$$Programa\ de\ maximo\ (primal)\ tiene\ asociado\ un\ programa\ de\ mínimo\ (dual)$$

En forma canónica:

$$\begin{array}{llcl} Max & z = c^t x & & Min \quad w = b^t y \\ s.a. & Ax \leq b & \rightarrow & s.a. \quad A^t y \geq c \\ & x \geq 0 & & \quad y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc}
Max & 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & \\
\\
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & \geq & 6
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0$$

$$\text{Max} \quad \boxed{2x_1 + x_2 - 3x_3}$$

$$\begin{array}{|ccccc|} \hline x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ 4 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0$$

$$\text{Max} \quad \boxed{2x_1 + x_2 - 3x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 10 \\ 4 \\ 6 \end{array}}$$

$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0$

Movemos los coeficientes de la función a los términos independientes de las restricciones

Primal

$$Max \quad \boxed{2x_1 \quad + \quad x_2 \quad - \quad 3x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 10 \\ 4 \\ 6 \end{array}}$$

$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0$

Dual

$$Min \quad \boxed{}$$

$$\boxed{} \qquad \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -3 \end{array}}$$

Movemos los términos independientes de las restricciones a los coeficientes de la función

Primal

$$Max \quad \boxed{2x_1 + x_2 - 3x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 10 \\ 4 \\ 6 \end{array}}$$

$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0$

Dual

$$Min \quad \boxed{10x_1 + 4x_2 + 6x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -3 \end{array}}$$

Transponemos la matriz de los coeficientes de las restricciones

Primal

$$Max \quad \boxed{2x_1 + x_2 - 3x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 10 \\ 4 \\ 6 \end{array}}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0$$

Dual

$$Min \quad \boxed{10x_1 + 4x_2 + 6x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -3 \end{array}}$$

Las restricciones serán de igualdad o desigualdad dependiendo de las variables

Primal

$$Max \quad \boxed{2x_1 + x_2 - 3x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 10 \\ 4 \\ 6 \end{array}}$$

$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0$

Dual

$$Min \quad \boxed{10x_1 + 4x_2 + 6x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} \geq \\ \leq \\ = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -3 \end{array}}$$

$$Signo: \begin{cases} De\ variable\ a\ restricción \rightarrow Mantenemos\ el\ signo \\ De\ restricción\ a\ variable \rightarrow Cambiamos\ el\ signo \end{cases}$$

Al pasar de Máximo a Mínimo.

El signo de las variables dependerá de las restricciones

Primal

$$Max \quad \boxed{2x_1 \quad + \quad x_2 \quad - \quad 3x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 10 \\ 4 \\ 6 \end{array}}$$

$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0$

Dual

$$Min \quad \boxed{10x_1 \quad + \quad 4x_2 \quad + \quad 6x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} \geq \\ \leq \\ = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -3 \end{array}}$$

$x_1 \geq 0 \qquad x_3 \leq 0$

$$Signo: \begin{cases} De\ variable\ a\ restricción \ \rightarrow Mantenemos\ el\ signo \\ De\ restricción\ a\ variable \ \rightarrow Cambiamos\ el\ signo \end{cases}$$

Al pasar de Máximo a Mínimo.

$$
\begin{array}{lllllll}
Max & x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & \\
 & & & & & & \\
2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 8 \\
x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & \geq & 1 \\
2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & \leq & 2
\end{array}
$$

$$x_2 \leq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

$$Max \quad \boxed{x_1 - 4x_2 - 2x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} = \\ \geq \\ \leq \end{array} \boxed{\begin{array}{r} 8 \\ 1 \\ 2 \end{array}}$$

$$x_2 \leq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

Movemos los coeficientes de la función a los términos independientes de las restricciones

Primal

$$Max \quad \boxed{x_1 \quad - \quad 4x_2 \quad - \quad 2x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \quad \begin{array}{c} = \\ \geq \\ \leq \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{c} 8 \\ 1 \\ 2 \end{array}}$$

$$x_2 \leq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

Dual

$$Min \quad \boxed{}$$

$$\boxed{} \qquad \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ -4 \\ -2 \end{array}}$$

Movemos los términos independientes de las restricciones a los coeficientes de la función

Primal

$$\text{Max} \quad \boxed{x_1 \quad - \quad 4x_2 \quad - \quad 2x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \quad \begin{array}{c} = \\ \geq \\ \leq \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{c} 8 \\ 1 \\ 2 \end{array}}$$

$$x_2 \leq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

Dual

$$\text{Min} \quad \boxed{8x_1 \quad + \quad x_2 \quad + \quad 2x_3}$$

$$\boxed{} \qquad \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ -4 \\ -2 \end{array}}$$

Transponemos la matriz de los coeficientes de las restricciones

Primal

$$Max \quad \boxed{x_1 - 4x_2 - 2x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \quad \begin{array}{c} = \\ \geq \\ \leq \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{r} 8 \\ 1 \\ 2 \end{array}}$$

$$x_2 \leq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

Dual

$$Min \quad \boxed{8x_1 + x_2 + 2x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{r} 1 \\ -4 \\ -2 \end{array}}$$

Las restricciones serán de igualdad o desigualdad dependiendo de las variables

Primal

$$Max \quad \boxed{x_1 - 4x_2 - 2x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} = \\ \geq \\ \leq \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 8 \\ 1 \\ 2 \end{array}}$$

$$x_2 \leq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

Dual

$$Min \quad \boxed{8x_1 + x_2 + 2x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ -4 \\ -2 \end{array}}$$

$$Signo: \begin{cases} De\ variable\ a\ restricción \ \rightarrow Mantenemos\ el\ signo \\ De\ restricción\ a\ variable \ \rightarrow Cambiamos\ el\ signo \end{cases}$$

Al pasar de Máximo a Mínimo.

