Indeksy akceptowalności oraz ich zastosowanie w matematyce finansowej

Maciej Żurawski

Uniwersytet Jagielloński

XIII KKMF, 2025

Motywacja

- **Przykładowy problem:**
  Inwestor mając kilka pozycji finansowych musi ocenić, za pomocą jednej liczby, poziom preferencji każdej z nich.

Motywacja

- **Przykładowy problem:**
  Inwestor mając kilka pozycji finansowych musi ocenić, za pomocą jednej liczby, poziom preferencji każdej z nich.
- Sharpe Ratio?

Motywacja

- **Przykładowy problem:**
  Inwestor mając kilka pozycji finansowych musi ocenić, za pomocą jednej liczby, poziom preferencji każdej z nich.
- Sharpe Ratio?
- **Możliwe rozwiązanie:** Indeksy akceptowalności.

Motywacja

- **Przykładowy problem:**
  Inwestor mając kilka pozycji finansowych musi ocenić, za pomocą jednej liczby, poziom preferencji każdej z nich.
- Sharpe Ratio?
- **Możliwe rozwiązanie:** Indeksy akceptowalności.
- **Cel prezentacji:**
  - Przedstawienie (koherentnych) indeksów akceptowalności;
  - Ukazanie związku koherentych miar ryzyka z koherentymi indeksami akceptowalności;
  - Zaprezentowanie wybranego, praktycznego, lecz nieoczywistego zastosowania.

Przestrzeń probabilistyczna i zmienne losowe

- Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- $L^\infty := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- $X \in L^\infty$ będą interpretowane jako P&L.

Koherentne miary ryzyka

Definicja intuicyjna: minimalna kwota zabezpieczenia pozycji.

Definition

Aksjomaty koherentnej miary ryzyka $\rho : L^{\infty} \to \mathbb{R}$

1. **Przeciwna monotoniczność:** Jeżeli $X \leqslant Y$, to $\rho(X) \geqslant \rho(Y)$.
2. **Niezmienniczość na przesunięcia:** $\rho(X + c) = \rho(X) - c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$.
3. **Podaddytywność:** $\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$.
4. **Dodatnia jednorodność:** $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \quad \forall\lambda \geqslant 0$.

Praca: *Artzner et al. (1999).*

Koherentne indeksy akceptowalności

Intuicja: oceniają poziom atrakcyjności pozycji finansowej.

Definition

Aksjomaty koherentnego indeksu akceptowalności $\alpha \colon L^\infty \to [0, +\infty]$

1. **Quasi-wklęsłość:**

$$\alpha(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geqslant \min\{\alpha(X), \alpha(Y)\}, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

2. **Monotoniczność:** Jeżeli $X \leqslant Y$, to $\alpha(X) \leqslant \alpha(Y)$.
3. **Niezmienniczość na podskalowanie:** $\alpha(\lambda X) = \alpha(X) \quad \forall \lambda > 0$.
4. **Własność Fatou:** Jeżeli

$$|X_n| \leqslant 1 \quad \text{i} \quad \alpha(X_n) \geqslant x \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ oraz $X_n \xrightarrow{1.} X$, to wówczas $\alpha(X) \geqslant x$.

Praca: *Cherny i Madan (2009).*

Związek koherentnych indeksów akceptowalności z koherentnymi miarami ryzyka

Każdy koherentny indeks akceptowalności można postrzegać jako najwyższy poziom parametru rodziny koherentnych miar ryzyka, przy którym pozycja pozostaje zabezpieczona.

Charakteryzacja dualna koherentnych indeksów akceptowalności

α jest koherentnym indeksem akceptowalności α wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rosnąca rodzina koherentnych miar ryzyka $(\rho_x)_{x\geqslant 0}$ taka, że:

$$\alpha(X) = \sup\{x \geqslant 0 : \rho_x(X) \leqslant 0\}$$

Praca: *Cherny i Madan (2009).*

Ciekawostka: Mamy podobny rezultat dla wypukłych miar ryzyka oraz ‘niekoherentnych‘ indeksów akceptowalności, jak w Rosazza Gianin i Sgarra (2013).

Związek koherentnych indeksów akceptowalności z koherentnymi miarami ryzyka

Każdy koherentny indeks akceptowalności można postrzegać jako najwyższy poziom parametru rodziny koherentnych miar ryzyka, przy którym pozycja pozostaje zabezpieczona.

