

## Análisis post-óptimo:

¿Cómo pueden cambiar valores del problema sin cambiar la solución?

$B^{-1}$  = *Columnas de las variables con las que iniciamos el simplex, en la tabla final*  
(*Primeras variables del simplex, en la ultima tabla*)

Cambio en un coeficiente de la función objetivo:

A) De una variable que no es parte de la solución,  $x_2$ :

|   |       |   |       |       |       |       |       |
|---|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
|   |       |   | 0     | 0     | 1     | 0     | -M    |
|   |       |   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| 1 | $x_3$ | 3 | 0     | 2     | 1     | 1     | -1    |
| 0 | $x_1$ | 3 | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     |
|   |       | 3 | 0     | 2     | 1     | 1     | -1    |
|   |       |   | 0     | 2     | 0     | 1     | M-1   |

Cambio en un coeficiente de la función objetivo:

A) De una variable que no es parte de la solución,  $x_2$ :

|   |       |   |       |            |       |       |       |
|---|-------|---|-------|------------|-------|-------|-------|
|   |       |   | 0     | $\Delta$   | 1     | 0     | -M    |
|   |       |   | $x_1$ | $x_2$      | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| 1 | $x_3$ | 3 | 0     | 2          | 1     | 1     | -1    |
| 0 | $x_1$ | 3 | 1     | 1          | 0     | 1     | 0     |
|   |       | 3 | 0     | 2          | 1     | 1     | -1    |
|   |       |   | 0     | $2-\Delta$ | 0     | 1     | M-1   |

Cambio en un coeficiente de la función objetivo:

A) De una variable que no es parte de la solución,  $x_2$ :

Si  $\Delta \leq 2$ , la solución seguirá siendo la misma

|   |       |   |       |            |       |       |       |
|---|-------|---|-------|------------|-------|-------|-------|
|   |       |   | 0     | $\Delta$   | 1     | 0     | -M    |
|   |       |   | $x_1$ | $x_2$      | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| 1 | $x_3$ | 3 | 0     | 2          | 1     | 1     | -1    |
| 0 | $x_1$ | 3 | 1     | 1          | 0     | 1     | 0     |
|   |       | 3 | 0     | 2          | 1     | 1     | -1    |
|   |       |   | 0     | $2-\Delta$ | 0     | 1     | M-1   |

Cambio en un coeficiente de la función objetivo:  
 B) De una variable que es parte de la solución,  $x_1$ :

|   |       |   |       |       |       |       |       |
|---|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
|   |       |   | 0     | 0     | 1     | 0     | -M    |
|   |       |   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| 1 | $x_3$ | 3 | 0     | 2     | 1     | 1     | -1    |
| 0 | $x_1$ | 3 | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     |
|   |       | 3 | 0     | 2     | 1     | 1     | -1    |
|   |       |   | 0     | 2     | 0     | 1     | M-1   |

Cambio en un coeficiente de la función objetivo:  
 B) De una variable que es parte de la solución,  $x_1$ :

|          |       |   |          |            |       |            |       |
|----------|-------|---|----------|------------|-------|------------|-------|
|          |       |   | $\Delta$ | 0          | 1     | 0          | -M    |
|          |       |   | $x_1$    | $x_2$      | $x_3$ | $x_4$      | $x_5$ |
| 1        | $x_3$ | 3 | 0        | 2          | 1     | 1          | -1    |
| $\Delta$ | $x_1$ | 3 | 1        | 1          | 0     | 1          | 0     |
|          |       | 3 | $\Delta$ | $2+\Delta$ | 1     | $1+\Delta$ | -1    |
|          |       |   | 0        | $2+\Delta$ | 0     | $1+\Delta$ | M-1   |

Cambio en un coeficiente de la función objetivo:  
 B) De una variable que es parte de la solución,  $x_1$ :  
 Si  $\Delta \geq -1$ , la solución seguirá siendo la misma

|          |       |   |          |            |       |            |       |
|----------|-------|---|----------|------------|-------|------------|-------|
|          |       |   | $\Delta$ | 0          | 1     | 0          | -M    |
|          |       |   | $x_1$    | $x_2$      | $x_3$ | $x_4$      | $x_5$ |
| 1        | $x_3$ | 3 | 0        | 2          | 1     | 1          | -1    |
| $\Delta$ | $x_1$ | 3 | 1        | 1          | 0     | 1          | 0     |
|          |       | 3 | $\Delta$ | $2+\Delta$ | 1     | $1+\Delta$ | -1    |
|          |       |   | 0        | $2+\Delta$ | 0     | $1+\Delta$ | M-1   |

