10)

d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\text{s.a:} \begin{cases} x + y + z = 14 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z - 14) + \lambda_2(2x - y)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z - 14) + \lambda_2(2x - y)$$

$$\text{P.C:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x + y + z - 14 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{ (3,6,5), \begin{cases} \lambda_1 = -10 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \right.$$

$$H(3,6,5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow D.P.$$

(3,6,5) Es Mínimo Local Condicionado

$$Conjunto\ S \rightarrow Restricción \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 14 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Al ser funciones lineales es un conjunto convexo.

La función objetivo es $x^2 + y^2 + z^2$, estric. convexa:

El punto mínimo local será global.

31.- Una empresa produce y comercializa dos bienes, *X* e *Y*. El beneficio de la venta de dichos bienes está expresado por la función $B(x,y) = ln(x-2)^2 + ln(y-1)^3$ siendo *x* e *y* el número de unidades vendidas del bien *X* e *Y*, respectivamente. Se sabe que se dispone de 240 unidades de materia prima para producir ambos factores; cada unidad de bien *X* precisa 10 unidades de dicha materia prima para su fabricación y cada unidad de bien *Y* 20 unidades. La materia prima ha de agotarse en su totalidad en el proceso de fabricación. Se pide:

a) Escribir un programa matemático con el que se pueda calcular el número de unidades del bien *X* y del *Y* que se han de fabricar para que el beneficio sea máximo, suponiendo que se vende todo lo que se produce.

b) Resolver el programa matemático planteado.

c) ¿Qué precio máximo estaría dispuesta a pagar la empresa por una unidad adicional de materia prima? Justificar la respuesta.

$$B(x,y,z) = ln(x-2)^2 + ln(y-1)^3$$

s.a. $\{10x + 20y = 240$

$$L = 2ln(x-2) + 3ln(y-1) + \lambda(10x + 20y - 240)$$

$$L = 2ln(x-2) + 3ln(y-1) + \lambda(10x + 20y - 240)$$

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{2}{x-2} + 10\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{3}{y-1} + 20\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 10x + 20y - 240 = 0 \end{cases}$$

$$L = 2ln(x-2) + 3ln(y-1) + \lambda(10x + 20y - 240)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{2}{x-2} + 10\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{3}{y-1} + 20\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 10x + 20y - 240 = 0 \end{aligned}\right\} \left\{ (10,7), \lambda = -\frac{1}{40} \right.$$

$$L = 2ln(x-2) + 3ln(y-1) + \lambda(10x + 20y - 240)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{2}{x-2} + 10\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{3}{y-1} + 20\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 10x + 20y - 240 = 0 \end{aligned}\right\} \left\{ HL = \begin{pmatrix} \frac{-2}{(x-2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{(y-1)^2} \end{pmatrix} \right.$$

$$(10,7), \lambda = -\frac{1}{40} \rightarrow HL = \begin{pmatrix} \frac{-2}{(8)^2} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{(6)^2} \end{pmatrix}$$

Definida negativa -> máximo local condicionado

$$\frac{dB(a)}{da} = -\lambda \rightarrow dB(a) = -\lambda\, da$$

$$\lambda = -\frac{1}{40} \rightarrow -\lambda = \frac{1}{40}$$

$$dB(a) = \frac{1}{40} da = \frac{1}{40}$$

Con una unidad adicional, $da = 1$, el beneficio aumenta en $\frac{1}{40}$, será lo que está dispuesto a pagar

4.- Comprobar que el punto (1, 0, 0) es solución del problema:

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar} \quad f(x,y,z) = x + y + x^2 + y^2 + z^2 \\ &s.a: \qquad x^2 + y^2 = 1 \\ &\qquad\qquad x = 1 \end{aligned}$$

Comprobar que el punto (1, 0, 0) no verifica las condiciones necesarias de primer orden de Lagrange. ¿Cuál es la razón de esta aparente contradicción?.

$$x = 1$$
$$x^2 + y^2 = 1 \to 1 + y^2 = 1 \to y = 0$$

$$f(x,y) = x + y + x^2 + y^2 + z^2 = 2 + z^2$$

Puntos críticos: $\left\{ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z = 0 \to z = 0 \right.$

$$(1,0,0)\ es\ punto\ crítico.$$

$$L(x, y) = x + y + x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(x - 1)$$

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2x + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2y + 2y\lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$L(x, y) = x + y + x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(x - 1)$$

