Ecuaciones Diferenciales

Ecuación diferencial: Contiene derivadas o diferenciales:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots y'n) = 0$$

Donde $y' = \frac{dy}{dx}$ $(1º\ derivada)$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}(2º\ derivada), \dots$

Orden: El de la mayor derivada que aparezca.

$$y - y' + y'' + 3y''' - x = 0,$$ es de orden 3

Solución: Obtener una relación entre x e y sin que aparezcan derivadas

Solución: Obtener una relación entre x e y sin que aparezcan derivadas

De una ecuación diferencial obtendremos:

- Solución general (una familia de funciones)

$$f(x,y,C)=0$$

- Solución particular (cuando nos digan un punto por el que pase)

$$f(x,y)=0$$

1)

$Comprobar\ que$ $\boxed{y = 3x^2}$ $es\ solución\ de\ la\ diferencial$ $\boxed{\frac{y'x}{2} - y = 0}$

1)

$\textit{Comprobar que}$ $\boxed{y = 3x^2}$ $\textit{es solución de la diferencial}$ $\boxed{\frac{y'x}{2} - y = 0}$

$$y = 3x^2 \to y' = \frac{dy}{dx} = 6x$$

$$\frac{(6x)x}{2} - 3x^2 = 3x^2 - 3x^2 = 0$$

2)

$Comprobar\ que$ $\boxed{y = 2x - 2}$ $es\ solución\ de\ la\ diferencial$ $\boxed{y'x - y = 2}$

2)

$Comprobar\ que$ $\boxed{y = 2x - 2}$ $es\ solución\ de\ la\ diferencial$ $\boxed{y'x - y = 2}$

$$y = 2x - 2 \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2$$

$$y'x - y = (2)x - (2x - 2) = 2$$

1)

$$Variables\ separadas: \begin{cases} Separar\ las\ variables\ x\ e\ y\ a\ ambos\ lados\ de\ la\ ecuación \\ Integramos\ ambos\ lados \end{cases}$$

$$y' - y = 0 \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} - y = 0$$

Pasa por el punto (0,3)

1)

$$1^{\underline{o}}\ \textit{método de resolución}: \begin{cases} \textit{Separar las variables x e y a ambos lados de la ecuación} \\ \textit{Integramos ambos lados} \end{cases}$$

$$y' - y = 0 \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\downarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\downarrow$$

$$\ln(y) = x + c \ \rightarrow \ y = Ce^{x} \text{ (Solución general)}$$

1)

$$1^{\underline{o}}\ método\ de\ resolución: \begin{cases} Separar\ las\ variables\ x\ e\ y\ a\ ambos\ lados\ de\ la\ ecuación \\ Integramos\ ambos\ lados \end{cases}$$

$$y' - y = 0 \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} - y = 0$$

Pasa por el punto (0,3)

$y = Ce^{x}$ (Solución general)

$$3 = Ce^{0} = C \rightarrow C = 3$$

$y = 3e^{x}$ (Solución particular)

2)

$$y' + y = 0 \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Pasa por el punto (0,2)

2)

$$y' + y = 0 \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\downarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\downarrow$$

$$\ln(y) = -x + c \;\;\rightarrow\;\; y = Ce^{-x}$$ (Solución general)

2)

$$y' + y = 0 \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Pasa por el punto (0,2)

$$y = Ce^{-x} \qquad \text{(Solución general)}$$

$$2 = Ce^{0} = C \rightarrow C = 2$$

$$y = 2e^{-x} \qquad \text{(Solución particular)}$$

3)

$$y' - x = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} - x = 0$$

Pasa por el punto (2,5)

3)

$$y' - x = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} - x = 0$$

$$\downarrow$$

$$dy = x\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\int dy = \int x\,dx$$

$$\downarrow$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + c \quad \text{(Solución general)}$$

3)

$$y' - x = 0 \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} - x = 0$$

Pasa por el punto (2,5)

$$y = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad \text{(Solución general)}$$

$$5 = \frac{1}{2}4 + c = 2 + C \rightarrow C = 3$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 3 \qquad \text{(Solución particular)}$$