Cambio en un término independiente de alguna restricción:

$$b^{actualizada} = B^{-1} b > 0$$

Tendrá que seguir siendo mayor que 0 para que se mantenga la solución

$$\text{Maximizar} \quad x_3$$

$$s.a : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 + \Delta \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{matrix} b \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} b \\ \begin{pmatrix} 3 + \Delta \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 + \Delta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + \Delta \\ 3 + \Delta \end{pmatrix}$$

$$\Delta \geq -3$$

Cambio en un término independiente de alguna restricción:

$$b^{actualizada} = B^{-1} b > 0$$

Tendrá que seguir siendo mayor que 0 para que se mantenga la solución

$$\text{Maximizar} \quad x_3$$

$$s.a : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = \Delta \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} b \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b \\ 3 \\ \Delta \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \Delta \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \leq 3$$

Nueva variable en el problema

$$\text{Maximizar } x_3 \quad \rightarrow$$

$$\text{Maximizar } x_3 + x_6$$

$$s.a : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 - x_3 - 2x_6 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} x_6 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x_6 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}x_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si en la última fila todos siguen siendo positivos:  
No hace falta hacer más tablas

|   |       |   |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|   |       |   | 0     | 0     | 1     | 0     | -M    | 1     |
|   |       |   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 1 | $x_3$ | 3 | 0     | 2     | 1     | 1     | -1    | 2     |
| 0 | $x_1$ | 3 | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     |
|   |       | 3 | 0     | 2     | 1     | 1     | -1    | 2     |
|   |       |   | 0     | 2     | 0     | 1     | M-1   | 1     |

Nueva restricción:

Si con la solución ya obtenida se cumple la nueva restricción: no hay que hacer nada.

Si no se cumple la nueva restricción: Rehacer todo el simplex.

Nueva restricción:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & x_3 \quad \rightarrow \quad \text{Maximizar} \quad x_3 + x_6 \\ \\ s.a : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right. & \rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \boxed{x_1 + x_3 \leq 3} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

No se cumpliría: Habría que rehacer el simplex con la nueva restricción



**23.-** Un joven dispone de 74 € para ocio cada 4 semanas, que se gasta en su totalidad. Todo su gasto se realiza en cervezas, ir al cine o ir a cenar. El coste de una cerveza es 1€, el de la entrada de cine 6 € y cada vez que va a cenar se gasta 10 €. Por costumbre, va al menos una vez al cine por semana y nunca va a cenar más de una vez en las 4 semanas. La satisfacción que obtiene por ir al cine es similar a la de 5 cervezas y la de ir a cenar es equivalente a 15 cervezas. Advertencia: notar que el dinero disponible se gasta en su totalidad.

- a) Obtener el problema de programación lineal que permite maximizar la satisfacción y resolverlo por el método del simplex.
- b) Hallar el problema dual del problema inicialmente planteado, y sus soluciones.
- c) Ver en que rango se puede mover la satisfacción obtenida con cada cerveza para que no cambien sus costumbres.
- d) ¿Cuánto debe variar su disponibilidad monetaria para que deje de gastar en las tres alternativas de ocio?

$$\text{Maximizar} \quad x_1 + 5x_2 + 15x_3$$

$$s.a : \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 74 \\ x_2 \geq 4 \\ x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Minimizar} \quad 74y_1 + 4y_2 + y_3$$

$$s. a : \begin{cases} y_1 \geq 1 \\ 6y_1 + y_2 \geq 5 \\ 10y_1 + y_3 \geq 15 \\ y_2 \leq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Maximizar} \quad x_1 + 5x_2 + 15x_3$$

$$s.a : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 74 \\ x_2 - x_4 = 4 \\ x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{array} \right.$$

|  |       |    |       |       |       |       |       |  |
|--|-------|----|-------|-------|-------|-------|-------|--|
|  |       |    | 1     | 5     | 15    | 0     | 0     |  |
|  |       |    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |  |
|  | $x_1$ | 74 | 1     | 6     | 10    | 0     | 0     |  |
|  |       | 4  | 0     | 1     | 0     | -1    | 0     |  |
|  | $x_5$ | 1  | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     |  |
|  |       |    |       |       |       |       |       |  |
|  |       |    |       |       |       |       |       |  |

