Tema 1

Programas Matemáticos
Resolución Gráfica

Resolución Gráfica

Para casos en donde tengamos funciones y restricciones sencillas, podemos usar el análisis gráfico para resolver un programa de optimización matemático.

Generalmente tendrán que ser funciones de 2 variables.

$$\text{Optimizar } f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq c_i \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C \subseteq R^n \end{cases}$$

Optimizar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq c_i \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \subseteq R^n \end{cases}$$

5 pasos para encontrar los valores $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que maximizan y minimizan la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Optimizar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq c_i \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \subseteq R^n \end{cases}$$

1º paso: Representar el conjunto factible (dibujando los hiperplanos y semiespacios de las restricciones).

$$\text{Optimizar } f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq c_i \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C \subseteq R^n \end{cases}$$

2º paso: Dibujar una curva de nivel, dando un valor a la función y despejando la variable “y”.

$$\text{Optimizar } f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq c_i \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C \subseteq R^n \end{cases}$$

3º paso: Calcular el vector gradiente (derivado la función son respecto a sus variables). Este vector indica hacia donde debemos movernos si queremos aumentar el valor de la función.

$$\text{Optimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq c_i \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \subseteq R^n \end{cases}$$

4º paso: Localizar los óptimos, moviendo la curva de nivel en la dirección del gradiente para encontrar el máximo, en la contraria para el mínimo.

Los puntos serán esquinas y puntos de una curva: Vertices.

$$\text{Optimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq c_i \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \subseteq R^n \end{cases}$$

5º paso: Una vez localizados gráficamente, calcularlos analíticamente:

- Esquinas: Calcular de qué esquina se trata
- Punto de una curva: Igualar las tangentes.

