8.- Hállense los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx$ alcance un máximo en el punto (3,9).

8.- Hállense los valores de *a* y *b* para que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx$ alcance un máximo en el punto (3,9).

$$f(x, y) = ax^2 + bx$$

Puntos críticos: $\{2ax + b = 0$

$$f(x,y) = ax^2 + bx$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-b}{2a} = 3 \\ f &= ax^2 + bx = 9 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} b = -6a \\ 9a + 3b = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \end{cases}$$

15.- Sea la función $f(x,y) = ax^2 + by^2 - 4x + 2y + c$. Hallar el valor de los parámetros reales *a*, *b* y *c* para que el valor mínimo de esta función sea 10 y se alcance en el punto (2,-1).

$$f(x,y) = a\,x^2 + by^2 - 4x + 2y + c$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$$f(x,y) = a\,x^2 + by^2 - 4x + 2y + c$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2ax - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2by + 2 = 0 \end{cases}$ $en\ (2,-1) \rightarrow$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4a - 4 = 0 \rightarrow a = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2b + 2 = 0 \rightarrow b = 1 \end{cases}$

$$f(x,y) = a\,x^2 + by^2 - 4x + 2y + c =$$
$$= x^2 + y^2 - 4x + 2y + c$$

En (2,-1) → $f(x,y) = 4 + 1 - 8 - 2 + c = 10$

$$c = 15$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow D.P. \rightarrow Mínimo\ Global$$

18.- Dada la función $f(x,y) = x\,y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$:

a) Determinar, si existen, los óptimos locales de $f(x,y)$.

b) ¿Existen óptimos globales de $f(x,y)$?. Razonar la respuesta.

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y - \dfrac{1}{x^2} = 0 \rightarrow y = \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - \dfrac{1}{y^2} = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{y^2} \end{cases}$

Punto $\rightarrow (1,1)$

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix} \rightarrow en\ (1,1) \rightarrow H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definida Positiva: mínimo local (no global)

17.- Dada la función $f(x,y) = 9x^2 + y^2 + 6xy + 1$:

a) Determinar, si existen, los extremos locales de $f(x,y)$.

b) Los extremos calculados en el apartado a), ¿son globales?. Razonar la respuesta.

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = 9x^2 + y^2 + 6xy + 1$$

Puntos críticos: $\begin{cases} 18x + 6y = 0 \\ 2y + 6x = 0 \end{cases} \rightarrow (x, -3x)$

$$f(x, -3x) = 1$$

$$f(x, y) = 9x^2 + y^2 + 6xy + 1$$

$$H = \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

En el punto:

Semi Definida Positiva: Punto de silla o mínimo local

$$f(x, y) = 9x^2 + y^2 + 6xy + 1$$

$$H = \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

En todo el dominio:

Semi Definida Positiva: Mínimo global

20.- Dada la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

a) Estudiar la existencia de óptimos locales de $f(x, y)$ en su dominio de definición.

b) Analizar la existencia de óptimos globales de $f(x,y)$ en el conjunto $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > 0, y > 0\right\}$.

$$\text{Puntos críticos: } \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12 = 0 \rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$

(-1,-2),(-1,2),(1,-2),(1,2)

$$
H = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}
\begin{cases}
(-1,-2) \rightarrow H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow Max \\[2ex]
(-1,2) \rightarrow H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow p.silla \\[2ex]
(1,-2) \rightarrow H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow p.silla \\[2ex]
(1,2) \rightarrow H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow Min
\end{cases}
$$

16.- Sea $f(x,y) = x^3 - y^2 + 3xy$.

a) Determinar los óptimos locales de f en su dominio de definición.

b) Analizar si es convexo el programa: Maximizar $f(x,y)$ en $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < -1\right\}$.

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$$f(x,y) = x^3 - y^2 + 3xy$$

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y + 3x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{-9}{4}\right) \\ (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = x^3 - y^2 + 3xy$$

$$H = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$en\ (0,0) \rightarrow H = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ Indefinida. Punto de silla

$en\ (\frac{-3}{2}, \frac{-9}{4}) \rightarrow H = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ Def. Negativa. Máximo local

19.- Dada la función $f(x,y,z) = -x^2 - 5x - y^2 + 2yz + 6y - 4z^2 - 4z - 14$:

a) Determinar, si existen, los extremos locales de $f(x, y, z)$.

b) ¿Existe máximo global y mínimo global de $f(x, y, z)$?. Razonar la respuesta.

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = -x^2 - 5x - y^2 + 2yz + 6y - 4z^2 - 4z - 14$$

$$\text{P.C. :} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x - 5 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y + 2z + 6 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2y - 8z - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{\left(\frac{-5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right)\right.$$

$$f(x,y) = -x^2 - 5x - y^2 + 2yz + 6y - 4z^2 - 4z - 14$$

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{cases} m_1 = -2 \\ m_2 = 4 \\ m_3 = -24 \end{cases}$$

$H =$ Definida Negativa. Máximo global único