3.- Representar gráficamente los siguientes conjuntos e indicar si son o no convexos. En el caso de que sean convexos determinar sus vértices.

a) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$

b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x,\ x + y \geq 1\right\}$

c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq x^2\right\}$

d) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > x^2\right\}$

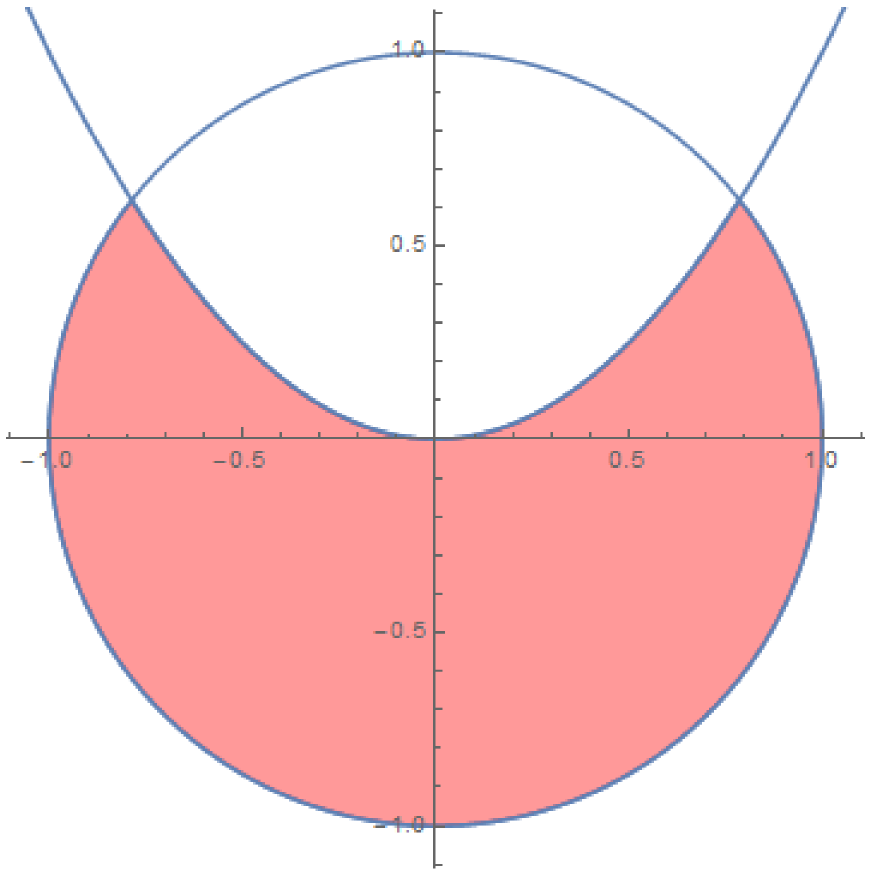
e) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\right\}$

a) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$

Superficie de una esfera de radio 1 $\rightarrow$ $No\ es\ convexo$

c) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq x^2 \right\}$

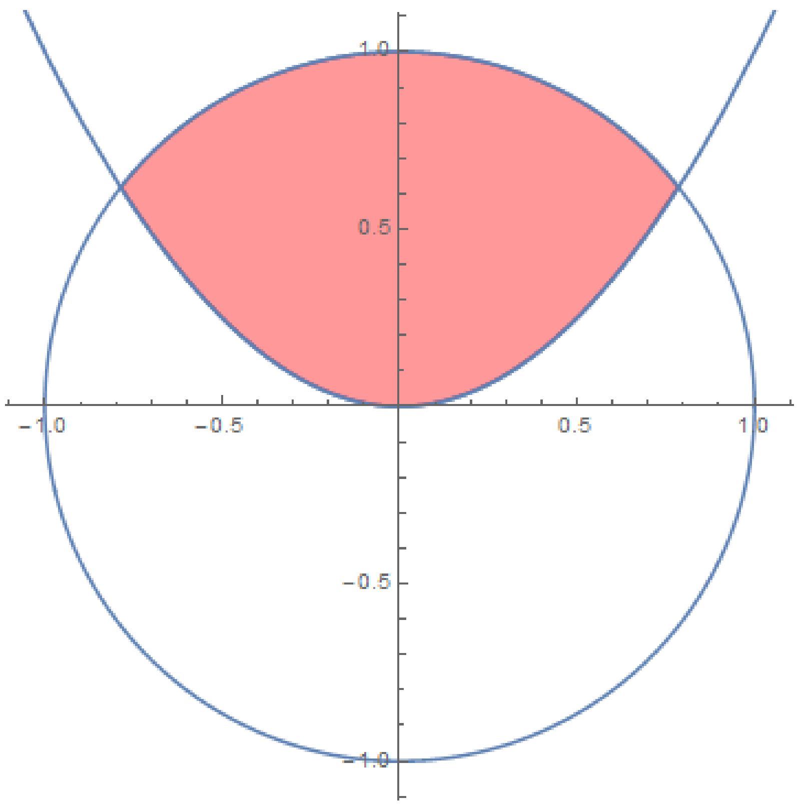
c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq x^2\right\}$



