

## یا حق

محسن حسینی، ۹۸۱۰۴۰۷۱

### فاز اول پروژه درس تحقیق در عملیات دو

#### فهرست مطالب

۱. مسئله اول	۳
۱.۱. مدل سازی ریاضی	۳
۱.۲. خروجی اکسل	۴
۱.۳. تحلیل حساسیت	۵
۱.۳.۱. تحلیل حساسیت متغیرها	۵
۱.۳.۲. تحلیل حساسیت محدودیت ها	۵
۲. مسئله دوم	۶
۲.۱. مدل سازی ریاضی	۶
۲.۲. خروجی	۸
۲.۳. اضافه کردن محدودیت ها	۹
۲.۳.۱. خروجی مدل با محدودیت های جدید	۱۱
۳. پیوست	۱۲
۳.۱. مقدار متغیرهای تصمیم سوال ۲ با محدودیت های جدید	۱۲
۳.۲. اسکرین شات از کدهای سیمپلکس	۱۳

## فهرست جداول و نمودارها

۳	جدول ۱ متغیرهای تصمیم مسئله ۱
۵	جدول ۴ تحلیل حساسیت متغیرهای تصمیم مسئله ۱
۵	جدول ۵ تحلیل حساسیت محدودیت‌های مسئله ۱
۶	جدول ۶ متغیرهای تصمیم مسئله ۲
۸	جدول ۷ مقادیر بهینه مسئله ۲
۱۰	جدول ۹ متغیرهای صفر و یک برای محدودیت‌های جدید
۱۱	جدول ۱۰ مقادیر بهینه بعد از افزودن محدودیت‌ها
۱۲	جدول ۱۱ جواب بهینه بعد از افزودن محدودیت‌های جدید
۱۱	نمودار ۱ مقایسه مقادیر بهینه قبل و بعد از محدودیت‌های جدید

## ۱. مسئله اول

### ۱.۱. مدلسازی ریاضی

در این قسمت فرض میشود که برنامه ریزی یک دوره ای است و انبار به طور کلی وجود ندارد. بنابراین موجودی انبار در ابتدا و انتهای دوره صفر است. متغیرهای تصمیم مقدار تن از هر نوع روغن است که باید تولید شود.

متغیر تصمیم	نماد
میزان خرید و تصفیه روغن گیاهی ۱	X1
میزان خرید و تصفیه روغن گیاهی ۲	X2
میزان خرید و تصفیه روغن حیوانی ۱	Y1
میزان خرید و تصفیه روغن حیوانی ۲	Y2
میزان خرید و تصفیه روغن حیوانی ۳	Y3

جدول ۱ متغیرهای تصمیم مسئله ۱

با این ساختار، تابع هدف را تشکیل می دهیم:

$$Max Z = 150 \left( \sum_{i=1}^2 X_i + \sum_{i=1}^3 Y_i \right) - (110X_1 + 120X_2 + 130Y_1 + 110Y_2 + 115Y_3)$$

در این تابع، قسمت اول میزان کل درآمد است و قسمت دوم میزان کل هزینه.

در ادامه محدودیت های مسئله به مدل اضافه میشوند.

محدودیت ظرفیت تصفیه:

$$\sum_{i=1}^2 X_i \leq 200$$

$$\sum_{i=1}^3 Y_i \leq 250$$

محدودیت بیشینه سختی روغن:

$$8.8X_1 + 6.1X_2 + 2Y_1 + 4.2Y_2 + 5Y_3 - 6\left(\sum_{i=1}^2 X_i + \sum_{i=1}^3 Y_i\right) \leq 0$$

محدودیت کمینه سختی روغن:

$$8.8X_1 + 6.1X_2 + 2Y_1 + 4.2Y_2 + 5Y_3 - 3\left(\sum_{i=1}^2 X_i + \sum_{i=1}^3 Y_i\right) \geq 0$$

Name	Final Value	Integer
X1 Value	159.26	Contin
X2 Value	40.74	Contin
Y1 Value	0	Contin
Y2 Value	250	Contin
Y3 Value	0	Contin

جدول ۲ جواب بهینه مسئله ۱

محدودیت‌های علامت

$$X_i \geq 0; i = 1, 2$$

$$Y_i \geq 0; i = 1, 2, 3$$

## ۱.۲. خروجی اکسل

مسئله بالا را در اکسل مدلسازی کرده و از آن خروجی میگیریم.