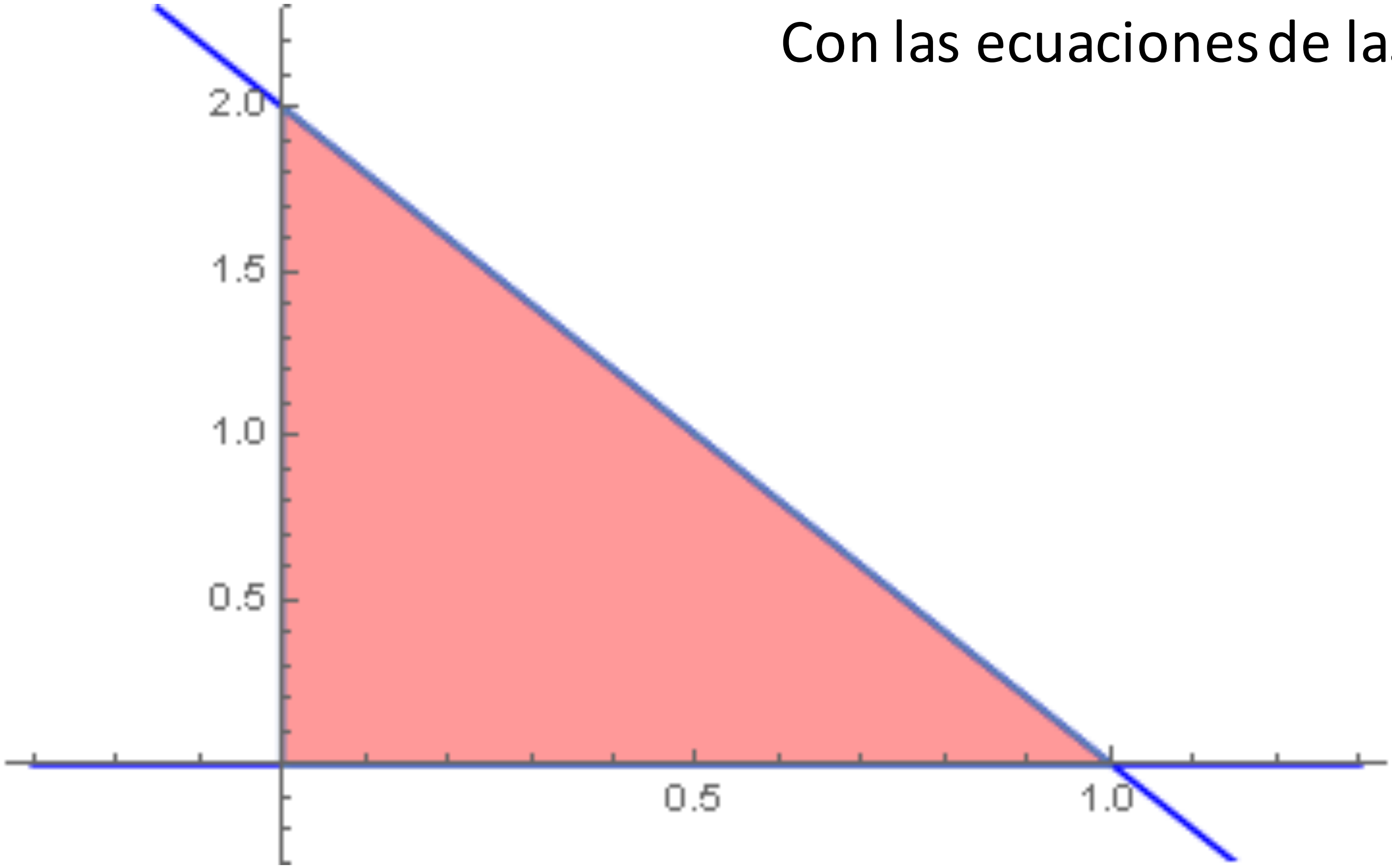
Ejemplo 1

$$\text{Optimizar } x + y$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 2 - 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1º paso: Representar el conjunto factible (dibujando los hiperplanos y semiespacios de las restricciones).

En rojo: Conjunto Factible
Con las ecuaciones de las restricciones



Optimizar $x + y$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 2 - 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

2º paso: Dibujar una curva de nivel. Elijo la curva de nivel = 1

$$x + y = 1 \quad \rightarrow \quad y = 1 - x$$

$$\text{Optimizar } x + y$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 2 - 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

3º paso: Calcular el vector gradiente.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (1,1)$$

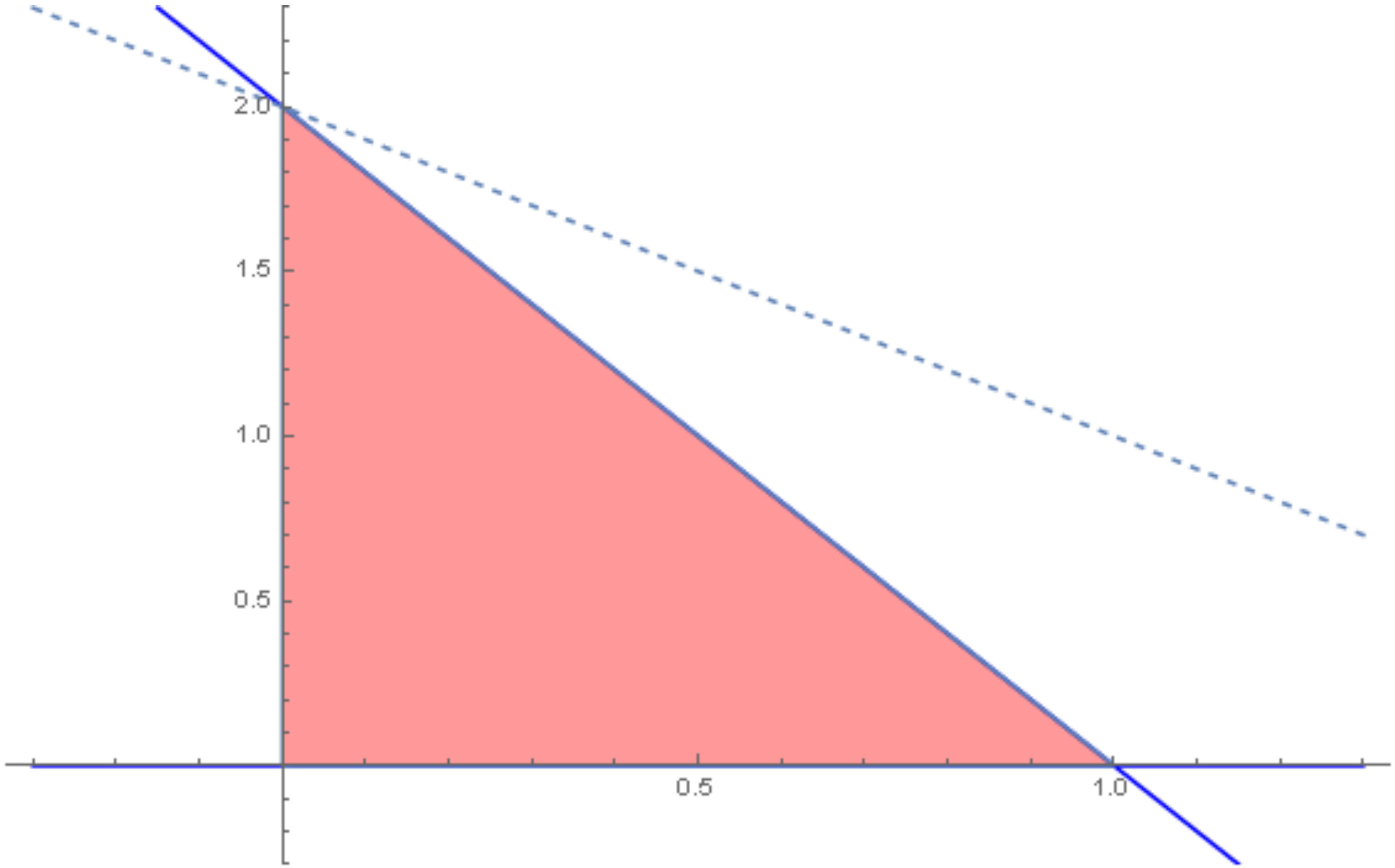
Vector de dirección de crecimiento (1,1)