Charakteryzacja dualna koherentnych indeksów akceptowalności

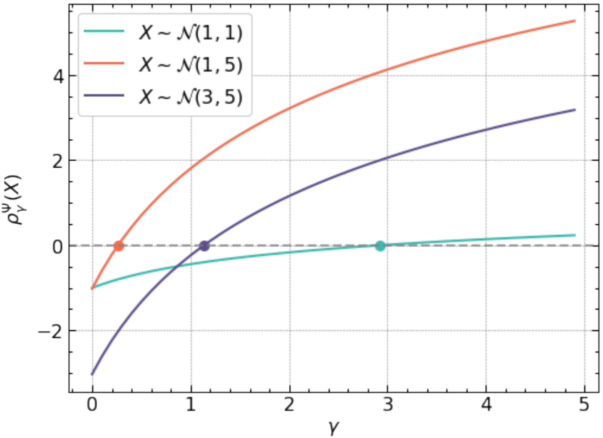
α jest koherentnym indeksem akceptowalności α wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rosnąca rodzina koherentnych miar ryzyka $(\rho_x)_{x \geqslant 0}$ taka, że:

$$\alpha(X) = \sup\{x \geqslant 0 : \rho_x(X) \leqslant 0\}$$

Praca: *Cherny i Madan (2009).*

Ciekawostka: Mamy podobny rezultat dla wypukłych miar ryzyka oraz ‘niekoherentnych‘ indeksów akceptowalności, jak w Rosazza Gianin i Sgarra (2013).

Wizualizacja



Rysunek: Relacja $\rho^{\Psi}_{x}(X)$ i γ dla wybranych X oraz wynikające z niej wartości $\alpha^{\Psi}_{x}(X)$ zaprezentowane jako kropki.

Przykłady cz. 1.

- Wskaźnik Sharpe'a

$$
SR(X) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}, & \text{jeśli } \mathbb{E}[X] > 0 \text{ oraz } \mathrm{Var}(X) > 0, \\ +\infty, & \text{jeśli } \mathrm{Var}(X) = 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}
$$

- Wartość ta odzwierciedla pragnienie inwestora osiągnięcia wyższej wartości oczekiwanej wypłaty oraz potrzebę ograniczenia ryzyka, tutaj mierzonego za pomocą wariancji.

Przykłady cz. 1.

- Wskaźnik Sharpe'a

$$SR(X) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}, & \text{jeśli } \mathbb{E}[X] > 0 \text{ oraz } \mathrm{Var}(X) > 0, \\ +\infty, & \text{jeśli } \mathrm{Var}(X) = 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

- Wartość ta odzwierciedla pragnienie inwestora osiągnięcia wyższej wartości oczekiwanej wypłaty oraz potrzebę ograniczenia ryzyka, tutaj mierzonego za pomocą wariancji.
- Nie jest to koherentny indeks akceptowalności.

Przykłady cz. 2.

- Współczynnik Gain-Loss Ratio

$$GLR(X) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X^-]}, & \text{jeśli } \mathbb{E}[X] > 0 \text{ oraz } \mathbb{E}[X^-] > 0, \\ \infty, & \text{jeśli } \mathbb{E}[X^-] = 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

gdzie $X^- := \max\{0, -X\}$.

- GLR przedstawia zatem stosunek oczekiwanego przepływu do oczekiwanej straty.

Przykłady cz. 2.

- Współczynnik Gain-Loss Ratio

$$GLR(X) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X^-]}, & \text{jeśli } \mathbb{E}[X] > 0 \text{ oraz } \mathbb{E}[X^-] > 0, \\ \infty, & \text{jeśli } \mathbb{E}[X^-] = 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

gdzie $X^- := \max\{0, -X\}$.

- GLR przedstawia zatem stosunek oczekiwanego przepływu do oczekiwanej straty.
- Jest to koherentny indeks akceptowalności.

Przykłady cz. 3 (trudniejsza) – Rodzina wypukłych zniekształceń

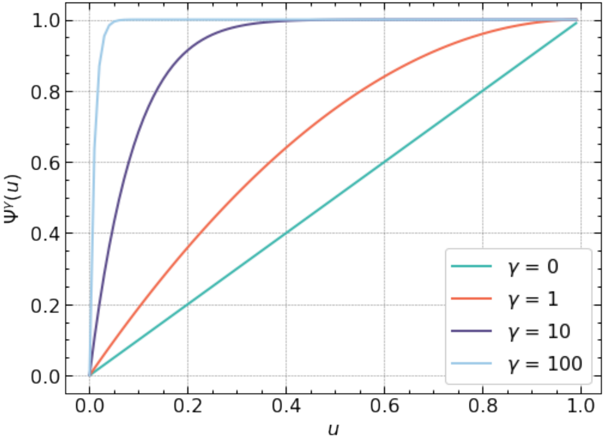
Definition (Rodzina wklęsłych zniekształceń)

