Tema 3: Programas de optimización con restricciones de igualdad

Método de Lagrange:

Función a optimizar: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Restricciones $\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$

Teorema (condición necesaria de Lagrange):

En la práctica reescribimos la ecuación como:

$$L = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \cdots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

Encontramos el óptimo de la función lagrangiana como lo hacíamos con las funciones sin restricciones: Derivando con respecto a todas sus variables e igualando a 0

Teorema (condición necesaria de Lagrange):

$$L = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \cdots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad , \dots , \qquad \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = g_1 = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = g_2 = 0, \dots , \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = g_m = 0$$

Encontraremos un óptimo siempre que:

$$Rg\ Jg(\overline{x_0}) = m$$

(Rango de la matriz jacobiana de las restricciones = m)

Para saber si el punto es máximo o mínimo utilizaremos, primero, la matriz hessiana.

$Signo\ de\ la\ matriz\ Hessiana\ del\ Lagrangiano$:

$Definida\ Positiva\ \rightarrow M\acute{\imath}nimo\ local\ condicionado$
$Definida\ Negativa\ \rightarrow M\acute{a}ximo\ local\ condicionado$

Otro caso: Lo veremos más adelante

1.- Sea $f(x,y) = e^x + e^y$, se pide:

a) ¿Existe algún punto óptimo de *f*?.

b) Si se considera la función *f* sujeta a la restricción $x + y = 2$, ¿existe algún punto óptimo?.

$$L(x,y) = e^{x} + e^{y} + \lambda(x + y - 2)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$

$$L(x,y) = e^{x} + e^{y} + \lambda(x+y-2)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = e^{x} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = e^{y} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow (1,1), \lambda = -e$

$$H = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \rightarrow Definida\ Positiva$$

(1,1) Es Mínimo Local Condicionado

3.- Sea la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + b\,x\,y + a\,z$, siendo a y b parámetros reales.

a) Estudiar para que valores de los parámetros a y b, el punto (1, 1, 1) es máximo, mínimo o no es extremo.

b) Obtener una relación entre los parámetros a y b que sea una condición necesaria para que el punto (1, 1, 1) sea un óptimo local de f sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + bxy + az$$

$$\text{Puntos críticos: } \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + bxy + az$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 2x + by = 2 + b = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 2y + bx = 2 + b = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = a = 0 \end{cases}$

$$a = 0, \qquad b = -2$$

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + bxy + az + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$$

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(1,1,1) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(1,1,1) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}(1,1,1) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(1,1,1) = 0 \end{cases}$$

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + bxy + az + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$$

P. críticos:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + by + \lambda 2x = 2 + b + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + bx + \lambda 2y = 2 + b + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = a + \lambda 2z = a + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 3 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$a = -2\lambda \rightarrow \lambda = \frac{-a}{2} \rightarrow 2 + b + 2\lambda = 2 + \mathrm{b} - \mathrm{a} = 0 \rightarrow \boxed{b = a - 2}$$

$Ejercicio\ extra$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$s.a.\ \{x + y + 2z = 6$$

$$L(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + 2z - 6)$$

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + 2z - 6)$$

$$\text{P.C:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \{(1,1,2), \{\lambda = -2$$

$$H(1,1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow D.P.$$

(1,1,2) Es Mínimo Local Condicionado

$Ejercicio\ extra$

$$f(x, y) = e^{x+y}$$

$$s.a.\ \{x^2 - 2y = -1$$

$$L(x,y) = e^{x+y} + \lambda(x^2 - 2y + 1)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$

$$L(x,y) = e^{x+y} + \lambda(x^2 - 2y + 1)$$

$$\text{P.C: } \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = e^{x+y} + \lambda 2x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = e^{x+y} - \lambda 2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{ (-1,1), \left\{ \lambda = \frac{1}{2} \right. \right.$$

$$H(-1,1) = \begin{pmatrix} e^{x+y} + \lambda 2 & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow D.P.$$

$(-1,1)$ Es Mínimo Local Condicionado

Ejercicio extra

$$f(x,y) = -x^2 - y^2$$

$$s.a. \begin{cases} x^2 - y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$L(x,y) = -x^2 - y^2 + \lambda\left(x^2 - y - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Puntos críticos: } \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

$$L(x,y) = -x^2 - y^2 + \lambda\left(x^2 - y - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{P.C:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -2x + \lambda 2x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -2y - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 - y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{\left(0, -\tfrac{1}{2}\right), \lambda = 1\right.$$

$$H\left(0,-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}-2+2\lambda & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\rightarrow S D.N.$$

A priori no podemos saber.