Ecuaciones diferenciales lineales:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

No pueden separarse las variables x e y como en el método directo

Ejemplos:

$$y' + y = e^{3x} \quad \begin{cases} P(x) = 1 \\ Q(x) = e^{3x} \end{cases}$$

$$3y' + 12y = 4 \quad \rightarrow \quad y' + 4y = \frac{4}{3} \quad \begin{cases} P(x) = 12 \\ Q(x) = 4 \end{cases}$$

Solución:

$$1)\ u = e^{\int P(x)dx}$$

$$2)\ v = \int e^{\int P(x)dx}\, Q(x) \quad (+\text{constante})$$

$$3)\ y = \frac{v}{u}$$

1)

$$y' + y = e^{3x} \quad \begin{cases} P(x) = 1 \\ Q(x) = e^{3x} \end{cases}$$

1)

$$y' + y = e^{3x} \quad \begin{cases} P(x) = 1 \rightarrow \int P(x)dx = x \\ Q(x) = e^{3x} \end{cases}$$

$$1)\ u = e^{\int P(x)} = e^{x}$$

$$2)\ v = \int e^{x} Q(x)dx = \int e^{x}\, e^{3x} dx = \int e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + C$$

$$3)\ y = e^{-x}\left(\frac{1}{4} e^{4x} + C\right) = \frac{1}{4} e^{3x} + Ce^{-x}$$

2)

$$y' + 4y = \frac{4}{3} \quad \begin{cases} P(x) = 4 \\ Q(x) = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

2)

$$y' + 4y = \frac{4}{3} \quad \begin{cases} P(x) = 4 \rightarrow \int P(x)dx = 4x \\ Q(x) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$1)\ u = e^{\int P(x)} = e^{4x}$$

$$2)\ v = \int e^{4x} Q(x)dx = \int e^{4x} \frac{4}{3} dx = \int e^{4x} dx = \frac{1}{3} e^{4x} + C$$

$$3)\ y = e^{-4x}\left(\frac{1}{3} e^{4x} + C\right) = \frac{1}{3} + Ce^{-4x}$$

Diferenciales de orden n

$$y^{(n} + a_1 y^{(n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

↑

Diferencial completa

Diferencial homogenea

↓

$$y^{(n} + a_1 y^{(n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Solución, se divide en dos partes, y_h y y_p

$$\underbrace{y^{(n} + a_1 y^{(n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y}_{y_h} = \underbrace{f(x)}_{y_p}$$

$$y = y_h + y_p$$

$$Obtener \;\; y_h$$

1º) Obtener raices de la ecuación característica

$$y^{(n} + a_1 y^{(n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

$$\downarrow$$

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

$$Obtener \quad y_h$$

Ecuación de orden n, tendrá n raices

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0 \begin{cases} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{cases}$$

$$Obtener \quad y_h$$

2º) Si son raices simples y no se repiten:

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}$$

3º) Si alguna raiz se repite, se va multiplicando por x:

$Si\ r_1\ se\ repite\ 2\ veces$:

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + x C_2 e^{r_1 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}$$

$Si\ r_1\ se\ repite\ 3\ veces$:

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + x C_2 e^{r_1 x} + x^2 C_3 e^{r_1 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}$$

$Obtener \quad y_h$

4º) Raiz compleja:

$r_i = \alpha \pm \beta i$

$$y_h = \cdots + e^{\alpha x}(C_1 sen\, \beta x + C_2 \cos \beta x) + \cdots$$

$$Obtener \quad y_h$$

5º) Raiz compleja si se repite, se va multiplicando por x:

$$r_i = \alpha \pm \beta i, se\ repite\ 2\ veces$$

$$y_h = \cdots + e^{\alpha x}(C_1 sen\,\beta x + C_2 \cos \beta x) +$$
$$+ x e^{\alpha x}(C_3 sen\,\beta x + C_4 \cos \beta x) \ldots$$

