**1.-** Dada la función $f(x,y) = x\ Ln\, y$ .

a) Determinar, si existen, los puntos críticos de *f*.

b) Determinar, si existen, los extremos locales de *f*.

$$f(x, y) = x\,Ln(y)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$f(x,y) = x\, Ln(y)$

Puntos críticos: $\begin{cases} Ln(y) = 0 \rightarrow y = 1 \\ \dfrac{x}{y} = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases} \rightarrow (0,1)$

$$f(x,y) = x\,Ln(y)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} \end{pmatrix} \rightarrow H(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = x\,Ln(y)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} \end{pmatrix} \rightarrow H(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Indefinida→ $punto\ de\ silla$

**4.-** Dada $f(x,y) = x\,y^2$, estudiar si $f$ puede alcanzar el valor máximo en los puntos (0, 2) y (2, 0).

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

**4.-** Dada $f(x,y) = x\,y^2$, estudiar si $f$ puede alcanzar el valor máximo en los puntos (0, 2) y (2, 0).

Puntos críticos: $\begin{cases} y^2 = 0 \rightarrow y = 0 \\ 2xy = 0 \rightarrow x = x \end{cases} \rightarrow (x, 0)$

$$f(x,0) = 0$$

(2,0) es punto crítico cuando x=2.

$f(x, y) = xy^2$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \rightarrow H(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Semi Definida Positiva: Punto de silla o mínimo

(2,0) no puede ser máximo

**6.-** Determinar los óptimos locales de las siguientes funciones en su dominio de definición:

$$a)\ f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Puntos críticos:}\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

**6.-** Determinar los óptimos locales de las siguientes funciones en su dominio de definición:

$$f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$

$$f(0,0) = 1$$

$$f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 = f(0,0)$$

En el punto (0,0) tenemos un máximo global.

$$H = \begin{pmatrix} -\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

En el punto → 0

En general → Definida Negativa $\{$ *Máximo global unico*

**6.-** Determinar los óptimos locales de las siguientes funciones en su dominio de definición:

i) $f(x, y) = xy$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

**6.-** Determinar los óptimos locales de las siguientes funciones en su dominio de definición:

$$f(x,y) = xy$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x = 0 \end{cases}$

$$f(0,0) = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Indefinida $\rightarrow$ Punto de silla

**6.-** Determinar los óptimos locales de las siguientes funciones en su dominio de definición:

p) $f(x,y) = (x-y)^4 + (y-1)^2$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

**6.-** Determinar los óptimos locales de las siguientes funciones en su dominio de definición:

$$f(x,y) = (x-y)^4 + (y-1)^2$$

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4(x-y)^3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4(x-y)^3 + 2(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$(1,1) \rightarrow f(1,1) = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} 12(x-y)^2 & -12(x-y)^2 \\ -12(x-y)^2 & 12(x-y)^2+2 \end{pmatrix}$$

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En el punto → SemiDef. Positiva $\begin{cases} \text{Punto de silla} \\ Mínimo \end{cases}$

En general → SemiDef. Positiva $\{\ Mínimo\ global$

$$f(x,y) = (x-y)^4 + (y-1)^2 > 0 = f(1,1)$$

Mínimo global en (1,1)

**7.-** Calcular los óptimos locales de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$ según los valores del parámetro real $a$.

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases} \rightarrow (a,a)$

$$(a,a) \rightarrow f(a,a) = -a^3$$

$$H = \begin{pmatrix} 6x & -3a \\ -3a & 6y \end{pmatrix} \rightarrow H(a,a) = \begin{pmatrix} 6a & -3a \\ -3a & 6a \end{pmatrix}$$

$$Signo \begin{cases} H_1 = 6a \begin{cases} a > 0 \rightarrow 6a > 0 \\ a < 0 \rightarrow 6a < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 0 \rightarrow Definida\ negativa \rightarrow Máximo \\ a > 0\ Definida\ positiva \rightarrow Mínimo \end{cases} \\ H_2 = 27a^2 > 0 \end{cases}$$

$$a = 0 \rightarrow Punto\ de\ silla$$