$$\text{Optimizar } x + y$$

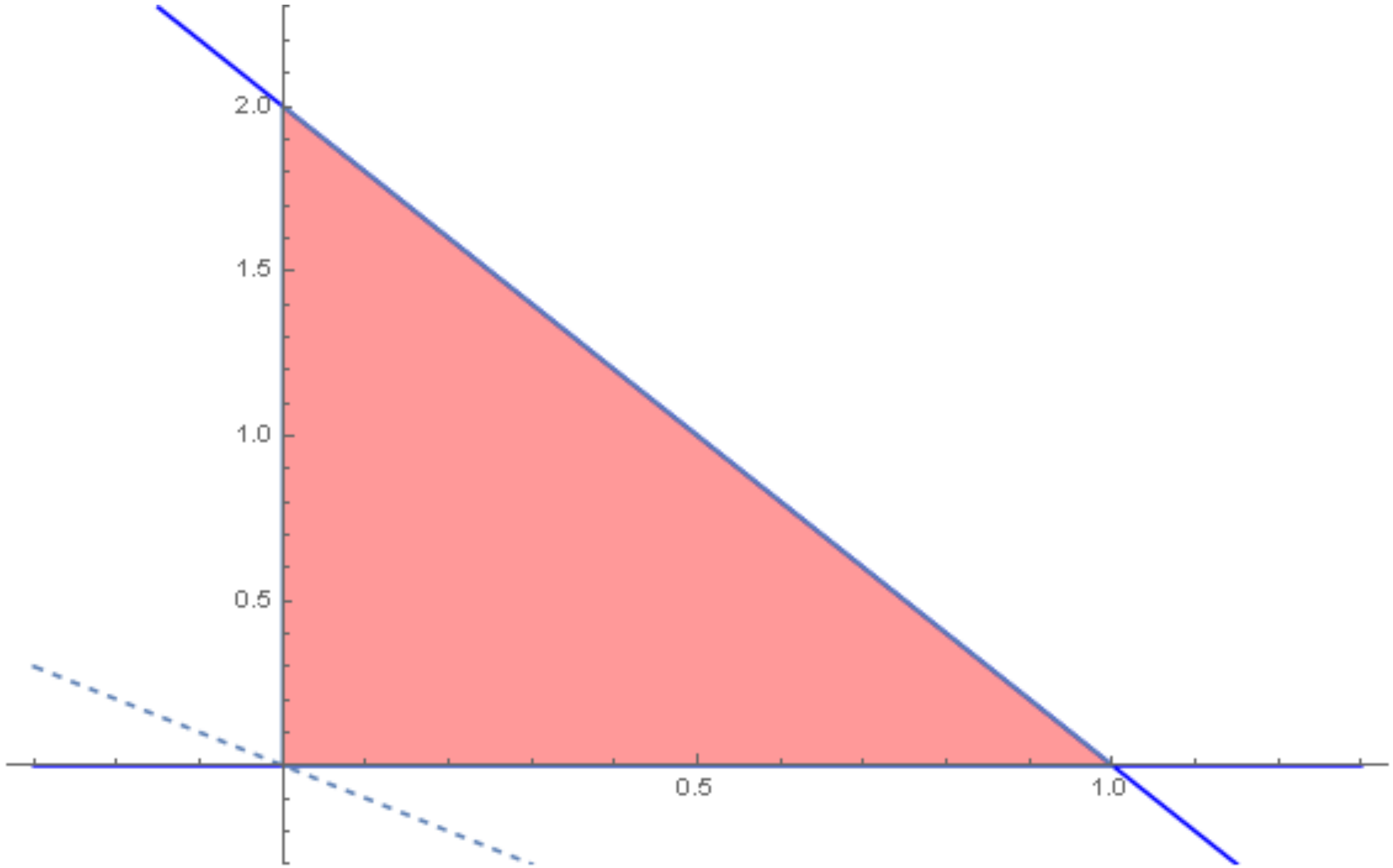
$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 2 - 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

4º paso: Localizar los óptimos.

4º paso: Localizar los óptimos.   Máximo.



4º paso: Localizar los óptimos.   Mínimo.



Optimizar $x + y$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 2 - 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

5º paso: Una vez localizados gráficamente, calcularlos analíticamente.

Máximo: En el punto (0,2). Valor de la función: 0 + 2 = 2.

Mínimo: En el punto (0,0). Valor de la función: 0 + 0 = 0.

