Globalidad

Teorema de Weierstrass: Si el conjunto factible (las restricción) es cerrado y acotado, se alcanza un mínimo global y un máximo global.

Cerrado: Contiene a su frontera (aparece un = en la restricción).
Acotado: Una bola puede contener al conjunto.

Ejemplos:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2= 4$$

Globalidad

Teorema de convexidad-globalidad: Si el conjunto factible es convexo

- Si la función f es convexa → $El\ mínimo\ local\ será\ también\ global$

- Si la función f es estrictamente convexa → $El\ mín.\ local\ será\ global\ y\ único$

- Si la función f es cóncava → $El\ máximo\ local\ será\ también\ global$

- Si la función f es estrictamente cóncava → $El\ max.\ local\ será\ global\ y\ único$

Para ver si la función es cóncava o convexa hay dos opciones:

- Calcular la hessiana de la función objetivo y ver su signo
- Viendo el signo de la hessiana del lagrangiano, tomando $\lambda = 0$

19.- Dado el problema

$$\begin{array}{ll} Optimizar & x^2 - y^2 \\ s.a: & x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

a) El conjunto factible ¿es convexo?, ¿es cerrado?, ¿es acotado? Justificarlo.

b) Hallar los puntos críticos de la función Lagrangiana asociada y clasificarlos.

c) Sin necesidad de volver a resolver el problema, y si el término independiente de la restricción es 1´1 en lugar de 1, contestar razonadamente a la pregunta: ¿los valores óptimos mejoran o empeoran?

El conjunto factible, definido por la restricción:

$$x^2+y^2-1=0$$

$$\text{Es:}\begin{cases} No\ convexo \\ Cerrado\ (contiene\ la\ frontera) \\ Acotado\ (una\ bola\ lo\ contiene) \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2$$

s.a. $\{x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$L = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$L = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2x\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -2y + 2y\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$$L = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + 2x\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -2y + 2y\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{cases} (0,1), \lambda = 1 \\ (0,-1), \lambda = 1 \\ (1,0), \lambda = -1 \\ (-1,0), \lambda = -1 \end{cases}$$

$$HL = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & -2+2\lambda \end{pmatrix}$$

1º punto $(0,1), \lambda = 1 \rightarrow HL = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow h_2 = 0$$

$$Q(h_1) = 4h_1^2 > 0$$

Definida Positiva -> Mínimo local

$$HL = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & -2+2\lambda \end{pmatrix}$$

2º punto $\quad (0,-1), \lambda = 1 \to HL = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(2x \quad 2y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \to (0 \quad -2) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \to h_2 = 0$$

$$Q(h_1) = 4h_1^2 > 0$$

Definida Positiva -> Mínimo local

$$HL = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & -2+2\lambda \end{pmatrix}$$

3º punto $\quad (1,0), \lambda = -1 \rightarrow HL = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$$(2x \quad 2y)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (2 \;\; 0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow h_1 = 0$$

$$Q(h_1) = -4h_2^2 < 0$$

Definida Negativa -> Máximo local

$$HL = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & -2+2\lambda \end{pmatrix}$$

4º punto $(-1,0), \lambda = -1 \to HL = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$$(2x \quad 2y)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \to (-2 \ \ 0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \to h_1 = 0$$

$$Q(h_1) = -4h_2^2 < 0$$

Definida Negativa -> Máximo local

$$Conjunto\ S \rightarrow Restricción \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Cerrado y acotado: Los puntos óptimos serán globales
(Por el teorema de Weierstrass)

$$\frac{dF(a)}{da} = -\lambda \rightarrow dF(a) = -\lambda\, da$$

Mínimo: $\lambda = 1 \rightarrow -\lambda = -1$

$$dF(a) = -1\ (0.1) = -0.1$$

El punto mínimo tendrá un valor menor

$$\frac{dF(a)}{da} = -\lambda \rightarrow dF(a) = -\lambda\, da$$

Máximo: $\lambda = -1 \rightarrow -\lambda = 1$

$$dF(a) = 1\ (0.1) = 0.1$$

El punto máximo tendrá un valor mayor

22.- Dado el problema

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & f(x,y,z) = x^2 + y^2 \\ s.a: & 4x - 3y + 2z = 6 \end{array}$$

analizar la existencia de óptimos globales y calcularlos en su caso.

