



TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Fakultät für Informatik und Automatisierung

## Masterarbeit

### Robuste $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regelung eines Planaren Nanopositioniersystems unter Modellunsicherheiten und Störungen

---

vorgelegt von: Markus Pappert

eingereicht am: 26. 09. 2013

geboren am: [REDACTED]

Studiengang: Elektro- und Informationstechnik

Studienrichtung: Automatisierungs- und  
Systemtechnik

Anfertigung im Fachgebiet: Regelungstechnik

Fakultät für Informatik und Automatisierung

Verantwortlicher Professor: Prof. Dr.-Ing. Johann Reger

Wissenschaftlicher Betreuer: M.Sc. Kai Treichel

## **Kurzfassung**

Nanopositionierer sind präzise mechatronische Systeme, welche konzipiert wurden, um Objekte über kleine Bewegungsbereiche hinweg zu bewegen. Sie sind von wesentlicher Bedeutung für die Nanotechnologie. An die Regelung einer solchen Nanopositioniermaschine werden hohe Anforderungen bezüglich der Genauigkeit, Stabilität und der dynamischen Bahnverfolgung gestellt. Auf Grundlage eines bereits bestehenden Systemmodells des Nanopositioniersystems LP<sup>3</sup>S der Firma Tetra, beschäftigt sich diese Masterarbeit mit der Untersuchung, der Auswahl und dem Entwurf geeigneter adaptiver Regelungsverfahren. Hierzu werden Regler der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelungstheorie, einer neuartigen Theorie für adaptive Regelungen, betrachtet und mit herkömmlichen adaptiven Reglern, wie dem MRAC verglichen. Es werden die auf den Präzisionspositionierer einwirkenden Störungen und Unsicherheiten beschrieben und eine  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Zustandsrückführung entworfen. Da es aus Kostengründen lohnenswert erscheint, auf eine Geschwindigkeitsmessung zu verzichten, wird eine  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Ausgangsrückführung entworfen. Zur dynamischen Bahnverfolgung wird schließlich ein Folgeregler, bestehend aus einer Vorsteuerung und einem PID-Regler, entwickelt.

## **Abstract**

Nanopositioners are precise mechatronic systems, which are designed for moving objects over small distances. They are fundamentally important for nanotechnologies. In connection with the control of such nanopositioners high demands regarding the accuracy, stability and dynamic tracking are requested. Based on an already existent system model of the nanopositioning system LP<sup>3</sup>S produced at the company TETRA, this master thesis deals with the analysis, assortment and design of an appropriate adaptive control solution. Therefore controllers of the  $\mathcal{L}_1$ -adaptive control theory, a recent theory for adaptive controllers, are analysed and compared to conventional adaptive controllers like MRAC. The disturbances and uncertainties that influence the nanopositioner are described and according to this a  $\mathcal{L}_1$ -adaptive state-feedback controller is designed. For economic reasons, it shall be refrained from velocity measurements, thus, a  $\mathcal{L}_1$ -adaptive output-feedback controller is designed as well. For dynamical tracking, eventually, a follow-up controller, consisting of a feed-forward control and a PID controller, is designed.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Stand der Technik</b>	<b>3</b>
2.1 Nanopositioniersysteme . . . . .	3
2.1.1 Bauformen von Nanopositioniersystemen . . . . .	3
2.1.2 Aktoren . . . . .	4
2.1.3 Sensoren . . . . .	8
2.2 Regelung von Nanopositioniersystemen . . . . .	8
<b>3 Modellbeschreibung</b>	<b>12</b>
3.1 Modellierungsziel . . . . .	12
3.2 Aufbau und Wirkungsweise des planaren Positioniersystems LP <sup>3</sup> S . . .	12
3.2.1 Signalfluss . . . . .	15
3.3 Modellannahmen . . . . .	15
3.4 Aufstellen der Modellgleichungen . . . . .	16
3.5 Störungen . . . . .	21
3.6 Modellvalidierung . . . . .	23
<b>4 Adaptive Regelungsverfahren - Eine Übersicht</b>	<b>24</b>
4.1 Gain Scheduling . . . . .	28
4.2 Model Reference Adaptive Control . . . . .	29
4.2.1 Direct MRAC . . . . .	30
<b>5 L<sub>1</sub>-adaptive Regelungstheorie</b>	<b>34</b>
5.1 Zustandsrückführung mit zeitinvarianten Unsicherheiten . . . . .	36
5.1.1 Simulationsbeispiel . . . . .	45
5.2 Zustandsrückführung mit unsicherer Eingangsverstärkung . . . . .	55
5.2.1 Problemformulierung und Beschreibung der L <sub>1</sub> -adaptiven Regelkreisarchitektur . . . . .	55

---

5.2.2	Entwurf der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Zustandsrückführung für das Positioniersystem LP <sup>3</sup> S . . . . .	57
5.2.3	Simulationsergebnisse . . . . .	65
5.3	Ausgangsrückführung für Nicht-SPR Referenzsysteme . . . . .	72
5.3.1	Problemformulierung und Beschreibung der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreisarchitektur . . . . .	73
5.3.2	Entwurf der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung für das Positioniersystem LP <sup>3</sup> S . . . . .	77
5.3.3	Simulationsergebnisse . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Folgeregelung</b>	<b>88</b>
6.1	Folgeregelung für die $\mathcal{L}_1$ -adaptive Zustandsrückführung . . . . .	89
6.1.1	Entwurf der Vorsteuerung . . . . .	90
6.1.2	Entwurf der äußeren Reglerkaskade $K(s)$ . . . . .	104
6.2	Folgeregelung für die $\mathcal{L}_1$ -adaptive Ausgangsrückführung . . . . .	113
6.2.1	Entwurf der Vorsteuerung . . . . .	115
6.2.2	Entwurf der äußeren Reglerkaskade $K(s)$ . . . . .	120
6.3	Zusammenfassung . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>126</b>
<b>A</b>	<b>Systemtheorie</b>	<b>130</b>
A.1	$\mathcal{L}_1$ -Norm eines Systems . . . . .	130
A.2	Projektions-Operator . . . . .	131
A.3	Herleitung des Filters C(s) . . . . .	137
A.4	Kharitonov Theorem . . . . .	137
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>139</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>		<b>144</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>		<b>150</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis und Formelzeichen</b>		<b>151</b>
<b>Erklärung</b>		<b>159</b>

# 1 Einleitung

Die Nanotechnologie ist die Wissenschaft vom Verstehen und Kontrollieren von Materie mit Dimensionen im Nanometerbereich. Sie umfasst die Herstellung und Anwendung von physikalischen, chemischen und biologischen Systemen mit Größenmaßen, die von einzelnen Atomen oder Molekülen über submikrometer kleine Dimensionen bis zu aus Nanostrukturen zusammengesetzten größeren Systemen reichen. Der Grundstein für dieses neue Wissenschaftsfeld wurde anfangs der 1980er Jahre mit der Erfindung des Rastertunnelmikroskops und der Entdeckung von Fullerenen gelegt. Seither brachte die Nanotechnologie eine Vielzahl an Erfindungen und Neuerungen hervor. Sie gilt als eine Schlüsseltechnologie, die Durchbrüche in den Materialwissenschaften und der Produktion, der Nanoelektronik, der Medizin, der Biotechnologie und in der Energieversorgung (Brennstoff- und Solarzellen)[Bun] verspricht. Die ständige Miniaturisierung sowie die Herstellung von Halbleiterbauelementen mit immer kleineren Strukturen sind bereits heute Beispiele für die Errungenschaften dieser Technologie. [Bhu04][DEM07]

Eine Grundvoraussetzung für die Nanotechnologie ist die Nanopositionierung. Diese ermöglicht erst die Messung und die Manipulation von Objekten auf atomarer Ebene. Sogenannte Nanopositionierer sind präzise mechatronische Systeme, welche konzipiert wurden, um Objekte über kleine Bewegungsbereiche hinweg zu bewegen. Neben der hohen Anforderungen an die Auflösung, Genauigkeit, Stabilität und das möglichst schnelle Ansprechverhalten solcher Systeme werden häufig auch dynamische Bahnverfolgungen über große Verfahrbereiche und eine kompakte Bauweise angestrebt. Diese sich teils widersprechenden Bestrebungen, wie beispielsweise der große Verfahrbereich bei hoher Genauigkeit, stellen hohe Ansprüche an die Regelung sowie die elektromechanische Konstruktion dieser Antriebe. [DEM07][GDY<sup>+</sup>04, S. 329]

Für Nanopositioniersysteme mit großem Arbeitsbereich (mehrere 100 mm) werden nach dem Stand der Technik häufig lineare planare Präzisionsantriebe verwendet, sogenannte Flächenmotoren. Diese können je nach Ausführung kugel-, oder zur Vermeidung von Stick-Slip- und anderen Reibungseffekten auch luft- oder magnetgelagert sein.

Häufig bestehen diese Antriebssysteme aus einem massiven, statischen Element, dem Stator, und einem beweglichen Element, dem Läufer. Dabei wird eine der beiden Kom-

ponenten mit Spulen, die andere mit Permanentmagneten versehen. Das Antriebsprinzip beruht somit wie bei rotatorischen Maschinen auf der Lorentzkraft. Planarmotoren können somit als abgewickelte Variante ihres rotatorischen Pendants verstanden werden. Mithilfe einer gezielten Bestromung durch einen Regler kann die Kraft auf den Läufer und folglich auch seine Beschleunigung und Position vorgegeben werden.

In Kooperation mit dem Unternehmen TETRA<sup>1</sup>, einem Hersteller von planaren Positionsantrieben, beschäftigt sich die vorliegende Arbeit mit dem Entwurf robuster Lage- und Folgeregelungen von kontaktlosen Planarantrieben mit drei Freiheitsgraden. Als Basis für den Reglerentwurf dient ein mathematisches Modell des Prototypen LP<sup>3</sup>S. Die Reglerspezifikation sieht eine hochgenaue Festwert- und Folgeregelung und eine sehr gute Störunterdrückung für bestmögliche Genauigkeit vor. Des Weiteren soll dieser Regler aus betriebswirtschaftlichen Gründen für ein breites Anwendungsspektrum, d.h. für eine große Spanne an unbekannten Lasten/Massen (beschränkt) mit unbekannten Schwerpunkten sowie unbekannten Massenträgheitsmomenten (beschränkt) anwendbar sein, ohne dass eine Neuparametrierung des Reglers vorgenommen werden muss.

Der Regler soll sich demzufolge robust gegenüber Modellunsicherheiten verhalten und die zumeist auf den Stelleingang des Nanopositioniersystems einwirkenden Störungen kompensieren. Zur Erfüllung dieser Spezifikationen scheinen adaptive Regelkonzepte, wie *Model Reference Adaptive Control* (MRAC) oder die erst kürzlich entwickelte  $\mathcal{L}_1$  *Adaptive Control Theory* sehr gut geeignet zu sein. Letztere überzeugt vor allem durch ihre beliebig hoch wählbaren Adoptionsverstärkungen, die laut [HC10] nur durch die zur Verfügung stehende Rechentechnik beschränkt sei. Bewerkstelligt wird dies durch eine Entkopplung von Adoptions- und Regelschleife. Hierdurch können trotz der hohen Adoptionsraten hervorragende Robustheitseigenschaften gewährleistet werden. Ziel dieser Arbeit ist es zu untersuchen, wie gut sich die  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regelung zur Anwendung an einem Nanopositioniersystem eignet.

