Informe Homework 4

Martín Palacios Undurraga

Pregunta 1:

Se genera el vector de acuerdo con lo solicitado en la pregunta. Al construir el vector T se puede ajustar el parámetro n de acuerdo con la periodicidad con la que se quiere trabajar. Si se quisiera que los deltas fueran variaciones diarias podríamos poner un N = 53(semanas) * 7 (días por semana). De esta manera se puede ajustar el intervalo de calculo con el costo de una mayor exigencia para el computador para cálculos extensos, por lo tanto, procesos más lentos. Cabe destacar que esto es escalable a cualquier escala de tiempo, ya sea año a semana, semana a día, año a segundos (necesitaríamos un buen computador) etc.

El output generado es un vector de 53 objetos separados de manera equidistante por 0,0192 aproximadamente.

Pregunta 2:

$$\Delta W_n \sim Gauss(0; \Delta T_n)$$

Se define delta W como una variable aleatoria que distribuye normal con media 0 y sigma delta T (por la pregunta 1 sabemos que es cercano a 0,0192). Este delta W se utiliza para definir el proceso de Wiener como:

$$W_t = W_{t-1} + \Delta W$$

El proceso de Wiener es un tipo de proceso estocástico a tiempo continuo, llamado así en honor a Norbert Wiener que los estudió. Frecuentemente este tipo de procesos se denominan movimiento browniano estándar, en honor a Robert Brown. Matemáticamente, es un caso particular de proceso de Lévy (procesos estocásticos con incrementos estadísticamente independientes y estacionarios) que aparece con frecuencia en matemática pura, economía, física y finanzas.

El proceso de Wiener se caracteriza por las siguientes propiedades:

Es una función aleatoria que toma valores continuos y depende de una variable independiente, que por conveniencia denota el tiempo, el cual también se considera como variable continua.

- Los incrementos del proceso son independientes entre sí.
- Los incrementos del proceso tienen la misma distribución.
- La varianza de cada incremento es igual a dt (mencionado anteriormente).

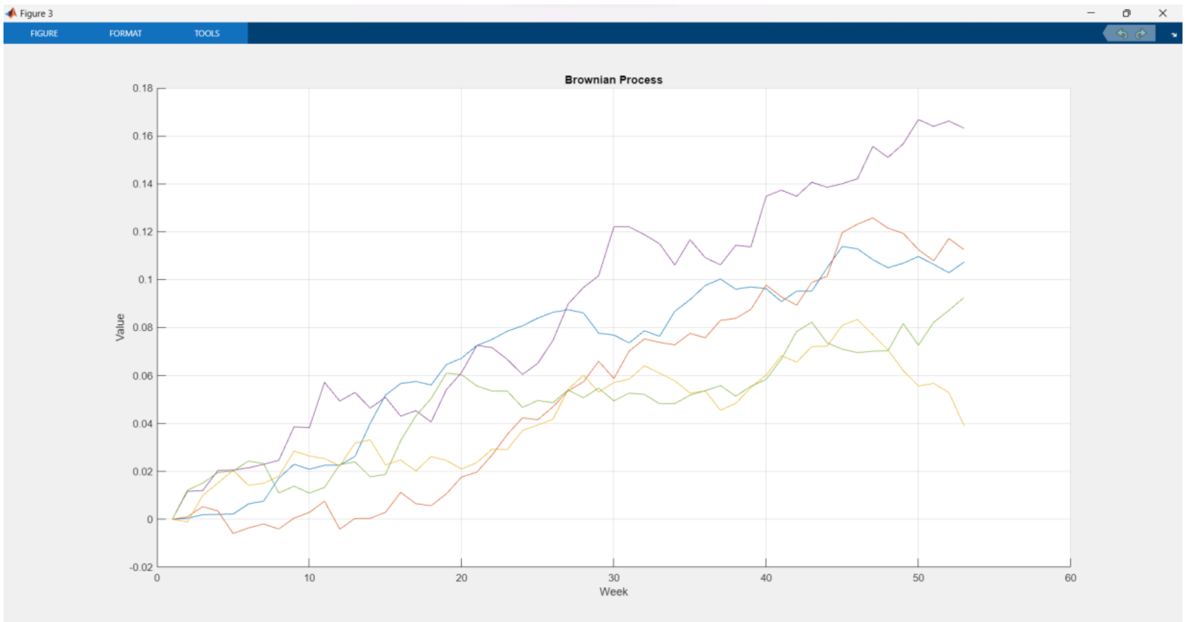
El proceso de Wiener tiene una serie de aplicaciones en las finanzas. Por ejemplo, se puede utilizar para modelar el movimiento de los precios de los activos financieros. En este caso, el proceso de Wiener podría representar la evolución aleatoria del precio del activo a lo largo del paso de las semanas durante 1 año.