Puntos críticos:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 = 0 \rightarrow Imposible \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 1 - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\nabla g_1(1,0,0) = (2x, 2y, 0) = (2,0,0)$$

$$\nabla g_2(1,0,0) = (1,0,0) = (1,0,0)$$

$$\text{Jg }(1,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Rango\, Jg(1,0,0) = 1 \neq 2 = nº\ de\ restricciones$$

No se cumple la condición de regularidad: El punto (1,0,0) puede ser óptimo sin cumplir las condiciones de lagrange

34.- Una empresa emplea dos factores A y B, en cantidades x e y, para obtener un determinado producto. La función de costes viene dada por $C(x,y) = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10$. Fijado el nivel de producción en 8 unidades, la tecnología utilizada para alcanzar dicho nivel viene determinada por $Q(x,y) = x^2 + y^2$.

a) ¿Qué combinación de factores minimizará el coste de la empresa para el nivel de producción fijado? ¿Cuál sería en este caso el coste de la empresa?

b) Si la empresa se planteara aumentar en una pequeña cantidad su nivel de producción, ¿disminuirían con ello los costes? Razonar la respuesta.

C$(x, y, z) = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10$

s.a. $\{x^2 + y^2 = 8$

$$L = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$$

$$L = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$$

Puntos críticos: $$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 10x - 8y + 2x\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -8x + 10y + 2y\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

$$L = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 10x - 8y + 2x\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -8x + 10y + 2y\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 8 = 0 \end{aligned}\right\} \{(2,2), \lambda = -1$$

$$L = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 10x - 8y + 2x\lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= -8x + 10y + 2y\lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 8 = 0
\end{aligned}\right\} \left\{ HL = \begin{pmatrix} 10 + 2\lambda & -8 \\ -8 & 10 + 2\lambda \end{pmatrix} \right.$$

$$(2,2), \lambda = -1 \rightarrow HL = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = 8h_1^2 + 8h_2^2 - 16h_1h_2$$

$$(2x \quad 2y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (4 \ \ 4) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow h_2 = -h_1$$

$$Q = 8h_1^2 + 8h_1^2 + 16h_1^2 = 32h_1^2 > 0$$

Definida Positiva -> mínimo local condicionado

$$\frac{dC(a)}{da} = -\lambda \rightarrow dC(a) = -\lambda \, da$$

$$\lambda = -1 \rightarrow -\lambda = 1$$

$$dC(a) = 1da > 0$$

Si desean producir más, aumentarán sus costes

33.- Una empresa produce un bien a partir de dos factores productivos *X* e *Y* siendo su función de producción $q(x,y) = 40x + 60y - x^2 - 3y^2$, donde x representa la cantidad de factor *X* e y la de factor *Y*. Los precios unitarios de los factores productivos son 1 y 2 unidades monetarias, respectivamente. Se pide:

a) Sabiendo que los costes de los factores productivos han de ser de 26 u.m., calcular la cantidad de cada factor productivo que se ha de utilizar si se quiere maximizar la producción. Calcular también la producción máxima.

b) Sin volver a resolver el problema, ¿cuánto variará la producción máxima si el coste de los factores productivos ha de ser de 26´1 u.m.?

$$q(x, y, z) = 40x + 60y - x^2 - 3y^2$$

s.a. $\{x + 2y = 26$

$$L = 40x + 60y - x^2 - 3y^2 + \lambda(x + 2y - 26)$$

$$L = 40x + 60y - x^2 - 3y^2 + \lambda(x + 2y - 26)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 40 - 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 60 - 6y + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 26 = 0 \end{cases}$

$$L = 40x + 60y - x^2 - 3y^2 + \lambda(x + 2y - 26)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 40 - 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 60 - 6y + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 26 = 0 \end{array}\right\} \{(14,6), \lambda = -12$$

$$L = 40x + 60y - x^2 - 3y^2 + \lambda(x + 2y - 26)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 40 - 2x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 60 - 6y + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + 2y - 26 = 0 \end{aligned}\right\} \left\{ HL = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \right.$$

$$(14,6), \lambda = -12 \rightarrow HL = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Definida Negativa -> Máximo local condicionado

$$\frac{dq(a)}{da} = -\lambda \rightarrow dq(a) = -\lambda \, da$$

$$\lambda = -12 \rightarrow -\lambda = 12$$

$$dq(a) = 12 \, da = 12 * 0.1 = 1.2 > 0$$

Si pueden gastar más, aumentarán su producción