

# AMPLIACIÓN DE ESTADÍSTICA Y OPTIMIZACIÓN

Francisco J. Aragón Artacho  
[francisco.aragon@ua.es](mailto:francisco.aragon@ua.es)

Dpto. Matemáticas, Universidad de Alicante  
Curso 2022-2023

# AMPLIACIÓN DE ESTADÍSTICA Y OPTIMIZACIÓN

Contenidos para el curso 2021-22

## BLOQUE DE OPTIMIZACIÓN (45 horas: 35h. teóricas + 10h. prácticas)

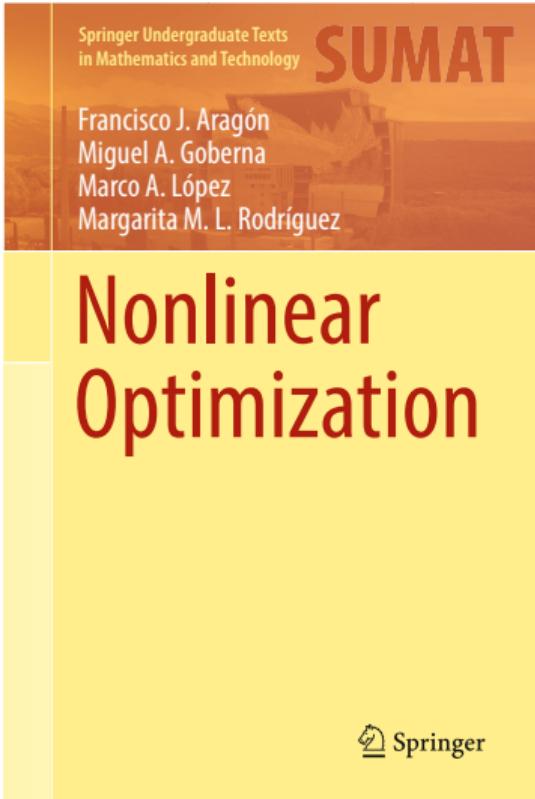
- ▶ Modelos de optimización y herramientas básicas: modelización, herramientas de cálculo básicas, convexidad, condiciones de optimalidad en puntos interiores.
- ▶ Optimización sin restricciones: optimización cuadrática, problemas de mínimos cuadrados, optimización convexa, algoritmos de búsqueda lineal, el método de Newton, algoritmos que no usan derivadas.
- ▶ Optimización con restricciones: optimización lineal, condiciones de optimalidad, métodos de penalización y barrera, programación cuadrática secuencial.

## BLOQUE DE ESTADÍSTICA (15 horas: 10 h. teóricas + 5h. prácticas)

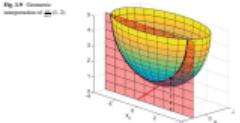
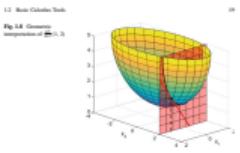
Muestreo. Estadísticos y Distribuciones muestrales. Estimadores y propiedades. Estimación puntual, por intervalo, intervalos de confianza y contraste de hipótesis.

# Bibliografía del bloque de Optimización

*Mathematics for machine learning  
(M.P. Deisenroth, A.A. Faisal, C.S. Ong)*



<https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-030-11184-7>



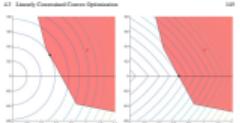
$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_1 + e_1) - f(\vec{x}_1)}{e_1}$$

where  $e_1$  represents a unit vector along the  $x_1$ -axis, defining also the slope of the tangent line to the function  $f$  at  $\vec{x}_1$ .

Analogously, the partial derivative of  $f$  with respect to  $x_2$  at  $\vec{x}_1$  is

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_2 + e_2) - f(\vec{x}_2)}{e_2}$$

The geometric interpretation of the partial derivatives of the function  $f$  is Example 1.10 is shown in Figs. 1.2 and 1.3.



In order to estimate the first increments, we can add to the objective function of  $P_{x_1}$  a regularization term  $\gamma \|\vec{x}\|^2$ , with  $\gamma > 0$  selected by the decision maker. This leads to the regularized problem  $P_{x_1} + \gamma$ , which is a convex quadratic optimization problem (shades in the strong convexity of the regularized function), whose unique solution, depending on  $\gamma$ , approaches the optimal set of  $P_{x_1}$ , as  $\gamma$  decreases to 0.

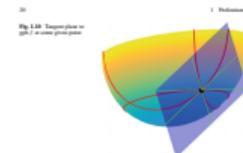
Regarding the second increments, we can use a similar strategy, consisting in adding to the objective function  $P_{x_2}$  a regularization term  $\gamma \|\vec{x}\|^2$ , with  $\gamma > 0$  selected by the decision maker, obtaining the number of active components of  $\vec{x}_2$ , and  $y = 0$ . Unfortunately, the function  $\vec{x}_2$  is not strict convex. For this reason, it is usually replaced by the 1-norm  $\|\vec{x}_2\|_1$ , which is a convex function, and the corresponding optimization problem (i.e., vector with many zero components).