$$y''' - 25y' = 0$$

$$y''' - 25y' = 0$$

$$\downarrow$$

$$r^3 - 25r = 0$$

$$r(r^2 - 25) = 0 \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 5 \\ r_3 = -5 \end{cases}$$

$$y''' - 25y' = 0$$

$$r(r^2 - 25) = 0 \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 5 \\ r_3 = -5 \end{cases}$$

$$y_h = C_1 e^{0x} + C_2 e^{5x} + C_3 e^{-5x}$$

$$y^{(4} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$$

$$y^{(4} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$$

$$\downarrow$$

$$r^4 + r^3 - 3r^2 - 5r - 2 = 0$$

$$(r-2)\,(r+1)^3 = 0 \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -1 \ \ (tres\ veces) \end{cases}$$

$$y^{(4} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$$

$$(r-2)\,(r+1)^3 = 0 \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -1 \;\; (tres\ veces) \end{cases}$$

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x C_3 e^{-x} + x^2 C_4 e^{-x}$$

$$y^{(4} + 2y''' + 2y'' = 0$$

$$y^{(4} + 2y''' + 2y'' = 0$$

$$\downarrow$$

$$r^4 + 2r^3 + 2r^2 = 0$$

$$r^2(r^2 + 2r + 2) = 0 \begin{cases} r_1 = 0 \ (dos\ veces) \\ r_2 = -1 \pm 1i \end{cases}$$

$$y^{(4} + 2y''' + 2y'' = 0$$

$$r^2(r^2 + 2r + 2) = 0 \begin{cases} r_1 = 0 \ (dos\ veces) \\ r_2 = -1 \pm 1i \end{cases}$$

$$y_h = C_1 e^{0x} + xC_2 e^{0x} + e^{-x}(C_3\ sen\ x + C_4 \cos x)$$

$$y''' - 4y' = 0$$

$$y''' - 4y' = 0$$

$$\downarrow$$

$$r^3 - 4r = 0$$

$$r(r^2 - 4) = 0 \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = -2 \end{cases}$$

$$y''' - 4y' = 0$$

$$r(r^2 - 4) = 0 \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = -2 \end{cases}$$

$$y_h = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$$

$$y'' + y = 0$$

$$y'' + y = 0$$

$$\downarrow$$

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r^2 + 1 = 0 \quad \{r_1 = \pm 1i$$

$$y'' + y = 0$$

$$r^2 + 1 = 0\{r_1 = 0 \pm 1i$$

$$y_h = e^{0x}(C_1\, sen\, x + C_2 \cos x)$$

Comprobar solución

3)

$Comprobar\ que$ $\boxed{y = e^{x} + 1}$ $es\ solución\ de\ la\ diferencial$ $\boxed{y + y' = 2e^{x} + 1}$

3)

$Comprobar\ que$ $\boxed{y = e^x + 1}$ $es\ solución\ de\ la\ diferencial$ $\boxed{y + y' = 2e^x + 1}$

$$y = e^x + 1 \to y' = \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$y + y' = (e^x + 1) + (e^x) = 2e^x + 1$$

4)

$$Comprobar\ que\ \boxed{y = \frac{1}{x}}\ es\ solución\ de\ la\ diferencial\ \boxed{\frac{y'}{y^2} = -1}$$

4)

Comprobar que $\boxed{y = \frac{1}{x}}$ *es solución de la diferencial* $\boxed{\frac{y'}{y^2} = -1}$

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -1$$

Variables Separadas: Ejercicios extra

4)

$$y' = yx \to \frac{dy}{dx} = yx$$

Pasa por el punto $(2, e^2)$

4)

$$y' = yx \rightarrow \frac{dy}{dx} = yx$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\ln(y) = \frac{1}{2}x^2 + c \rightarrow y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$$ (Solución general)

4)

$$y' = yx \rightarrow \frac{dy}{dx} = yx$$

Pasa por el punto $(2, e^2)$

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} \quad \text{(Solución general)}$$

$$e^2 = Ce^2 \rightarrow C = 1$$

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \text{(Solución particular)}$$