---

<sup>1</sup>TETRA Gesellschaft für Sensorik, Robotik und Automation mbH

## 2 Stand der Technik

### 2.1 Nanopositioniersysteme

Nanopositioniersysteme werden in vielen Bereichen der Wissenschaft eingesetzt. Unter anderem werden sie in der Halbleiterindustrie zur Positionierung von Wafern, zur Maskenausrichtung, und für Fehlerinspektionssysteme verwendet. Sie sind unverzichtbar in der Molekularbiologie, wo sie zur Bildaufnahme, zur Ausrichtung und zur Nanomanipulation eingesetzt werden, beispielsweise bei der Zellverfolgung und bei der DNS-Analyse. Ferner werden sie beim Testen von Nanomaterialien sowie zur Nanomontage eingesetzt und sind neben der Verwendung in optischen Ausrichtungssystemen auch wesentlich in Weltraumteleskopen der nächsten Generation. [DEM07, S. 802]

Grundsätzlich ist ein Präzisionspositionierer ein komplexes mechatronisches System, bestehend aus dem mechanischen Aufbau und den elektrischen Antriebs- und Sensorkomponenten. Durch Kombination unterschiedlicher Komponenten dieser drei Teilbereiche entstehen mehrere verschiedene Ausführungen von Nanopositionierern. [KBP<sup>+12</sup>]

Idealerweise sollte ein Positioniersystem so ausgelegt sein, dass es sowohl präzise Positionierungen ermöglicht, als auch über einen großen Bewegungsbereich verfügt. Dies ist jedoch nicht immer möglich und teils widersprüchlich, beispielsweise dann, wenn Piezoaktuatoren verwendet werden. Außerdem sollte das Positioniersystem den betriebswirtschaftlichen Zielen entsprechend möglichst kostengünstig in der Anschaffung und im Betrieb sein. Eine geringe Leistungsaufnahme ist somit erwünscht. [SCH08, S. 1]

#### 2.1.1 Bauformen von Nanopositioniersystemen

Der Aufbau eines Positioniersystems ist von der Anzahl der gewünschten Freiheitsgrade und dem verwendeten Antrieb abhängig. Wird nur ein Freiheitsgrad benötigt, werden einachsige Positionierplattformen verwendet. Für zwei oder mehr Freiheitsgrade werden konventionelle Systeme oft so konstruiert, dass für jede benötigte Achse einzelne Linearaktuatoren übereinander gelagert werden (siehe Abbildung 2.1). Die-

se Aufbauweise verursacht jedoch eine asymmetrische und sperrige Struktur, welche die Positionsgenauigkeit und die Bewegungsgeschwindigkeit der mehrachsigen Führung vermindert. Deshalb wurden in den letzten Jahrzehnten Systeme entwickelt, die kontaktlose Aktuatoren, wie lineare Asynchron- und Synchronmotoren, verwenden. [GDY<sup>+</sup>04, S. 329][DAG10, S. 1]

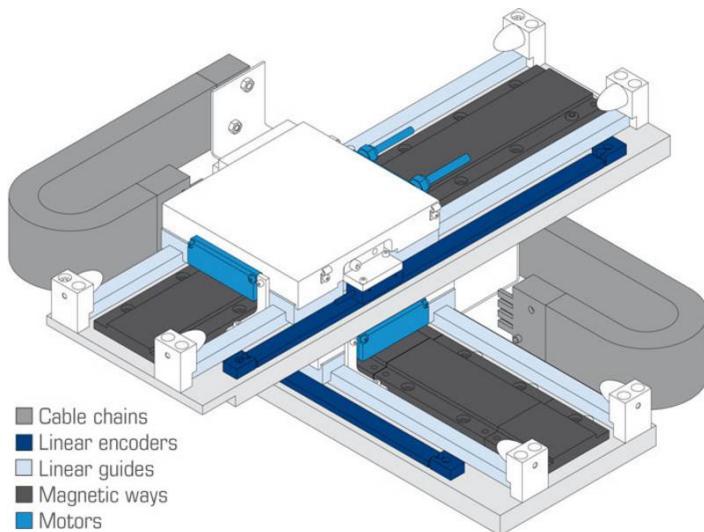


Abbildung 2.1: Zweiachsige Positionierplattformen [ETE].

Einstufige Systeme mit mehreren Freiheitsgraden nennt man planare Positioniersysteme. Sie existieren mit verschiedenen Aktoren, wie Piezoaktuatoren (siehe Abbildung 2.2), elektrostatischen Kammantrieben oder elektromagnetischen Planarantrieben, einer Erweiterung des Linearantriebs. Planare Positioniersysteme werden weitgehend in Halbleiterfabriken, in präzisen Werkzeugmaschinen und in der Rastersondenmikroskopie verwendet. [GDY<sup>+</sup>04, S. 329]

### 2.1.2 Aktoren

Laut [KBP<sup>+</sup>12] werden Positionierplattformen konventionell mit Linearantrieben oder rotatorischen Direktantrieben (für Drehtische) realisiert. Als Linearantriebe/ Linearaktuatoren werden Piezoaktuatoren, elektrostatische Kammantriebe, Gewindespindeln, Kugelgewindetriebe, sowie lineare Asynchron- und Synchronmotoren verwendet. Man unterscheidet hierbei die Linearmotoren von den Linearaktuatoren, deren Prinzip keine beliebige Verlängerung des Regelwegs zulassen. Die wichtigsten Entwurfsparameter, die die Performance eines Aktors charakterisieren, sind der Regelweg, die Kraft, die Bandbreite, das Gewicht und die Leistungsaufnahme. Die meisten Aktoren erfüllen



Abbildung 2.2: Piezoelktrisches planares Positioniersystem [Phy].

zwar einige dieser Ansprüche, jedoch nicht alle. [DEM07, S. 804]

Bei der Entwicklung von hochgenauen Antriebssystemen kann somit zwischen mehreren Technologien mit den jeweiligen Vor- und Nachteilen gewählt werden.

Für kleine Bewegungsbereiche werden gewöhnlich piezoelektrische Aktuatoren verwendet. Diese haben exzellente Arbeits-Bandbreiten und können große mechanische Kräfte erzeugen. Sie haben eine hohe Genauigkeit und eine schnelle Ansprechzeit, sind kompakt gebaut und zeichnen sich durch eine geringe Leistungsaufnahme aus. Als Nachteile piezoelektrischer Aktuatoren gelten die geringen Bewegungsbereiche, das Temperaturdriften und der Hystereseffekt. Durch Hysterese wird allgemein ein Verhalten beschrieben, bei dem der Ausgang eines Systems abhängig ist von dem vorangegangenen Zustand. Übertragen auf einen Piezoaktuator bedeutet dies eine unterschiedlich starke Ausdehnung, je nachdem, ob er gerade geladen, oder entladen wird. Ebenso ist das Kriechen, eine verzögerte Verformung nach angelegter Spannung, eine unerwünschte Eigenschaft von piezoelektrischen Aktuatoren. Es kann signifikante Genauigkeitsverluste verursachen, wenn über einen längeren Zeitraum bei langsamen Bewegungen gemessen werden muss. [DEM07, S. 810][Nol]

Für große Bewegungsbereiche werden gewöhnlich Kugelgewindetriebe und Linearmotoren verwendet. Erstere erzeugen allerdings unerwünschte Störungen und Flankenspiel aufgrund des Kontaktes der Lagerungskomponente. Als Nachteile von Linearmotoren gelten Ruckeleffekte aufgrund von Restmagnetismus (englisch: *ripple effects*), die auftreten, wenn eisenhaltige Bauteile im Verfahrbereich liegen, und sogenannte End-Effekte, die wegen der endlichen Länge von Stator oder Läufer auftreten. [SCH08, S. 1]

[DEM07, S. 804]

Im Hinblick auf den späteren Teil der Arbeit soll im Folgenden der Aufbau kontaktloser Planarantriebe genauer betrachtet werden. Das Antriebsprinzip von Linearmotoren beruht wie bei rotatorischen Maschinen auf der Lorentzkraft. Planare Präzisionsantriebe sind eine Erweiterung von Linearmotoren um einen oder mehr Freiheitsgrade. Sie bestehen meistens aus drei oder vier Permanentmagnet-Linearmotoren, die in einer bestimmten Form angeordnet werden. Dabei wird eine der beiden Komponenten mit Spulen, die andere mit Permanentmagneten versehen. Der Läufer kann somit translatorische Bewegungen in  $x$  und  $y$  Richtung und kleine Gierbewegungen ausführen. Wenn der Läufer aus der Permanentmagnetenreihe besteht und der Stator die Spulen enthält, bezeichnet man den Motor als *inverted planar motor*. Dieser hat den Vorteil, dass es keine schweren zu bewegenden Kabel gibt (siehe Abbildung 2.3). [M.R05, S. 3] [DAG10]



Abbildung 2.3: Kontaktloser Planarantrieb und Ansicht des Läufers von unten [TET].

Planare Präzisionsantriebe nutzen die elektromagnetische Energie, um ohne weitere Energiewandlungsprozesse direkt eine ebene Bewegung ausführen zu können. Vorteilhaft sind ihre simple Struktur und ihr schnelles Ansprechverhalten. Unter den Planarmotoren unterscheidet man den Reluktanzplanarmotor, den planaren Induktionsmotor und den Permanentmagnet-Synchronplanarmotor. Während der Reluktanzplanarmotor und der Induktionsmotor stark verlustbehaftet und schwierig zu regeln sind, hat der Permanentmagnet-Synchronplanarmotor eine hohe Leistungsdichte und ermöglicht verlustarme Bewegungen. [BHL11, S. 1][M.R05, S. 2]

Die Vorteile luft- oder magnetgelagerter kontaktfreier planarer Präzisionsführungen sind einerseits der Direktantrieb und eine hohe Kraftdichte. Im Gegensatz zu konventionellen mehrachsigen Systemen zeichnen sie sich jedoch andererseits auch durch die Reduzierung von nichtlinearen Reibungsphänomenen aus. Der Hauptvorteil besteht allerdings in der Fähigkeit dieser Systeme, neben einer hohen Positioniergenauigkeit auch hohe Geschwindigkeiten erlangen zu können. [DAG10]

Zu den Nachteilen kontaktloser planarer Präzisionsführungen, die auf Permanentmagnet-Linearmotoren basieren, zählen die gesteigerte Anfälligkeit gegenüber Modellunsicherheiten, Störungen aufgrund von Lastwechseln und gegenüber Veränderungen der Systemparameter, wie der Alterung der Permanentmagnete. Diese erhöhte Anfälligkeit beruht darauf, dass Planarmotoren nicht entlang einer statischen Führungsschiene verfahren, weshalb sie im Gegensatz zu Schrittmotoren geregelt werden müssen und nicht gesteuert werden können. Außerdem sind sie anfälliger gegenüber Kraftwelligkeiten, Messrauschen bei der Positionsmessung und hochfrequenten Fehlerkomponenten, die von PWM-Verstärkern generiert werden. [DAG10]

Bei TETRA wird eine kontaktlose planare Präzisionsführung mit Permanentmagnet-Linearmotoren verwendet, weswegen im Folgenden noch genauer auf die darauf einwirkenden Störungen eingegangen wird. Hierbei wollen wir zunächst Störungen unterscheiden, die durch das Magnetfeld (Alterung, Fertigungstoleranzen), die aktiven Antriebselemente (Spulen und Offsets, Asymmetrien) sowie andere externe Größen verursacht werden.