Finally, regarding the mixed increments, we consider the optimization problem  $P_{x_1, x_2}$  with  $\vec{x} = (0, 0)$ , whose polyhedral feasible set  $\mathcal{P}$  is represented in Fig. 1.1. The feasible set  $\mathcal{P}$  is a closed set, and it is the union of the feasible sets  $\mathcal{P}_{x_1}$  and  $\mathcal{P}_{x_2}$  of the two problems  $P_{x_1}$  and  $P_{x_2}$ , which have the same feasible set but the objective function is now the sum of the two functions  $f_{x_1}$  and  $f_{x_2}$ . Note that the point  $\vec{x} = (0, 0)$  is a vertex of  $\mathcal{P}$ , and it has a value of 1 of the solution of  $P_{x_1}$ . The addition of the  $\ell_1$  norm to the objective function corresponds to the presence of the boundaries of the function  $f_{x_2}$  in the feasible set  $\mathcal{P}$ . In this case, the function  $f_{x_2}$  is strictly convex, and the value of  $y$  in the quantity term should not be chosen too small.

We can show that the new term  $\gamma \|\vec{x}\|^2$ , with  $\gamma > 0$ , is the objective function of a convex quadratic problem

$$P_{x_1, x_2} : \min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \vec{x}^T Q \vec{x} + \vec{r}^T \vec{x},$$

where  $Q = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \gamma I_n \end{pmatrix}$  and  $\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix}$ .



**Definition 1.12** When both partial derivatives of the function  $f$  at  $\vec{x}$  exist, the gradient of  $f$  at  $\vec{x}$  is defined as the vector

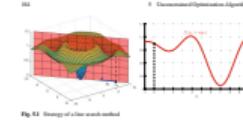
$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Considering the tangent lines to the convex curves contained in  $gph f$  and passing through  $\vec{x}(\vec{x}_0)$ , in the case where all these lines intersect the same plane, then the gradient of  $f$  at  $\vec{x}$  is the vector  $\nabla f(\vec{x}) = \vec{x}(\vec{x}_0)$  for  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

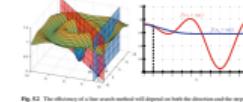
If both partial derivatives of  $f$  at  $\vec{x}$  exist, the curves obtained in intersection of  $gph f$  with the planes  $x_i = \vec{x}_i$  and  $x_j = \vec{x}_j$  have parametric equations

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \vec{x}_1 + t \\ \vdots \\ x_n = \vec{x}_n + t \end{array} \right\} \text{ and } \left. \begin{array}{l} x_i = \vec{x}_i + t \\ x_j = \vec{x}_j + t \\ \vdots \\ x_n = \vec{x}_n + t \end{array} \right\}$$

where tangent vectors at  $\vec{x}(\vec{x}_0)$  are given by the corresponding derivatives  $t = 0$ , i.e., the vectors  $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \dots, 0\right)^T$  and  $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \dots, 0\right)^T$ , which are orthogonal to the vector  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right)^T$ . Therefore, the vector  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right)^T$  must be orthogonal to the tangent plane to  $gph f$  at  $\vec{x}(\vec{x}_0)$ , provided that such a tangent plane does exist. That is, when the tangent plane exists, its equation is necessarily given by



**Fig. 1.4: Efficiency of a line search method**



**Fig. 1.4: Efficiency of a line search method**

where  $\rho_1$  is the search direction and  $\alpha$  is the stepsize, see Fig. 1.1. Of course, the stepsize  $\alpha$  is not necessarily unique, see Fig. 1.2.

The stepsize  $\alpha_1$  could be determined by solving the problem

$$\min_{\alpha \geq 0} f(\vec{x}_0 + \alpha \rho_1).$$

The one-dimensional optimization problem (1.1) is a global optimization problem, which is known as exact line search. With the exception of very few particular cases, the stepsize  $\alpha_1$  is not unique, and it is called non-uniqueness of  $\alpha_1$ , which is commonly called the stepsize (1.1). This problem is referred to as the stepsize selection problem.