Name	Final Value
Profit	17592.59259

جدول ۳ مقدار بهینه مسئله ۱

مشاهده می‌شود که طبق خروجی مدل، خرید و تصفیه از روغن حیوانی نوع اول و سوم نباید انجام شود و عمده محصول نهایی از روغن حیوانی ۲ تشکیل می‌شود که هزینه خرید کمتری نیز دارد.

میزان سود کل با این برنامه‌ریزی حدوداً ۱۷۶۰۰ دلار است. این سود از فروش ۴۵۰ تن روغن و کسب درآمد حدوداً ۵۰۰۰۰ دلاری به دست می‌آید.

### ۱.۳. تحلیل حساسیت

#### ۱.۳.۱. تحلیل حساسیت متغیرها

با استفاده از بخش تحلیل حساسیت نرم افزار اکسل می توان فهمید که تغییر دادن محدودیت ها یا متغیرها چگونه روی جواب نهایی تاثیر می گذارد. نتایج تحلیل حساسیت متغیرها در ادامه آورده شده است.

Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1 Value	159.259	0.000	40.000	14.545	10.000
X2 Value	40.741	0.000	30.000	10.000	14.545
Y1 Value	0.000	-11.852	20.000	11.852	1.00E+30
Y2 Value	250.000	0.000	40.000	1.00E+30	7.963
Y3 Value	0.000	-7.963	35.000	7.963	1.00E+30

جدول ۲ تحلیل حساسیت متغیرهای تصمیم مسئله ۱

در این جدول مقدار نهایی هر متغیر در ستون سمت چپ آورده شده است. ستون بعدی نشان می دهد که با افزایش یک واحد مقدار هر متغیر، تابع هدف در صورت ثابت ماندن بقیه متغیرها چگونه تغییر می کند. ستون بعدی ضریب هر متغیر در تابع هدف را نشان می دهد که با توجه به قیمت محصول نهایی و قیمت روغن خام تعیین می شود.

دو ستون بعدی به این موضوع اشاره می کنند که مقدار ضریب متغیر چقدر می تواند تغییر کند در صورتی که جواب فعلی بهینه بماند. برای مثال در صورتی که قیمت روغن گیاهی اول ۱۰ واحد افزایش پیدا کند که منجر به کم شدن ضریب در تابع هدف به میزان ۱۰ واحد می شود، جواب بهینه برای متغیرهای تصمیم همین مقادیر فعلی باقی خواهد ماند. بدیهی است که در این شرایط تابع هدف عوض می شود. با توجه به اینکه قیمت روغن ها می توانند به صورت تخمین باشند، این دو ستون به فرد تصمیم گیرنده کمک زیادی می کند. در صورتی که این مقادیر بزرگ باشند، می توان گفت که جواب بهینه به دست آمده نسبتاً پایدار<sup>۱</sup> است و با تغییر داده ها چندان تغییر نمی کند.

#### ۱.۳.۲. تحلیل حساسیت محدودیت ها

در ادامه تحلیل حساسیت محدودیت ها بررسی می شود.

Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
Final Product Lower Limit	1350.00	0.00	0.00	1350.00	1E+30
X Refinement	200.00	29.63	200.00	4300.00	39.29
Y Refinement	250.00	46.67	250.00	61.11	238.89
Final Product Upper Limit	0.00	3.70	0.00	110.00	430.00

جدول ۳ تحلیل حساسیت محدودیت های مسئله ۱

این جدول نشان می‌دهد که تغییر کردن مقدار محدودیت‌ها چگونه روی جواب مسئله تاثیر می‌گذارد. ستون اول مقدار سمت چپ محدودیت را نشان می‌دهد. ستون بعدی که قیمت سایه‌ای است، به این موضوع اشاره می‌کند که تغییر دادن مقدار سمت راست یک محدودیت، چگونه می‌تواند روی تابع هدف اثر بگذارد. برای مثال افزایش ظرفیت تصفیه روغن گیاهی به اندازه یک واحد، منجر به افزایش سود به اندازه ۲۹.۶۳ می‌شود. این عدد برای ظرفیت تصفیه روغن حیوانی بیشتر است و نشان می‌دهد بنگاه در صورتی که روی توسعه این بخش از کارخانه سرمایه‌گذاری کند، می‌تواند سود خود را بیشتر افزایش دهد. دو ستون سمت راست نشان می‌دهد که مقدار قیمت سایه‌ای در چه بازه‌ای برقرار است.