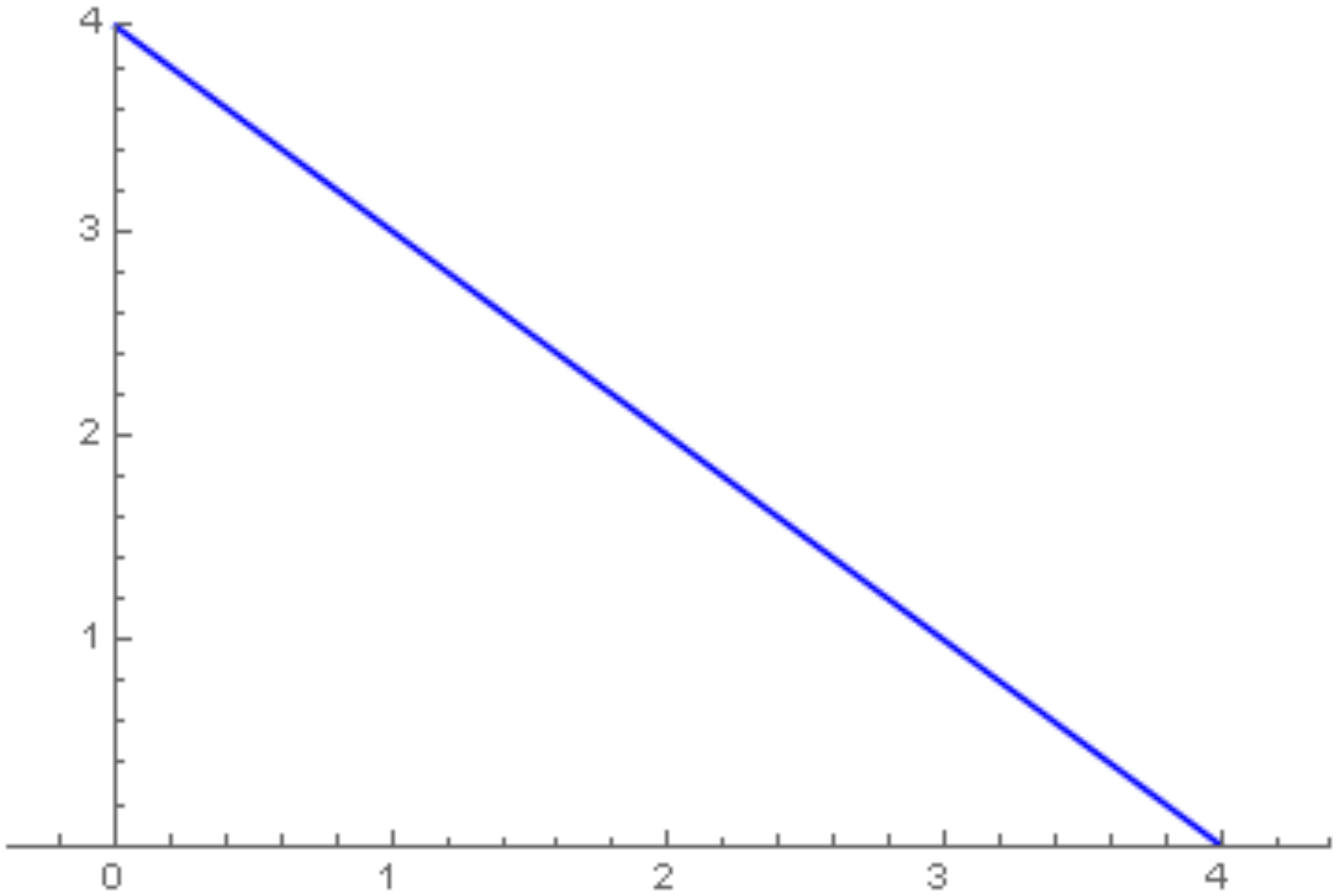
Ejemplo 2

Optimizar xy

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x + y = 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1º paso: Representar el conjunto factible (dibujando los hiperplanos y semiespacios de las restricciones).

La recta es el Conjunto Factible



Optimizar xy

$$\text{Sujeto a}\begin{cases} x+y=4 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

2º paso: Dibujar una curva de nivel. Elijo la curva de nivel = 1

$$xy=1 \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{x}$$

Optimizar xy

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x + y = 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

3º paso: Calcular el vector gradiente.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y, x)$$