Most of the line search methods use directions  $\rho_1$  that are descent, i.e., satisfy

**Definition 1.13** One says that  $\rho_1$  is a descent direction for the function  $f$  at  $\vec{x}_0$  if

$$f'(\vec{x}_0, \rho_1) = \nabla f(\vec{x}_0)^T \rho_1 < 0. \quad (1.2)$$

# AMPLIACIÓN DE ESTADÍSTICA Y OPTIMIZACIÓN

## Instrumentos y criterios de evaluación 2022-23

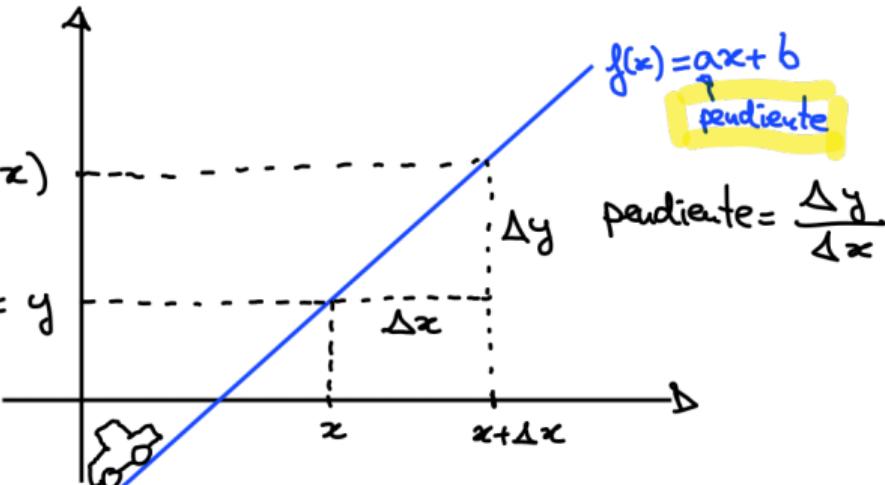
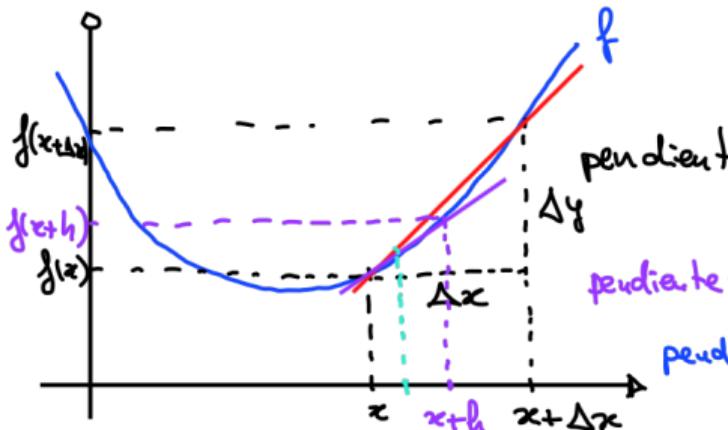
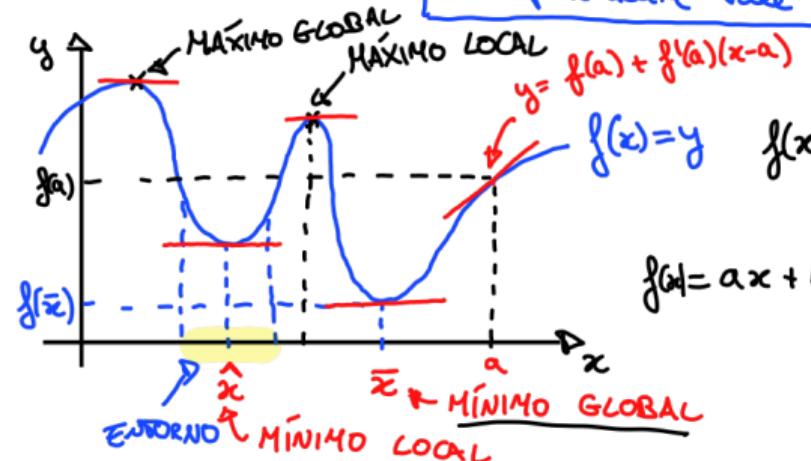
Sin datos

Descripción	Criterio	Tipo	Ponderación
Examen final	Prueba final que comprenda toda la asignatura.	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN DURANTE EL SEMESTRE	40
Informes de prácticas	Evaluación de memorias técnicas de prácticas de ordenador. Esta parte es recuperable en la convocatoria extraordinaria C4 mediante la entrega de los informes de prácticas	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN DURANTE EL SEMESTRE	35
Trabajo académico	Elaboración y entrega de memorias, informes o trabajos individuales o en equipo. Esta parte es recuperable en la convocatoria extraordinaria C4 mediante la entrega de los trabajos.	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN DURANTE EL SEMESTRE	25

**IMPORTANTE:** El plagio en cualquier práctica entregada supondrá un cero en la nota de Informes de prácticas. Ídem para el Trabajo académico.

