в него входила только одна тригонометрическая функция угла α. Для этого представим коэффициент трения k как тангенс некоторого угла φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = k; \quad \varphi = \operatorname{arctg} k$$
$$\sin\varphi = \frac{k}{\sqrt[3]{1+k^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Так как k задано, угол φ можно считать известным. Подставляя в (4) $\operatorname{tg}\varphi$ вместо k и умножая числитель и знаменатель на $\cos\varphi$, получим

$$F = \frac{P\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha + \cos\alpha} =$$
$$= \frac{P\sin\varphi}{\sin\varphi\sin\alpha + \cos\varphi\cos\alpha} = \frac{P\sin\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)} =$$
$$= \frac{Pk}{\sqrt{1+k^2}\cos(\alpha-\varphi)}.$$

Теперь ясно, что сила F будет минимальной тогда, когда $cos(\alpha-\varphi) = 1$, то есть

$$a_{\min} = \varphi = \operatorname{arctg} k$$

При этом минимальное значение силы F равно

$$F_{\min} = \frac{kP}{\sqrt{1+k^2}}$$

Из решения этой задачи можно сделать практический вывод: когда необходимо везти на санях груз по дороге с большим коэффициентом трения (например, если дорога посыпана песком), нужно тянуть сани за короткую верёвку. Если же коэффициент трения мал, верёвка должна быть длинной. Объясните это.

З а д а ч а 3. *Точки 1 и 2 движутся по осям x и y к началу координат (рис. 2). В момент* $t_0 = 0$ *точка 1 находится на расстоянии а точка 2 — на расстоянии* $s_2 = 5$ *см от начала координат. Первая точка движется со скоростью* $v_1 = 2$ *см/с, а вторая — со скоростью* $v_2 = 4$ *см/с. Каково наименьшее расстояние между ними?*

В момент времени t расстояние между точками равно

$$d = \sqrt{(s_1 - v_1 t)^2 + (s_2 - v_2 t)^2} =$$
$$= \sqrt{(10-2t)^2 + (5-4t)^2} =$$
$$= \sqrt{20t^2 - 80t + 125}\,(\text{см}).$$

Под корнем стоит квадратный трёхчлен, из которого можно легко выделить полный квадрат. Действительно,

$$20t^2 - 80t + 125 = 5|(2t-4)^2 + 9|.$$

Ясно, что минимум этого выражения, а значит и расстояния d будет при $t = 2$, откуда

$$d_{\min} = \sqrt{45}\,\text{см} \approx 6,7\,\text{см}.$$

В заключение рассмотрим задачу, для решения которой используется так называемый метод приращений, не входящий в программу средней школы.

З а д а ч а 4. *Группа спорстменов организовала на берегу моря следующее соревновние. Стартуя из точки A (рис. 3) на берегу моря, каждый спорстмен должен достичь буйка B, расположенного на расстоянии* $l = 120$ м *от берега. Береговую линию можно считать прямой; расстояние от старта A до основания перпендикуляра BC, опущенного на эту линию, равно* $L = 200$ м. *Каждый спорстмен имеет право пробежать любое расстояние по берегу от старта A.*

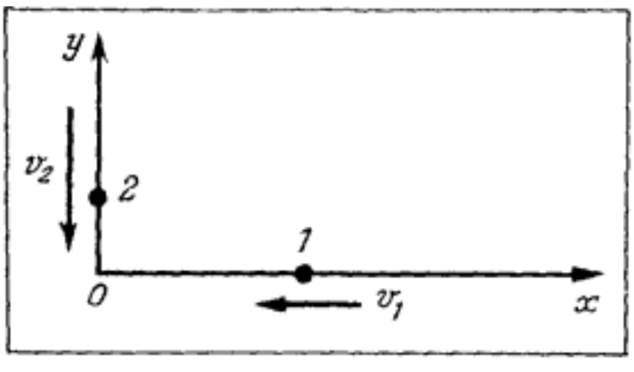

Рис. 1:

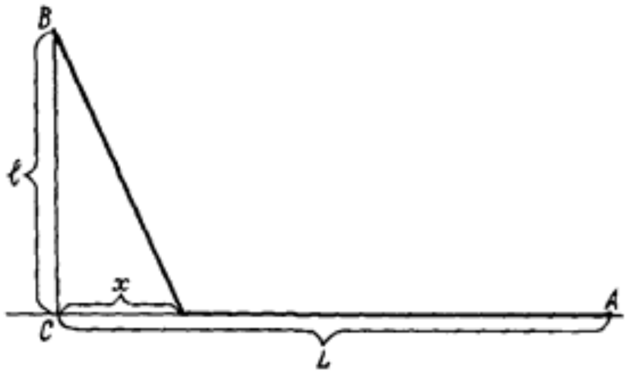

Рис. 2: