi:
$\mathbb{P}(\sigma \leqslant N) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\sigma \leqslant N\}})$

Ponieważ $0 \leqslant \tau \wedge N \leqslant \sigma \wedge N \leqslant N$

Zatem z twierdzenia Dooba
$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau \wedge N}) = \mathbb{E}(X_{\sigma \wedge N})$

Rozwiązanie

Nasz cel – ile wynosi:
$\mathbb{P}(\sigma \leqslant N) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\sigma \leqslant N\}})$

Ponieważ $0 \leqslant \tau \wedge N \leqslant \sigma \wedge N \leqslant N$

Zatem z twierdzenia Dooba
$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau \wedge N}) = \mathbb{E}(X_{\sigma \wedge N})$

Zatem
$X_0 = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau \wedge N}) = \mathbb{E}(X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leqslant N\}} + X_N \mathbb{1}_{\{\tau > N\}}) =$
$\mathbb{E}(X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leqslant N\}}) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\tau > N\}}) \leqslant K_1 \cdot \mathbb{P}(\tau \leqslant N) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\tau > N\}}) =$
$K_1 \cdot \mathbb{P}(\tau \leqslant N) + M \cdot \mathbb{P}(\tau > N) = M - (M - K_1) \cdot \mathbb{P}(\tau \leqslant N)$

Rozwiązanie

Nasz cel – ile wynosi:
$\mathbb{P}(\sigma \leqslant N) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\sigma \leqslant N\}})$

Ponieważ $0 \leqslant \tau \wedge N \leqslant \sigma \wedge N \leqslant N$

Zatem z twierdzenia Dooba
$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau \wedge N}) = \mathbb{E}(X_{\sigma \wedge N})$

Zatem
$X_0 = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau \wedge N}) = \mathbb{E}(X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leqslant N\}} + X_N \mathbb{1}_{\{\tau > N\}}) =$
$\mathbb{E}(X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leqslant N\}}) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\tau > N\}}) \leqslant K_1 \cdot \mathbb{P}(\tau \leqslant N) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\tau > N\}}) =$
$K_1 \cdot \mathbb{P}(\tau \leqslant N) + M \cdot \mathbb{P}(\tau > N) = M - (M - K_1) \cdot \mathbb{P}(\tau \leqslant N)$

a więc
$\mathbb{P}(\tau \leqslant N) \leqslant \frac{M - X_0}{M - K_1}$

Rozwiązanie

$$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau \wedge N}) = \mathbb{E}(X_{\sigma \wedge N})$$

Rozwiązanie

$$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau \wedge N}) = \mathbb{E}(X_{\sigma \wedge N})$$

$$X_0 = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\sigma \wedge N}) = \mathbb{E}(X_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma \leqslant N\}} + X_N \mathbb{1}_{\{\sigma > N\}}) =$$
$$\mathbb{E}(X_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma \leqslant N\}}) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma > N\}}) \geqslant K_2 \cdot \mathbb{P}(\sigma \leqslant N) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma > N\}}) =$$
$$\mathrm{K}_2 \cdot \mathbb{P}(\sigma \leqslant N) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma > \tau > N\}}) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma > N \geqslant \tau\}}) =$$
$$\mathrm{K}_2 \cdot \mathbb{P}(\sigma \leqslant N) + M \cdot \mathbb{P}(\tau > N) + 0$$

Rozwiązanie

$$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau\wedge N}) = \mathbb{E}(X_{\sigma\wedge N})$$

$$X_0 = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\sigma\wedge N}) = \mathbb{E}(X_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma\leqslant N\}} + X_N \mathbb{1}_{\{\sigma>N\}}) =$$
$$\mathbb{E}(X_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma\leqslant N\}}) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma>N\}}) \geqslant K_2 \cdot \mathbb{P}(\sigma \leqslant N) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma>N\}}) =$$
$$\mathrm{K}_2 \cdot \mathbb{P}(\sigma \leqslant N) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma>\tau>N\}}) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma>N\geqslant\tau\}}) =$$
$$\mathrm{K}_2 \cdot \mathbb{P}(\sigma \leqslant N) + M \cdot \mathbb{P}(\tau > N) + 0$$

wykorzystując pierwszą otrzymaną nierówność
$$X_0 \geqslant K_2 \cdot \mathbb{P}(\sigma \leqslant N) + M \cdot (1 - \tfrac{M-X_0}{M-K_1})$$