Die Stabilität eines Permanentmagneten ist definiert als die Abhängigkeit des magnetischen Feldes von externen Parametern wie beispielsweise Zeit, Temperatur und entmagnetisierenden Feldern. Das magnetische Feld eines jeden Magneten lässt jedoch im Laufe der Zeit nach. Einige magnetische Materialien verlieren schneller an Stärke als andere. Diese Effekte können von den ersten paar Sekunden an bis hin zu Tagen nach der Magnetisierung des Materials gemessen werden. Dieser Prozess ist beschrieben als magnetische Viskosität und bezieht sich auf die natürliche Alterung. Solch eine Verringerung der Magnetfeldstärke verringert auch die Kraftübertragung auf den Läufer und führt somit zu einer Änderung der Parameter der Regelstrecke, die als eingangsseitige Störung an der Regelstrecke wirksam wird und vom Regler kompensiert werden muss. [M.R05, S. 41]

Andere Störquellen sind Abweichungen in der harmonisch angenommenen Verteilung der Flussdichte, die aus Fertigungstoleranzen der Permanentmagnete resultieren. Das von den Magnetreihen generierte magnetische Feld ist nicht immer rein sinusförmig. Aus diesem Grund können nicht-sinusförmige Störungen entstehen, die sich propor-

tional zur Geschwindigkeit des Läufers verhalten und sich in einer Gegen-elektromotorischen-Kraft (Gegen-EMK) bemerkbar machen, welche der Bewegungsrichtung des Läufers entgegenwirkt. [BHL11, S. 1][M.R05, S. 66]

Weitere Störungen werden durch Ungenauigkeiten in den Spulendimensionen und durch Kommutierungsfehler verursacht. Letztere entstehen, wenn die gemessene horizontale Position sich von der wahren Position der Spule in Bezug auf die Permanentmagnetenreihe unterscheidet. [M.R05, S. 66]

Alle Störungsquellen zusammen bilden die sogenannten Aktor bezogenen Störungen. Meistens sind diese Störungen periodische Funktionen der Position. Wie diese Störungen oder Ungenauigkeiten die gesamte generierte Kraft beeinflussen, unterscheidet sich jedoch für jeden Aktor und muss daher einzeln untersucht werden. [M.R05, S. 66]

### 2.1.3 Sensoren

Eine mikrometer- bis nanometergenaue Positionierung kann nur gelingen, wenn die Sensoren über eine entsprechend hohe Auflösung verfügen. Diese Voraussetzung ist für sich genommen schon anspruchsvoll, jedoch spielt neben dieser auch die Geschwindigkeit des Sensors eine bedeutende Rolle. Denn um hohe Produktionsraten in industriellen Anwendungen zu erlangen, werden unter anderem schnelle Sensoren benötigt. Sensoren, die für eine Nanopositionierung geeignet sind, sind unterschiedlichster Art und können sowohl auf induktiven, piezoresistiven und kapazitiven, als auch auf optischen Messungen basieren. [DEM07]

Die Nanopositioniermaschine der Firma TETRA verwendet einen optischen Sensor. Die Vorteile von optischen Sensoren, wie dem Laser Interferometer, sind eine hohe Auflösung, ein großer Messbereich und eine schnelle Messgeschwindigkeit. Wird dieser Sensor, wie bei den meisten planaren Positionierern, in der Luft und nicht im Vakuum verwendet, so sind als Nachteil die Abhängigkeit der Messgenauigkeit von dem Luftdruck, der Lufttemperatur, und der relativen Luftfeuchte zu nennen. Als weiterer Nachteil sind die hohen Kosten eines Laser Interferometers zu nennen. [GDY<sup>+</sup>04]

## 2.2 Regelung von Nanopositioniersystemen

Es gibt zahlreiche Methoden, um Regler zu entwerfen. Sie lassen sich allgemein in zwei Klassen einteilen, in den experimentellen und den analytischen Entwurf. In der Praxis werden oft experimentelle Verfahren angewandt, wie zum Beispiel das Verfahren nach Ziegler-Nichols. Diese experimentellen Methoden haben den Vorteil, dass kein Modell

von der Regelstrecke benötigt wird. Die Reglerparameter werden anhand der Sprungantwort des Systems hergeleitet. Allerdings liefern experimentell entworfene Regler nur mäßige Ergebnisse. Auch die Reglerentwürfe nach Phasen- und Amplitudenrand liefern nur eine mittelmäßige Performance. Das zeigt, dass experimentelle Verfahren nicht die Forderung nach bestmöglicher Performance erfüllen können. [DGK<sup>+</sup>05, S. 263]

Analytische Einstellmethoden sind dahingegen besser geeignet, um Regler mit hoher Performance zu entwerfen. Ist ein Systemmodell erst mathematisch präzise beschrieben, kann daraus der bestmögliche Regler berechnet werden. In der Praxis ist es jedoch unmöglich, ein komplettes Modell aller Dynamiken der Regelstrecke zu erfassen. Ungenauigkeiten oder Fehler im Modell, sowie unmodellierte Dynamiken sorgen in der Regel dafür, dass das Verhalten der Regelung von der Spezifikation abweicht. [DGK<sup>+</sup>05, S. 263]

Während des Modellbildungsprozesses ist man im Allgemeinen bestrebt, eine möglichst einfache mathematische Beschreibung des betrachteten Systems zu erhalten, dass sich für einen systematischen Reglerentwurf eignet. Häufig werden dabei vereinfachte Annahmen getroffen, um die Komplexität und die Modellordnung niedrig zu halten. Bei der Modellierung piezoelektrischer Aktuatoren bspw. werden daher oft hochfrequente Moden vernachlässigt. Bei der Modellierung von Planarmotoren werden des öfteren Kopplungen zwischen Achsen (Corioliskräfte), Aktuatordynamiken etc. der Einfachheit halber vernachlässigt. Ferner können, selbst wenn die Parameter zunächst genau bekannt sind, aufgrund von Alterungseffekten Parameterunsicherheiten auftreten. Diese können zusammen mit den unmodellierten Dynamiken sowohl die Performance als auch die Stabilität des Regelkreises beeinflussen. [DEM07, S. 812]

Unter Berücksichtigung dieser Problemstellungen sollte der zu entwerfende Regler robust gegenüber Modellfehlern wie Parametervariationen und unmodellierten Dynamiken sein. [DEM07, S. 812]. Regelungsstrategien, die dies berücksichtigen und häufig angewandt werden, sind Kombinationen aus den drei Komponenten Rückführung (Ausgangs- oder Zustandsrückführung), Führungsgrößen-Vorsteuerung und Störgrößenbeobachter (siehe Abbildung 2.4).

Der zunächst einfachste Ansatz zum analytischen Entwurf einer Regelung für eine Nanopositioniermaschine (Abkürzung.: NPM) ist die Verwendung eines PID-Reglers. Dieser ist laut [DEM07, S. 812–813] gut geeignet für Nanopositionieranwendungen mit Piezoaktuatoren und wird oft in der Rastersondenmikroskopie verwendet. Der Hauptvorteil ist, dass der Integralanteil des Reglers hohe Verstärkungen bei niedrigen Frequenzen liefert und somit Kriechen und Hystereseeffekte von Piezoaktuatoren kompensieren kann [DEM07, S. 812–813]. In [GDY<sup>+</sup>04] wird ebenfalls ein PID-Regler

verwendet, hier allerdings zur Regelung einer Nanopositioniermaschine mit *inverted planar motor*. Dazu wurden die Parameterwerte des PID-Reglers zuerst mithilfe einer Computersimulation basierend auf dem dynamischen Modell der Regelstrecke bestimmt. Anschließend wurden sie am experimentellen Aufbau per trial-and-error angepasst [GDY<sup>+</sup>04]. Des Weiteren wird in [KBP<sup>+</sup>12] die Regelung eines *inverted planar motor* mit PI-Regler vorgestellt. Um diesen einfachen Regelansatz noch zu verbessern, wird seit kurzem an der automatischen Einstellung der PID-Parameter und der Robustifizierung von existierenden PID-Reglern geforscht [DEM07, S. 812–813].

Eine weitere Anforderung an Präzisionspositionierungen ist die dynamische Trajektorienfolge mit möglichst kleiner Regelabweichung. Eine Vorsteuerung erweitert den Regelkreis um einen weiteren Freiheitsgrad und hat im Wesentlichen den Vorteil, dass Führungs- und Störverhalten des Regelkreises getrennt voneinander einstellbar sind. Im Idealfall invertiert die Vorsteuerung die Regelstrecke, womit sie maßgeblich das Führungsverhalten beeinflusst. Die Rückführung hat die Aufgabe, das Abklingen der Eigenbewegung zu beschleunigen und Modellfehler und Störungen auszuregeln. In [Dev02] ist beschrieben, bis zu welchen Unsicherheiten Vorsteuerungen eine Verbesserung der Regelung garantieren. [DGK<sup>+</sup>05, S. 264][DEM07, S. 812–813]

Eine weitere Möglichkeit der Regelung einer Nanopositioniermaschine wird in [ZS07] präsentiert. Hier wird zunächst ein vereinfachtes Modell für die Regelung hergeleitet und damit eine Zustandsrückführung entworfen. Anschließend wird diese um eine Vorsteuerung der Systemdynamiken, eine Reibaufschaltung und um ein Anti-Windup-Mechanismus ergänzt. Die Simulationsergebnisse zeigen eine gute Trajektorienfolge.

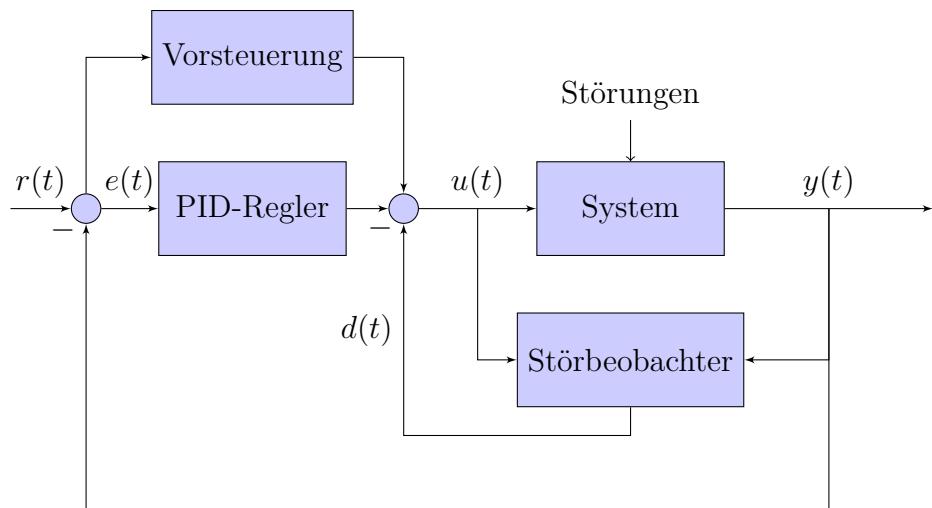


Abbildung 2.4: PID-Regler mit Vorsteuerung und Störbeobachter.

Um die durch Modellfehler entstandenen Einflüsse zu reduzieren, können Störbeobachter verwendet werden, wie in Abbildung 2.4 zu sehen ist. Diese schätzen auf Grundlage der Regelstreckeneingänge und -ausgänge die Störung ab, was den Modellfehler und die externen Störungen einschließt. Das berechnete Ergebnis wird anschließend in Form einer Störgrößenaufschaltung genutzt, um die Störung zu kompensieren. Ein weiterer Vorteil des Störbeobachters in mehrstufigen Nanopositioniersystemen ist, dass die unterschiedlichen Stufen entkoppelt werden können. Sofern nicht modelliert, wirkt die Verkopplung von Achsen als Störung und wird ebenfalls vom Beobachter erfasst. Somit ist es möglich, eine Entkopplungsregelung mit Hilfe eines Störgrößenbeobachters zu realisieren. [DGK<sup>+</sup>05, S. 263]

Nach [WZ03] unterscheidet man eine Vielzahl von Zustands- und Störgrößenbeobachtern. Zu den am meisten in der Praxis angewandten Vertretern zählen wohl der Luenberger Beobachter, der Kalman Filter, der *high-gain* Beobachter, der *sliding-mode* Beobachter und der *extended state observer*. Letzterer ist laut [WZ03] den anderen im Falle von unmodellierten Dynamiken, Störungen und Sensorrauschen überlegen. In [DAG10] wird gezeigt, dass ein PID-Regler mit Sliding-Mode-Observer eine bessere Performance liefert, als ein PID-Regler mit Standard Disturbance Observer.