$(\Psi^\gamma)_{\gamma \geqslant 0}$ określona na przedziale jednostkowym $[0, 1]$ nazywamy *rodziną wklęsłych zniekształceń*, jeżeli:

1. $\Psi^\gamma(0) = 0$ i $\Psi^\gamma(1) = 1$,
2. Ψ^γ jest funkcją niemalejącą,
3. Ψ^γ jest wklęsła,

a ponadto, funkcja $\gamma \mapsto \Psi^\gamma(\cdot)$ jest rosnąca.

Przykłady cz. 3. (trudniejsza)



Rysunek: Rodzina zniekształceń MINVAR dla wybranych parametrów .

Przykłady cz. 3. (trudniejsza)

- Niech $(\Psi^\gamma)_{\gamma \geqslant 0}$ – rosnąca rodzina wklęsłych zniekształceń na $[0, 1]$:

$$\alpha^\Psi(X) := \sup\left\{\gamma \geqslant 0 : \int_{-\infty}^{\infty} y d\Psi^\gamma\left(F_X(y)\right) \geqslant 0\right\}.$$

Przykłady cz. 3. (trudniejsza)

- Niech $(\Psi^{\gamma})_{\gamma \geqslant 0}$ – rosnąca rodzina wklęsłych zniekształceń na $[0,1]$:

$$\alpha^{\Psi}(X) := \sup\left\{\gamma \geqslant 0 : \int_{-\infty}^{\infty} y d\Psi^{\gamma}\left(F_X(y)\right) \geqslant 0\right\}.$$

- Jest to koherentny indeks akceptowalności.

Wybrane zastosowania indeksy akceptowalności

Wybrane zastosowania indeksy akceptowalności

- Ocena pozycji inwestycyjnych: *Cherny, A. and Madan, D. (2009)*

Wybrane zastosowania indeksy akceptowalności

- Ocena pozycji inwestycyjnych: *Cherny, A. and Madan, D. (2009)*
- Wycena instrumentów finansowych (bid-ask spread) na rynkach niekompletnych: *Cherny, A. and Madan, D. (2010)*

Wybrane zastosowania indeksy akceptowalności

- Ocena pozycji inwestycyjnych: *Cherny, A. and Madan, D. (2009)*
- Wycena instrumentów finansowych (bid-ask spread) na rynkach niekompletnych: *Cherny, A. and Madan, D. (2010)*
- **Związek z testowaniem wstecznym**: *Moldenhauer, F. and Pitera, M. (2019)*

Wybrane zastosowania indeksy akceptowalności

- Ocena pozycji inwestycyjnych: *Cherny, A. and Madan, D. (2009)*
- Wycena instrumentów finansowych (bid-ask spread) na rynkach niekompletnych: *Cherny, A. and Madan, D. (2010)*
- **Związek z testowaniem wstecznym**: *Moldenhauer, F. and Pitera, M. (2019)*
- Pomiar efektywności portfela: *Pitera, M. and Rasonyi, M. (2024)*

Indeksy akceptowalności w testowaniu wstecznym

- Dualna reprezentacja indeksów akceptowalności pozwala stworzyć efektywne statystyki testowe.

Indeksy akceptowalności w testowaniu wstecznym

- Dualna reprezentacja indeksów akceptowalności pozwala stworzyć efektywne statystyki testowe.
- Dla pozycji zabezpieczonej:

$$y_i = X_i + \hat{\rho}_i$$

VaR

- Estymator historyczny VaR:

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_n^{\alpha}(x) := -x_{(\lfloor n\alpha \rfloor + 1)}$$

VaR

- Estymator historyczny VaR:

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_n^{\alpha}(x) := -x_{(\lfloor n\alpha \rfloor + 1)}$$

- Statystyka częstości przekroczeń:

$$T_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{y_i < 0\}}$$

VaR

- Estymator historyczny VaR:

$$\widehat{\mathrm{VaR}}^{\alpha}_{n}(x) := -x_{(\lfloor n\alpha \rfloor + 1)}$$

- Statystyka częstości przekroczeń:

$$T_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{y_i < 0\}}$$

Związek obu obiektów

$$T_n = \inf\{\alpha \in (0,1] : \widehat{\mathrm{VaR}}^{\alpha}_{n}(y) \leqslant 0\}$$