En este caso, los 5 caminos graficados quedan de la siguiente manera:

Pregunta 3:

Para la pregunta 3 se solicita realizar el mismo proceso que el anterior pero ahora con un proceso browniano que incorpora drift y volatilidad en la ecuación. El movimiento browniano (proveniente del proceso) es un tipo de movimiento aleatorio que se observa en las partículas que se hallan en un medio fluido, como resultado de choques contra las moléculas de dicho fluido. Esto se puede aplicar a distintas áreas en donde una variable se pueda representar por medio de un drift (o tendencia) junto con una volatilidad (desviación estándar). En las finanzas, el movimiento browniano se utiliza para modelar el movimiento de los precios de los activos financieros.

En este caso, el movimiento browniano podría representar la evolución aleatoria del precio del activo a lo largo del tiempo. Para este caso el output de los 5 caminos para el valor de B es el siguiente:



En el grafico anterior podemos ver que las series si bien tienen fluctuaciones estas tienen un drift de crecimiento claro que se da por la construcción que le dimos a ΔB_t (la suma de un termino constante y un variable). El termino constante le da “memoria” y produce que el valor esperado de B_t dependa del valor que toma t para ese momento, llegando en su final a una esperanza de 0.1019 cuando llegamos a que $t = T = 53$. En este caso podríamos ver comportamientos similares a los que se dan en el grafico en valores instrumentos financieros, por ejemplo, podrían estar representando caminos Bullish para el precio de un ETF que sigue el SP500 a lo largo de un año.

Pregunta 4:

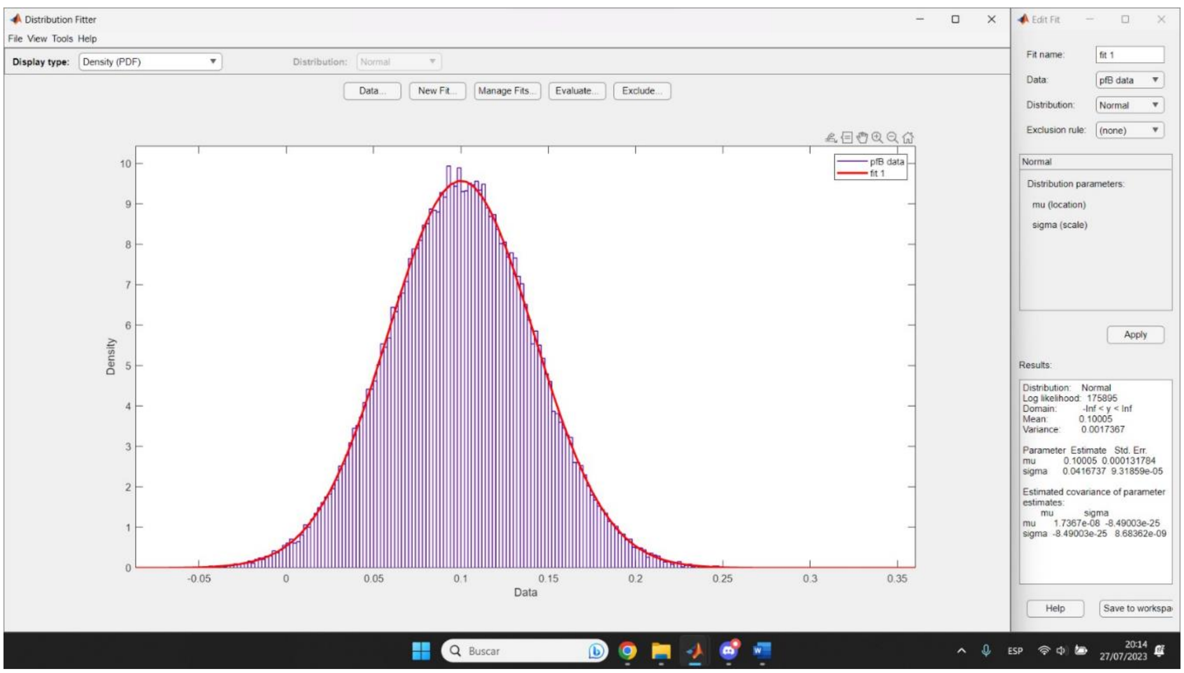
En la pregunta 4 se solicita generar 1000 caminos distintos para el proceso anterior para luego graficar de manera conjunta un histograma con la Probabilidad empírica para cada posición final junto con su probabilidad teórica.