$f(x, y, z) = x^2 + y^2$

s.a. $\{4x - 3y + 2z = 6$

$$L = x^2 + y^2 + \lambda(4x - 3y + 2z - 6)$$

$$L = x^2 + y^2 + \lambda(4x - 3y + 2z - 6)$$

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 4\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x - 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$L = x^2 + y^2 + \lambda(4x - 3y + 2z - 6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + 4\lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - 3\lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 2\lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 4x - 3y + 2z - 6 = 0
\end{aligned}\right\} \{(0,0,3), \lambda = 0$$

$$L = x^2 + y^2 + \lambda(4x - 3y + 2z - 6)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + 4\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - 3\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 4x - 3y + 2z - 6 = 0 \end{aligned}\right\} \left\{ HL = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$HL = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S.D.P$$

$$Q(h_1, h_2, h_3) = 2h_1^2 + 2h_2^2$$

$$(4 \quad -3 \quad 2) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow h_3 = -4h_1 + 3h_2$$

$$Q(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 2h_2^2 > 0$$

Definida Positiva -> mínimo local condicionado

$$Conjunto\ S \rightarrow Restricción \rightarrow 4x - 3y + 2z = 6$$

Al ser una función lineal es un conjunto convexo.

La función objetivo es $x^2 + y^2$, convexa:

El punto mínimo local será global.

29.- La función de utilidad de un consumidor es $U(x,y)=(x+2)(y+1)$ donde x e y representan las cantidades de los bienes 1 y 2 consumidos en un periodo de tiempo dado. Sea 4 u.m. el precio unitario del bien 1, 6 u.m. el precio unitario del bien 2 y 130 u.m. el presupuesto de que dispone el consumidor que se gasta totalmente. Se pide:

a) Calcular la cantidad a consumir de cada bien si el objetivo es maximizar la utilidad.

b) ¿Cuál es la variación que experimenta la utilidad máxima ante un cambio en la cantidad de presupuesto disponible?

$$f(x, y, z) = (x + 2)(y + 1)$$

s.a. $\{4x + 6y = 130$

$$L = (x + 2)(y + 1) + \lambda(4x + 6y - 130)$$

$$L = (x+2)(y+1) + \lambda(4x + 6y - 130)$$

Puntos críticos:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 1 + 4\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2 + 6\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x + 6y - 130 = 0 \end{cases}$$

$$L = (x+2)(y+1) + \lambda(4x + 6y - 130)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y + 1 + 4\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x + 2 + 6\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 4x + 6y - 130 = 0 \end{aligned}\right\} \{(16,11), \lambda = -3$$

$$L = (x+2)(y+1) + \lambda(4x + 6y - 130)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y + 1 + 4\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x + 2 + 6\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 4x + 6y - 130 = 0 \end{aligned}\right\} \left\{ HL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$(16,11), \lambda = -3 \rightarrow HL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(h_1, h_2) = 2h_1h_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 4h_1 + 6h_2 = 0 \rightarrow h_1 = -\frac{6}{4}h_1$$

$$Q(h_1) = -3h_1^2 < 0$$

Definida negativa -> máximo local condicionado

$$\frac{dU(a)}{da} = -\lambda \rightarrow dU(a) = -\lambda\, da$$

$$\lambda = -3 \rightarrow -\lambda = 3$$

$$dU(a) = 3\, da$$

Si el presupuesto aumenta, $da > 0$, la utilidad aumentará

31.- Una empresa produce y comercializa dos bienes, *X* e *Y*. El beneficio de la venta de dichos bienes está expresado por la función $B(x,y) = ln(x-2)^2 + ln(y-1)^3$ siendo *x* e *y* el número de unidades vendidas del bien *X* e *Y*, respectivamente. Se sabe que se dispone de 240 unidades de materia prima para producir ambos factores; cada unidad de bien *X* precisa 10 unidades de dicha materia prima para su fabricación y cada unidad de bien *Y* 20 unidades. La materia prima ha de agotarse en su totalidad en el proceso de fabricación. Se pide:

a) Escribir un programa matemático con el que se pueda calcular el número de unidades del bien *X* y del *Y* que se han de fabricar para que el beneficio sea máximo, suponiendo que se vende todo lo que se produce.

b) Resolver el programa matemático planteado.

c) ¿Qué precio máximo estaría dispuesta a pagar la empresa por una unidad adicional de materia prima? Justificar la respuesta.

$$B(x,y,z) = ln(x-2)^2 + ln(y-1)^3$$

s.a. $\{10x + 20y = 240$

$$L = 2ln(x-2) + 3ln(y-1) + \lambda(10x + 20y - 240)$$

$$L = 2ln(x-2) + 3ln(y-1) + \lambda(10x + 20y - 240)$$

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{2}{x-2} + 10\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{3}{y-1} + 20\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 10x + 20y - 240 = 0 \end{cases}$$

$$L = 2ln(x-2) + 3ln(y-1) + \lambda(10x + 20y - 240)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{2}{x-2} + 10\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{3}{y-1} + 20\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 10x + 20y - 240 = 0 \end{aligned}\right\} \left\{ (10,7), \lambda = -\frac{1}{40} \right.$$

$$L = 2ln(x-2) + 3ln(y-1) + \lambda(10x + 20y - 240)$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{2}{x-2} + 10\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{3}{y-1} + 20\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 10x + 20y - 240 = 0 \end{array}\right\} \left\{ HL = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{(x-2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-3}{(y-1)^2} \end{pmatrix} \right.$$

$$(10,7), \lambda = -\frac{1}{40} \rightarrow HL = \begin{pmatrix} \frac{-2}{(8)^2} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{(6)^2} \end{pmatrix}$$