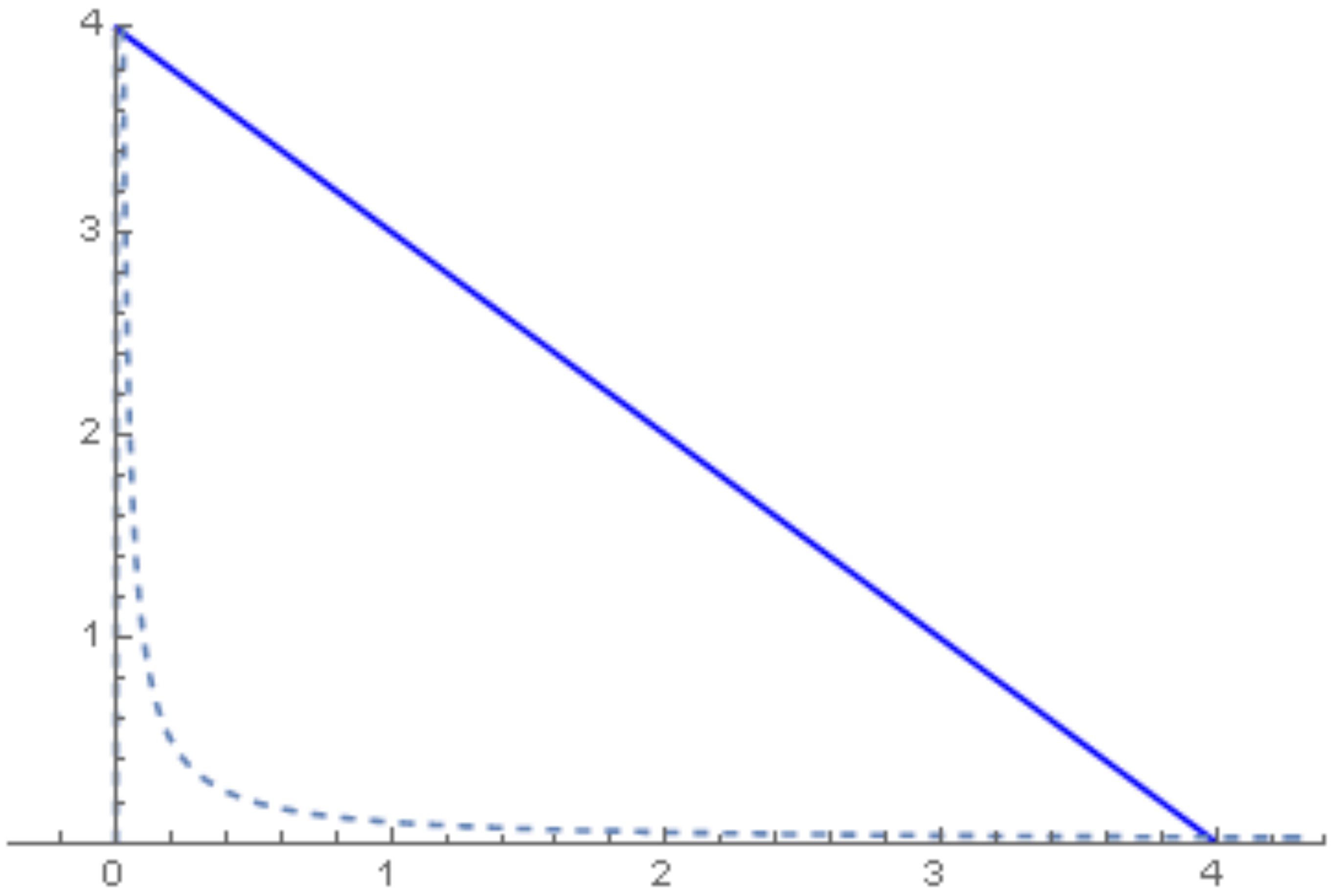
Vector de dirección de crecimiento (y,x), según el punto, el vector cambiará

Optimizar xy

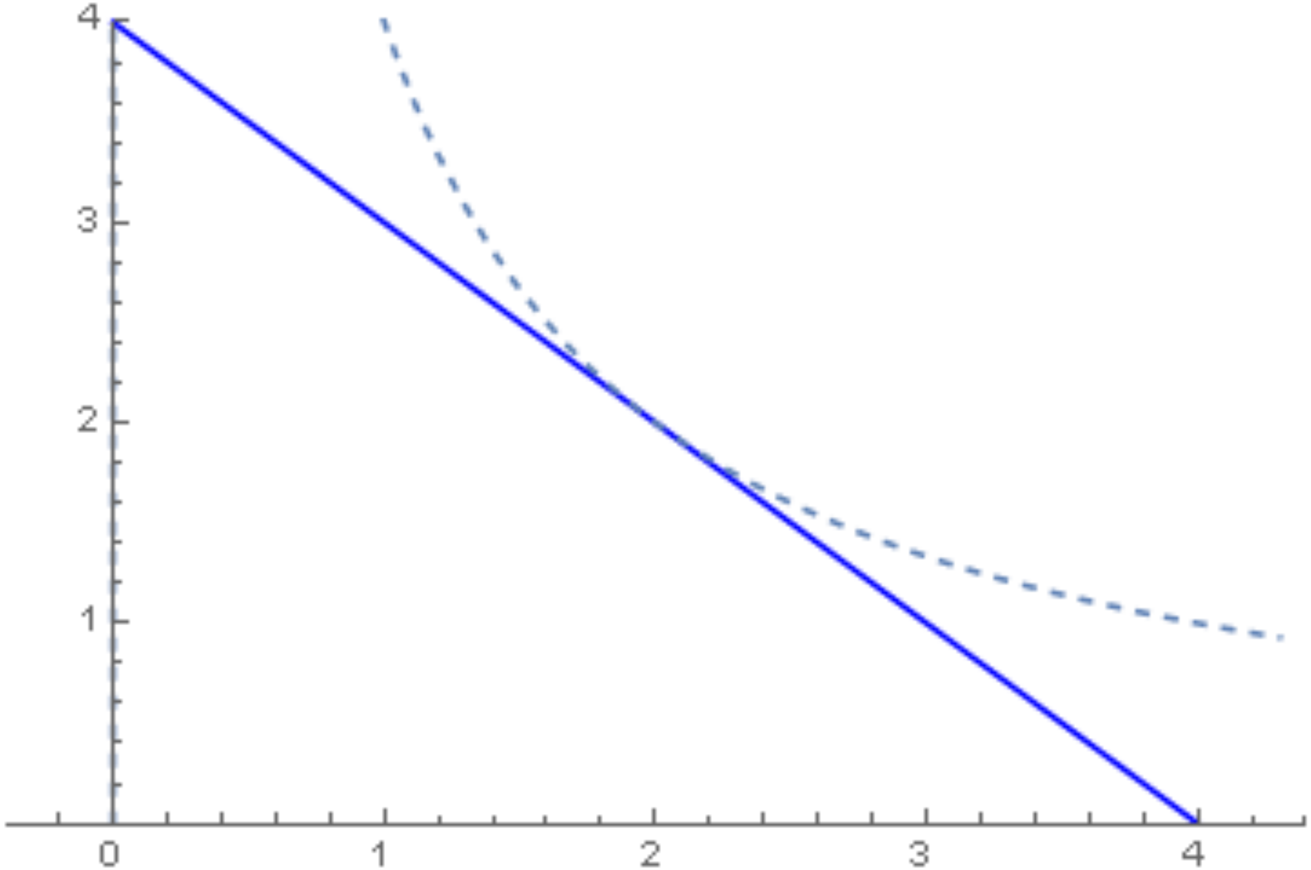
$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x + y = 4 \\ \quad x \geq 0 \\ \quad y \geq 0 \end{cases}$$