Darüber hinaus werden laut [DEM07] in der Regelung von Nanopositioniermaschinen mit Piezoaktuatoren auch modernere Methoden, wie Adaptive Regelung, lead-lag Regler und robuste Regelungstechniken verwendet.

# 3 Modellbeschreibung

## 3.1 Modellierungsziel

Um einen Regler zur Regelung der Nanopositioniermaschine zu entwerfen, muss für diese zunächst ein mathematisches Systemmodell erstellt werden und es muss untersucht werden, an welcher Stelle im System wesentliche Störeinflüsse auftreten können. Nur mit dieser Kenntnis ist es möglich, einen hochperformanten Regler zu entwerfen. Als Basis der Modellbeschreibung dient ein Modell nach [TAARW13]. In den folgenden Abschnitten wird gemäß [Lun13, S.41 ff.] zunächst eine kurze Beschreibung des Aufbaus der Nanopositioniermaschine und deren Wirkprinzip vorgenommen. Anschließend wird ein Blockschaltbild des Gesamtsystems mit allen relevanten Teilsystemen erstellt. Zusätzlich werden vereinfachende Annahmen getroffen. Nachfolgend werden die mathematischen Systemmodelle für die Teilsysteme hergeleitet, aus denen schließlich das Gesamtsystem berechnet wird.

## 3.2 Aufbau und Wirkungsweise des planaren Positioniersystems LP<sup>3</sup>S

Das planare Positioniersystem LP<sup>3</sup>S der Firma TETRA ist ein einstufiges System, das von einem Permanentmagnet-Synchronplanarmotor angetrieben wird. Abbildung 3.1 zeigt schematisch den Aufbau dieses Planarmotors. Das LP<sup>3</sup>S besteht aus einem massiven fest stehenden Spulenträger (Stator) aus Granit und einem dynamischen, aerostatisch gelagerten Läufer, der mit vier Permanentmagnetreihen bestückt ist. Es handelt sich somit um einen *inverted planar motor*. Der Läufer kann in den drei Freiheitsgraden  $x, y, \phi$  aktuiert werden. Aufgrund der speziellen Lagerung des Läufers mittels Luftlager können nichtlineare Reibungsphänomene wie der Stick-Slip-Effekt weitestgehend vermieden werden. Somit ermöglicht diese Lagerung nahezu reibungsfreie und ruckfreie Bewegungen. Auf der Statoroberfläche befinden sich vier zweiphasige Leistungssysteme, die in Leiterplattenbauweise gefertigt sind. Die einzelnen Phasen eines

Leitungssystems sind dabei in einem mäanderförmigen, einander überlappenden Muster angeordnet. Fließen nun Ströme durch die Leiterwindungen, die sich konstruktiv

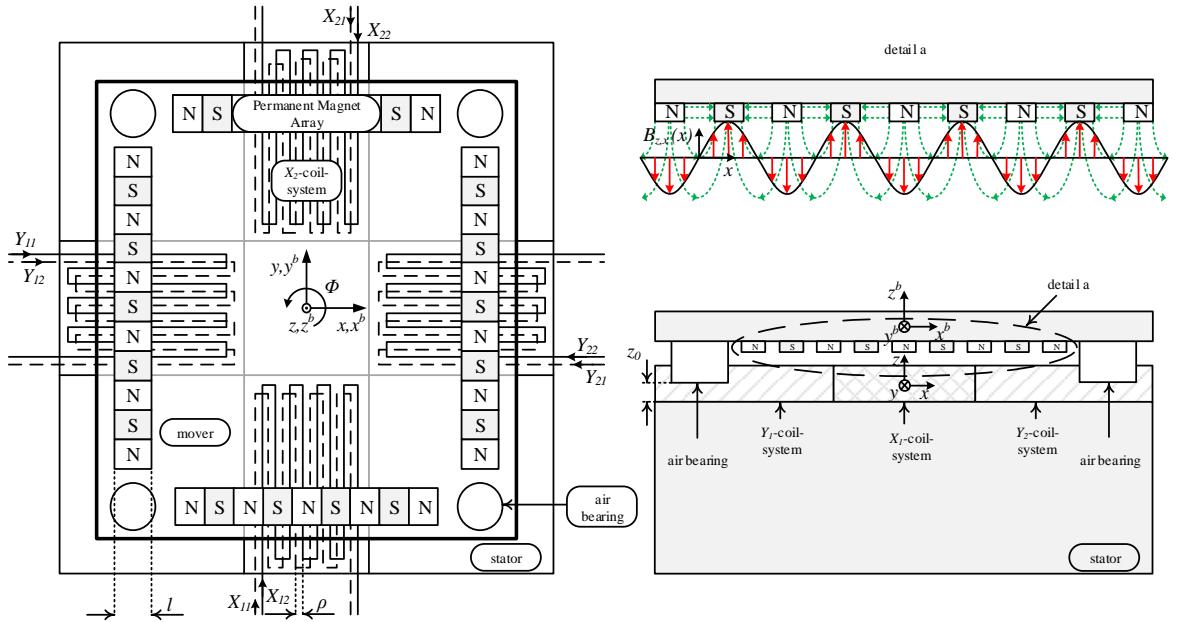


Abbildung 3.1: Links: Draufsicht auf Läufer und Stator; Rechts: Seitenansicht einer Permanentmagnetenreihe, wobei die Feldlinien der einzelnen Permanentmagnete in grün, die vertikalen Flussdichtevektoren in rot und der Betrag der vertikalen Vektorkomponenten in schwarz dargestellt sind [TAARW13].

onsbedingt orthogonal zum Magnetfeld der Permanentmagnete ausbreiten, so werden die Lorentzkräfte  $F_x$ ,  $F_y$  und das Drehmoment  $M_z$  erzeugt (siehe Abbildung 3.2). Diese wirken gemäß dem Lorentzgesetz senkrecht zur Feld- sowie senkrecht zur Stromrichtung auf den beweglich gelagerten Läufer. Letzterer erfährt durch die angreifenden Kräfte und Momente Beschleunigungen in die entsprechenden Bewegungsrichtungen  $x, y, \phi$ . Eine Draufsicht auf den Stator und den Läufer ist ebenfalls in Abbildung 3.1 zu sehen.

In dieser Abbildung ist zu erkennen, dass der Betrag der vertikalen Flussdichtevektoren eine Sinus- bzw. Cosinusfunktion des Ortes beschreibt. Um diese trigonometrischen Funktionen zu kompensieren und um somit konstante auf den Läufer wirkende Kräfte, bzw. ein konstantes Drehmoment zu erhalten, wird eine sogenannte Sinus-Cosinus-Kommutierung angewandt. Dazu ist es notwendig, dass die beiden Leiterwindungen eines Leitungssystems um  $\pi/2$  versetzt sind (siehe Abbildung 3.1, links). Werden diese Leiterwindungen anschließend ebenfalls mit sinus- bzw. cosinusförmigen Strömen, die

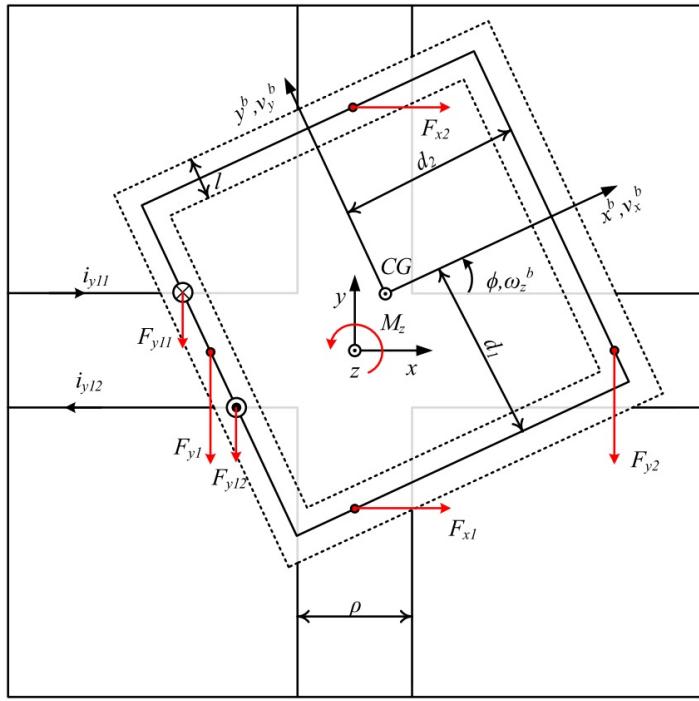


Abbildung 3.2: Auf den Läufer wirkende Kräfte und Drehmomente [TAARW13].

abhängig von der Position des Läufers sind, bestromt, so heben sich nach dem trigonometrischen Pythagoras die trigonometrischen Funktionen auf, sodass konstante Kräfte bzw. Drehmomente resultieren. Diese hier verwendete Sinus-Cosinus-Kommutierung ist energieoptimal.

Um die Ströme in den Leitungssystemen zu erzeugen, werden vier digitale Stromverstärker verwendet, die nach dem Prinzip der Pulsweltenmodulation arbeiten. Wie in der einschlägigen Literatur üblich (siehe [TAARW13] und die Quellen darin) bezeichnen wir die Kombination eines Leiterpaares und einer Magnetreihe als Linearmotor. Ferner wird nachfolgend die Kombination eines Linearmotors und eines digitalen Stromverstärkers linearer Servomotor genannt. Im Sinne einer eindeutigen Zuordnung der entsprechenden Spulensysteme, Linearmotoren und Servomotoren bezeichnen wir diejenigen Systeme, die Kräfte in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung ausüben mit  $X_i$  bzw.  $Y_i$ . Hierbei sei  $i = 1, 2$  der Systemindex. In der Regel werden die sich gegenüberliegenden Motoren des Linearmotoren-Paares ( $X_1, X_2$ ) gleichzeitig aktuiert, um Drehmomente zu vermeiden und symmetrische Bewegungen in  $x$ -Richtung zu erhalten. Gleichermaßen gilt für das Linearmotoren-Paar ( $Y_1, Y_2$ ) für die  $y$ -Richtung. Mit  $X_{ij}$  und  $Y_{ij}$  werden ferner die jeweiligen Phasen der Linearmotoren indiziert, wobei  $j = 1, 2$ . Demnach fungiert  $j$  als Phasenindex. [TAARW13]

### 3.2.1 Signalfluss

Das komplexe Gesamtsystem lässt sich gemäß des Signalflussbildes in Abbildung 3.3 abstrahieren und in einige wesentliche Teilsysteme zerlegen. Diese gilt es im Zuge der Modellbildung zu identifizieren.

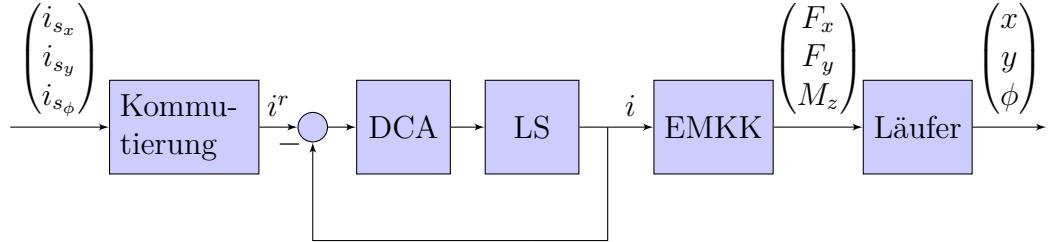


Abbildung 3.3: Blockschaltbild der Regelstrecke mit Teilsystemen.

