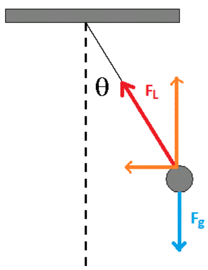
Matematično modeliranje *III domača naloga*

Avtor: Melanija Kraljevska, 63170368

Podano je matematično nihalo, pri katerem točkasta masa m visi na lahki, ravni palici dolžine L, ki se lahko prosto vrti okrog vpenjališča. Na maso m deluje gravitacijska sila $F_g = mg$, kot odmika od ravnovesne lege občasu t pa označimo s $\phi(t)$. To nihalo vpnemo v konec druge lahke palice dolžine l, ki je vpeta v pogonsko os pod stropom.

1. Iz 2. Newtonovega zakona F = ma izpelji enačbo običajnega matematičnega nihala:

   $L\ddot{\theta} + g \sin\theta = 0$



Koordinatni sistem postavimo kot na sliki. Pogledamo sile za vsako smer.

X smer: $- F_L \sin\theta = m\, a_x$

$- F_L \sin \theta = m \ddot{x}$

Y smer: $- F_g + F_L \cos\theta = m\, a_y$

$- mg + F_L \cos\theta = m \ddot{y}$

Pospešek a_x je enak drugemu odvodu $x = l \sin\theta$, a_y je enak drugemu odvodu $y = -l \cos\theta$.
Računamo $\dot{x} = \dot{\theta}L\cos\theta$, $\ddot{x} = \ddot{\theta}L\cos\theta - \dot{\theta}L\sin\theta = a_x$.
Podobno je za $a_y = \ddot{y}$, $\dot{y} = \dot{\theta}L\sin\theta$, $\ddot{y} = \ddot{\theta} L\sin\theta + \dot{\theta}L\cos\theta$.

Ustavimo v obeh enačbah in dobimo:

X: $- F_L \sin \theta = m\, \ddot{\theta}L\cos\theta - m\, \dot{\theta}L\sin\theta$
Y: $- mg + F_L \cos\theta = m\ddot{\theta} L\sin\theta + m\dot{\theta}L\cos\theta$

Da bi se F_L pokrajšal, prvo enačbo bomo pomnožili z cosθ, drugo z in ju bomo sešteli.

X: $- F_L \sin \theta \cos\theta = m\, \ddot{\theta}L\cos^2\theta - m\, \dot{\theta}L\sin\theta \cos\theta$
Y: $- mg \sin\theta + F_L \sin\theta \cos\theta = m\ddot{\theta} L\sin^2\theta + m\dot{\theta}L\cos\theta \sin\theta$

Pri seštevanju se člani: $F_L \sin \theta \cos\theta$ pa $m\, \dot{\theta}L\sin\theta \cos\theta$ pokrajšata.
$- mg \sin\theta = m\, \ddot{\theta}L\cos^2\theta + m\, \ddot{\theta}L\sin^2\theta$
$- mg \sin\theta = m\, \ddot{\theta}L\, (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$ /pokrajšamo z m, uporabimo trig.identiteto
$- g \sin\theta = \ddot{\theta}L$

=> $L\ddot{\theta} + g \sin\theta = 0$

Za lažjo izpeljavo enačbe lahko uporabimo navor. Navor sile teže je enak navoru, s katerim bi sila teže delovala v eni sami tocki – v masnem središču telesa. Obesimo telo na neko os, okrog katere se lahko vrti. Os je vodoravna, koordinatno izhodišce pa naj leži tej osi.