El primer paso para esto es calcular los momentos para la distribución con la que estamos trabajando, para esto usamos las siguientes propiedades.

$$E[B_t] = E[B_{t-1} + \Delta B_t]$$

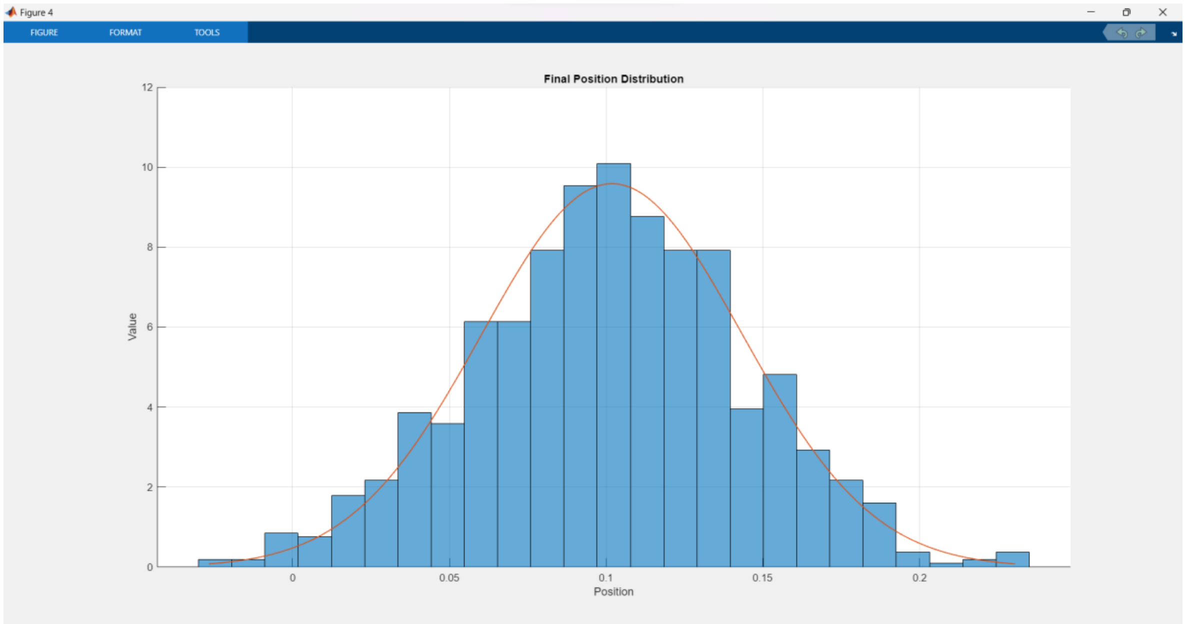
$$VAR[B_t] = E[B_t^2] + E[B_t]^2$$

Por medio del desarrollo matemático de estas expresiones uno puede encontrar la distribución teórica del proceso Browniano. En este caso podemos ver que la media es 0,1019 y que la desviación estándar es de 0,041615. Podemos comprobar esto por medio del uso de herramientas de análisis de distribuciones propias de MATLAB como lo es la aplicación "Distribution Fitter". Para el uso de esta herramienta use el vector de valores finales para el proceso B con un M = 100.000 (para así lograr una mejor confirmación con los estadísticos). Posteriormente generé un dataset dentro de la aplicación y usé los modelos para hacer calzar la probabilidad por máxima verosimilitud generando el siguiente output:



En la figura anterior podemos ver que para un numero grande de observaciones se hace un calce casi perfecto entre la distribución empírica y la teórica por lo que por ley de los grandes números podemos usar sin mayores problemas los parámetros obtenidos por este medio para representar la distribución teórica. En mi caso logre derivar la esperanza del proceso B pero al calcular la varianza de B cometí algún error de calculo que no logro corregir por lo que la varianza teórica me negativa cosa que no puede ser. Por esta razón usaré el error estándar calculado en Matlab que representa casi a la perfección la distribución del proceso cuando M tiende a infinito. La ley de los grandes números establece que si toma una muestra aleatoria de una población grande, los parámetros de la muestra se aproximarán cada vez más a los parámetros de la población a medida que aumente el tamaño de la muestra.