Abbildung 3.3 zeigt von links nach rechts die Zusammenhänge der Teilsysteme Kommutierung, den Regelkreis aus Stromverstärkern (DCA) und den Leitungssystemen (LS), die elektromagnetischen Kraftkopplungen (EMKK) und den Läufer. Hierbei sind  $i^r(t)$  und  $i(t)$  Vektoren mit

$$\begin{aligned} i^r(t) &= (i_{x_{11}}^r(t) \quad i_{x_{12}}^r(t) \quad i_{x_{21}}^r(t) \quad i_{x_{22}}^r(t) \quad i_{y_{11}}^r(t) \quad i_{y_{12}}^r(t) \quad i_{y_{21}}^r(t) \quad i_{y_{22}}^r)^T, \\ i(t) &= (i_{x_{11}}(t) \quad i_{x_{12}}(t) \quad i_{x_{21}}(t) \quad i_{x_{22}}(t) \quad i_{y_{11}}(t) \quad i_{y_{12}}(t) \quad i_{y_{21}}(t) \quad i_{y_{22}})^T. \end{aligned} \quad (3.1)$$

## 3.3 Modellannahmen

Nachfolgend werden Annahmen gemacht, die der Vereinfachung der mathematischen Systemmodelle dienen:

**Annahme 1 Aktoren:** Die acht Ströme, sprich die Eingänge der Regelstrecke, unterliegen gewissen Störungen, sodass sie von einem Stromregler geregelt werden. Dazu wird ein einfacher PI-Regler verwendet, der aufgrund der weitestgehenden Entkopplung von Gegeninduktionseffekten der angrenzenden Phasen und aufgrund einer guten Störunterdrückung so schnell ist, dass die Dynamik dieses unterlagerten Regelkreises vernachlässigt werden kann.

**Annahme 2 Magnetfeld:** Die Flussdichte wird als zeitinvariant und sinusförmig längs der Leiter angenommen.

**Annahme 3 Mechanik:**

- a) Es werden optimale Bedingungen für den Planarmotor angenommen, d.h. dass sich die Leiter des Stators und das Magnetfeld der Permanentmagnete des Läufers exakt orthogonal zueinander befinden.
- b) Es wird angenommen, dass die Leitungen der  $x$ -Achse bezüglich der  $y$ -Achse exakt orthogonal verlaufen und verhältnismäßig lang im Vergleich zu der Breite der Permanentmagnetenreihe sind. Letzteres schließt Randeffekte aus.
- c) Neben den drei aktuierbaren Freiheitsgraden  $x, y, \phi$ , besitzt der Läufer genau genommen aufgrund seiner aerostatischen Lagerung drei weitere Freiheitsgrade. Dazu zählen Translationsbewegungen entlang der  $z$ -Achse und Rotationsbewegungen um die Achsen  $x, y$  (Rollen, Nicken). Diese Bewegungen sind jedoch weder aktuierbar noch messbar. Der Roll- und Nickwinkel liegt in dem kleinen Bereich  $[-0.01^\circ, 0.01^\circ]$ , die Flughöhe  $z$  beträgt zwischen  $[5\mu\text{m}; 10\mu\text{m}]$ , sodass die dadurch verursachten Einflüsse auf die resultierenden elektromagnetischen Kräfte sehr gering sind.

Da die Aufgabe der Regelung eine präzise Positionierung in der  $x, y$ -Ebene ist und Roll-, Nickwinkel und Translationsbewegung in  $z$ -Richtung sehr klein sind, kann man sich somit ohne einen großen Verlust an der Genauigkeit des Systemmodells auf die aktuierbaren Freiheitsgrade beschränken.

Außerdem liegt der maximale Gierwinkel in dem Bereich  $[-0.25^\circ; 0.25^\circ]$  und die Gierwinkelgeschwindigkeit ist ebenfalls klein. Die Flughöhe des Läufers kann vereinfachend konstant als  $z_0$  vorausgesetzt werden.

## 3.4 Aufstellen der Modellgleichungen

### Stromregelung

Die vier linearen Servomotoren bilden die Aktuatorelemente der LP<sup>3</sup>S. Die unterlagerte Stromregelung dieser Servomotoren sorgt dafür, dass der geforderte Strom  $i^r(t)$  möglichst schnell an den Spulen umgesetzt wird. Dabei unterliegen die Leitungen Störungen, wie der Selbstinduktion und einer gegenseitigen Induktion, die durch die Nähe der beiden Leitungen eines Leiterpaars bedingt sind und der Gegen-elektromotorischen-Kraft. Ein einfacher PI-Regler in der Regelschleife des Stromverstärkers wird benutzt, um diese Störungen zu kompensieren. Aufgrund von Annahme 1 kann die Dynamik des

Stromreglers vernachlässigt werden und es wurde die statische Beziehung berechnet zu:

$$i(t) = \epsilon i^r(t), \quad (3.2)$$

wobei  $\epsilon \approx 1.08$  für alle Phasen die stationäre Verstärkung ist und  $i^r(t)$  die Stromreferenz [TAARW13]. Während die stationäre Verstärkung für eine Positionsregelung unkritisch ist aufgrund eines Integriereranteils in der Regelstrecke, muss sie für Folgeregelungen beachtet werden. Die Übertragungsfunktion der Stromregelung ergibt sich nach Anwendung der Laplace-Transformation auf (3.2) zu:

$$A_s(s) = \frac{i(s)}{i^r(s)} = \epsilon. \quad (3.3)$$

## Elektromagnetische Kraftkopplung

Das Magnetfeld der Permanentmagnetreihen wurde so entworfen, dass der Betrag der magnetischen Flussdichte in vertikaler Richtung eine Sinuskurve bezüglich der  $x$ -Richtung bzw.  $y$ -Richtung beschreibt. Außerdem beträgt der Abstand der beiden Leiter eines Linearmotors bezüglich dieser Sinuskurve  $\rho = \frac{\pi}{2}$ . Diese Eigenschaften vereinfachen später die elektrische Kommutierung, mit der die Linearmotoren angesteuert werden. Unter Voraussetzung einer exponentiellen Abhängigkeit der Flughöhe  $z_0$  auf die magnetische Flussdichte kann diese beschrieben werden durch

$$B_{x_{ij}}(x, z_0) = \hat{B} e^{-\alpha z_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} x + \rho_j\right), \quad (3.4)$$

$$B_{y_{ij}}(y, z_0) = \hat{B} e^{-\alpha z_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} y + \rho_j\right), \quad (3.5)$$

wobei  $\alpha > 0$  eine geometrieabhängige Konstante,  $T_m > 0$  die Magnetperiode und  $\rho_j = \frac{\pi}{2}(j - 1)$  die Phasenverschiebung der benachbarten Leiter ist. [TAARW13]

Aufgrund von Annahme 3 gilt letztlich  $B_{x_{ij}} \perp X_{ij}$  und  $B_{y_{ij}} \perp Y_{ij}$  für alle  $i, j$ . Durch diese Annahme wird impliziert, dass die Lorentzkräfte, die durch die Bestromung der Leiterwindungen entstehen, nur entlang der  $x$ -, bzw. der  $y$ -Achse wirken und somit voneinander entkoppelt sind [TAARW13]. Es folgt:

$$F_{x_{ij}}(x) = i_{x_{ij}} \bar{l}_{x_{ij}} e_y \times B_{x_{ij}}(x) e_z = i_{x_{ij}} \bar{l}_{x_{ij}} B_{x_{ij}}(x) e_x, \quad (3.6)$$

$$F_{y_{ij}}(y) = i_{y_{ij}} \bar{l}_{y_{ij}} e_x \times B_{y_{ij}}(y) e_z = i_{y_{ij}} \bar{l}_{y_{ij}} B_{y_{ij}}(y) e_y, \quad (3.7)$$

wobei  $\bar{l}_{x_{ij}} e_y \in \mathbb{R}^3$  und  $\bar{l}_{y_{ij}} e_x \in \mathbb{R}^3$  die effektiven Längen der Leitungswindungen im

magnetischen Feld sind [TAARW13]. Setzt man (3.4) in (3.6) und (3.5) in (3.7) ein, erhält man mit  $\bar{B} = \hat{B}e^{-\alpha z_0}$

$$F_{x_{ij}} = i_{x_{ij}} \bar{l}_{x_{ij}} \bar{B} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} x + \rho_j\right), \quad F_{y_{ij}} = i_{y_{ij}} \bar{l}_{y_{ij}} \bar{B} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} y + \rho_j\right), \quad (3.8)$$

und mit der Motorkonstanten  $K_{mx_{ij}} = \bar{l}_{x_{ij}} \bar{B}$  folgt:

$$F_{x_{ij}} = i_{x_{ij}} K_{mx_{ij}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} x + \rho_j\right), \quad F_{y_{ij}} = i_{y_{ij}} K_{my_{ij}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} y + \rho_j\right). \quad (3.9)$$

Das Drehmoment um die z-Achse wird berechnet durch

$$M_z = d_2 \sum_{i,j=1}^2 F_{y_{ij}} (-1)^i - d_1 \sum_{i,j=1}^2 F_{x_{ij}} (-1)^i, \quad (3.10)$$

wobei  $d_1, d_2$  die Abstände vom Schwerpunkt des Läufers bis zur Mitte der Permanentmagnetreihen sind [TAARW13]. Die Verhältnisse von Kraft zu Strom für die  $x$ -Achse sind unter der Annahme  $K_{mx} = K_{mx_{ij}}$  durch Umstellung von (3.9) und Erweiterung zu einem Vektor gegeben durch:

$$A_{EMK_x} = \frac{F_x}{i_x} = \begin{pmatrix} \frac{F_x}{i_{x_{11}}} \\ \frac{F_x}{i_{x_{12}}} \\ \frac{F_x}{i_{x_{21}}} \\ \frac{F_x}{i_{x_{22}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{mx} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} x\right) \\ K_{mx} \cos\left(\frac{2\pi}{T_m} x\right) \\ K_{mx} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} x\right) \\ K_{mx} \cos\left(\frac{2\pi}{T_m} x\right) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

## Kommutierung

Die Kommutierung findet später mithilfe eines Industrie-PC's statt. Sie wird benötigt, da die resultierenden elektromagnetischen Kräfte sinusförmig von der Position abhängen (siehe (3.9)). Das Kommutierungsgesetz wählt die Ströme für die Leitungen jedoch so, dass die gewünschte Kraft unabhängig von der Läuferposition erlangt wird. Anhand eines Linearmotors in  $x$ -Richtung soll dies näher erläutert werden. Für die

Kraft dieses einen Linearmotors ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= F_{x_{11}} + F_{x_{12}} \\ &= i_{x_{11}} K_{mx} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} x + 0\right) + i_{x_{12}} K_{mx} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= i_{x_{11}} K_{mx} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} x\right) + i_{x_{12}} K_{mx} \cos\left(\frac{2\pi}{T_m} x\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Wählt man nun das Kommutierungsgesetz

$$i_{x_{11}} = i_{s_x} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} x\right), \quad (3.13)$$

$$i_{x_{12}} = i_{s_x} \cos\left(\frac{2\pi}{T_m} x\right) \quad (3.14)$$

mit einem beliebigen Strom  $i_{s_x}$  durch das Leitungssystem  $X_1$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= i_{s_x} K_{mx} \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} x\right)^2 + i_{s_x} K_{mx} \cos\left(\frac{2\pi}{T_m} x\right)^2 \\ &= i_{s_x} K_{mx} \left( \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_m} x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_m} x\right) \right) \\ &= i_{s_x} K_{mx}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Auf die gleiche Weise lässt sich  $F_{x_2}$  berechnen. Die gesamte Kraft, die in  $x$ -Richtung wirkt, ergibt sich zu:

$$F_x = F_{x_1} + F_{x_2} = 2i_{s_x} K_{mx}. \quad (3.16)$$

## Mechanische Gleichungen des Läufers

Die Bewegungsgleichungen für einen Roboter mit  $n$  Freiheitsgraden lassen sich ganz allgemein nach Euler-Lagrange in folgender Form schreiben:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B_u(q, \dot{q})u + B_o(q, \dot{q}). \quad (3.17)$$

Dabei sind  $q \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  der Vektor der generalisierten Koordinaten,  $D(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Trägheitsmatrix mit  $D(q) = D^T(q) > 0$ ,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Matrix der Euler- und Corioliskräfte,  $g(q) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  der Vektor der Gravitationskräfte,  $B_u(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  die Eingangsverstärkung,  $u \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  der Vektor der regelbaren Eingänge und  $B_o(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  der Vektor der Reibungskräfte.

