# Tema 1

## Programas Matemáticos

# Conceptos básicos del tema 1

<u>Conjuntos convexos:</u>

- Un conjunto es convexo, si para todo par de puntos del conjunto, el segmento que los une también pertenece al conjunto.
  - Conjunto vacío: Convexo
  - Un punto: Convexo
  - Intersección de conjuntos convexos: Convexo

Vertice:

- Un punto de un conjunto es un vertice si no forma parte de ningún segmento entre otros dos puntos.

  - Vértices más comunes $\begin{cases} \text{Esquinas de un polígono} \\ Los\ puntos\ de\ cualquier\ curva \end{cases}$

Hiperplano:

- Asociado a un vector, $c \in R^n$, y un valor, $\alpha \in R$.

- Es el conjunto $H = \{\bar{x} \in R^n | c \cdot \bar{x} = \alpha\}$

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z + \cdots + c_n t = \alpha$$

Hiperplano:

Ejemplos:

$$x + 2y = 3 \rightarrow \begin{cases} vector\ c = (1,2) \\ valor\ \alpha = 3 \end{cases}$$

$$2x - 4y + 3z = 1 \rightarrow \begin{cases} vector\ c = (2,-4,3) \\ valor\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Hiperplano:

- Es el conjunto $H = \{\bar{x} \in R^n | c \cdot \bar{x} = \alpha\}$

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z + \cdots + c_n t = \alpha$$

Semiespacios asociados: $\begin{cases} H^+ = \{\bar{x} \in R^n | c \cdot \bar{x} \geq \alpha\} \\ H^- = \{\bar{x} \in R^n | c \cdot \bar{x} \leq \alpha\} \end{cases}$

Tanto los hiperplanos como los semiespacios son **convexos**

# Funciones convexas y concavas

¡No confundir convexidad de una función con convexidad de un conjunto!

# Funciones convexas y cóncavas.

- Las funciones convexas van asociadas con la búsqueda de mínimos

- Las funciones cóncavas van asociadas con la búsqueda de máximos

# Funciones convexas y cóncavas. Análisis con la Hessiana: Hf(x)

- F. estrictamente convexa $\leftarrow Hf(x)\ es\ Definida\ Positiva$
- F. convexa $\leftarrow Hf(x)\ es\ Definida\ o\ SemiDefinida\ Positiva$
- F. estrictamente cóncava $\leftarrow Hf(x)\ es\ Definida\ Negativa$
- F. cóncava $\leftarrow Hf(x)\ es\ Definida\ o\ SemiDefinida\ Negativa$

Programación matemática:

$$\text{Optimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq c_i \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \subseteq R^n \end{cases}$$

Programación matemática:

$$\text{Optimizar } f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq c_i \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C \subseteq R^n \end{cases}$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Variables de decisión

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Función: Querremos buscar el valor más alto o más bajo

## Programación matemática:

$$\text{Optimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq c_i \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \subseteq R^n \end{cases}$$

Las restricciones a las que está sujeto el programa forman el **Conjunto Factible**

Cada punto del conjunto factible es una **Solución Factible**

Las restricciones a las que está sujeto el programa forman el **Conjunto Factible**

S = Conjunto factible

Si $S = \emptyset \rightarrow$ No existe solución

Si $S =$ un punto $\rightarrow$ La solución sería ese punto, no hay nada que optimizar.

Nº de restricciones de igualdad < número de variables

$Clasificación\ de\ los\ programas$

- Según las restricciones:
    - Sin restricciones
    - Con restricciones de igualdad
    - Con restricciones de desigualdad
    - Restricciones de todo tipo

- Según la función:
    - Diferenciable
    - No diferenciable

$Clasificación\ de\ los\ programas$

- Según la convexidad:
  - Convexo (si el conjunto factible es convexo)
  - No Convexo

- Según la linealidad:
  - Lineal: Si las funciones y restricciones son lineales
  - No lineal

Deseamos encontrar máximos y mínimos globales

<u>Mínimo local:</u> Es un punto tal que al movernos de él la función empieza a crecer
<u>Máximo local:</u> Es un punto tal que al movernos de él la función empieza a decrecer.
(Los encontraremos igualando la primera derivada a 0).

<u>Mínimo global:</u> El punto en el que la función toma el valor más pequeño
<u>Máximo global:</u> El punto en el que la función toma el valor más grande

Dos teoremas:

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Si un programa tiene un conjunto factible, S, **cerrado y acotado** y la función es continua: la función **alcanzará un máximo y un mínimo global** en S.

- Cerrado: Incluye la frontera
- Acotado: Existe una bola que incluya al conjunto (tamaño finito)

## Dos teoremas:

## TEOREMA CONVEXIDAD-GLOBALIDAD

Siempre que el conjunto factible, S, sea convexo:

- Si una función es convexa, un mínimo local será también global
- Si es estrictamente convexa, un mínimo local será también global único
- Si es concava, un máximo local será también global
- Si es estrictamente concava, un máximo local será también global único