El output solicitado para la pregunta 4 queda de la siguiente forma:



Pregunta 5:

A decir verdad, no me quedo del todo claro lo que se estaba preguntando en esta sección, pero contestare parte por parte según lo que interpreté.

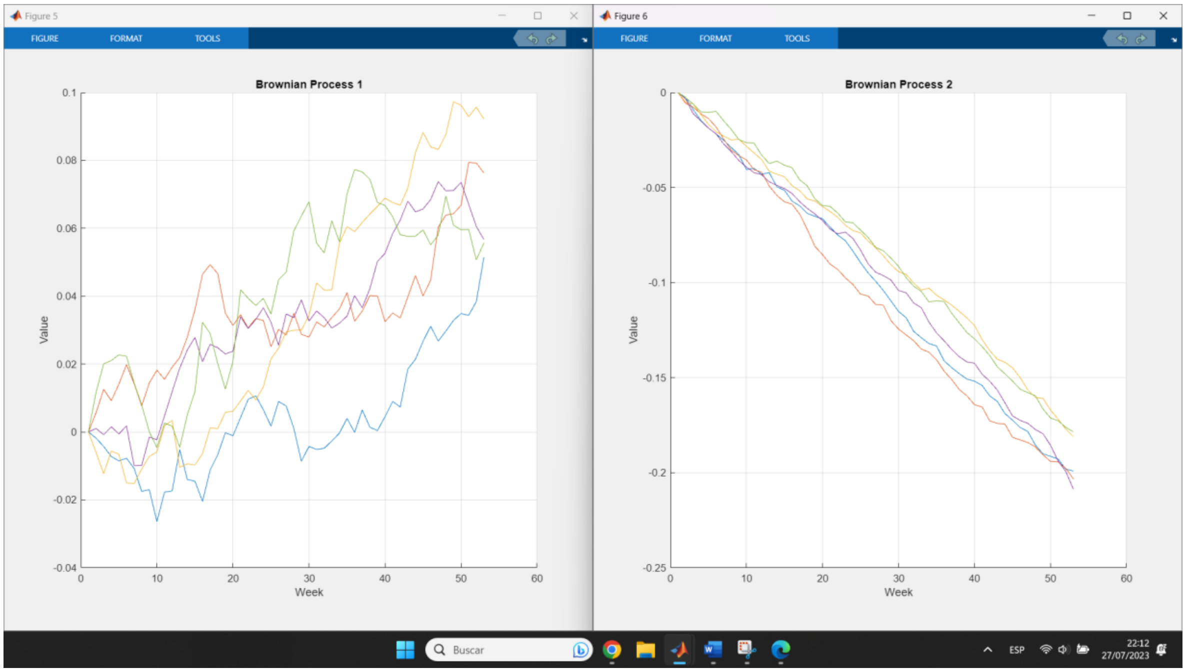
Consider two independent Wiener processes W_1 and W_2 and define two correlated Brownian processes B_1 and B_2 as:

$$dB_{1t} = \mu_1 \cdot dt + \sigma_1 \cdot dW_{1t}$$
$$B_{10} = 0$$
$$dB_{2t} = \mu_2 \cdot dt + \sigma_2 \cdot (\rho \cdot dW_{1t} + \sqrt{1-\rho^2} \cdot dW_{2t})$$
$$B_{20} = 0$$

The parameters are: $\mu_1 = 0.1$, $\sigma_1 = 0.3$, $\mu_2 = -0.2$, $\sigma_2 = 0.1$, and $\rho = 0.5$.