Definida negativa -> máximo local condicionado

$$\frac{dB(a)}{da} = -\lambda \rightarrow dB(a) = -\lambda\, da$$

$$\lambda = -\frac{1}{40} \rightarrow -\lambda = \frac{1}{40}$$

$$dB(a) = \frac{1}{40} da = \frac{1}{40}$$

Con una unidad adicional, $da = 1$, el beneficio aumenta en $\frac{1}{40}$, será lo que está dispuesto a pagar

34.- Una empresa emplea dos factores A y B, en cantidades x e y, para obtener un determinado producto. La función de costes viene dada por $C(x,y) = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10$. Fijado el nivel de producción en 8 unidades, la tecnología utilizada para alcanzar dicho nivel viene determinada por $Q(x,y) = x^2 + y^2$.

a) ¿Qué combinación de factores minimizará el coste de la empresa para el nivel de producción fijado? ¿Cuál sería en este caso el coste de la empresa?

b) Si la empresa se planteara aumentar en una pequeña cantidad su nivel de producción, ¿disminuirían con ello los costes? Razonar la respuesta.

C$(x, y, z) = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10$

s.a. $\{x^2 + y^2 = 8$

$$L = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$$

$$L = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$$

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 10x - 8y + 2x\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -8x + 10y + 2y\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

$$L = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 10x - 8y + 2x\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -8x + 10y + 2y\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 8 = 0 \end{aligned}\right\} \left\{(2,2), \lambda = -1\right.$$

$$L = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 10x - 8y + 2x\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -8x + 10y + 2y\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 8 = 0 \end{aligned}\right\} \left\{ HL = \begin{pmatrix} 10 + 2\lambda & -8 \\ -8 & 10 + 2\lambda \end{pmatrix} \right.$$

$$(2,2), \lambda = -1 \rightarrow HL = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = 8h_1^2 + 8h_2^2 - 16h_1h_2$$

$$(2x \quad 2y)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (4 \;\; 4)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow h_2 = -h_1$$

$$Q = 8h_1^2 + 8h_1^2 + 16h_1^2 = 32h_1^2 > 0$$

Definida Positiva -> mínimo local condicionado

$$\frac{dC(a)}{da} = -\lambda \rightarrow dC(a) = -\lambda\, da$$

$$\lambda = -1 \rightarrow -\lambda = 1$$

$$dC(a) = 1da > 0$$

Si desean producir más, aumentarán sus costes

33.- Una empresa produce un bien a partir de dos factores productivos *X* e *Y* siendo su función de producción $q(x,y) = 40x + 60y - x^2 - 3y^2$, donde x representa la cantidad de factor *X* e y la de factor *Y*. Los precios unitarios de los factores productivos son 1 y 2 unidades monetarias, respectivamente. Se pide:

a) Sabiendo que los costes de los factores productivos han de ser de 26 u.m., calcular la cantidad de cada factor productivo que se ha de utilizar si se quiere maximizar la producción. Calcular también la producción máxima.

b) Sin volver a resolver el problema, ¿cuánto variará la producción máxima si el coste de los factores productivos ha de ser de 26´1 u.m.?

$$q(x, y, z) = 40x + 60y - x^2 - 3y^2$$

s.a. $\{x + 2y = 26$

$$L = 40x + 60y - x^2 - 3y^2 + \lambda(x + 2y - 26)$$

$$L = 40x + 60y - x^2 - 3y^2 + \lambda(x + 2y - 26)$$

Puntos críticos:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 40 - 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 60 - 6y + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 26 = 0 \end{cases}$$

$$L = 40x + 60y - x^2 - 3y^2 + \lambda(x + 2y - 26)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 40 - 2x + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 60 - 6y + 2\lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + 2y - 26 = 0
\end{aligned}\right\} \{(14,6), \lambda = -12$$

$$L = 40x + 60y - x^2 - 3y^2 + \lambda(x + 2y - 26)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 40 - 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 60 - 6y + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 26 = 0 \end{array}\right\} \left\{ HL = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}\right.$$

$$(14,6), \lambda = -12 \rightarrow HL = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Definida Negativa -> Máximo local condicionado

$$\frac{dq(a)}{da} = -\lambda \rightarrow dq(a) = -\lambda\, da$$

$$\lambda = -12 \rightarrow -\lambda = 12$$

$$dq(a) = 12\, da = 12 * 0.1 = 1.2 > 0$$

Si pueden gastar más, aumentarán su producción