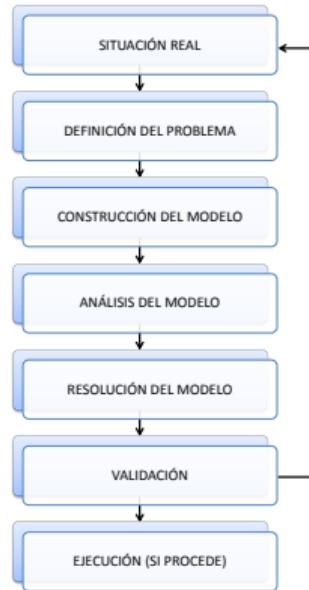
# Introducción

En los mín. y máximos la pendiente vale 0

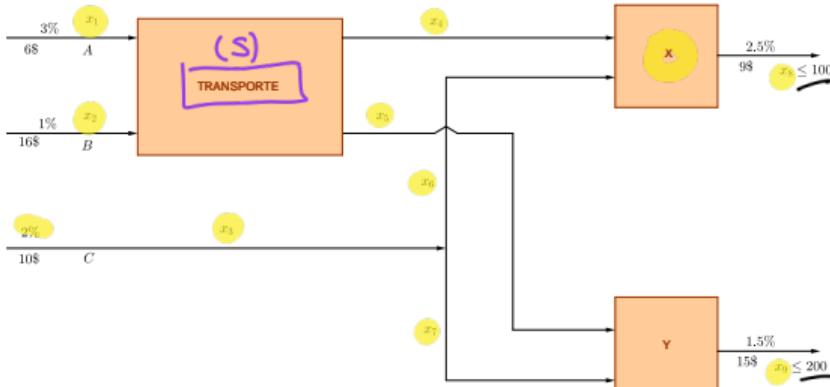
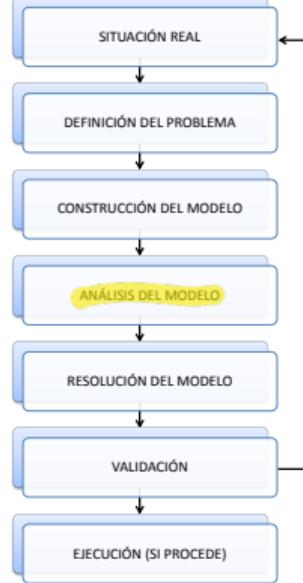


$$\begin{aligned} \text{pendiente} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{a(x+\Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x} \\ &= \frac{ax + a\Delta x + b - ax - b}{\Delta x} = a \end{aligned}$$

# Modelización



# Modelización



Una petrolera debe transportar los crudos A, B y C de la forma indicada en este grafo para producir dos combustibles, X e Y, con límites en el % de azufre (S) y demandas de 100 y 200 unidades.

$$P: \text{Max } 9x_8 + 15x_9 - 6x_1 - 16x_2 - 10x_3 + \text{función objetivo}$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 = x_4 + x_5$$

$$x_3 = x_6 + x_7$$

$$x_4 + x_6 = x_8$$

$$x_5 + x_7 = x_9$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_9 \geq 0, x_8 \leq 100, x_9 \leq 200$$

sujeto a

restricciones de  
nuestro problema

$$\frac{3x_1 + x_2}{x_1 + x_2} x_4 + 2x_6 \leq 2.5(x_4 + x_6)$$

$$\frac{6x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} x_4 + 4x_6 \leq 5x_4 + 5x_6$$

$$(6x_1 + 2x_2)x_4 + 4x_6(x_1 + x_2) \leq 5x_4(x_1 + x_2) + 5x_6(x_1 + x_2)$$

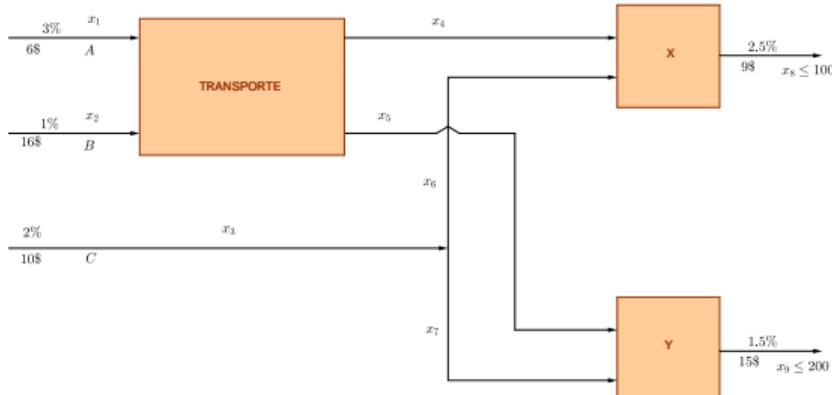
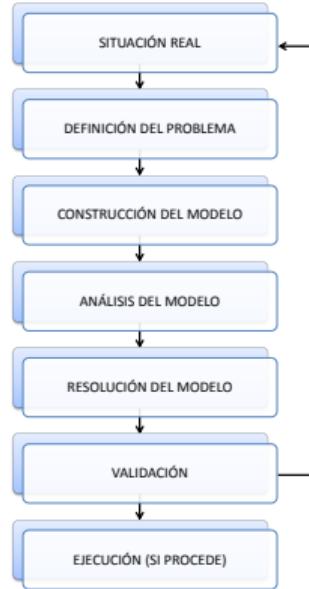
$$6x_1x_4 + 2x_2x_4 + 4x_1x_6 + 4x_2x_6 \leq 5x_1x_4 + 5x_2x_4 + 5x_1x_6 + 5x_2x_6$$