## ۲. مسئله دوم

### ۲.۱. مدل‌سازی ریاضی

در مسئله دوم، مدل مسئله تک‌دوره‌ای مطرح شده در مسئله قبل برای همه دوره‌ها حل می‌شود. آنچه در این مدل تغییر می‌کند اضافه شدن انبار به مسئله و همچنین توسعه متغیرهای تصمیم به تمام دوره‌ها است. متغیرهای تصمیم را به صورت میزان خرید و میزان تصفیه هر نوع روغن در هر دوره تعریف می‌کنیم. متغیر میزان انبار در هر دوره نیز به عنوان متغیر مازاد در مسئله تعریف شده و به فهم بهتر مدل کمک می‌کند.

متغیر تصمیم	نماد
میزان خرید روغن گیاهی ۱ در دوره $t$	$BX_{1t}$
میزان خرید روغن گیاهی ۲ در دوره $t$	$BX_{2t}$
میزان خرید روغن حیوانی ۱ در دوره $t$	$BY_{1t}$
میزان خرید روغن حیوانی ۲ در دوره $t$	$BY_{2t}$
میزان خرید روغن حیوانی ۳ در دوره $t$	$BY_{3t}$
میزان تصفیه روغن گیاهی ۱ در دوره $t$	$RX_{1t}$
میزان تصفیه روغن گیاهی ۲ در دوره $t$	$RX_{2t}$
میزان تصفیه روغن حیوانی ۱ در دوره $t$	$RY_{1t}$
میزان تصفیه روغن حیوانی ۲ در دوره $t$	$RY_{2t}$
میزان تصفیه روغن حیوانی ۳ در دوره $t$	$RY_{3t}$
موجودی روغن گیاهی ۱ در انتهای دوره $t$	$IX_{1t}$
موجودی روغن گیاهی ۲ در انتهای دوره $t$	$IX_{2t}$
موجودی روغن حیوانی ۱ در انتهای دوره $t$	$IY_{1t}$
موجودی روغن حیوانی ۲ در انتهای دوره $t$	$IY_{2t}$
موجودی روغن حیوانی ۳ در انتهای دوره $t$	$IY_{3t}$

جدول ۴ متغیرهای تصمیم مسئله ۲

با استفاده از این متغیرها، تابع هدف را تشکیل می‌دهیم.

در این رابطه عبارت اول میزان درآمد کسب‌شده از فروش روغن است. عبارت دوم هزینه خرید روغن خام را نشان می‌دهد که در آن  $P(it)$  قیمت روغن خام نوع  $i$  در زمان  $t$  است که در جدول فرض‌های مسئله داده شده‌است. قسمت سوم نیز میزان هزینه نگهداری است.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = & 150 \left( \sum_i \sum_t RX_{it} + \sum_i \sum_t RY_{it} \right) - \left( \sum_i \sum_t P_{it} BX_{it} + \sum_i \sum_t P_{it} BY_{it} \right) \\ & - 5 \left( \sum_i \sum_t IX_{it} + \sum_i \sum_t IY_{it} \right) \end{aligned}$$

سپس محدودیت‌ها را به مدل اضافه می‌کنیم.

محدودیت ظرفیت‌های تصفیه:

$$\begin{aligned} \forall t: \sum_i RX_{it} &\leq 200 \\ \forall t: \sum_i RY_{it} &\leq 250 \end{aligned}$$

محدودیت حد بالایی سختی روغن:

$$\forall t: \sum_i \sum_t h_i RX_{it} + \sum_i \sum_t h_i RY_{it} - 6 \left( \sum_i \sum_t RX_{it} + \sum_i \sum_t RY_{it} \right) \leq 0$$

محدودیت حد پایینی سختی روغن:

$$\forall t: \sum_i \sum_t h_i RX_{it} + \sum_i \sum_t h_i RY_{it} - 3 \left( \sum_i \sum_t RX_{it} + \sum_i \sum_t RY_{it} \right) \geq 0$$

محدودیت میزان انبار اولیه:

$$\begin{aligned} \forall i: IX_{i0} &= 500 + BX_{i1} - RX_{i1} \\ \forall i: IY_{i0} &= 500 + BY_{i1} - RY_{i1} \end{aligned}$$