Rozwiązanie

$$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau\wedge N}) = \mathbb{E}(X_{\sigma\wedge N})$$

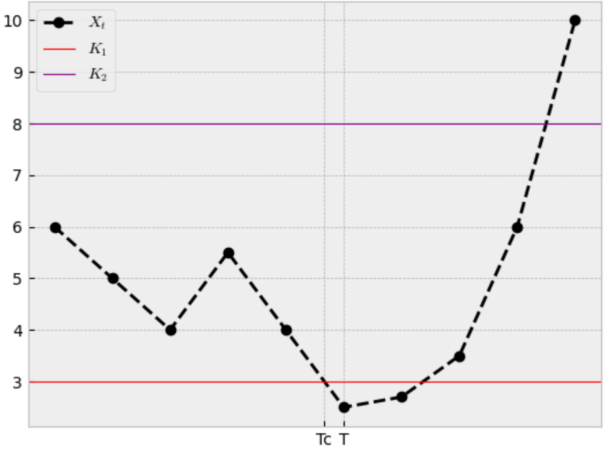
$$X_0 = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\sigma\wedge N}) = \mathbb{E}(X_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma\leqslant N\}} + X_N \mathbb{1}_{\{\sigma>N\}}) =$$
$$\mathbb{E}(X_\sigma \mathbb{1}_{\{\sigma\leqslant N\}}) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma>N\}}) \geqslant K_2 \cdot \mathbb{P}(\sigma \leqslant N) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma>N\}}) =$$
$$K_2 \cdot \mathbb{P}(\sigma \leqslant N) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma>\tau>N\}}) + \mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{\sigma>N\geqslant\tau\}}) =$$
$$K_2 \cdot \mathbb{P}(\sigma \leqslant N) + M \cdot \mathbb{P}(\tau > N) + 0$$

wykorzystując pierwszą otrzymaną nierówność
$$X_0 \geqslant K_2 \cdot \mathbb{P}(\sigma \leqslant N) + M \cdot (1 - \tfrac{M-X_0}{M-K_1})$$

Ostatecznie otrzymując
$$\mathbb{P}(\sigma \leqslant N) \leqslant \tfrac{1}{K_2}(X_0 - M + M\tfrac{M-X_0}{M-K_1}) = \tfrac{M-X_0}{K_2}(-1 + \tfrac{M}{M-K_1}) =$$
$$\tfrac{M-X_0}{K_2}\tfrac{K_1}{M-K_1} = \tfrac{K_1}{K_2}\tfrac{M-X_0}{M-K_1}$$

Kiedy moglibyśmy uzyskać równość?

Kiedy moglibyśmy uzyskać równość?



Kiedy moglibyśmy uzyskać równość?

A zatem dla analogicznego problemu, tyle że w czasie ciągłym, otrzymujemy równości zamiast nierówności:

$$\mathbb{P}(\tau \leqslant N) = \frac{M - X_0}{M - K_1}$$

$$\mathbb{P}(\sigma \leqslant N) = \frac{K_1}{K_2} \frac{M - X_0}{M - K_1}$$

Czy taki martyngał istnieje?

Czy taki martyngał istnieje?

Czy dla przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$ istnieje taka miara $\mathbb{P}$ oraz martyngał $X = (X_t, t \in [0, T])$ względem pewnej filtracji $(\mathfrak{F}_t)_{t \in [0,T]}$ o ciągłych trajektoriach, taki że $X_T \in \{0, M\}$ oraz X_0 jest dowolne na przedziale $[0, M]$?