No es convexo

d) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > x^2\right\}$

d) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1,\ y>x^2\right\}$



Es convexo

e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$

e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$

Punto (0,0) $\rightarrow$ único $punto \rightarrow Convexo$

4.- Indicar si las siguientes funciones son cóncavas o convexas en los conjuntos que se indican:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 10 + e^{x+y}$, en $\mathbb{R}^2$

b) $f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz$, en $\mathbb{R}^3$

c) $f(x, y) = ln(xy)$, en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$

$a)\ f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 10 + e^{x+y}$

$a)\ f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 10 + e^{x+y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y + e^{x+y} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + e^{x+y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 + e^{x+y} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x + e^{x+y} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 + e^{x+y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + e^{x+y} \end{cases}$$

$$a)\ f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 10 + e^{x+y}$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 + e^{x+y} & -2 + e^{x+y} \\ -2 + e^{x+y} & 2 + e^{x+y} \end{pmatrix}$$

$$H_1 = 2 + e^{x+y} > 0$$
$$H_2 = 8e^{x+y} > 0$$

Definida positiva → $Convexa$

b) $f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz$

b) $f(x,y,z) = 2x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y + 4z \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 4 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 10y - 2x - 4z \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -4 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 8z + 4x - 4y \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 4 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -4 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 8 \end{cases}$$

b) $f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = 4 > 0$$
$$H_2 = 36 > 0$$
$$H_3 = 128 > 0$$

Definida positiva $\rightarrow$ $Convexa$

c) $f(x,y) = \ln(xy)$

c) $f(x, y) = \ln(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{-1}{x^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-1}{y^2} \end{cases}$$

c) $f(x, y) = \ln(xy)$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{-1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \frac{-1}{x^2} < 0$$

$$H_2 = \frac{1}{x^2 y^2} > 0$$

Definida negativa $\rightarrow Concava$

2.- Clasificar cada uno de los siguientes programas matemáticos y resolverlos gráficamente:

a) Optimizar $x^2 + y^2 + 8$

2.- Clasificar cada uno de los siguientes programas matemáticos y resolverlos gráficamente:

a) Optimizar $x^2 + y^2 + 8$

Sin restricciones, diferenciable, convexo, no lineal

2.- Clasificar cada uno de los siguientes programas matemáticos y resolverlos gráficamente:

a) Optimizar $x^2 + y^2 + 8$

Sin restricciones, diferenciable, convexo, no lineal

Mínimo $\rightarrow (0,0)$

$$c)\ \boldsymbol{Optimizar}\quad x^2 + y^2 + 8$$

$$s.a:\ \{y \geq x^2 - 2$$

$$c)\ \boldsymbol{Optimizar} \quad x^2+y^2+8$$

$$s.a:\ \{y \geq x^2-2$$

Con restricciones de desigualdad, diferenciable, convexo, no lineal

$\boldsymbol{c)}$ $\boldsymbol{Optimizar \quad x^2 + y^2 + 8}$

$$\boldsymbol{s.a:} \ \{\boldsymbol{y \geq x^2 - 2}$$

Con restricciones de desigualdad, diferenciable, convexo, no lineal

Mínimo → $(0,0)$

$$d)\ Optimizar \quad x^2 + y^2 + 8$$

$$s.a: \begin{cases} y \geq x^2 - 2 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{d)\ Optimizar \quad x^2 + y^2 + 8}$$

$$\boldsymbol{s.a:} \begin{cases} \boldsymbol{y \geq x^2 - 2} \\ \boldsymbol{y \leq 0} \end{cases}$$

Con restricciones de desigualdad, diferenciable, convexo, no lineal

Mínimo → $(0,0)$
Máximo → $(0,-2)$