5)

$$y' = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Pasa por el punto (4,2)

5)

$$y' = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\downarrow$$

$$y\,dy = x\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c \quad \text{(Solución general)}$$

5)

$$y' = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Pasa por el punto (4,2)

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{(Solución general)}$$

$$2 = 8 + C \rightarrow C = -6$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - 6 \quad \text{(Solución particular)}$$

6)

$$y' = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

y(3)=9

6)

$$y' = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\downarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\downarrow$$

$$\ln(y) = \ln(x) + c \ \rightarrow y = Cx \text{ (Solución general)}$$

6)

$$y' = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Pasa por el punto (3,9)

$y = Cx$ (Solución general)

$$9 = C3 \rightarrow C = 3$$

$y = 3x$ (Solución particular)

7)

$$3x^2dx + 3\ dy = 0$$

y(-1)=1

7)

$$3x^2dx + 3\ dy = 0$$

$$\downarrow$$

$$3\ dy = -3x^2dx$$

$$\downarrow$$

$$\int 3\ dy = \int -3x^2dx$$

$$\downarrow$$

$$y = \frac{-x^3+C}{3} \quad \text{(Solución general)}$$

7)

$$3x^2 dx + 3\, dy = 0$$

Pasa por el punto (-1,1)

$$y = \frac{-x^3 + C}{3} \quad \text{(Solución general)}$$

$$1 = \frac{1 + C}{3} \rightarrow C = 2$$

$$y = \frac{-x^3 + 2}{3} \quad \text{(Solución particular)}$$

8)

$$2xdx - y\,dy = 0$$

y(-2)=1

8)

$$2xdx - y\ dy = 0$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{y}\ dy = 2xdx$$

$$\downarrow$$

$$\int \mathrm{y}\ dy = \int 2xdx$$

$$\downarrow$$

$$y^2 = 2x^2 + C \quad \text{(Solución general)}$$

8)

$$2x\,dx - y\,dy = 0$$

Pasa por el punto (-2,1)

$$y^2 = 2x^2 + C \quad \text{(Solución general)}$$

$$1 = 8 + C \rightarrow C = -7$$

$$y^2 = 2x^2 - 7 \quad \text{(Solución particular)}$$

9)

$$(4x + 2)dx - (6y - 3)\ dy = 0$$

y(2)=3

9)

$$(4x+2)dx-(6y-3)\,dy=0$$

$$\downarrow$$

$$(6y-3)dy=(4x+2)dx$$

$$\downarrow$$

$$\int(6y-3)dy=\int(4x+2)dx$$

$$\downarrow$$

$$3y^2-3y=2x^2+2x+C \quad \text{(Solución general)}$$

9)

$$(4x+2)\,dx-(6y-3)\,dy=0$$

Pasa por el punto (2,3)

$3y^2-3y=2x^2+2x+C$ (Solución general)

$$27-9=8+4+C\rightarrow C=6$$

$3y^2-3y=2x^2+2x+6$ (Solución particular)

10)

$$y' = \frac{x^2}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

y(3)=-2

10)

$$y' = \frac{x^2}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

$$\downarrow$$

$$y\ dy = x^2\ dx$$

$$\downarrow$$

$$\int y\ dy = \int x^2 dx$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C \quad \text{(Solución general)}$$

10)

$$y' = \frac{x^2}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

Pasa por el punto (3,-2)

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C$$ (Solución general)

$$2 = 9 + C \rightarrow C = -7$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 - 7$$ (Solución particular)

11)

$$y' = \frac{1 - 2x}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{y}$$

y(4)=-2

11)

$$y' = \frac{1-2x}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y}$$

$$\downarrow$$

$$y\,dy = (1-2x)\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\int y\,dy = \int (1-2x)dx$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x - x^2 + C \quad \text{(Solución general)}$$

11)

$$y' = \frac{1-2x}{y} \to \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y}$$