El signo de las variables dependerá de las restricciones

Primal

$$Max \quad \boxed{x_1 - 4x_2 - 2x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} = \\ \geq \\ \leq \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 8 \\ 1 \\ 2 \end{array}}$$

$$x_2 \leq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

Dual

$$Min \quad \boxed{8x_1 + x_2 + 2x_3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 \end{array}} \begin{array}{c} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ -4 \\ -2 \end{array}}$$

$$x_2 \leq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

$$Signo: \begin{cases} De\ variable\ a\ restricción \ \rightarrow Mantenemos\ el\ signo \\ De\ restricción\ a\ variable \ \rightarrow Cambiamos\ el\ signo \end{cases}$$

Al pasar de Máximo a Mínimo.

$$\text{Maximizar} \quad x_3$$

$$s.a: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Si hacemos el programa de optimización en un Simplex obtenemos la solución del Primal y el Dual

Ejemplo:

1º Tabla: Nos fijamos en las variables con las que iniciamos el simplex: x_4 y x_5

			0	0	1	0	-M	← C
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	3	1	1	0	1	0	
-M	x_5	0	1	-1	-1	0	1	
		0	-M	M	M	0	-M	← Z
			-M	M	M-1	0	0	← Z - C

Si hacemos el programa de optimización en un Simplex obtenemos la solución del Primal y el Dual
Ejemplo:

Última Tabla: Nos fijamos en los valores de la fila Z de esas variables: 1 y -1

			0	0	1	0	-M	← C
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	3	0	2	1	1	-1	
0	x_1	3	1	1	0	1	0	
		3	0	2	1	1	-1	← Z
			0	2	0	1	M-1	← Z - C

Solución del primal: $x_1 = 3, x_3 = 3$

Solución del dual: $x_1 = 1, x_2 = -1$

			0	0	1	0	-M	← C
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	3	0	2	1	1	-1	
0	x_1	3	1	1	0	1	0	
		3	0	2	1	1	-1	← Z
			0	2	0	1	M-1	← Z - C

Tendremos una variable Dual por cada restricción que exista en el Primal.

El valor de cada variable dual nos dice cuando aumentará la función
al aumentar el término independiente de su restricción correspondiente.

$$\frac{dz}{db_i} = y_i$$

Se pueden llamar "Precios sombra": lo que estaríamos dispuestos a pagar por 1 unidad más

$$Maximizar \quad 2x_1 + x_2$$

$$s.a: \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dual

$$Minimizar \qquad 10y_1 + 40y_2$$

$$s.a: \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ -y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Maximizar \quad 2x_1 + x_2$$

$$s.a: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 40 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

1º: Variables

			2	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	10	1	-1	1	0
0	x_4	40	2	-1	0	1
		0	0	0	0	0
			-2	-1	0	0

Resolución del Simplex. 1º, nos fijamos en la última fila.

			2	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	10	1	-1	1	0
0	x_4	40	2	-1	0	1
		0	0	0	0	0
			-2	-1	0	0

Metemos la variable con el menor valor en z-c que sea negativo

			2	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	10	1	-1	1	0
0	x_4	40	2	-1	0	1
		0	0	0	0	0
			-2	-1	0	0

En la columna de la variable elegida, el pivote debe ser 1, el resto 0

			2	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
	x_1					
	x_4					

En la columna de la variable elegida, el pivote debe ser 1, el resto 0

			2	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
2	x_1	10	1	-1	1	0
0	x_4	20	0	1	-2	1
		20	2	-2	2	0
			0	-1	2	0

En la columna de la variable elegida, el pivote debe ser 1, el resto 0

			2	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
	x_1					
	x_2					

En la columna de la variable elegida, el pivote debe ser 1, el resto 0

			2	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
2	x_1	30	1	0	-1	1
1	x_2	20	0	1	-2	1
		80	2	1	-4	3
			0	0	-4	3

Solución no finita o ilimitada: Nunca se alcanza un valor máximo

$$
\text{Maximizar} \quad x_1 + x_2
$$

$$
s.a: \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

Dual

$$Minimizar \quad 4y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$s.a: \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 1 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$Maximizar \quad x_1 + x_2$$

$$s.a: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_5 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

			1	1	0	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
			1	-1	1	0	0	
			1	1	0	1	0	
			0	1	0	0	-1	

			1	1	0	0	0	-M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	4	1	-1	1	0	0	0
0	x_4	4	1	1	0	1	0	0
-M	x_6	6	0	1	0	0	-1	1
		-6M	0	-M	0	0	M	-M
			-1	-M-1	0	0	M	0

			1	1	0	0	0	-M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	8	2	0	1	1	0	0
1	x_2	4	1	1	0	1	0	0
-M	x_6	2	-1	0	0	-1	-1	1

			1	1	0	0	0	-M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	8	2	0	1	1	0	0
1	x_2	4	1	1	0	1	0	0
-M	x_6	2	-1	0	0	-1	-1	1
		-2M+4	1+M	1	0	1+M	M	-M
			M	0	0	1+M	M	0

No hay solución. El conjunto factible es el conjunto vacio.