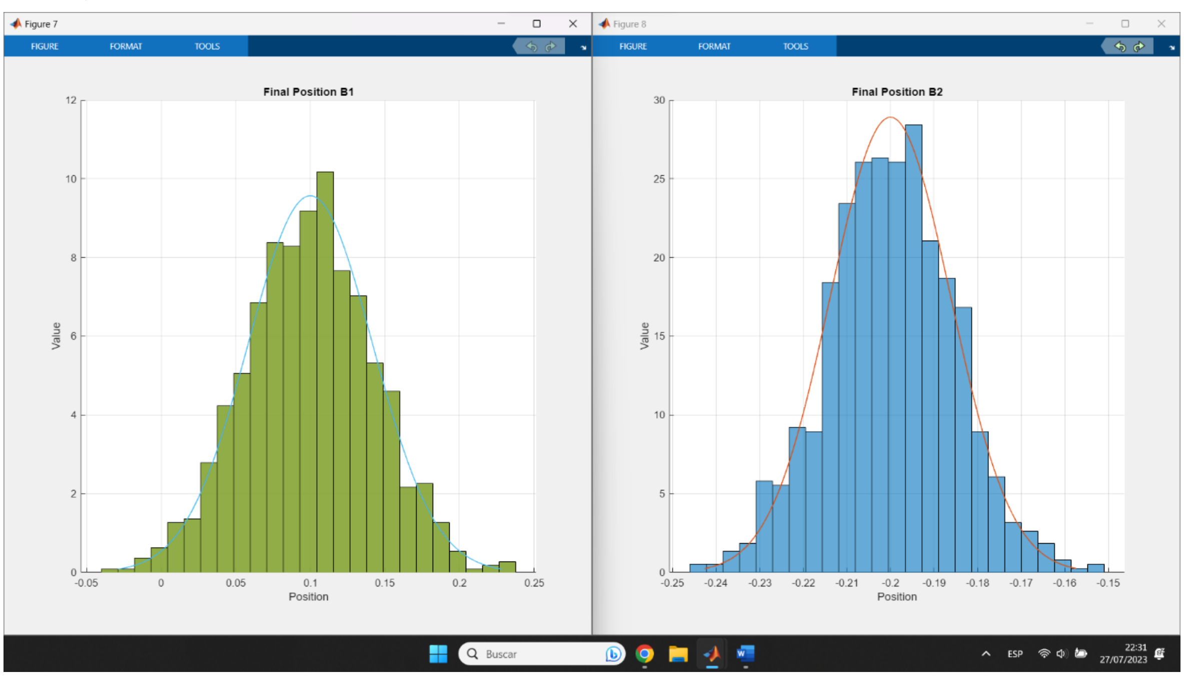
En la primera parte de la pregunta se nos solicita generar los procesos descritos en la imagen anterior y posteriormente graficar 5 caminos para cada proceso Browniano B_i, si bien estos procesos son bastante similares tienen la gran diferencia de que dB_2 tiene un drift negativo y una volatilidad menos significativa que dB_1, además de esto, dB_2 tiene un componente dependiente de dW_1 y de su correlación.

Los outputs correspondientes a esta sección son los siguientes:

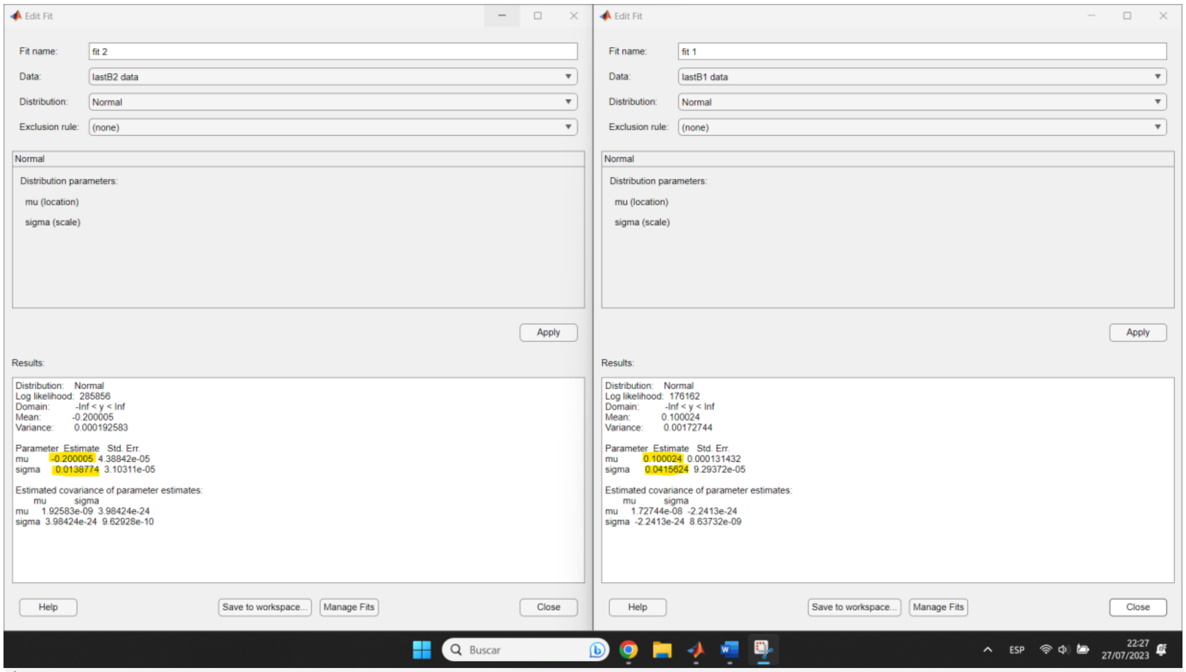


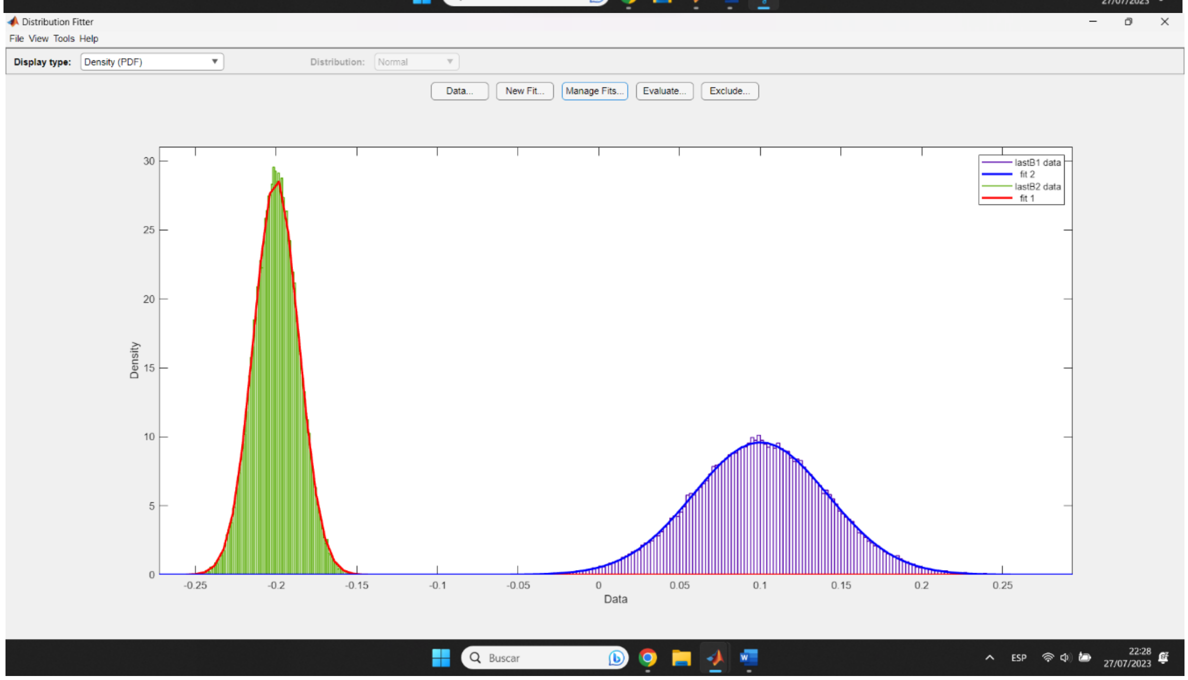
Como podemos ver, el proceso 1 es evidentemente más volátil debido a que sigma es mayor, es decir sus caminos se diferencias más entre sí. Sumado a esto vemos el impacto del drift en las series, en B1 veíamos un drift positivo y del mismo valor, pero distinto sentido que sigma2 el cual es negativo por lo que la serie B2 tiende a la baja.