Pasa por el punto (4,-2)

$$\frac{1}{2}y^2 = x - x^2 + C \quad \text{(Solución general)}$$

$$2 = 4 - 16 + C \to C = 14$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x - x^2 + 14 \quad \text{(Solución particular)}$$

12)

$$y' = \frac{x(x^2+1)}{4y^3} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2+1)}{4y^3}$$

$$y(0) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

12)

$$y' = \frac{x(x^2+1)}{4y^3} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2+1)}{4y^3}$$

$$\downarrow$$

$$4y^3\,dy = (x^3 + x)\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\int 4y^3\,dy = \int (x^3 + x)dx$$

$$\downarrow$$

$$y^4 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{(Solución general)}$$

12)

$$y' = \frac{x(x^2+1)}{4y^3} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2+1)}{4y^3}$$

$$y(0) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$y^4 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{(Solución general)}$$

$$\frac{1}{4} = 0 - 0 + C \rightarrow C = \frac{1}{4}$$

$$y^4 = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4} \qquad \text{(Solución particular)}$$

13)

$$y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$$

13)

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\downarrow$$

$$arctg(y) = arctg(x) + C$$ (Solución general)

Lineales: Ejercicios extra

3)

$$y' + 3x^2 y = x^2 \begin{cases} P(x) = 3x^2 \\ Q(x) = x^2 \end{cases}$$

3)

$$y' + 3x^2 y = x^2 \begin{cases} P(x) = 3x^2 \to \int P(x)dx = x^3 \\ Q(x) = x^2 \end{cases}$$

$$1)\ u = e^{\int P(x)} = e^{x^3}$$

$$2)\ v = \int e^{x^3} Q(x)dx = \int e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

$$3)\ y = e^{-x^3}\left(\frac{1}{3} e^{x^3} + C\right) = \frac{1}{3} + Ce^{-x^3}$$

4)

$$x^2y' + xy = 1 \rightarrow y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2} \quad \begin{cases} P(x) = 1/x \\ Q(x) = 1/x^2 \end{cases}$$

4)

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2} \quad \begin{cases} P(x) = 1/x \rightarrow \int P(x)dx = \ln(x) \\ Q(x) = 1/x^2 \end{cases}$$

1) $u = e^{\int P(x)} = e^{\ln(x)} = x$

2) $v = \int xQ(x)dx = \int x\frac{1}{x^2}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + C$

3) $y = \frac{1}{x}(\ln(x) + C) = \frac{\ln(x)}{x} + C\frac{1}{x}$

5)

$$xy' - y = x^2 sen(x) \rightarrow y' - \frac{y}{x} = x\ sen(x) \quad \begin{cases} P(x) = -1/x \\ Q(x) = x\ sen(x) \end{cases}$$

5)

$$y' - \frac{y}{x} = x\, sen(x) \quad \begin{cases} P(x) = -1/x \rightarrow \int P(x)dx = -\ln(x) \\ Q(x) = x\, sen(x) \end{cases}$$

1) $u = e^{\int P(x)} = e^{-\ln(x)} = \dfrac{1}{x}$

2) $v = \displaystyle\int e^{-\ln(x)} Q(x)dx = \int \frac{1}{x} x\, sen(x)dx = \int sen(x) = -\cos(x) + C$

3) $y = x(-\cos(x) + C) = -x\cos(x) + Cx$

6)

$$xy' + 2y = 3 \rightarrow y' + \frac{2y}{x} = \frac{3}{x} \quad \begin{cases} P(x) = 2/x \\ Q(x) = 3/x \end{cases}$$

6)

$$y' + \frac{2y}{x} = 3 \quad \begin{cases} P(x) = 2/x \rightarrow \int P(x)dx = 2\ln(x) \\ Q(x) = 3/x \end{cases}$$

$$1)\ u = e^{\int P(x)} = e^{2\ln(x)} = x^2$$

$$2)\ v = \int x^2 Q(x)dx = \int x^2 \frac{3}{x}\, dx = \int 3x\ \ dx = \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$3)\ y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{3}{2}x^2 + C\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{x^2}C$$