4º paso: Localizar los óptimos.

4º paso: Localizar los óptimos.   Mínimo.



4º paso: Localizar los óptimos. Máximo.



Optimizar xy

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x + y = 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

5º paso: Una vez localizados gráficamente, calcularlos analíticamente.

Mínimo: En el punto (0,4) o (4,0).

Valor de la función: 0·4 = 4·0 = 0.

$$\text{Optimizar } xy$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x + y = 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Máximo:

Gradiente de la recta: $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (1,1) \rightarrow tg = \frac{1}{1} = 1$

Gradiente de la función: $\nabla g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y, x) \rightarrow tg = \frac{y}{x}$

$$\text{Optimizar } xy$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x + y = 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Máximo:

Igualamos las tangentes: $\frac{y}{x} = 1 \rightarrow x = y$.

Aplicamos en la restricción:

$$x + y = 4 \rightarrow y + y = 4 \rightarrow x = y = 2$$

Optimizar xy

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x + y = 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

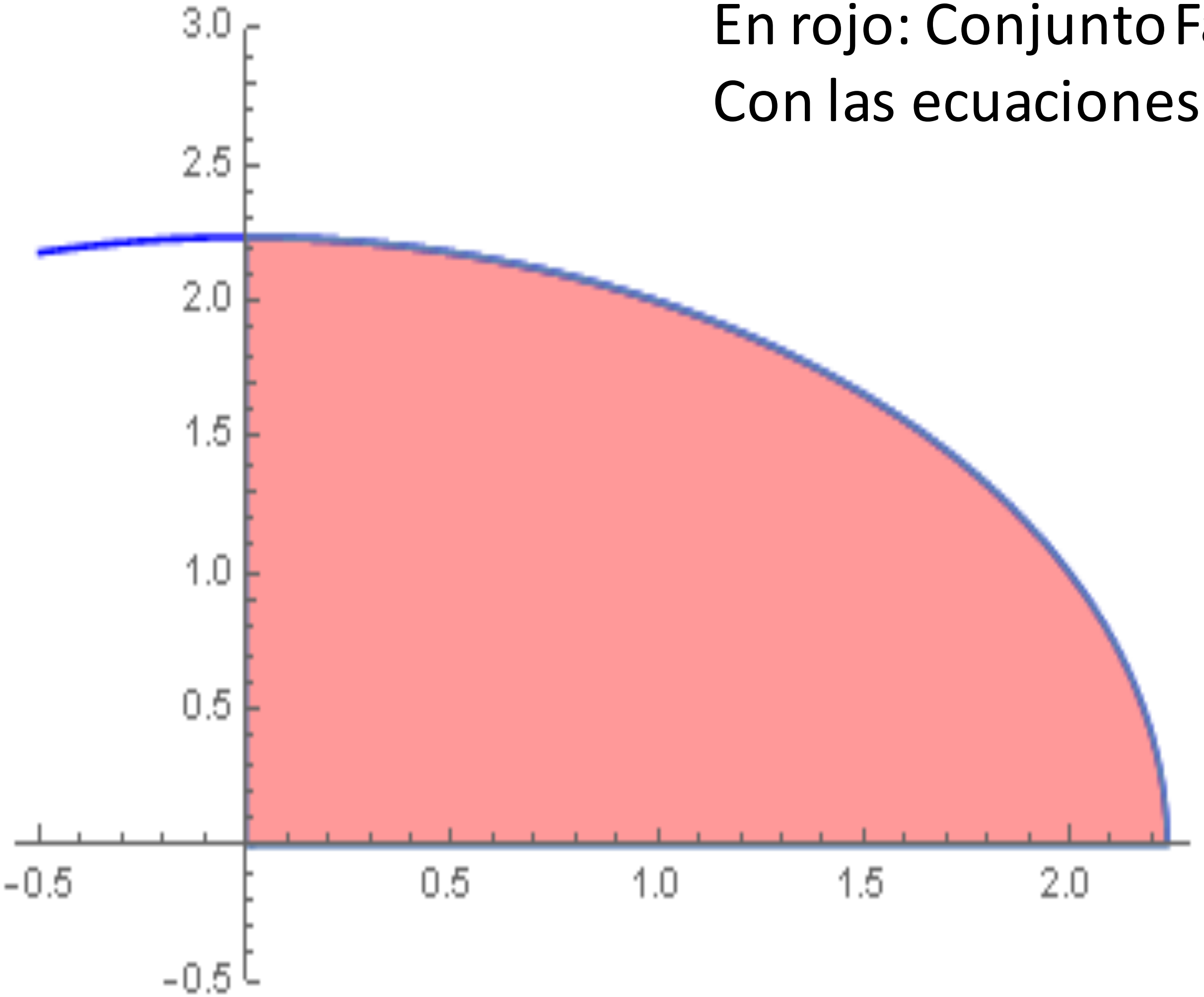
Máximo: En el punto $(2,2)$. Valor de la función: 4.