In [TAARW] wurde  $C(q, \dot{q})$  bestimmt zu:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 & -(1-m)\dot{\phi} & 0 \\ (1-m)\dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Aufgrund dieser Euler- und Corioliskräfte handelt es sich bei dem Teilsystem des Läufers um ein nichtlineares MIMO-System. Mithilfe der Annahme 3 c) über die Beschränkung des Gierwinkels und der Gierinkelgeschwindigkeit können die Euler- und Corioliskräfte in diesem speziellen Fall vernachlässigt werden, womit das Teilsystem in guter Näherung linearisiert und entkoppelt wird. Aus dem nichtlinearen MIMO-System können somit drei lineare SISO-Systeme erstellt werden. Dazu wird zunächst folgende allgemeine Gleichung aufgestellt, bei der  $g(q)$  ebenfalls entfernt wurde, da keine Gravitationskräfte in Richtung der Koordinaten  $q$  wirken:

$$D(q)\ddot{q} - B_o(q, \dot{q}) = B_u(q, \dot{q})u = F. \quad (3.19)$$

Mit  $q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \phi \end{pmatrix}$ , dem Kräfte- und Drehmomentenvektor  $F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{pmatrix}$ , der Kraft auf den Läufer

$$F_L = D\ddot{q} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \ddot{q} \quad (3.20)$$

und der entgegengesetzten Reibungskraft

$$F_R = B_o(q, \dot{q}) = - \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\phi \end{pmatrix} \dot{q} \quad (3.21)$$

folgt das Kräftegleichgewicht

$$F = F_L - F_R = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \ddot{q} + \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\phi \end{pmatrix} \dot{q}. \quad (3.22)$$

Hierbei sind  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  und  $\mu_\phi$  Reibkoeffizienten,  $m$  ist die Masse des Läufers und  $I$  ist das

Massenträgheitsmoment. Auf diese Weise entstehen drei lineare SISO-Systeme, die die Kräfte  $F_x$ ,  $F_y$  und das Drehmoment  $M_z$  beschreiben. Es folgt:

$$m\ddot{x} + \mu_x \dot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} + \mu_y \dot{y} = F_y, \quad m\ddot{\phi} + \mu_\phi \dot{\phi} = M_z. \quad (3.23)$$

Die Übertragungsfunktionen des Läufers ergeben sich nach der Laplace-Transformation zu:

$$A_{L_x}(s) = \frac{x}{F_x} = \frac{1}{s(ms + \mu_x)}, \quad (3.24)$$

$$A_{L_y}(s) = \frac{y}{F_y} = \frac{1}{s(ms + \mu_y)}, \quad (3.25)$$

$$A_{L_\phi}(s) = \frac{\phi}{M_z} = \frac{1}{s(ms + \mu_\phi)}. \quad (3.26)$$

### Gesamtübertragungsfunktion

Da sich die trigonometrischen Terme der elektromagnetischen Kraftkopplung und der Kommutierung gegenseitig kompensieren, ergibt sich die Gesamtübertragungsfunktion für die Bewegung in  $x$ -Richtung zu:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + \mu_x \dot{x} &= F_x = 2K_{mx} i_{s_x} \epsilon \\ \Rightarrow A_x(s) &= \frac{x(s)}{i_{s_x}(s)} = \frac{2K_{mx} \epsilon}{s(ms + \mu_x)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

## 3.5 Störungen

Bei der adaptiven Regelung sind Kenntnisse über den Betrag und die Frequenz der auftretenden Störungen besonders wichtig, um die Stabilität des Regelkreises zu gewährleisten. Aus diesem Grund werden nachfolgend die auf den Läufer einwirkenden Störungen untersucht.

Bei der Positionsregelung machen Kraftwelligkeiten die größten Störungen aus. Diese wirken auf den Eingang des Läufer-Teilsystems und setzen sich nach [TAARW13] zusammen aus

1. Kommutierungsfehlern
2. Asymmetrien und Offsets in Stromverstärkern
3. Magnetisierungseffekten durch eisenhaltige Elemente im Verfahrbereich

4. Stromwelligkeiten aufgrund von PWM-Verstärkern
5. Dämpfungseffekte durch Wirbelströme
6. Federkrafteffekte durch Versorgungskabel
7. Hangabtriebskräften aufgrund ungenauer Statoraufstellung
8. ungewünschten Kopplungseffekten zwischen Bewegungssachsen
9. Parametervariationen aufgrund von Ladungsveränderungen oder Umgebungstemperaturveränderungen.

Besondere Probleme bereiten dabei periodische Störungen, die z.B. durch die eisenhaltigen Elemente im Verfahrbereich auftreten können, da ihre Frequenz sich mit der Läufergeschwindigkeit ändert. [TAARW13]

In [TAARW13] wurde für die  $x$ -Achse folgendes Störmodell hergeleitet:

$$F_{p,x}(x, \dot{x}) = \mu_{p,x} \dot{x} + 0,5(\tanh(\delta \dot{x}) + 1)\bar{F}_{p,x}^+(x) - 0,5(\tanh(\delta \dot{x}) - 1)\bar{F}_{p,x}^-(x), \quad (3.28)$$

wobei  $\mu_{p,x} > 0$  der Dämpfungskoeffizient ist,  $\delta$  in [TAARW13] zu  $\delta = 1000$  bestimmt wurde und  $\bar{F}_{p,x}^+(x)$  und  $\bar{F}_{p,x}^-(x)$  richtungsabhängige Störkräfte in positiver bzw. negativer Richtung sind. Der Dämpfungskoeffizient  $\mu_{p,x}$ , der aus der periodischen Störung hervorgeht, ist unter anderem in  $\mu_x$  enthalten. Abbildung 3.4 zeigt die experimentell bestimmten Störkräfte für die  $x$ -Achse.

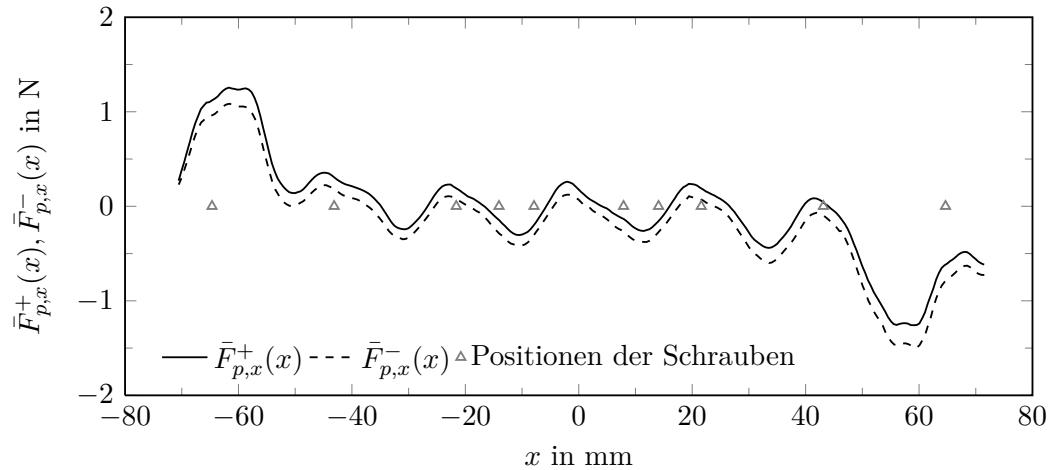


Abbildung 3.4: Störkräfte für die  $x$ -Achse [TAARW13].

## 3.6 Modellvalidierung

Im Zuge einer Modellvalidierung in [TAARW13], wurde als Ergebnis festgehalten, dass das Modell alle relevanten Dynamiken enthält und sehr präzise ist. Die ermittelten Parameter der Nanopositioniermaschine bei TETRA für die Bewegung in x-Richtung sind in Tabelle 3.1 angegeben.

Sollte die Nanopositioniermaschine in Serie gefertigt werden, so können sich jedoch die Parameter wie der Dämpfungskoeffizient, die Motorkonstante und die Stromverstärkung von Maschine zu Maschine unterscheiden. Ebenso können sich die verwendeten Nutzlasten auf dem Läufer unterscheiden, die von der geplanten Aufgabe der Nanopositioniermaschine abhängen. Der Läufer wiegt beispielsweise ohne Last ca. 19 kg und kann mit Werkstücken beladen bis zu 30 kg wiegen. Durch den minimalen und maximalen Wert werden somit die Wertebereiche wichtiger Parameter definiert, die durch unterschiedliche Anwendungen oder durch geringe Fertigungstoleranzen entstehen. Die möglichen (konservativ abgeschätzten) Parameterintervalle sind in Tabelle 3.1 angegeben. Sie sind essentiell für den Entwurf robuster Regelungen.

Parameter	Symbol	ermittelter Wert	min. Wert	max. Wert
Masse des Läufers	$m$	19.24 kg	19 kg	30 kg
Dämpfungskoeffizient	$\mu_x$	$7.2 \frac{kg}{s}$	$0 \frac{kg}{s}$	$14 \frac{kg}{s}$
Motorkonstante	$K_{mx}$	$1.62 \frac{N}{A}$	$0.8 \frac{N}{A}$	$2.4 \frac{N}{A}$
Stromverstärkung	$\epsilon$	1.08	0,7	1,3

Tabelle 3.1: Unsicherheiten wichtiger Parameter des Läufers für die Bewegung in  $x$ -Richtung.

## 4 Adaptive Regelungsverfahren - Eine Übersicht

Seit 1950 werden in der Regelungstechnik die Begriffe *adaptive Systeme* und *adaptive Regelung* gebraucht. Damals war der Entwurf von Autopiloten für Hochleistungs-Flugzeuge einer der Hauptbeweggründe für eine aktive Forschung auf dem Gebiet der adaptiven Regelung. Die Parameter von Flugzeugen ändern sich stark, wenn diese in unterschiedlichen Höhen und mit verschiedenen Geschwindigkeiten fliegen. Eine Regelung mit festen Reglerparametern kann das Flugzeug in so vielen stark unterschiedlichen Arbeitspunkten nicht stabilisieren. Aus diesem Grund wurden fortschrittlichere Regelalgorithmen entwickelt, wie beispielsweise das *Gain Scheduling*, bei dem an mehreren bestimmten Betriebspunkten eine Parameterumschaltung am Regler durchgeführt wird, um damit variierende Regelstreckenparameter auszugleichen.

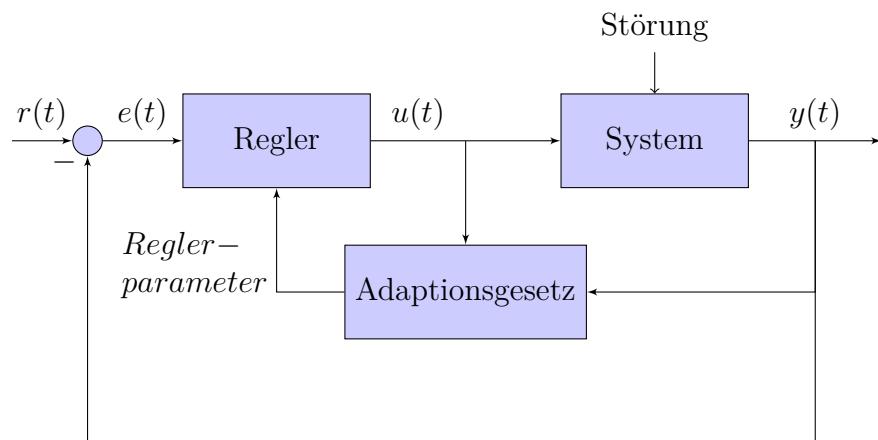


Abbildung 4.1: Allgemeine Struktur adaptiver Regler in Anlehnung an [ÅW89].