Czy taki martyngał istnieje?

Czy dla przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$ istnieje taka miara $\mathbb{P}$ oraz martyngał $X = (X_t, t \in [0, T])$ względem pewnej filtracji $(\mathfrak{F}_t)_{t \in [0,T]}$ o ciągłych trajektoriach, taki że $X_T \in \{0, M\}$ oraz X_0 jest dowolne na przedziale $[0, M]$?

Otóż tak!

Czy taki martyngał istnieje?

Czy dla przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$ istnieje taka miara $\mathbb{P}$ oraz martyngał $X = (X_t, t \in [0, T])$ względem pewnej filtracji $(\mathfrak{F}_t)_{t\in[0,T]}$ o ciągłych trajektoriach, taki że $X_T \in \{0, M\}$ oraz X_0 jest dowolne na przedziale $[0, M]$?

Otóż tak!

$$X_t = M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}} | W_t) = M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}} | \mathfrak{F}_t^W)$$

Czy rzeczywiście jest to martyngał?

Czy rzeczywiście jest to martyngał?

1) X_t jest $\mathfrak{F}_t^W$-adaptowalny

Czy rzeczywiście jest to martyngał?

1) X_t jest $\mathfrak{F}_t^W$-adaptowalny

2) $\mathbb{E}(|X_t|) = \mathbb{E}(M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}} | \mathfrak{F}_t)) \leqslant M < \infty$

Czy rzeczywiście jest to martyngał?

1) X_t jest $\mathfrak{F}_t^W$-adaptowalny

2) $\mathbb{E}(|X_t|) = \mathbb{E}(M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}}|\mathfrak{F}_t)) \leqslant M < \infty$

3) $\mathbb{E}(X_t|\mathfrak{F}_s^W) = \mathbb{E}(M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}}|\mathfrak{F}_t^W)|\mathfrak{F}_s^W) =$

$M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}}|\mathfrak{F}_t^W)|\mathfrak{F}_s^W) =$

$M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}}|\mathfrak{F}_s^W) = X_s$

Czy rzeczywiście jest to martyngał?

1) X_t jest $\mathfrak{F}_t^W$-adaptowalny

2) $\mathbb{E}(|X_t|) = \mathbb{E}(M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}}|\mathfrak{F}_t)) \leqslant M < \infty$

3) $\mathbb{E}(X_t|\mathfrak{F}_s^W) = \mathbb{E}(M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}}|\mathfrak{F}_t^W)|\mathfrak{F}_s^W) =$

$M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}}|\mathfrak{F}_t^W)|\mathfrak{F}_s^W) =$

$M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}}|\mathfrak{F}_s^W) = X_s$

$X_0 = M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}}|\mathfrak{F}_0) = M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}}) =$

$M \cdot \mathbb{P}(W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1 - \frac{S}{M})) = M \cdot (1 - \phi(\phi^{-1}(1 - \frac{S}{M}))) =$

$M \cdot (1 - 1 + \frac{S}{M}) = S$

Podsumowanie

1. Dla przypadku dykretnego otrzymujemy nierówności:
   - $\mathbb{P}(\tau \leqslant N) \leqslant \frac{M-X_0}{M-K_1}$
   - $\mathbb{P}(\sigma \leqslant N) \leqslant \frac{K_1}{K_2}\frac{M-X_0}{M-K_1}$

Podsumowanie

1. Dla przypadku dykretnego otrzymujemy nierówności:
   - $\mathbb{P}(\tau \leqslant N) \leqslant \frac{M-X_0}{M-K_1}$
   - $\mathbb{P}(\sigma \leqslant N) \leqslant \frac{K_1}{K_2}\frac{M-X_0}{M-K_1}$
2. Dla przypadku ciągłego otrzymujemy równości:
   - $\mathbb{P}(\tau \leqslant T) = \frac{M-X_0}{M-K_1}$
   - $\mathbb{P}(\sigma \leqslant T) = \frac{K_1}{K_2}\frac{M-X_0}{M-K_1}$