Dowód Twierdzenia można odnaleźć w *Moldenhauer and Pitera (2019)*

ES

- Estymator historyczny ES:

$$\widehat{\mathrm{ES}}_n^{\alpha}(x) := -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{\{x_i+\widehat{\mathrm{VaR}}_n^{\alpha}(x)\leqslant 0\}}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i+\widehat{\mathrm{VaR}}_n^{\alpha}(x)\leqslant 0\}}}$$

ES

- Estymator historyczny ES:

$$\widehat{\mathrm{ES}}_n^{\alpha}(x) := -\frac{\sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{\{x_i + \widehat{\mathrm{VaR}}_n^{\alpha}(x) \leqslant 0\}}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i + \widehat{\mathrm{VaR}}_n^{\alpha}(x) \leqslant 0\}}}$$

- Zdefinujmy G_n jako estymator indeksu akceptowalności dla $\widehat{\mathrm{ES}}_n^{\alpha}$:

$$G_n := \inf\{\alpha \in (0,1) : \widehat{\mathrm{ES}}_n^{\alpha}(y) \leqslant 0\}$$

ES

- Estymator historyczny ES:

$$\widehat{\mathrm{ES}}_n^{\alpha}(x) := -\frac{\sum_{i=1}^n x_i 1_{\{x_i + \widehat{\mathrm{VaR}}_n^{\alpha}(x) \leqslant 0\}}}{\sum_{i=1}^n 1_{\{x_i + \widehat{\mathrm{VaR}}_n^{\alpha}(x) \leqslant 0\}}}$$

- Zdefinujmy G_n jako estymator indeksu akceptowalności dla $\widehat{\mathrm{ES}}_n^{\alpha}$:

$$G_n := \inf\{\alpha \in (0,1) : \widehat{\mathrm{ES}}_n^{\alpha}(y) \leqslant 0\}$$

Postać G_n

$$G_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{\{y_{(1)} + \ldots + y_{(i)} < 0\}}$$

Dowód Twierdzenia można odnaleźć w *Moldenhauer and Pitera (2019)*.

ES cd.

Postać G_n

$$G_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{y_{(1)}+\ldots+y_{(i)}<0\}}$$

$$y = (4,\ -2,\ 7,\ 1,\ -3,\ 3)$$

ES cd.

Postać G_n

$$G_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{y_{(1)}+\ldots+y_{(i)}<0\}}$$

$$y = (4,\ -2,\ 7,\ 1,\ -3,\ 3)$$

$$y_{\text{sorted}} = (-3,\ -2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7)$$

ES cd.

Postać G_n

$$G_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{y_{(1)}+\ldots+y_{(i)}<0\}}$$

$$y = (4,\ -2,\ 7,\ 1,\ -3,\ 3)$$

$$y_{\text{sorted}} = (-3,\ -2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7)$$

$$\begin{gathered}
(-3) \quad \Rightarrow \quad \text{sum:} \ -3 \\
(-3,\ -2) \quad \Rightarrow \quad \text{sum:} \ -5 \\
(-3,\ -2,\ 1) \quad \Rightarrow \quad \text{sum:} \ -4 \\
(-3,\ -2,\ 1,\ 3) \quad \Rightarrow \quad \text{sum:} \ -1 \\
G_n = \frac{2}{3}, \quad n \cdot G_n = 4
\end{gathered}$$

Podsumowanie

- Przedstawienie (koherentnych) indeksów akceptowalności;

Podsumowanie

- Przedstawienie (koherentnych) indeksów akceptowalności; ✓

Podsumowanie

- Przedstawienie (koherentnych) indeksów akceptowalności; ✓
- Ukazanie związku koherentych miar ryzyka z koherentymi indeksami akceptowalności;

Podsumowanie

- Przedstawienie (koherentnych) indeksów akceptowalności; ✓
- Ukazanie związku koherentych miar ryzyka z koherentymi indeksami akceptowalności; ✓

Podsumowanie

- Przedstawienie (koherentnych) indeksów akceptowalności; ✓
- Ukazanie związku koherentych miar ryzyka z koherentymi indeksami akceptowalności; ✓
- Zaprezentowanie wybranego, praktycznego, lecz nieoczywistego zastosowania.

Podsumowanie

- Przedstawienie (koherentnych) indeksów akceptowalności; ✓
- Ukazanie związku koherentych miar ryzyka z koherentymi indeksami akceptowalności; ✓
- Zaprezentowanie wybranego, praktycznego, lecz nieoczywistego zastosowania. ✓

Dziękuję za uwagę!

Czy są jakieś pytania?

maciej.zurawski@student.uj.edu.pl