$$x_1x_4 - 3x_2x_4 - x_1x_6 - x_2x_6 \leq 0$$

$$\frac{3x_1 + x_2}{x_1 + x_2} x_4 + 2x_6 \leq 2.5$$

$$\frac{3x_1 + x_2}{x_1 + x_2} x_5 + 2x_7 \leq 1.5$$

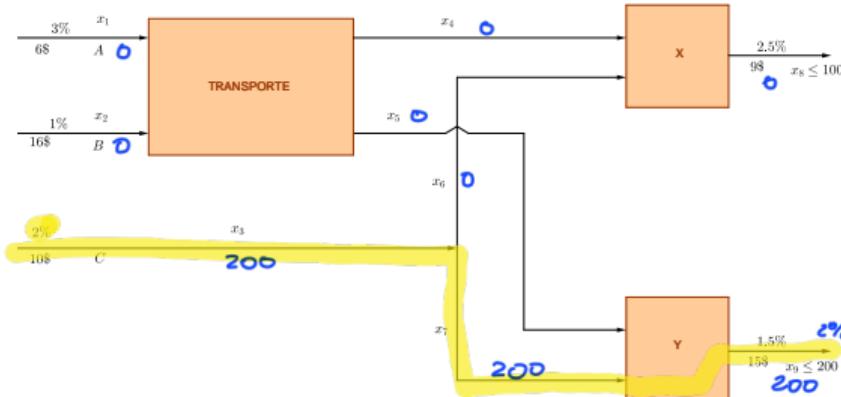
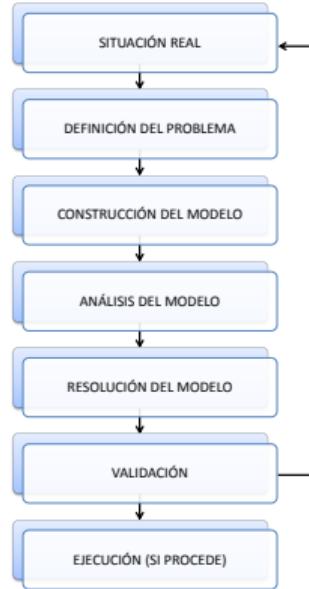
# Modelización



Una petrolera debe transportar los crudos A, B y C de la forma indicada en este grafo para producir dos combustibles, X e Y, con límites en el % de azufre (S) y demandas de 100 y 200 unidades.

$$\begin{aligned}
 P : \quad & \text{Max} \quad f(x) = 9x_8 + 15x_9 - 6x_1 - 16x_2 - 10x_3 \\
 \text{s.a} \quad & x_1x_6 + 3x_2x_4 + x_2x_6 - x_1x_4 \geq 0 \\
 & x_2x_5 - 3x_1x_5 - x_1x_7 - x_2x_7 \geq 0 \\
 & x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\
 & x_3 - x_6 - x_7 = 0 \\
 & x_4 + x_6 - x_8 = 0 \\
 & x_5 + x_7 - x_9 = 0 \\
 & 0 \leq x_8 \leq 100; 0 \leq x_9 \leq 200 \\
 & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 7.
 \end{aligned}$$

# Modelización



$$\begin{aligned}
 P : \quad & \text{Max} \quad f(x) = 9x_8 + 15x_9 - 6x_1 - 16x_2 - 10x_3 \\
 \text{s.a} \quad & x_1x_6 + 3x_2x_4 + x_2x_6 - x_1x_4 \geq 0 \\
 & x_2x_5 - 3x_1x_5 - x_1x_7 - x_2x_7 \geq 0 \\
 & x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\
 & x_3 - x_6 - x_7 = 0 \\
 & x_4 + x_6 - x_8 = 0 \\
 & x_5 + x_7 - x_9 = 0 \\
 & 0 \leq x_8 \leq 100; 0 \leq x_9 \leq 200 \\
 & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 7. \\
 & \boxed{x_1 + x_2 \geq 0}
 \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix}, \hat{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 50 \\ 50 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

No cumple  
la restriccion  
del 1.5% S

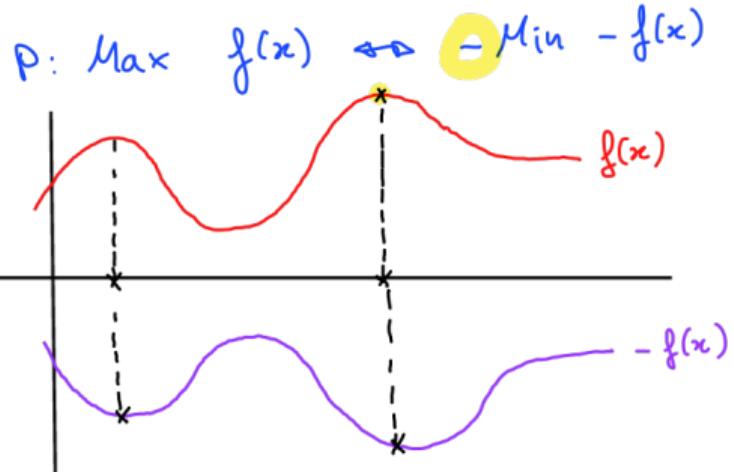
$$\begin{aligned}
 f(\bar{x}) &= +400, f(\hat{x}) = +100, \\
 f(\tilde{x}) &= +1000.
 \end{aligned}$$