Podsumowanie

1. Dla przypadku dykretnego otrzymujemy nierówności:
   - $\mathbb{P}(\tau \leqslant N) \leqslant \frac{M-X_0}{M-K_1}$
   - $\mathbb{P}(\sigma \leqslant N) \leqslant \frac{K_1}{K_2}\frac{M-X_0}{M-K_1}$
2. Dla przypadku ciągłego otrzymujemy równości:
   - $\mathbb{P}(\tau \leqslant T) = \frac{M-X_0}{M-K_1}$
   - $\mathbb{P}(\sigma \leqslant T) = \frac{K_1}{K_2}\frac{M-X_0}{M-K_1}$
3. Rozważane w problemie martyngały o ciągłych traktoriach istnieją
   - $X_t = M \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_T > \sqrt{T}\phi^{-1}(1-\frac{S}{M})\}} | \mathfrak{F}_t^W)$

Dziękuję!

maciej.zurawski@student.uj.edu.pl

Filtracja spełniająca zwykłe warunki

Filtracja spełniająca zwykłe warunki

Definicja

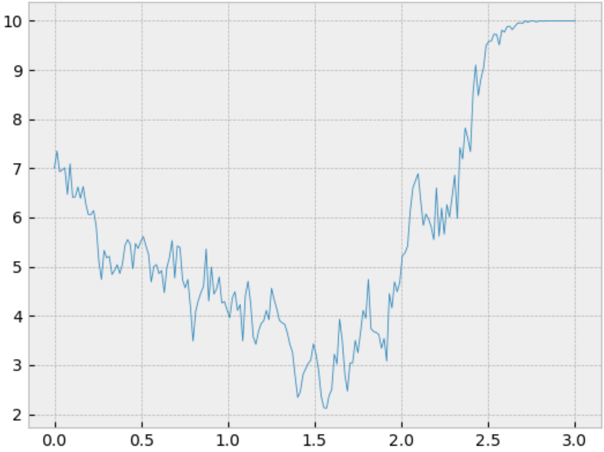
Mówimy, że $(\mathfrak{F}_t)$ spełnia zwykłe warunki gdy:

1. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ jest zupełna, to znaczy
   $\forall A \in \mathfrak{F}, \ \forall B \subset A : \mathbb{P}(A) = 0 \implies B \in \mathfrak{F}$
2. Każde $\mathfrak{F}_t$ zawiera zbiory $\mathbb{P}$-miary zero z $\mathfrak{F}$
3. $(\mathfrak{F}_t)$ jest prawostronnie ciągła, to znaczy $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t^+}$

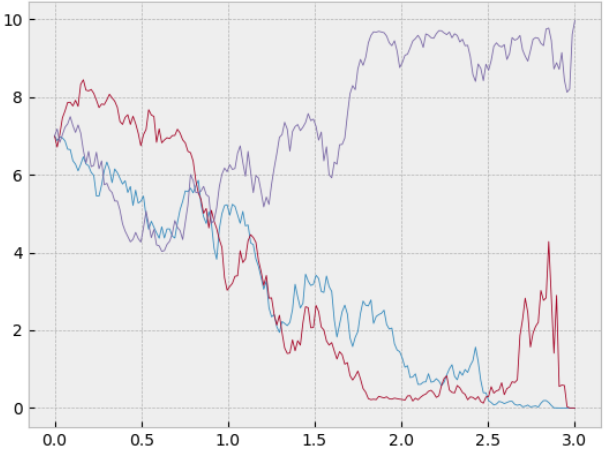
gdzie $\mathfrak{F}_{t^+} := \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s$