En la parte 2 de la pregunta se solicita graficar la probabilidad tanto empírica como teórica para ambas distribuciones, para encontrar los parámetros teóricos (poblacionales) utilice el mismo método no convencional que use en la pregunta anterior ("Distribution Fitter").



A continuación, podemos observar que un Fitting con distribución normal se acerca casi perfectamente al comportamiento de las series al simular 100.000 datos. Por esta razón usaré los parámetros encontrados por el modelo para simular la distribución Teórica en el histograma:



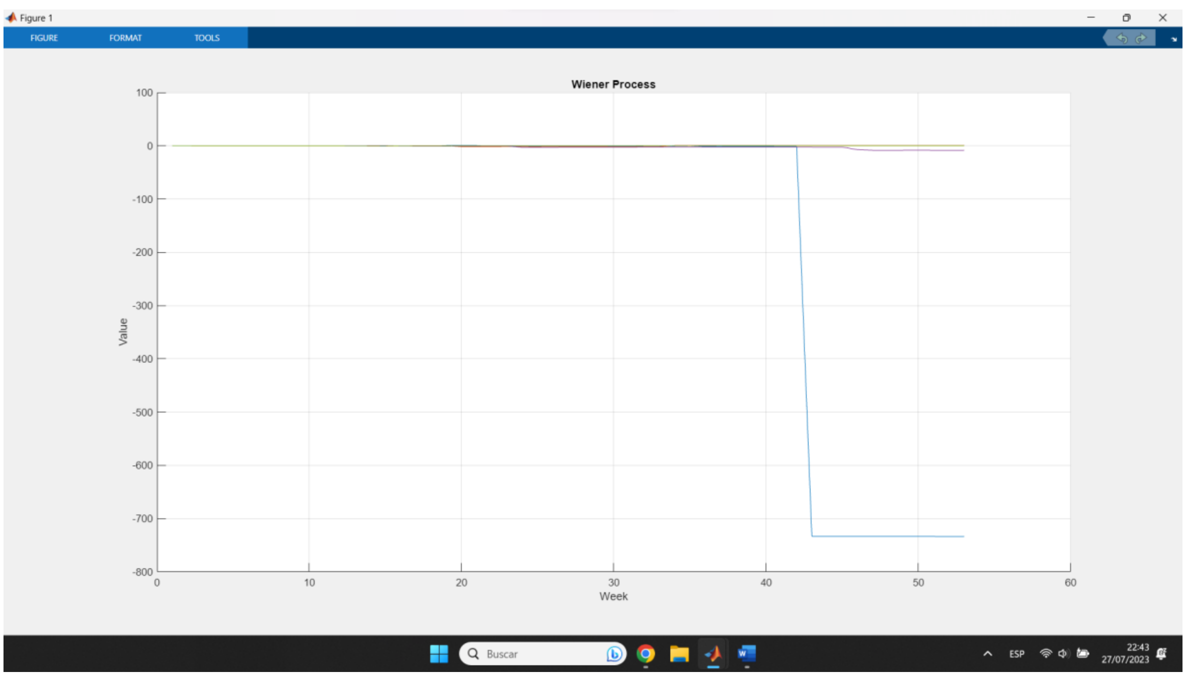


La parte final de la pregunta solicitaba rehacer la parte 2 de la pregunta moviendo rho y registrando la media desviaciones estándar para cada posición. Si bien no logré desarrollar esta pregunta por temas de código (no sé cómo hacerlo aún) la intuición me dice que a medida que aumenta el coeficiente de correlación debería aumentar la similitud de las distribuciones de posición final pero solo hasta cierto punto.