محدودیت میزان انبار نهایی:

$$\forall i: IX_{i6} = 500$$

$$\forall i: IY_{i6} = 500$$

محدودیت رابطه میزان انبار هر دوره با دوره‌های بعدی:

$$\forall i, \forall t; t > 1: IX_{it} = IX_{it-1} + BX_{it} - RX_{it}$$

$$\forall i, \forall t; t > 1: IY_{it} = IY_{it-1} + BY_{it} - RY_{it}$$

محدودیت کمتر بودن میزان تصفیه از میزان موجودی هر محصول:

$$\forall i, \forall t: RX_{it} \leq IX_{it}$$

$$\forall i, \forall t: RY_{it} \leq IY_{it}$$

محدودیت ظرفیت انبار:

$$\forall i, \forall t: IX_{it} \leq 1000$$

$$\forall i, \forall t: IY_{it} \leq 1000$$

محدودیت علامت:

$$\forall i, \forall t: RX_{it} \geq 0$$

$$\forall i, \forall t: RY_{it} \geq 0$$

$$\forall i, \forall t: BX_{it} \geq 0$$

$$\forall i, \forall t: BY_{it} \geq 0$$

$$\forall i, \forall t: IX_{it} \geq 0$$

$$\forall i, \forall t: IY_{it} \geq 0$$

## ۲.۲. خروجی

با حل مسئله در نرم‌افزار و گرفتن خروجی اکسل از آن، متغیرهای اصلی تابع هدف مقادیر زیر را خواهند داشت:

Variable	VALUE
Revenue	\$405,000
MaterialCost	\$246,493
InventoryCost	\$54,120
Profit	\$104,387

جدول مقادیر بهینه مسئله ۲

مشاهده می‌شود که سود بهینه حدود ۱۰۰ هزار دلار است که از یک درآمد ۴۰۰ هزار دلاری ناشی می‌شود. همچنین حدود ۸۵ درصد از هزینه‌های بنگاه در شرایط بهینه به خاطر خرید مواد اولیه است.



در ادامه مقادیر متغیرهای تصمیم خروجی نیز آورده شده است.

Name	Type	index\month	1	2	3	4	5	6
BX1	Veg	1	0.00	0.00	0.00	0.00	200.00	532.64
BX2	Veg	2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	467.36
BY1	Oil	1	0.00	32.50	0.00	0.00	0.00	0.00
BY2	Oil	2	0.00	37.50	0.00	0.00	0.00	732.03
BY3	Oil	3	0.00	0.00	697.97	0.00	0.00	0.00

Name	Type	index\month	1	2	3	4	5	6
RX1	Veg	1	159.26	127.78	106.48	53.24	126.62	159.26
RX2	Veg	2	40.74	72.22	93.52	146.76	73.38	40.74
RY1	Oil	1	0.00	0.00	0.00	0.00	32.50	0.00
RY2	Oil	2	250.00	143.75	71.88	35.94	17.97	250.00
RY3	Oil	3	0.00	106.25	178.13	214.06	199.53	0.00

Name	Type	index\month	1	2	3	4	5	6
IX1	Veg	1	340.74	212.96	106.48	53.24	126.62	500.00
IX2	Veg	2	459.26	387.04	293.52	146.76	73.38	500.00
IY1	Oil	1	500.00	532.50	532.50	532.50	500.00	500.00
IY2	Oil	2	250.00	143.75	71.88	35.94	17.97	500.00
IY3	Oil	3	500.00	393.75	913.59	699.53	500.00	500.00

جدول ۸: جواب بهینه مسئله ۲

### ۲.۳. اضافه کردن محدودیت‌ها

برای حل مسئله لازم است محدودیت‌های خواسته‌شده زیر به مدل اضافه شوند:

۱. محصول نهایی نمی تواند در ماه از ترکیب بیش از سه روغن به دست بیاید.

۲. اگر یک روغن در یک ماه استفاده شود، باید حداقل ۲۰ تن از آن به کار برود.

۳. اگر روغن گیاهی اول و دوم در یک ماه استفاده شوند، روغن حیوانی نوع سه هم باید استفاده شود.

برای مدلسازی موارد بالا لازم است متغیرهای تصمیم صفر و یک به مسئله اضافه شوند طوری که نشان دهند آیا از یک نوع روغن خاص در یک ماه استفاده می‌شود یا خیر. برای این کار، متغیرهای زیر از نوع صفر و یک به مسئله اضافه می‌شوند.

