Tema 3: Programas de optimización con restricciones de igualdad

Optimizar: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Despejamos variables a partir de las restricciones y las sustituimos en la función a optimizar, convirtiéndolo en un programa sin restricciones.

Util para casos sencillos:

$\boxed{1º\ \text{método}}$

Optimizar: $f(x_1, x_2) = xy$

Sujeto a $\{g_1(x_1, x_2) = x + y - 4 = 0$

Optimizar: $f(x_1, x_2) = xy$

Sujeto a $\{g_1(x_1, x_2) = x + y - 4 = 0$

1) Despejamos y: $y = 4 - x$

2) Sustituimos en la función a optimizar

$$f = xy = x(4 - x) = 4x - x^2$$

3) Optimizamos para x.

$$f' = 4 - 2x = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 2$$

1.- Sea $f(x,y) = e^x + e^y$, se pide:

a) ¿Existe algún punto óptimo de *f*?.

b) Si se considera la función *f* sujeta a la restricción $x + y = 2$, ¿existe algún punto óptimo?.

$$f(x, y) = e^x + e^y$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$$f(x, y) = e^{x} + e^{y}$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{y} = 0 \end{cases}$ $No\ puede\ ser$

No hay punto crítico.

Optimizar: $f(x_1, x_2) = e^{x} + e^{y}$

Sujeto a $\{g_1(x_1, x_2) = x + y - 2 = 0$

1) $y = 2 - x$

2) $f = e^{x} + e^{y} = e^{x} + e^{2-x}$

3) $f' = e^{x} - e^{2-x} = 0 \rightarrow x = 2 - x \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Podemos ver si es máximo o mínimo directamente con la matriz hessiana

1) $f = e^{x} + e^{y} = e^{x} + e^{2-x}$

2) $f' = e^{x} - e^{2-x} = 0 \rightarrow x = 2 - x \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

3) $H = (e^{x} + e^{2-x}) = 2e > 0$

Definida Positiva: Mínimo local (y global) único.

2.- Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$:

a) ¿Existe algún punto óptimo de *f*?.

b) Escribir una restricción de forma que los puntos obtenidos en a) no sean solución del problema restringido.

c) Si se considera la función *f* sujeta a la restricción $x + y = 1$, ¿existe algún punto óptimo?.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0)\ Mínimo$

Optimizar: $f(x_1, x_2) = x^2 + y^2$

Sujeto a $\{g_1(x_1, x_2) = x + y - 1 = 0$

1) $y = 1 - x$

2) $f = x^2 + y^2 = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 + 1 - 2x$

3) $f' = 4x - 2 = 0 \rightarrow x = 1/2 \rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$

Podemos ver si es máximo o mínimo directamente con la matriz hessiana

1) $f = 2x^2 + 1 - 2x$

2) $f' = 4x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$

3) $H = (4) > 0$

Definida Positiva: Mínimo local (y global) único.

Último Ejemplo

a) Optimizar: $f(x, y) = xy + z^2$

b) Sujeto a $\left\{ g_1(x_1, x_2) = x - y - z = 0 \right.$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$

$$f(x,y) = xy + z^2$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0,0), \quad p. silla.$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = -1 \\ m_3 = -2 \end{cases}$$

Optimizar: $f(x, y) = xy + z^2$

Sujeto a $\{g_1(x_1, x_2) = x - y - z = 0$

1) $y = x - z$

2) $f = xy + z^2 = x(x - z) + z^2 = x^2 + z^2 - xz$

3) $f' \begin{cases} f_x = 2x - z = 0 \\ f_z = 2z - x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$

Podemos ver si es máximo o mínimo directamente con la matriz hessiana

1) $f = x^2 + z^2 - xz$

2) $f' = \begin{matrix} f_x = 2x - z = 0 \\ f_z = 2z - x = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

3) $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} > 0$

Definida Positiva: Mínimo local (y global) único.