Ejemplo 3

Optimizar $2x + y$

Sujeto a $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

1º paso: Representar el conjunto factible (dibujando los hiperplanos y semiespacios de las restricciones).



En rojo: Conjunto Factible
Con las ecuaciones de las restricciones

Optimizar $2x + y$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

2º paso: Dibujar una curva de nivel. Elijo la curva de nivel = 2

$$2x + y = 2 \quad \rightarrow \quad y = 2 - 2x$$

$$\text{Optimizar } 2x + y$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

3º paso: Calcular el vector gradiente.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2,1)$$

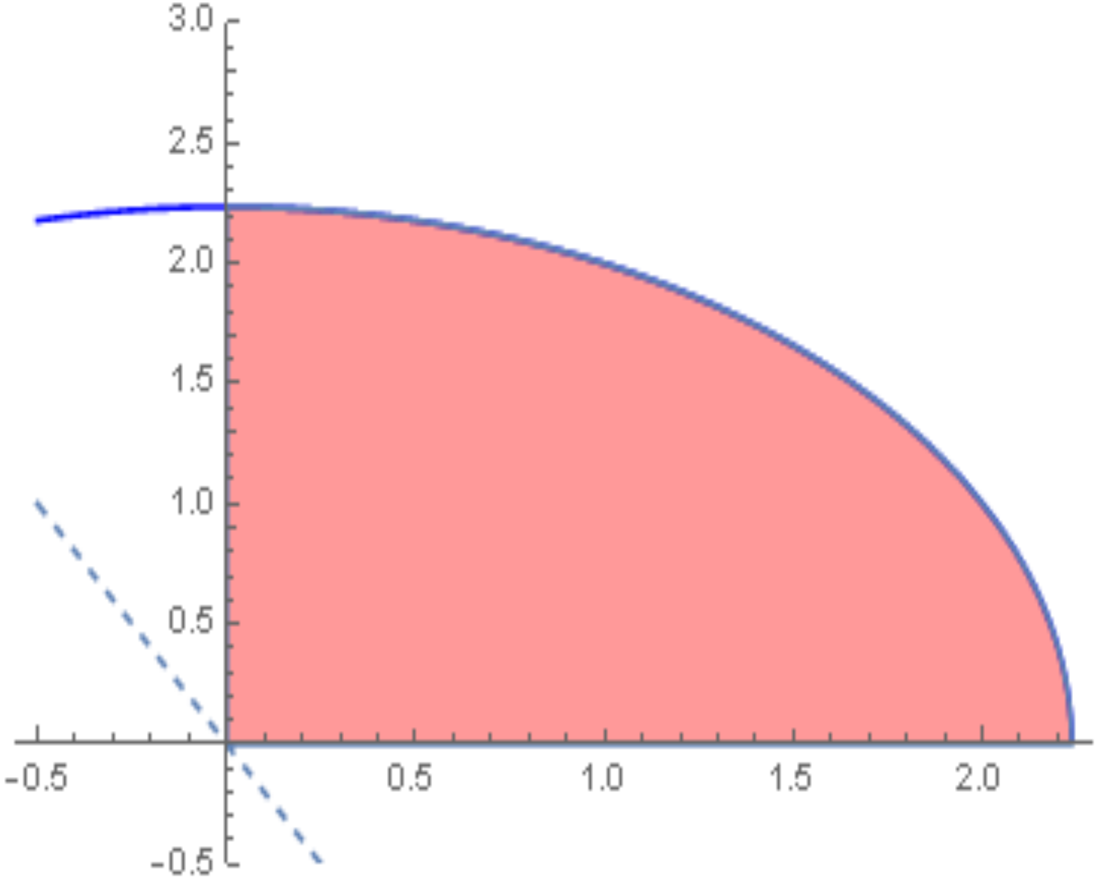
Vector de dirección de crecimiento (2,1)

