Tema 2: Programas de optimización sin restricciones

$$Optimizar \quad f(x, y, z, \dots)$$

El conjunto Factible, S, es el dominio de la función

$$Optimizar \quad f(x, y, z, \ldots)$$

Todos los óptimos locales (máximos y minimos) deben cumplir las <u>Condiciones necesarias de primer orden</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$$

Las derivadas parciales respecto a todas las variables deben ser 0

Condiciones necesarias de primer orden

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$$

Esto nos permite buscar candidatos a óptimos locales. No todos los puntos que lo cumplan serán óptimos.

$$f = x^2 + y^2$$

$$f = x^2 + y^2$$

<u>Condiciones necesarias de primer orden</u>

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \rightarrow opt\ (0,0)$$

$$f = x^2 + xy - 3y$$

$$f = x^2 + xy - 3y$$

Condiciones necesarias de primer orden

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow opt\ (3, -6)$$

Para saber si un punto en concreto es máximo o mínimo calculamos el <u>signo de la matriz Hessiana **en el punto**</u> para ver la curvatura de la función.

<u>Condiciones suficientes de segundo orden</u>

$$Definida\ Positiva\ \rightarrow Mínimo\ local\ estricto$$

$$Definida\ Negativa\ \rightarrow Máximo\ local\ estricto$$

$$SemiDefinida\ Positiva\ \rightarrow Mínimo\ local\ o\ punto\ de\ silla$$

$$SemiDefinida\ Negativa\ \rightarrow Máximo\ local\ o\ punto\ de\ silla$$

$$Indefinida \rightarrow Punto\ de\ silla$$

Para saber si un punto en concreto es máximo o mínimo calculamos el <u>signo de la matriz Hessiana **en el punto**</u> para ver la curvatura de la función.

$$\left.\begin{array}{l} SDP \rightarrow Mínimo\ local\ o\ punto\ de\ silla \\ SDN \rightarrow Máximo\ local\ o\ punto\ de\ silla \\ Hessiana = 0 \rightarrow No\ hay\ información \end{array}\right\} Estudio\ directo$$

$$f = x^2 + y^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \rightarrow opt\ (x, y) = (0,0)$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow DP \rightarrow Mínimo\ local\ estricto$$

$$f = x^2 + y^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \rightarrow opt\ (x, y) = (0,0)$$

$$f = x^2 + y^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0\end{array}\right\} \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \rightarrow opt\ (x, y) = (0,0)$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow DP \rightarrow Mínimo\ local\ estricto$$

$$f = x^2 + xy - 3y$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \begin{cases} 2x + y = 0 \\ \quad x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow opt\,(x, y) = (3, -6)$$

$$f = x^2 + xy - 3y$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow opt\ (x, y) = (3, -6)$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow I \rightarrow Punto\ de\ silla$$

$$f = (x - y)^4$$

$$f = (x - y)^4$$

<u>Condiciones necesarias de primer orden</u>

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \begin{cases} 4(x-y)^3 = 0 \\ -4(x-y)^3 = 0 \end{cases} \rightarrow opt\ (x, y) = (x, x)$$

$$f = (x-y)^4$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \begin{cases} 4(x-y)^3 = 0 \\ -4(x-y)^3 = 0 \end{cases} \rightarrow opt\ (x,y) = (x,x)$$

$$H = \begin{pmatrix} 12(x-y)^2 & -12(x-y)^2 \\ -12(x-y)^2 & 12(x-y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No se puede saber a priori el signo

$$f(x,x) = (x-x)^4 = 0$$
$$f(x,y) = (x-y)^4 \geq 0$$

El punto (x,x) ofrece el valor más pequeño que puede tener la función, 0. Tendrá que ser un mínimo.

(También podríamos decir mínimo global).

$$f = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f = \frac{\ln(x)}{x}$$

Condiciones necesarias de primer orden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Big\} \left\{ \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = 0 \rightarrow opt\ (x) = (e) \right.$$

$$f = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\Big\}\Big\{\frac{1-\ln(x)}{x^2} = 0 \rightarrow opt\,(x) = (e)$$

$$H = \left(\frac{\frac{-1}{x}x^2 - 2x(1-\ln(x))}{x^4}\right) = \left(\frac{-e}{e^4}\right) = \frac{-1}{e^3} < 0$$

$$DN \rightarrow Máximo\ local\ estricto$$

Globalidad: Para saber si la función tiene máximo o mínimo global calculamos el signo de la matriz Hessiana para ver la curvatura de la función.

$$Definida\ Positiva\ \rightarrow Mínimo\ global\ único$$

$$Definida\ Negativa\ \rightarrow Máximo\ global\ único$$

$$SemiDefinida\ Positiva\ \rightarrow Mínimo\ global$$

$$SemiDefinida\ Negativa\ \rightarrow Máximo\ global$$

$$f = x^4 - \ln(y) + y$$

$$f = x^4 - \ln(y) + y$$

Condiciones necesarias de primer orden

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}4x^3 = 0 \\ \dfrac{-1}{y} + 1 = 0\end{array}\right. \rightarrow opt\,(x, y) = (0,1)$$

$$f = x^4 - \ln(y) + y$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 4x^3 = 0 \\ \dfrac{-1}{y} + 1 = 0 \end{array}\right. \rightarrow opt\,(x, y) = (0,1)$$

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No tiene signo en el punto

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$$

Es Definida Positiva en todo (x,y).
La función es estrictamente convexa.

El punto será un <u>Mínimo Global Único</u>