Neben dem *Gain Scheduling* entstanden noch weitere adaptive Regelungsverfahren, die im Wesentlichen aus einem Adaptionsgesetz und einem Regler bestanden. Die allgemeine Struktur dieser Regler ist in Abbildung 4.1 zu sehen. Sie besteht aus einer Rückkopplungsschleife, einem Regler mit adaptiven Parametern, der nach einem vor-

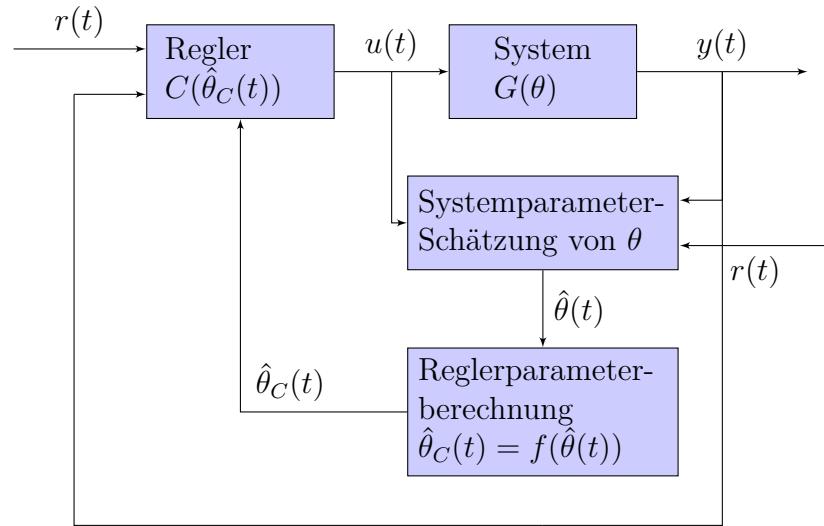


Abbildung 4.2: Indirekte adaptive Regelung in Anlehnung an [IS96].

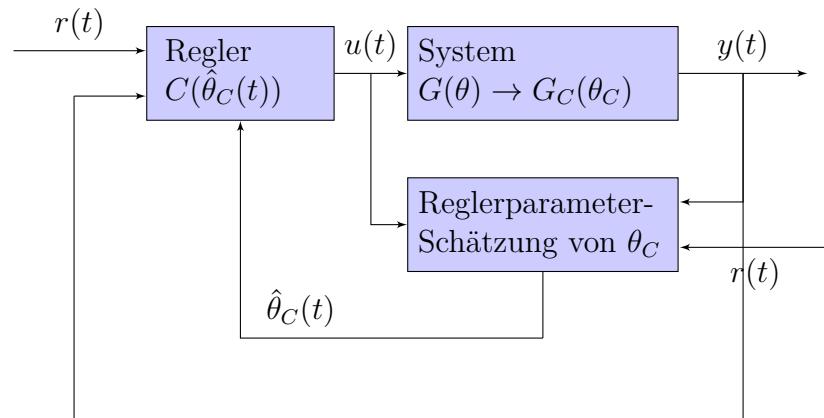


Abbildung 4.3: Direkte adaptive Regelung in Anlehnung an [IS96].

geschriebenen Stellgesetz eine Stellgröße ausgibt, und einem sogenannten Adoptionsgesetz (in engl. Literatur *adaption law* genannt). Dieses Adoptionsgesetz verwendet bestimmte Algorithmen, um mithilfe eines Parameterschätzers die Reglerparameter anzupassen. Diese Verfahren wurden stark von der Systemidentifikation inspiriert und lassen sich im Allgemeinen unterteilen in eine direkte und eine indirekte Methode.

Bei der indirekten Methode (Abbildung 4.2) werden iterativ die tatsächlichen Systemparameter  $\theta$  geschätzt. Dies geschieht mithilfe eines Parameterschätzgesetzes. Im Anschluss daran werden daraus die Reglerparameter  $\hat{\theta}_C(t)$  berechnet und vom Regler übernommen. Im Gegensatz dazu wird bei der direkten Methode (Abbildung 4.3) das Regelstreckenmodell in Abhängigkeit der unbekannten Reglerparameter  $\theta_C$  parame-

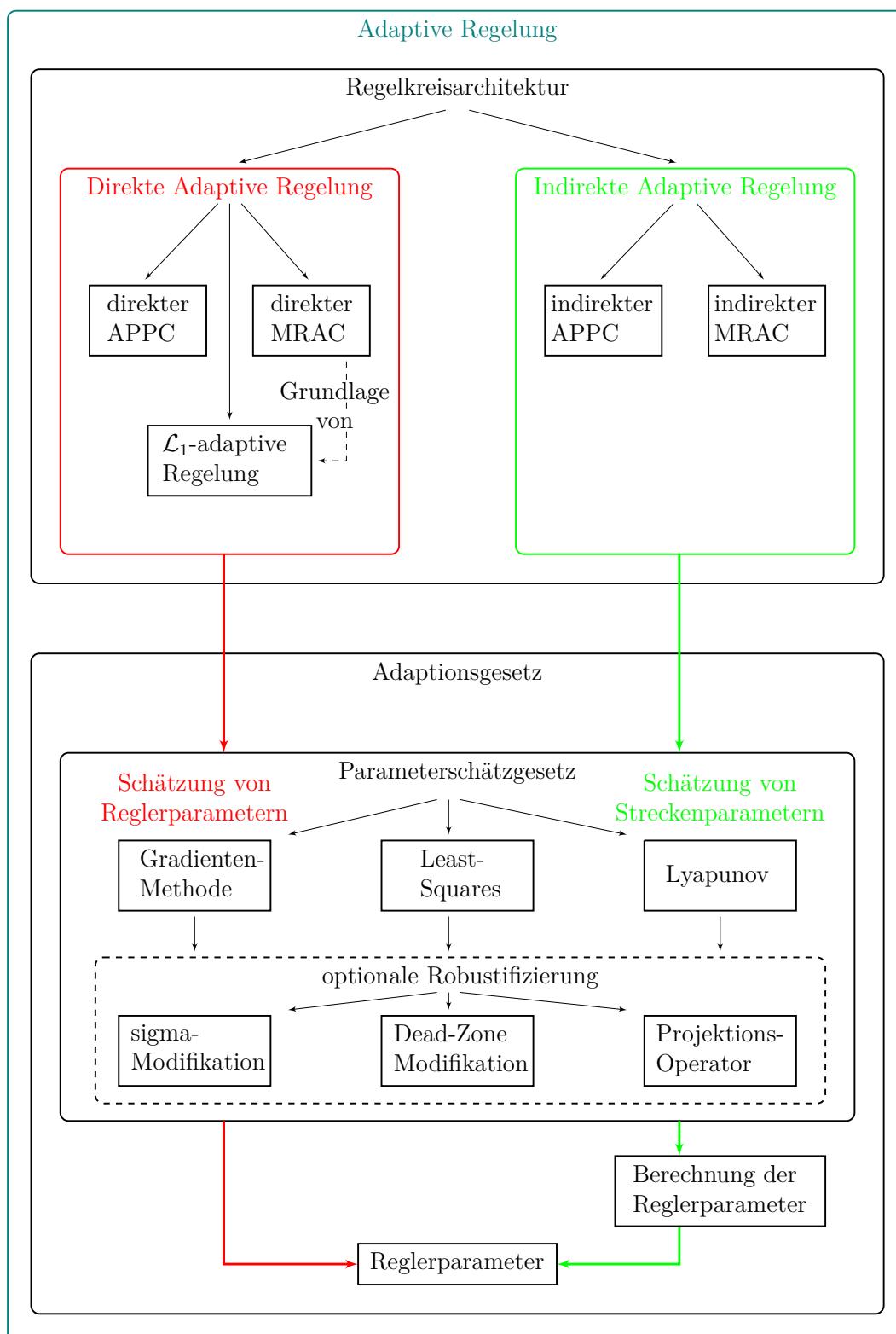


Abbildung 4.4: Übersicht: Adaptive Regelungen.

triert, für welche der geschlossene Regelkreis das gewünschte Ein-/Ausgangsverhalten  $G_C(\theta_C)$  aufweist. Mit den Schätzungen  $\hat{\theta}_C(t)$  werden anschließend die Reglerparameter ohne eine weitere Berechnung direkt aktualisiert.

Obwohl sie sich konzeptionell unterscheiden, funktionieren beide Methoden nach dem gleichen Prinzip, das sich *certainty equivalence* nennt. Dabei werden die geschätzten Parameter zu jeder Zeit  $t$  so behandelt, als wären es die tatsächlichen und es wird aus ihnen eine Stellgröße berechnet. Damit anschließend die Parameterschätzungen zu den tatsächlichen Parametern konvergieren, muss die Bedingung der *persistency of excitation*, die fortwährende Erregung des Prozesses, vorausgesetzt werden.

Aus diesen Ergebnissen entstanden das indirekte und direkte *Model Reference Adaptive Control* (MRAC) und das *Adaptive Pole Placement Control* (APPC), welches oft auch *Self-Tuning Regulator* (STR) genannt wird [IS96][HC10]. Diese werden auch heute noch oft angewandt. Man unterscheidet bei adaptiven Reglern somit formal zwischen der Regelkreisarchitektur (direkt und indirekt) und dem Adoptionsgesetz (siehe Abbildung 4.4). Oft verwendete Parameterschätzverfahren sind die Gradienten-Methode, die Verwendung von Least-Squares oder ein Lyapunov-basierter Ansatz. Das Parameterschätzgesetz kann darüber hinaus mit einer optionalen Robustifizierungsmethode erweitert werden. Dazu gehören die  $\sigma$ -Modifikation, die Dead-Zone-Modifikation, und der Projektions-Operator. Im Falle indirekter adaptiver Regelung beinhaltet das Adoptionsgesetz neben der Parameterschätzung auch die Berechnung der Reglerparameter aus den geschätzten Regelstreckenparametern. Die Parameterschätzverfahren sind in Bezug auf eine Architektur beliebig austauschbar und frei kombinierbar mit den optionalen Robustifizierungsmethoden. Im Laufe dieser Arbeit wird der Lyapunov-basierte Ansatz zur Parameterschätzung verwendet. Dieser ermöglicht den Beweis der Stabilität der Fehlerdynamik und in vielen Fällen auch die Konvergenz des Fehlers zur stabilen Ruhelage Null. Des Weiteren wird der Projektions-Operator zur Gewährleistung der Beschränktheit der Parameterschätzungen eingesetzt (siehe Anhang A.2). Für weitere Informationen über die anderen Schätzgesetze und Robustifizierungsmethoden wird auf [ÅW89] und [IS96] verwiesen. Es sei angemerkt, dass sich MRAC und APPC sehr ähnlich sind, wobei MRAC eine spezielle Klasse von APPC ist. Da der  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regler, der im weiteren Verlauf der Arbeit näher betrachtet werden soll, auf Grundlage von MRAC entwickelt wurde, werden nachfolgend nur Gain Scheduling und MRAC näher erläutert. [IS96][HC10]

## 4.1 Gain Scheduling

Beim Gain Scheduling wird für jeden einzelnen Betriebspunkt  $i = 1 \dots N$  ein Streckenmodell

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_i x + B_i u \\ y &= C_i^T x + D_i u\end{aligned}\tag{4.1}$$

bestimmt und die dazu geeigneten Reglerverstärkungen berechnet. Dies führt zu einem Regler mit einer Menge an Verstärkungen  $\theta_{C_1}, \dots, \theta_{C_N}$ , die  $N$  Betriebspunkte umfassen. Sobald ein Betriebspunkt  $i$  erkannt wurde, werden die Reglerparameter entsprechend denen von  $\theta_{C_i}$  geändert und aus einer im Voraus berechneten Menge an Reglerverstärkungen bezogen. Um einen Gain Scheduling Regler zu implementieren, werden sowohl eine Lookup-Tabelle, in der die Reglerverstärkungen gespeichert sind, als auch eine Auswahl geeigneter Merkmale, die mit Änderungen in den Betriebspunkten gut korrelieren, benötigt. [IS96, S. 7]

Gain Scheduling lässt sich anhand eines Flugzeugautopiloten als Beispiel näher erläutern. Geeignete Merkmale zur Auswahl eines Betriebspunktes sind hier die Mach-Zahl und der Luftdruck. In Abhängigkeit dieser Merkmale werden die Reglerverstärkungen aus der Lookup-Tabelle entnommen und in den Regler implementiert. Verändert das Flugzeug die Höhe oder die Geschwindigkeit, wird ein neuer Betriebspunkt erkannt und die Reglerparameter erneut adaptiert.

