Tema 3: Hessiana semidefinidas e indefinidas

Si la matriz sale Semidefinida o Indefinida, tenemos que ver que ocurre al tener en cuenta las restricciones.

1º) Pasar la matriz Hessiana a Forma Cuadrática (ecuación). Usaremos variables h.

2º) Calcular el gradiente de las restricciones (jacobiana). $Jg(x_0)$.

3º) Despejaremos variables cumpliendo $Jg(x_0)\bar{h} = 0$

4º) Sustituimos en la Forma Cuadrática y vemos de nuevo el signo. Clasificamos como en el tema 2.

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$ Semidefinida Positiva

Restricción: $x + y = 3$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$ Semidefinida Positiva

Restricción: $x + y = 3$

1º) $Q = 4h_1^2 + h_2^2 + 4h_1 h_2$

2º) $Jg(x_0) = (1,1)$

3º) $Jg(x_0)\bar{h} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \ h_2 = -h_1$

4º) $Q = 4h_1^2 + h_1^2 - 4h_1^2 = h_1^2 > 0$ Definida Positiva $\rightarrow$ Mínimo local condicionado

13.- Resolver el siguiente problema de optimización utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} &\textit{Optimizar} \qquad x+y \\ &s.a: \qquad xy-1=0 \end{aligned}$$

$$f(x, y, z) = x + y$$

s.a. $\{xy - 1 = 0$

$$L = x + y + \lambda(xy - 1)$$

$$L = x + y + \lambda(xy - 1)$$

Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = xy - 1 = 0 \end{cases}$

$$L = x + y + \lambda(xy - 1)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + \lambda y = 0\\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1 + \lambda x = 0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= xy - 1 = 0\end{aligned}\right\} \begin{cases} (1,1), \lambda = -1 \\ (-1,-1), \lambda = 1 \end{cases}$$

$$L = x + y + \lambda(xy - 1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + \lambda y = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 1 + \lambda x = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= xy - 1 = 0
\end{aligned}\right\} HL = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

1º punto $(1,1), \lambda = -1 \rightarrow HL = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$Q(h_1, h_2) = -2(h_1 h_2) \quad Indefinida$$

$$Jg \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (y \quad x) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$h_2 = -h_1$$

$$Q(h_1) = 2h_1^2 > 0 \quad Definida\ Positiva \rightarrow Mínimo\ local$$

2º punto $(-1,-1), \lambda = 1 \rightarrow HL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$Q(h_1, h_2) = 2(h_1 h_2) \quad Indefinida$$

$$Jg\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (y \quad x)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (-1 \quad -1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$h_2 = -h_1$$

$$Q(h_1) = -2h_1^2 < 0 \quad Definida\ negativa \rightarrow Máximo\ local$$

10)

b) $f(x, y, z) = 2x + y - z$

s.a: $x^2 + y^2 - z = 0$

$f(x, y, z) = 2x + y - z$

s.a. $\{x^2 + y^2 - z = 0$

$$L = 2x + y - z + \lambda(x^2 + y^2 - z)$$

$$L = 2x + y - z + \lambda(x^2 + y^2 - z)$$

Puntos críticos: $$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 + \lambda 2x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda 2y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = -1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

$$L = 2x + y - z + \lambda(x^2 + y^2 - z)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2 + \lambda 2x = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 1 + \lambda 2y = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= -1 - \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - z = 0
\end{aligned}\right\} \left\{ \left(1, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right), \lambda = -1 \right.$$

$$L = 2x + y - z + \lambda(x^2 + y^2 - z)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2 + \lambda 2x = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 1 + \lambda 2y = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= -1 - \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - z = 0
\end{aligned}\right\} HL = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(1,\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right),\lambda=-1\rightarrow HL=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}S.D.Negativa$$

$$Q(h_1,h_2,h_3)=-2{h_1}^2-2{h_2}^2+0{h_3}^2\leq 0$$

$$Jg\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=(2x\quad 2y\quad -1)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=(2\quad 1\ -1)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=0$$

$$h_3=2h_1+h_2$$

$$Q(h_1,h_1)=-2{h_1}^2-2{h_2}^2<0\quad D.Negativa\rightarrow Máximo\ local$$

Optimizar $\quad f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

s.a $\quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) - a = 0$

Si cambia el valor a → Cambia el punto óptimo

Si cambia el punto óptimo → Cambia el valor de la función

$$\frac{dF(a)}{da} = -\lambda(a)$$

$$\frac{dF(a)}{da} = -\lambda(a)$$

El multiplicador de Lagrange nos informa de cómo variará la función objetivo en un punto crítico al variar el parametro "a"

$$\begin{cases} \lambda > 0 \rightarrow -\lambda < 0 \rightarrow \dfrac{dF(a)}{da} < 0 \\ \lambda < 0 \rightarrow -\lambda > 0 \rightarrow \dfrac{dF(a)}{da} > 0 \end{cases}$$

$Ejercicio$ 13: s.a. $\{xy - 1 = 0 \rightarrow a = 1$

1º punto $(1,1), \lambda = -1 \rightarrow$ *Mínimo local*

$$\frac{dF(a)}{da} = -\lambda = 1 > 0$$

Si aumentamos el término independiente, aumentará el valor de la función (el mínimo local se hará más grande).

$Ejercicio$ 13: s.a. $\{xy - 1 = 0 \rightarrow a = 1$

2º punto $(-1,-1), \lambda = 1 \rightarrow Máximo\ local$

$$\frac{dF(a)}{da} = -\lambda = -1 < 0$$

Si aumentamos el término independiente, disminuirá el valor de la función (el máximo local se hará más pequeño).

$Ejercicio\ 10, b)$: s.a. $\{x^2 + y^2 - z = 0 \rightarrow a = 0$

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right), \lambda = -1 \rightarrow Máximo$ *local*

$$\frac{dF(a)}{da} = -\lambda = 1 > 0$$

Si aumentamos el término independiente, aumentará el valor de la función (el máximo local se hará más grande).

Ejercicio extra

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 0} \\ \boldsymbol{2x - y + 2z = 1} \end{cases}$$

$$L(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z) + \lambda_2(2x - y + 2z - 1)$$

$$\text{Puntos críticos:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z) + \lambda_2(2x - y + 2z - 1)$$

$$\text{P.C:} \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x + y + z = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left(\frac{1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6}\right), \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{3} \\ \lambda_2 = \dfrac{-1}{3} \end{cases} \right.$$

$$H(0,1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow D.P.$$

$(\frac{1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6})$ Es Mínimo Local Condicionado