# Problemas de optimización

$$P : \begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \leftarrow \text{función objetivo} \\ \text{s.a} & \begin{array}{l} h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m, \\ g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, p, \\ x \in C, \end{array} \end{array}$$

$\boxed{\quad}$   $\leftarrow$  Conjunto factible  $F$

donde  $C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f, h_i, g_j : C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, p$ .



Si  $\bar{x}$  es un máximo global de  $f$  en  $F$   
 $\Leftrightarrow f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in F$  pertenece para todo  
 $\Leftrightarrow -f(\bar{x}) \geq -f(x)$   
 $\Leftrightarrow \bar{x}$  es un mínimo global de  $-f$  en  $F$

# Problemas de optimización

$$\begin{array}{ll} P : & \text{Min} \quad f(x) \\ & \text{s.a} \quad h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m, \\ & \quad g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, p, \\ & \quad x \in C, \end{array}$$

donde  $C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f, h_i, g_j : C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

## Definición

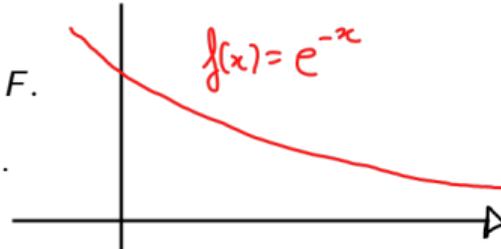
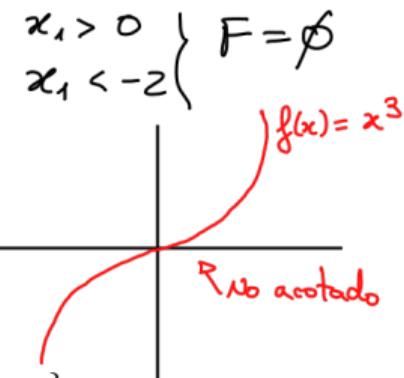
El **conjunto factible** del problema  $P$  dado es

$$F := \{x \in C : h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m; g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, p\}.$$

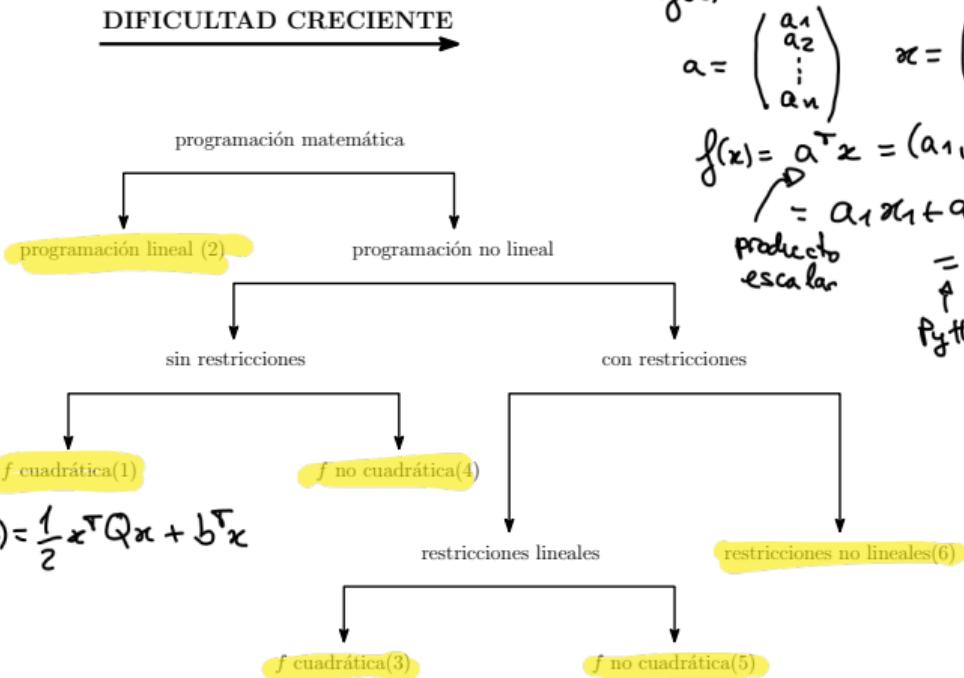
Denotaremos el **valor óptimo** de  $P$  por  $v(P)$  y diremos que  $P$  es **inconsistente** si  $F = \emptyset$ , **acotado** si  $f(F)$  tiene cota inferior y **no acotado** si  $f(F)$  no tiene cota inferior. Un punto  $\bar{x} \in F$  es **mínimo global** de  $P$  si  $f(\bar{x}) = v(P)$  o, equivalentemente,

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in F.$$

Cuando existe un mínimo global, se dice que  $P$  es **resoluble**.