Optimizar $2x + y$

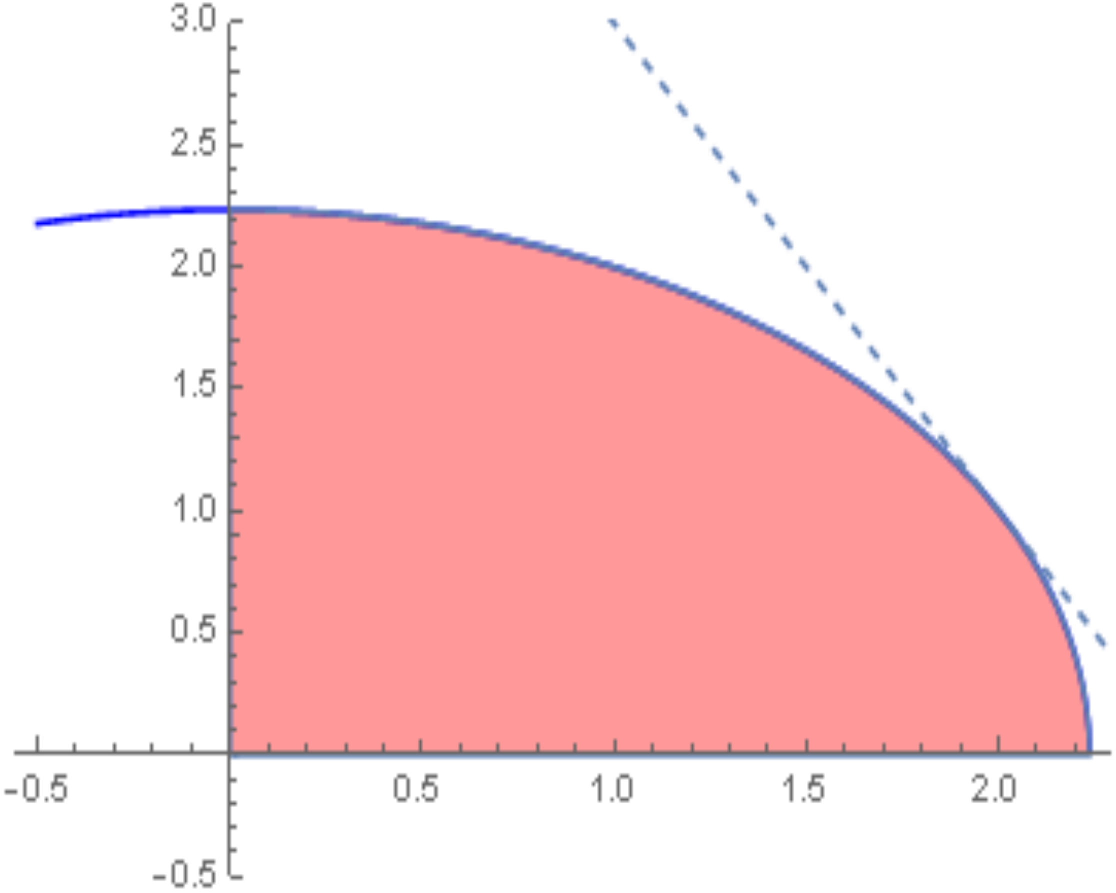
$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

4º paso: Localizar los óptimos.

4º paso: Localizar los óptimos.   Mínimo.



4º paso: Localizar los óptimos.   Máximo.



Optimizar $2x + y$

Sujeto a $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

5º paso: Una vez localizados gráficamente, calcularlos analíticamente.

Mínimo: En el punto (0,0)

Valor de la función: 2·0 + 0 = 0.

Optimizar $2x + y$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Máximo:

Gradiente de la recta: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2,1) \rightarrow tg = \frac{2}{1} = 2$

Gradiente de la curva: $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (2x, 2y) \rightarrow tg = \frac{2x}{2y}$

$$\text{Optimizar } 2x + y$$

$$\text{Sujeto a } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Máximo:

Igualamos las tangentes: $2 = \frac{2x}{2y} \rightarrow x = 2y \rightarrow x^2 = 4y^2$.

Aplicamos en la restricción:

$$x^2 + y^2 = 5 \rightarrow 4y^2 + y^2 = 5 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Optimizar } 2x + y$$

$$\text{Sujeto a } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Máximo: En el punto $(2,1)$. Valor de la función: 5.