متغیر تصمیم	نماد
استفاده از روغن گیاهی ۱ در دوره $t$	$UX_{1t}$

$UX_{2t}$	استفاده از روغن گیاهی ۲ در دوره $t$
$UY_{1t}$	استفاده از روغن حیوانی ۱ در دوره $t$
$UY_{2t}$	استفاده از روغن حیوانی ۲ در دوره $t$
$UY_{3t}$	استفاده از روغن حیوانی ۳ در دوره $t$

جدول ۶: متغیرهای صفر و یک برای محدودیت‌های جدید

این متغیرها مقدار تابع هدف را تغییر نمی‌دهند ولی محدودیت‌های زیر را به مسئله اضافه می‌کنند.

محدودیت تصفیه روغن به شرط استفاده از آن:

$$\forall i, \forall t: RX_{it} \leq 200UX_{it}$$

$$\forall i, \forall t: RY_{it} \leq 250UY_{it}$$

مقادیر ۲۰۰ و ۲۵۰ به عنوان یک کران بالا برای میزان تصفیه هر نوع روغن در یک زمان در نظر گرفته می‌شوند زیرا حد بالای میزان تصفیه با توجه به اطلاعات مسئله برابر این مقادیر است.

محدودیت اینکه محصول نهایی نمی‌تواند در ماه از ترکیب بیش از سه روغن به دست بیاید:

$$\forall t: \sum_i UX_{it} + \sum_i UY_{it} \leq 3$$

محدودیت اینکه اگر یک روغن در یک ماه استفاده شود، باید حداقل ۲۰ تن از آن به کار برود:

$$\forall i, \forall t: RX_{it} \geq 20UX_{it}$$

$$\forall i, \forall t: RY_{it} \geq 20UY_{it}$$

محدودیت اینکه اگر روغن گیاهی اول یا دوم در یک ماه استفاده شوند، روغن حیوانی نوع سه هم باید استفاده شود:

$$\forall t: UX_{1t} \leq UY_{3t}$$

$$\forall t: UX_{2t} \leq UY_{3t}$$

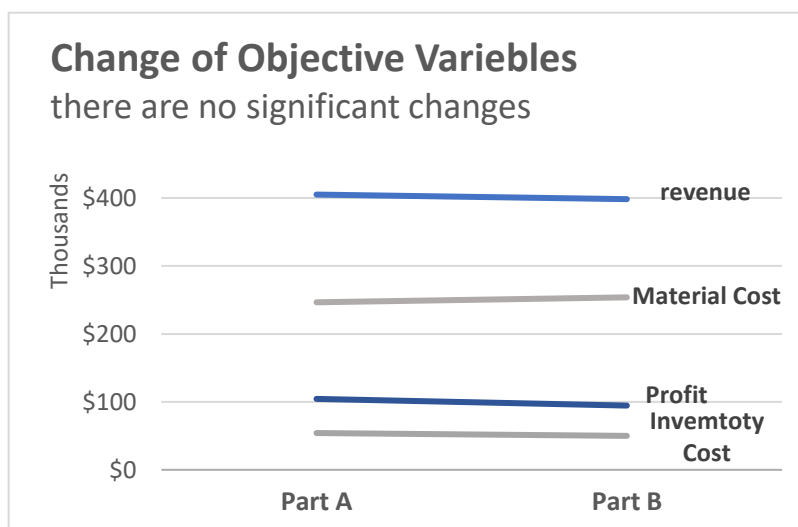
### ۲.۳.۱. خروجی مدل با محدودیت‌های جدید

در ادامه خروجی‌های نرم افزار در صورت افزودن محدودیت‌های جدید به آن آورده شده است. انتظار می‌رود که جواب در این حالت کمتر از حالت قبل باشد زیرا تنها تغییری که در ساختار مدل به وجود آمده، اضافه شدن محدودیت‌های جدید است که صرفاً می‌توانند روی مقدار تابع هدف تاثیر منفی بگذارند.

Variable	VALUE
Revenue	\$398,250
MaterialCost	\$253,769
InventoryCost	\$49,944
Profit	\$94,537

جدول ۷ مقادیر بهینه بعد از افزودن محدودیت‌ها

مشاهده می‌شود که این اتفاق افتاده است. مقدار درآمد تغییری نداشته اما هزینه‌ها افزایش یافته‌اند. نمودار زیر مقدار متغیرهای هدف مسئله را قبل و بعد افزودن محدودیت‌ها نشان می‌دهد.