# Problemas de optimización



LINEAL  $\equiv$  fácil

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a^T x = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \end{aligned}$$

producto  
escalar

$$= a @ b$$

python



# Reformulación de problemas de optimización

Una función  $m : f(F) \rightarrow \mathbb{R}$  es **creciente** si

$$y_1 < y_2 \Rightarrow m(y_1) < m(y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in f(F).$$

Si  $m : f(F) \rightarrow \mathbb{R}$  es creciente (por ejemplo,  $m(x) = e^x, \sqrt{x}, x^3, \log x, \ln x, \dots$ ) y llamamos  $P_2$  al modelo que resulta de sustituir  $f(x)$  por  $m(f(x))$  en un problema dado  $P_1$ ,  $P_1$  y  $P_2$  tienen los mismos óptimos locales y globales, y  $v(P_2) = m(v(P_1))$ .

Análogamente, la sustitución de la restricción  $g_j(x) \geq 0$  en  $P_1$  por  $m(g_j(x)) \geq m(0)$  proporciona un modelo equivalente  $P_2$ .

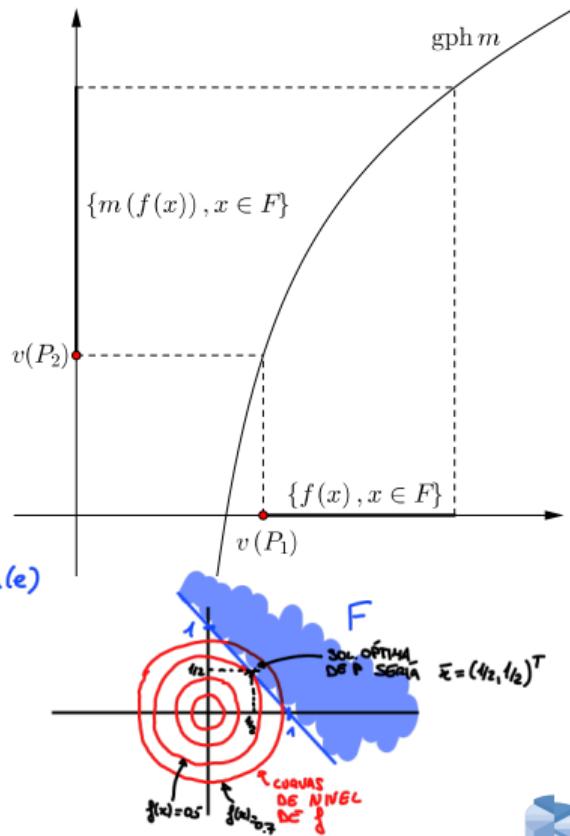
$P: \text{Min } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = f(x) \rightarrow P_1: \text{Min } x_1^2 + x_2^2 \text{ s.a. } e^{x_1+x_2} \geq e$

$\text{s.a. } e^{x_1+x_2} \geq e$

$x^2 \text{ creciente si } x > 0$

$P_2: \text{Min } x_1^2 + x_2^2 \text{ s.a. } x_1 + x_2 \geq 1 \leftarrow F$

$\ln(e^{x_1+x_2}) \geq \ln(e)$



# Reformulación de problemas de optimización

## Ejemplo

Queremos construir un bote cilíndrico metálico de 1 litro de volumen.

¿Qué medidas deberá tener si queremos minimizar el material empleado?



$$\text{Volumen} = \pi x_1^2 x_2 = 1$$



$$\text{ÁREA} = 2\pi x_1 \cdot x_2$$



$$P_3: \text{Min } \frac{1}{\pi x_1} + x_1^2$$

s.a  $x_1 > 0$

CAMBIO DE VARIABLE  
 $x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x$

$$P_4: \text{Min } \frac{1}{\pi e^y} + e^{2y} = \frac{1}{\pi} e^{-y} + e^{2y} = g(y)$$

s.a  $e^y > 0$  SUPERFLUA

$$P_1: \text{Min } 2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2 = 2\pi (x_1 x_2 + x_1^2)$$

$$\text{s.a } \pi x_1^2 x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{\pi x_1^2}$$

