Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №7.
«Работа с системой компьютерной вёрстки LaTeX»

Выполнил:
Саломахин Тимур Евгеньевич,
группа P3112

Преподаватель:
Малышева Татьяна Алексеевна,
кандидат технических наук,
доцент факультета ПИиКТ

Санкт-Петербург
2024 г.

в него входила только одна тригонометрическая функция угла α. Для этого представим коэффициент трения k как тангенс некоторого угла φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = k; \quad \varphi = \operatorname{arctg} k$$

$$\sin\varphi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Так как k задано, угол φ можно считать известным. Подставляя в (4) $\operatorname{tg}\varphi$ вместо k и умножая числитель и знаменатель на $\cos\varphi$, получим

$$F = \frac{P\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha + \cos\alpha} =$$
$$= \frac{P\sin\varphi}{\sin\varphi\sin\alpha + \cos\varphi\cos\alpha} = \frac{P\sin\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)} =$$
$$= \frac{Pk}{\sqrt{1+k^2}\cos(\alpha-\varphi)}.$$

Теперь ясно, что сила F будет минимальной тогда, когда $cos(\alpha-\varphi) = 1$, то есть

$$a_{\min} = \varphi = \operatorname{arctg} k$$

При этом минимальное значение силы F равно

$$F_{\min} = \frac{kP}{\sqrt{1+k^2}}$$

Из решения этой задачи можно сделать практический вывод: когда необходимо везти на санях груз по дороге с большим коэффициентом трения (например, если дорога посыпана песком), нужно тянуть сани за короткую верёвку. Если же коэффициент трения мал, верёвка должна быть длинной. Объясните это.

З а д а ч а 3. *Точки 1 и 2 движутся по осям x и y к началу координат (рис. 2). В момент $t_0 = 0$ точка 1 находится на расстоянии $s_1 = 10$ см, а точка 2 — на расстоянии $s_2 = 5$ см от начала координат. Первая точка движется со скоростью $v_1 = 2$ см/с, а вторая — со скоростью $v_2 = 4$ см/с. Каково наименьшее расстояние между ними?*

В момент времени t расстояние между точками равно

$$d = \sqrt{(s_1 - v_1t)^2 + (s_2 - v_2t)^2} =$$
$$= \sqrt{(10-2t)^2 + (5-4t)^2} =$$
$$= \sqrt{20t^2 - 80t + 125}\,(\text{см}).$$

Под корнем стоит квадратный трёхчлен, из которого можно легко выделить полный квадрат. Действительно,

$$20t^2 - 80t + 125 = 5|(2t-4)^2 + 9|.$$

Ясно, что минимум этого выражения, а значит и расстояния d будет при $t = 2$, откуда

$$d_{\min} = \sqrt{45}\,\text{см} \approx 6,7\,\text{см}.$$

В заключение рассмотрим задачу, для решения которой используется так называемый метод приращений, не входящий в программу средней школы.

З а д а ч а 4. *Группа спорстменов организовала на берегу моря следующее соревновние. Стартуя из точки A (рис. 3) на берегу моря, каждый спорстмен должен достичь буйка B, расположенного на расстоянии $l = 120$ м от берега. Береговую линию можно считать прямой; расстояние от старта A до основания перпендикуляра BC, опущенного на эту линию, равно $L = 200$ м. Каждый спорстмен имеет право пробежать любое расстояние по берегу от старта A.*

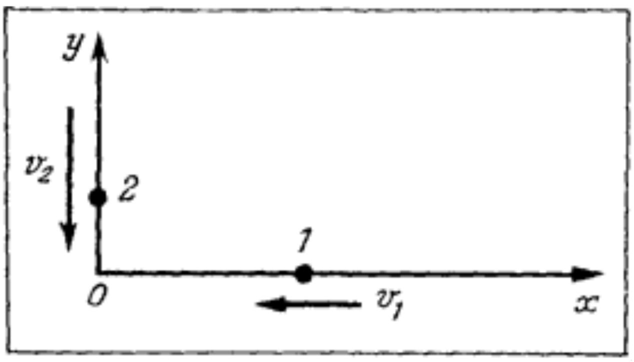

Рис. 1:

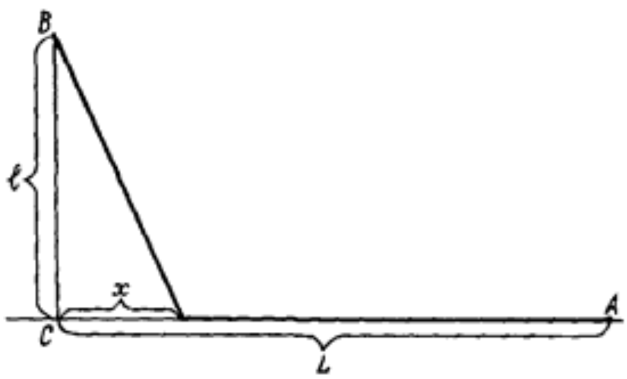

Рис. 2:

жество близнецов. Наибольшей из известных пар-близнецов является пара (10000000009649, 10000000009651).

3. Коснёмся ещё одного вопроса, связанного с простыми числами. Возьмём отрезок ряда натуральных чисел от 1 до не которого n включительно. На этом отрезке имеется определённое количество простых чисел. Число их принято обозначать через $\pi(n)$ *). Чему равно $\pi(n)$ для отдельных значений n.

Для малых n это легко подсчитать. Например $\pi(1) = 0, \pi(2) = 1, \pi(3) = 2, \pi(4) = 2, \pi(5) = 3, \pi(6) = 3, \pi(7) = 4, \pi(8) = 4, \pi(9) = 4, \pi(10) = 4$.

Сразу замечаетсся нерегулярное изменение $\pi(n)$. Вообще, никакой простой формулы для $\pi(n)$ написать нельзя.

Тем не менее, увеличивая n, можно заметить, что «средняя плотность» простых чисел, то есть отношение $\pi(n) : n$ становится все меньше и меньше. Это хорошо видно из следующей таблицы:

n	$\pi(n)$	$\pi(n) : n$
10	4	0,4
100	25	0,4
1 000	168	0,17
10 000	1 229	0,12
100 000	9 592	0,096
1 000 000	78 498	0,078
10 000 000	664 579	0,066
100 000 000	5 761 455	0,057
1 000 000 000	50 847 478	0,051

Доказано, что с возрастанием n отношение $\pi(n) : n$ приближается к нулю. Впервые этот факт доказал Леонард Эйлер — величайший математик XVIII века. В дальнейшем великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев уточнил результат Эйлера, доказав более общую теорему (см. «Квант» №5 за 1971 год, стр 1 — 3), но об этом мы уже рассказывать не будем.

*) π — греческая буква «пи», n — латинская буква «эн», $\pi(n)$ — читается так: «пи от эн».