نمودار مقایسه مقادیر بهینه قبل و بعد از محدودیت‌های جدید

مشاهده می‌شود که محدودیت‌های اعمال شده منجر به کاهش حدوداً ۱۰ درصدی میزان سود و کاهش ۱.۵ درصدی درآمد می‌شود. مقدار متغیرهای تصمیم در شرایط جدید مسئله در پیوست آمده است.

### ۳. پیوست

۳.۱. مقدار متغیرهای تصمیم سوال ۲ با محدودیت‌های جدید

	Name	Type	index\month	1	2	3	4	5	6
Buying Variables	BX1	Veg	1	10.00	0.00	0.00	0.00	15.37	414.81
	BX2	Veg	2	0.00	0.00	0.00	129.63	0.00	585.19
	BY1	Oil	1	0.00	0.00	0.00	103.33	0.00	0.00
	BY2	Oil	2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	662.50
	BY3	Oil	3	0.00	0.00	146.67	0.00	587.50	0.00
Refining Variables	RX1	Veg	1	200.00	155.00	0.00	0.00	85.19	0.00
	RX2	Veg	2	0.00	0.00	200.00	200.00	114.81	200.00
	RY1	Oil	1	103.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	RY2	Oil	2	0.00	230.00	135.00	67.50	0.00	230.00
	RY3	Oil	3	146.67	20.00	115.00	182.50	250.00	20.00
Inventory Variables	IX1	Veg	1	310.00	155.00	155.00	155.00	85.19	500.00
	IX2	Veg	2	500.00	500.00	300.00	229.63	114.81	500.00
	IY1	Oil	1	396.67	396.67	396.67	500.00	500.00	500.00
	IY2	Oil	2	500.00	270.00	135.00	67.50	67.50	500.00
	IY3	Oil	3	353.33	333.33	365.00	182.50	520.00	500.00
Usage Variables	UX1	Veg	1	1	1	0	0	1	0
	UX2	Veg	2	0	0	1	1	1	1
	UY1	Oil	1	1	0	0	0	0	0
	UY2	Oil	2	0	1	1	1	0	1
	UY3	Oil	3	1	1	1	1	1	1

جدول ۸ جواب بهینه بعد از افزودن محدودیت‌های جدید

### ۳.۲. اسکرین شات از کدهای سیمپلکس

```

142  /*final objective variebles*/
143  Revenue== prodprice* sum(i in veg, t in month) RX[i][t]+
144            prodprice* sum(i in oil, t in month) RY[i][t];
145
146  MaterialCost== sum(i in veg, t in month) vegprice[i][t]* BX[i][t]+
147                sum(i in oil, t in month) oilprice[i][t]* BY[i][t];
148
149  InventoryCost== 5* sum(i in veg, t in month) IX[i][t]+
150                5* sum(i in oil, t in month) IY[i][t];
151
152  Profit== Revenue- MaterialCost- InventoryCost;
153
154  }
155

```

عکس متغیرهای هدف

```

112  /*refinement if we have inventory*/
113  forall (t in month, i in veg)
114    RX[i][t]<=IX[i][t];
115
116  forall (t in month, i in oil)
117    RY[i][t]<=IY[i][t];
118
119
120  /*refinement if use*/
121  forall (t in month, i in veg)
122    RX[i][t]<= vegrefinelimit* UX[i][t];
123
124  forall (t in month, i in oil)
125    RY[i][t]<=oilrefinelimit* UY[i][t];
126
127  /*3 unique oils in each month*/
128  forall (t in month)
129    sum(i in veg) UX[i][t]+ sum(i in oil) UY[i][t]<= uniqueoillimit;
130
131  /*minimum usage in each month*/
132  forall (t in month, i in veg)
133    RX[i][t]>= minusage* UX[i][t];
134
135  forall (t in month, i in oil)
136    RY[i][t]>=minusage* UY[i][t];
137

```

عکس ۲ محدودیت‌های انبار

```

7    /* indices*/
8
9    {int} veg= ...;
10   {int} oil= ...;
11   {int} month= ...;
12
13   /* parameters*/
14
15   float vegprice[veg][month]= ...;
16   float oilprice[oil][month]= ...;
17
18   float charveg[veg]= ...;
19   float charoil[oil]= ...;
20
21   float prodprice= ...;
22   float startinventory= ...;
23   float endinventory= ...;
24   float inventoryunitcost= ...;
25
26   float vegrefinelimit= ...;
27   float oilrefinelimit= ...;
28
29   float uniqueoillimit= ...;
30   float minusage= ...;

```

عکس ۳ اندیس‌ها و پارامترها