|    |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    |       |       | 1     | 5     | 15    | 0     | 0     | -M    |
|    |       |       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 1  | $x_1$ | 74    | 1     | 6     | 10    | 0     | 0     | 0     |
| -M | $x_6$ | 4     | 0     | 1     | 0     | -1    | 0     | 1     |
| 0  | $x_5$ | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     |
|    |       | 74-4M | 1     | 6-M   | 10    | M     | 0     | -M    |
|    |       |       | 0     | 1-M   | -5    | M     | 0     | 0     |

|   |       |  |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|   |       |  | 1     | 5     | 15    | 0     | 0     | -M    |
|   |       |  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 1 | $x_1$ |  |       |       |       |       |       |       |
| 5 | $x_2$ |  |       |       |       |       |       |       |
| 0 | $x_5$ |  |       |       |       |       |       |       |
|   |       |  |       |       |       |       |       |       |
|   |       |  |       |       |       |       |       |       |

|   |       |    |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|   |       |    | 1     | 5     | 15    | 0     | 0     | -M    |
|   |       |    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 1 | $x_1$ | 50 | 1     | 0     | 10    | 6     | 0     | -6    |
| 5 | $x_2$ | 4  | 0     | 1     | 0     | -1    | 0     | 1     |
| 0 | $x_5$ | 1  | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     |
|   |       | 70 | 1     | 5     | 10    | 1     | 0     | -1    |
|   |       |    | 0     | 0     | -5    | 1     | 0     | -1+M  |



|    |       |  |       |       |       |       |       |       |
|----|-------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    |       |  | 1     | 5     | 15    | 0     | 0     | -M    |
|    |       |  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 1  | $x_1$ |  |       |       |       |       |       |       |
| 5  | $x_2$ |  |       |       |       |       |       |       |
| 15 | $x_3$ |  |       |       |       |       |       |       |
|    |       |  |       |       |       |       |       |       |
|    |       |  |       |       |       |       |       |       |

|    |       |    |       |       |       |       |       |       |
|----|-------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    |       |    | 1     | 5     | 15    | 0     | 0     | -M    |
|    |       |    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 1  | $x_1$ | 40 | 1     | 0     | 0     | 6     | -10   | -6    |
| 5  | $x_2$ | 4  | 0     | 1     | 0     | -1    | 0     | 1     |
| 15 | $x_3$ | 1  | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     |
|    |       | 75 | 1     | 5     | 15    | 1     | 5     | -1    |
|    |       |    | 0     | 0     | 0     | 1     | 5     | -1+M  |

*Solución del Primal:*  $x_1 = 40, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 1$

*Solución del Dual:*  $y_1 = 1, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 5$

|            |       |    |            |       |       |             |              |                |
|------------|-------|----|------------|-------|-------|-------------|--------------|----------------|
|            |       |    | $1+\Delta$ | 5     | 15    | 0           | 0            | -M             |
|            |       |    | $x_1$      | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$       | $x_5$        | $x_6$          |
| $1+\Delta$ | $x_1$ | 40 | 1          | 0     | 0     | 6           | -10          | -6             |
| 5          | $x_2$ | 4  | 0          | 1     | 0     | -1          | 0            | 1              |
| 15         | $x_3$ | 1  | 0          | 0     | 1     | 0           | 1            | 0              |
|            |       | 75 | $1+\Delta$ | 5     | 15    | $1+6\Delta$ | $5-10\Delta$ | $-1-6\Delta$   |
|            |       |    | 0          | 0     | 0     | $1+6\Delta$ | $5-10\Delta$ | $-1-6\Delta+M$ |

$$\left. \begin{array}{l} 1+6\Delta \geq 0 \rightarrow \Delta \geq -\frac{1}{6} \\ 5-10\Delta \geq 0 \rightarrow \Delta \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \rightarrow -\frac{1}{6} \leq \Delta \leq \frac{1}{2}$$

Si la satisfacción varía en ese rango, la solución se mantendrá

Términos independientes antes del cambio:  $\begin{pmatrix} 74 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si cambian la renta  $\rightarrow \begin{pmatrix} 74 + \Delta \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

En la tabla inicial aparecerá  $\begin{pmatrix} 74 + \Delta \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ . En la final:  $B^{-1} \begin{pmatrix} 74 + \Delta \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -6 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} \begin{pmatrix} 74 + \Delta \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 74 + \Delta \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 74 + \Delta - 24 - 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 + \Delta \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

*Cuando los valores sean positivos, se mantiene la solución:*

$$\Delta \geq -40$$

Si la renta cae en más de 40 unidades, la solución cambiará y dejará de gastar en las tres alternativas