Pregunta 6:

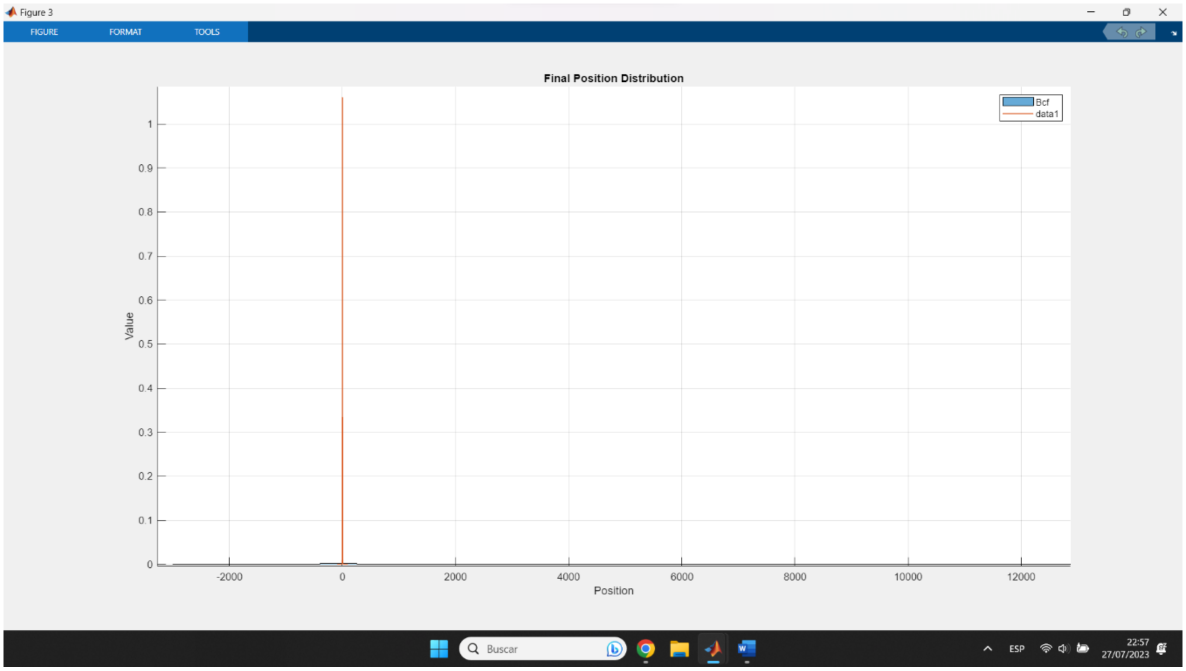
$$\Delta Z_n \sim Cauchy(0; \Delta T_n)$$
$$dC_t = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dZ_t$$
$$C_0 = 0$$

La pregunta 6 solicita replicar lo desarrollado para las preguntas 2, 3 y 4 pero ahora usando una distribución de Cauchy. La distribución de Cauchy es una distribución de probabilidad continua. Es una distribución simétrica alrededor de la media y tiene colas pesadas, lo que significa que la probabilidad de observar valores extremos es relativamente alta. La distribución de Cauchy no tiene una varianza finita ni una media definida. Esta distribución es importante de estudiar en finanzas ya que las colas pesadas generan que los eventos extremos puedan ser devastadores si lo que estamos modelando son retornos o una serie de precios lo cual es bastante cercano a la realidad considerando los "black swans" o eventos inesperados que no fueron previstos por el mercado pero que tienen un enorme impacto en los mercados financieros globales.



En primer lugar, podemos ver que en el proceso de Wiener sucede un evento extremo que saca de escala a la serie completa pero el comportamiento de los otros caminos era bastante "normal". Esto deja en evidencia lo mencionado anteriormente acerca de los efectos de alto impacto. Imaginemos que estamos modelando los retornos de un portafolio que tiene una posición corta de una compañía como gamestop antes de su subida abismal. Si modeláramos la serie con una distribución normal no veríamos casos como este en el que por alguna razón el precio del subyacente se dispara y tenemos un retorno cerca del -800% en un solo movimiento que a esta escala sería una semana aproximadamente. Este movimiento es suficiente para hacer quebrar a un inversionista.

El proceso Browniano que vemos anteriormente es considerablemente más volátil que su contraparte de distribución normal, de la misma manera ya no es tan claro que la serie tiene un drift positivo. Al igual que antes, una serie de este tipo se podría utilizar para modelar precios de un activo financiero.



Por ultimo esta el histograma de probabilidad de posición final ql cual se ve totalmente absorbido por la perdida de escala que genera la distribución de Cauchy en el gráfico, es tanto el impacto que el histograma solo se puede ver si uno se esfuerza (es muy pequeño cerca de la "media").