$x_1, x_2 > 0$

$$P_2: \text{Min } \cancel{x_1} \cdot \frac{1}{\pi x_1} + x_1^2$$

s.a  $x_1 > 0, \cancel{\frac{1}{\pi x_1}} > 0$  SUPERFLUA

$1 \text{ dm}^3$   
"

$$g'(y) = -\frac{1}{\pi} e^{-y} + 2e^{2y} = 0$$

$$2e^{2y} = \frac{1}{\pi} e^{-y}$$

$$2e^{2y} \cdot e^y = \frac{1}{\pi} \quad \rightarrow e^{3y} = \frac{1}{2\pi}$$

"  
 $\downarrow \ln$

$$3y = \ln\left(\frac{1}{2\pi}\right)$$

SOLUCIÓN  
OPTIMA  
DE  $P_4$

$$\rightarrow \bar{y} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2\pi}\right)}{3} = -0.61$$

$$\bar{x}_1 = e^{\bar{y}} = e^{-0.61}$$

$$= 0.5419 \text{ dm}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{\pi \bar{x}_1^2} = 1.083 \text{ dm}$$

LATA ÓPTIMA RADIO 5.4cm, ALTURA 10.83cm

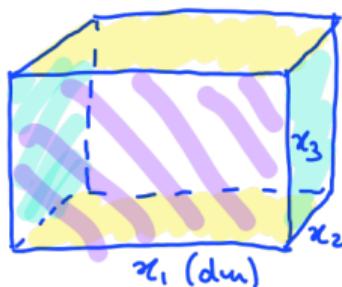


# Reformulación de problemas de optimización

## Ejemplo

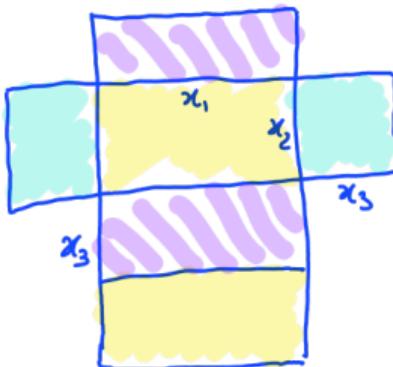
Queremos construir una caja metálica de 1 litro de volumen.

¿Qué medidas deberá tener si queremos minimizar el material empleado?



$$\text{Volumen} = x_1 x_2 x_3 = 1$$

$$P_1: \text{Min } 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 \\ \text{s.a } x_1x_2x_3 = 1 \rightarrow x_3 = \frac{1}{x_1x_2} \\ x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$$



$$P_2: \text{Min } x_1x_2 + \cancel{x_2 \cdot \frac{1}{x_1x_2}} + \cancel{x_1 \cdot \frac{1}{x_1x_2}} \\ \text{s.a } x_1 > 0, x_2 > 0, \cancel{\frac{1}{x_1x_2} > 0} \quad \text{SUPERFLUA}$$

$$x_i = e^{y_i}$$

$$P_3: \text{Min } e^{y_1} \cdot e^{y_2} + \frac{1}{e^{y_1}} + \frac{1}{e^{y_2}} = e^{y_1+y_2} + e^{-y_1} + e^{-y_2} \\ \text{s.a } e^{y_1} > 0, e^{y_2} > 0$$

Basándonos en el dibujo en 3D, la sol. óptima parece ser  $\bar{y} = (0,0)^T$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= e^{\bar{y}_1} = e^0 = 1 \\ \bar{x}_2 &= e^{\bar{y}_2} = e^0 = 1 \\ \bar{x}_3 &= \frac{1}{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \end{aligned}$$

# Formulación continua de problemas con variables binarias

## Ejemplo (Inversión de capital)

Supongamos que queremos invertir 500€ en los siguientes proyectos:

Proyecto	1	2	3	4	5	6	7
Coste	100	20	150	50	50	150	150
Beneficio	300	50	350	110	100	250	200

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{no invertimos en } i \\ 1, & \text{si invertimos en } i \end{cases}$$

¿Cómo elegir la selección óptima?

P: Max  $(300-100)x_1 + (50-20)x_2 + (350-150)x_3 + \dots + (200-150)x_7$

$$100x_1 + 20x_2 + 150x_3 + 50x_4 + 50x_5 + 150x_6 + 150x_7 \leq 500$$

$x_i \in \{0, 1\} \leftrightarrow$  VARIABLES BINARIAS

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_7)^T \rightarrow \text{Opciones} = 2^7 = 128$$

$$x_i \in \{0, 1\} \Leftrightarrow x_i(1-x_i) = 0$$

" "  
 $x_i - x_i^2$

## Formulación continua de problemas con variables binarias

### Ejemplo (Inversión de capital)

Supongamos que queremos invertir 500€ en los siguientes proyectos:

Proyecto	1	2	3	4	5	6	7
Coste	100	20	150	50	50	150	150
Beneficio	300	50	350	110	100	250	200

¿Cómo elegir la selección óptima?

Una variable 0-1 (también llamada binaria o Booleana) se puede convertir en continua mediante la equivalencia

$$x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow x(1 - x) = 0.$$

(Análogamente, tenemos que  $x \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow x^2 = 1$ .)