Wyniki numeryczne

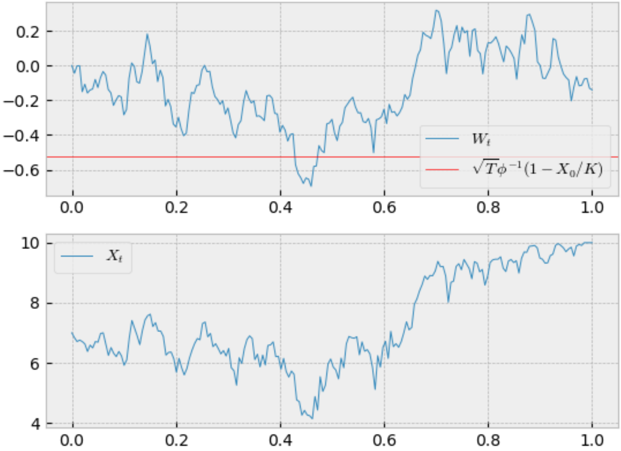
Wyniki numeryczne



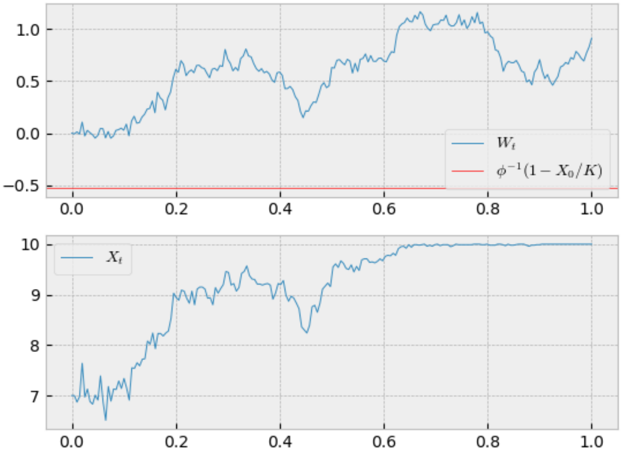
Wyniki numeryczne



Wyniki numeryczne



Wyniki numeryczne



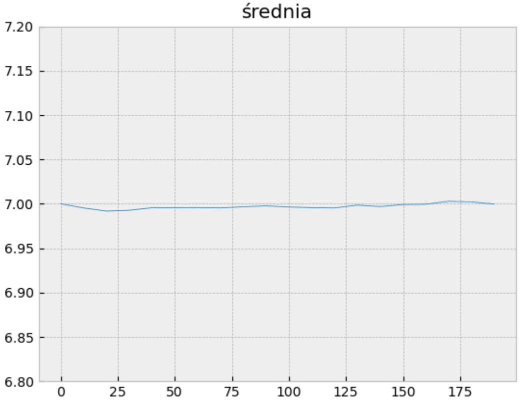
Wyniki numeryczne

```
Wyniki dla jednej bariery, M = 1000, X0 = 7, NN = 50000
----------
K1 = 6
teoretyczne: 0.75
empiryczne: 0.73662
----------
K1 = 5
teoretyczne: 0.6
empiryczne: 0.59056
----------
K1 = 4
teoretyczne: 0.5
empiryczne: 0.49028
----------
K1 = 3
teoretyczne: 0.4286
empiryczne: 0.41848
----------
K1 = 2
teoretyczne: 0.375
empiryczne: 0.36442
----------
K1 = 1
teoretyczne: 0.3333
empiryczne: 0.32248
```

Wyniki numeryczne

```
Wyniki dla dwóch barier, M = 1000, X0 = 7, NN = 50000
----------
K1 = 6, K2 = 8
teoretyczne: 0.5625
empiryczne: 0.53482
----------
K1 = 5, K2 = 8
teoretyczne: 0.375
empiryczne: 0.35034
----------
K1 = 5, K2 = 9
teoretyczne: 0.33333333333333337
empiryczne: 0.30896
----------
K1 = 4, K2 = 9
teoretyczne: 0.2222222222222222
empiryczne: 0.19808
```

Wyniki numeryczne



Wyniki numeryczne