Za vektor rocice $r*$ vzamemo vektor od izhodišca do težišča, ki je v našem primeru L. Velikost navora je potem Mg = mg L sin θ, kjer je θ kot med vektorjem rocice in silo teže. Od drugi strani je navor enak: M = J α, kjer je I vztrajnostni moment, v našem primeru, točkastega telesa, ki je enak: $J = m L^2$, α pa je kotni pospešek, ki ga lahko zapišemo kot drug odvor spremenljivke θ. Torej dobimo:

$-mg L \sin\theta = m L^2 \alpha$

$- mg L \sin\theta = m L^2 \ddot{\theta}$ */pokrajšamo m in L*

$- g L \sin\theta = L\ddot{\theta}$

$\Rightarrow L\ddot{\theta} + g \sin\theta = 0$

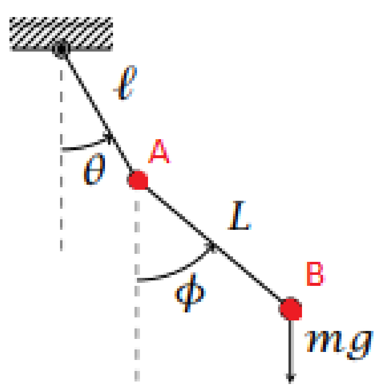
2. Koordinati x in y položaja točkaste mase m v odvisnosti od kotov θ in ϕ ter dolžin palic l in L lahko izračunamo tako, da najprej pogledamo prvi sistem (kot θ) in zapišemo koordinati točke A:

   $x_A = l \sin\theta$
   $y_A = -l \cos\theta$

   Za izračun koordinate točke B pride vpoštev celotni sistem, oziroma sta odvisna od oba kota in dolžin. Dobimo ju tako da koordinate seštevamo:

   $x_B = x_A + L \sin\theta = l \sin\theta + L \sin\theta$

   $y_B = y_A - L \cos\theta = -l \cos\theta - L \cos\theta$



3. Diferencialno enačbo $L\ddot{\phi} + g \sin(\phi) = -l\, \ddot{\theta} \cos(\theta - \phi) + l\, \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \phi)$ lahko zapišemo kot sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda za funkciji ϕ in $\omega = \dot{\phi}$.

   $L\dot{\omega} + g \sin(\phi) = -l\, \ddot{\theta} \cos(\theta - \phi) + l\, \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \phi)$

   Zdaj lahko izrazimo $\dot{\omega}$:

   $\dot{\omega} = (-g \sin(\phi) - l\, \ddot{\theta} \cos(\theta - \phi) + l\, \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \phi)) / L$ *(prva enačba)*

   $\dot{\phi} = \omega$ *(druga enačba)*

4. Funkcija [x; y] = pendulum(Phi0, Theta, T), za začetne pogoje $\phi_0 = [\phi_0, \omega_0]^T$ in funkcijo $\theta(t) = [\theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)]^T$ rešuje diferencialno enačbo iz 3. točke, do končega časa T in vrne položaj $[x, y]^T$, v katerem je točkasta masa ob času T. Phi0 je vektor: Phi0 = [phi0; omega0], Theta je funkcija spremenljivke t, $\theta(t)$, T je število. Pri reševanju bomo privzeli, da za naše nihalo velja $g = m = l = L = 1$, $-1 \le x_0 \le 1$.

   Za izračun položaja pri tej funkciji si pomagamo s Runge-Kutta metodo:

   rk4(f, [t0, tk], y0, h), ki poisce priblizek resitve diferencialne enacbe y' = f(t,Y) z zacetnim pogojem y(t0) = y0, s korakom dolzine h.

   Pri tej funkciji bomo vzeli korak h=0.1. Spremenljivka t bo vektor ki bo vseboval vrednosti od 0 do T s korakom h (0, 0+h, 0+2h,...T). Vektor Y na začetku bo vseboval vektor Phi0. Z metodo rk4 bomo izracunali nove vrednosti vektora Y in sproti shranili. Rabimo še funkcijo f(t, Y) ki je definirana na naslednji način (glej točko 3): prvi element $\dot{\phi}$ ki je enak ω, je vbistvu drugi element vektorja Y. Drugi element funkcije je $\dot{\omega}$ ki je enak opisanemu izrazu. Vrednosti θ in njegovi odvodi so že podani kot funckije ki so odvisni od trenutega t-ja, za ϕ pa vzamemo prvi element vektorja Y.

   Ko se zanka zaključi, zadnji stolpec vektorja Y bo vseboval rešitve za ϕ in ω. Za izračun položaja telesa v podanem času, uporabimo formule iz 2. (xB in yB). Za kot θ vzamemo vrednost prve funkcije v času T, oziroma $\theta(T)$.