Tema 3: Programas de optimización con restricciones de igualdad

Método de Lagrange:

Función a optimizar: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Restricciones $\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$

Teorema (condición necesaria de Lagrange):

En la práctica reescribimos la ecuación como:

$$L = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \cdots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

Encontramos el óptimo de la función lagrangiana como lo hacíamos con las funciones sin restricciones: Derivando con respecto a todas sus variables e igualando a 0

Encontraremos un óptimo siempre que:

$$Rg\ Jg(\overline{x_0}) = m$$

(Rango de la matriz jacobiana de las restricciones = m)

Teorema (condición necesaria de Lagrange):

$$L = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \cdots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad , \dots , \qquad \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = g_1 = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = g_2 = 0, \dots , \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = g_m = 0$$

Para saber si el punto es máximo o mínimo utilizaremos, primero, la matriz hessiana.

$Signo\ de\ la\ matriz\ Hessiana\ del\ Lagrangiano$:

$Definida\ Positiva\ \rightarrow Mínimo\ local\ condicionado$
$Definida\ Negativa\ \rightarrow Máximo\ local\ condicionado$

Otro caso: Lo veremos más adelante

2.- Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$:

a) ¿Existe algún punto óptimo de f?.

b) Escribir una restricción de forma que los puntos obtenidos en a) no sean solución del problema restringido.

c) Si se considera la función f sujeta a la restricción $x + y = 1$, ¿existe algún punto óptimo?.

$$L(x, y) = x^2 + x^2 + \lambda(x + y - 1)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$

$$L(x, y) = x^2 + x^2 + \lambda(x + y - 1)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \lambda = -1$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Definida\ Positiva$$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ Es Mínimo Local Condicionado

12.- Dado el problema de optimización

$$\begin{aligned} &\textit{Optimizar} \quad && 3x + 4y \\ &s.a: && x^2 + y^2 = 25 \end{aligned}$$

a) Determinar, si existen, los puntos críticos de la Lagrangiana del problema.

b) Clasificar los puntos críticos obtenidos en el apartado a).

c) ¿Podemos afirmar que los extremos obtenidos en el apartado b) son globales?

$$L(x, y) = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$

$$L(x,y) = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

$$\text{P.C:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 3 + \lambda 2x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4 + \lambda 2y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-3,-4), \lambda = 1/2 \\ (3,4), \lambda = -1/2 \end{cases}$$

$$H(-3,-4) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow D.P.$$

$(-3,-4)$ Es Mínimo Local Condicionado

$$H(3,4) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow D.N.$$

$(3,4)$ Es Máximo Local Condicionado

Sea la función $f(x,y,z) = -x^2 - ay^2 + bxy$, siendo *a* y *b* parámetros reales.

a) Estudiar para que valores de los parámetros *a* y *b*, el punto $(1,1)$ es máximo, mínimo o no es extremo.

b) Obtener una relación entre los parámetros *a* y *b* que sea una condición necesaria para que el punto $(1,1)$ sea un óptimo local de *f* sujeta a la restricción $y = x^2$

$$f(x,y) = -x^2 - ay^2 + bxy$$

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = -x^2 - ay^2 + bxy$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -2x + by = -2 + b = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2ay + bx = -2a + b = 0 \end{cases}$

$$a = 1, \qquad b = 2$$

$$L(x,y) = -x^2 - ay^2 + bxy + \lambda(-x^2 + y)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(1,1) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(1,1) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(1,1) = 0 \end{cases}$

$$L(x,y) = -x^2 - ay^2 + bxy + \lambda(-x^2 + y)$$

P. críticos: $$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -2x + by - \lambda 2x = -2 + b - 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -2ay + bx + \lambda = -2a + b + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -x^2 + y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{a = \frac{3b-2}{4}}$$

$Ejercicio\ extra$

$$f(x,y) = \ln(xy)$$

$$s.a. \{x + y = 2$$

$$L(x, y) = \ln(xy) + \lambda(x + y - 2)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$

$$L(x,y) = \ln(xy) + \lambda(x + y - 2)$$

P.C: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{1}{x} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{1}{y} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \{(1,1), \{\lambda = -1$

$$H(1,1)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{x^2} & 0\\ 0 & \frac{-1}{y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\rightarrow D.N.$$

(1,1) Es Máximo Local Condicionado