Der Vorteil von Gain Scheduling ist, dass die Reglerverstärkungen genauso schnell geändert werden können, wie die Merkmalsvektoren aktualisiert werden. Schnelle Abfolgen der Wechsel der Reglerverstärkungen können jedoch zu Instabilität führen. Deshalb sind die Anzahl und die Geschwindigkeit schnell aufeinander folgender Verstärkungsänderungen limitiert. [IS96, S. 8]

Einer der Nachteile von Gain Scheduling ist, dass der Anpassungsmechanismus der Reglerverstärkungen im Voraus offline berechnet werden muss und daher keine nachträgliche Korrektur von abweichenden Werten ermöglicht. Aus diesem Grund können unvorhersehbare Veränderungen in der Streckendynamik zu einer Verschlechterung der Performance oder sogar zu einem Komplettversagen führen. Weitere Nachteile sind die hohen Entwurfs- und Implementierungskosten, die mit der Anzahl von Operationspunkten ansteigen. [IS96, S. 8]

Schließlich lässt sich sagen, dass Gain Scheduling weit verbreitet ist und oft verwendet wird, um Betriebspunktregelungen für nichtlineare Regelstrecken zu entwerfen oder systematische (vorhersehbare) Parametervariationen zu kompensieren. Eine ent-

scheidende Voraussetzung zur Anwendbarkeit des Gain Scheduling Reglers ist jedoch die Verfügbarkeit von Merkmalen, durch die die Betriebspunkte eindeutig bestimmt werden können. Diese Merkmale wären in Bezug auf die Planare Positioniermaschine neben der Position (gemessen) auch die Geschwindigkeit und die Beschleunigung (nicht gemessen). Unter anderem müssten sowohl die Masse des Läufers, als auch der Aufstellwinkel des Stators genau bekannt sein. Selbst wenn diese Merkmale bekannt wären, wäre der Gain Scheduling Regler aus wirtschaftlicher Perspektive für eine Nanopositioniermaschine zu aufwendig und nicht anwendbar.

## 4.2 Model Reference Adaptive Control

Model reference adaptive control (MRAC) hat seine Abstammung im Model Reference Control (MRC) Problem. Bei MRC geht es darum, aus den Performanceanforderungen an den Regelkreis ein sogenanntes Referenzmodell zu entwerfen, das das gewünschte Übertragungsverhalten des Regelkreises beschreibt. Das Entwurfsziel von MRC ist es, ein Stellgesetz für den Regler zu finden, das die Struktur und die Dynamik der Regelstrecke so verändert, dass ihr Ein-/Ausgangsverhalten exakt mit dem des Referenzmodells zusammenfällt. Der MRC-Regler wird als Kompensationsregler mithilfe einer Regelstreckeninversion so entworfen, dass alle Signale beschränkt bleiben und der geschlossene Regelkreis das Übertragungsverhalten des Referenzmodells vorweist. Weil jedoch die Regelstrecke invertiert werden muss, muss sie minimalphasig sein, andernfalls wird der Regelkreis instabil. Für diesen Ansatz müssen alle Regelstreckenparameter bekannt sein. Sind diese unbekannt, so kann der MRC-Regler nicht berechnet werden. [IS96]

Aus dieser Problemstellung heraus wurde MRAC entwickelt, welcher zur Regelung den *certainty equivalence* Ansatz verwendet, auf den sich auch die meisten anderen adaptiven Regelungsverfahren stützen. Wird das Adoptionsgesetz dabei so formuliert, dass die Parameterschätzungen zu den wahren Parametern konvergieren, so erreicht die Performance des adaptiven Reglers die des nicht adaptiven MRC im Falle bekannter Regelstreckenparameter. Daraus ergeben sich mehrere unterschiedliche Regelungsstrukturen, die sich hauptsächlich in den indirekten MRAC und den direkten MRAC Ansatz unterteilen, welche wiederum verschiedene Parameterschätzverfahren verwenden können. [IS96]

### 4.2.1 Direct MRAC

Die folgende Beschreibung von MRAC wurde in Anlehnung an [HC10] verfasst. Es wird angenommen, dass die Dynamiken der Regelstrecke (lineares zeitinvariantes SISO-System) durch das folgende Differentialgleichungssystem beschrieben werden können

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + b(u(t) + \theta^T x(t)) \\ y(t) &= c^T x(t),\end{aligned}\tag{4.2}$$

mit  $x(0) = x_0$ , wobei  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  der Zustand des Systems ist (gemessen),  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist eine bekannte Dynamikmatrix,  $\theta \in \Theta_0 \subset \mathbb{R}^n$  ist ein Vektor unbekannter konstanter Parameter,  $b, c \in \mathbb{R}^n$  sind bekannte Vektoren,  $u(t) \in \mathbb{R}$  ist der Regelstreckeneingang,  $y(t) \in \mathbb{R}$  ist der geregelte Ausgang der Regelstrecke (Regelgröße). Des Weiteren wird angenommen, dass das Paar  $(A, b)$  vollständig steuerbar ist und somit (4.2) o.B.d.A. als Regelungsnormalform vorausgesetzt werden kann. Die Eigendynamik der Regelstrecke ist demnach darstellbar als

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 + \theta_1 & -a_1 + \theta_2 & -a_2 + \theta_3 & \dots & -a_{n-1} + \theta_n \end{pmatrix} x(t)\tag{4.3}$$

und beinhaltet sowohl bekannte Parameter  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ , als auch unbekannte Parameter  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ . Ist kein Vorwissen über die Regelstrecke vorhanden, gilt:  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ . Im Falle von vorhandenem Wissen, das in den bekannten Parametern  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  steckt, besteht nun die Möglichkeit die Performance des Reglers zu verbessern. Dies geschieht, indem man noch vor dem Entwurf des MRAC eine Zustandsrückführung als innere Regelkaskade entwirft

$$Ax(t) + bk_m^T x(t) = A_m x(t),\tag{4.4}$$

wobei  $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine bekannte Hurwitzmatrix ist, die die gewünschte Dynamik für den geschlossenen Regelkreis beschreibt und  $k_m^T \in \mathbb{R}^n$  der Verstärkungsvektor der Zustandsrückführung der inneren Regelkaskade ist.

Man erhält anschließend folgendes System:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_m x(t) + b(u(t) + \theta^T x(t)) \\ y(t) &= c^T x(t).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die Zustandsrückführung durch  $k_m^T$  zwar die Performance verbessert, jedoch nicht unbedingt notwendig ist, da sie den unbekannten zu schätzenden Parametern  $\theta$  zugeordnet werden kann (wodurch sich jedoch die Menge  $\Theta_0$  vergrößert). Aus diesem Grund wird in der einschlägigen Literatur oft gleich das System aus (4.5) angegeben, ohne eine explizite Zustandsrückführung zu erwähnen.

Sei nun ein gleichmäßig beschränktes stückweise stetiges Referenzsignal  $r(t) \in \mathbb{R}$  gegeben, so ist das Regelungsziel, ein adaptives Stellsignal  $u(t)$  so zu finden, dass  $y(t)$  mit der gewünschten Dynamik  $r(t)$  folgt und alle Signale beschränkt bleiben. Aus dem System in (4.5) lässt sich nun das nominelle Regelgesetz herleiten, das im Wesentlichen die unbekannten Parameter  $\theta$  kompensiert und mit Hilfe eines Vorfilters  $k_g$  dafür sorgt, dass die stationäre Ein-/Ausgangsverstärkung 1 ist:

$$u_{nom}(t) = -\theta^T x(t) + k_g r(t)\tag{4.6}$$

$$k_g = \frac{-1}{c^T A_m^{-1} b}.\tag{4.7}$$

Der geschlossene Regelkreis mit nominellem Regelgesetz führt somit auf das ideale Referenzsystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + b k_g r(t), \quad x_m(0) = x_0, \\ y_m(t) &= c^T x_m(t),\end{aligned}\tag{4.8}$$

wobei  $x_m(t) \in \mathbb{R}^n$  der Zustand des Referenzsystems ist.

Da die Unsicherheiten  $\theta^T x(t)$  nicht bekannt sind, wird ein Schätzgesetz benötigt, wodurch das nominelle Regelgesetz aus (4.6) gemäß des *certainty equivalence*-Prinzips abgewandelt wird, und man erhält

$$u(t) = -\hat{\theta}^T(t) x(t) + k_g r(t),\tag{4.9}$$

wobei  $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^n$  die Schätzung von  $\theta$  ist. Substituiert man (4.9) in (4.5), erhält man

die Dynamik des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A_m - b\tilde{\theta}^T(t))x(t) + bk_g r(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= c^T x(t),\end{aligned}\tag{4.10}$$

wobei  $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$  den Parameterschätzfehler bezeichnet. Sei  $e(t) = x_m(t) - x(t)$  das dynamische Fehlersignal (tracking error signal), so können anschließend die Fehlervodynamiken berechnet werden zu:

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + b\tilde{\theta}^T(t)x(t), \quad e(0) = 0.\tag{4.11}$$

Für den hier vorgestellten MRAC soll ein Lyapunov basiertes Adoptionsgesetz verwendet werden. Aus diesem Grund wird als nächstes ein Kandidat für eine Lyapunovfunktion vorgeschlagen:

$$V(e(t), \tilde{\theta}(t)) = e^T(t)Pe(t) + \frac{1}{\Gamma}\tilde{\theta}^T(t)\tilde{\theta}(t),\tag{4.12}$$

wobei  $\Gamma \in \mathbb{R}^+$  die Adoptionsverstärkung ist und  $P = P^T > 0$  die Lyapunovgleichung

$$A_m^T P + PA_m = -Q\tag{4.13}$$

für beliebige  $Q = Q^T > 0$  löst. Damit die Ruhelagen von  $e(t)$  und  $\tilde{\theta}(t)$  stabil im Sinne von Lyapunov sind, muss die Ableitung von  $V(e(t), \tilde{\theta}(t))$  negativ semidefinit sein. Diese ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\dot{V}(e(t), \tilde{\theta}(t)) &= -e^T(t)Qe(t) + 2e^T(t)Pb\tilde{\theta}^T(t)x(t) + \frac{2}{\Gamma}\tilde{\theta}^T(t)\dot{\tilde{\theta}}(t) \\ &= -e^T(t)Qe(t) + 2\tilde{\theta}^T(t)\left(\frac{1}{\Gamma}\dot{\hat{\theta}}(t) + x(t)e^T(t)Pb\right).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Damit  $\dot{V}(e(t), \tilde{\theta}(t)) \leq 0$  ist, muss nun das Adoptionsgesetz  $\dot{\hat{\theta}}(t)$ , was noch frei wählbar ist, so gewählt werden, dass gilt:

$$2\tilde{\theta}^T(t)\left(\frac{1}{\Gamma}\dot{\hat{\theta}}(t) + x(t)e^T(t)Pb\right) = 0.$$

Das Adoptionsgesetz zur Parameterschätzung ergibt sich somit zu

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\Gamma x(t)e^T(t)Pb, \quad \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0,\tag{4.15}$$

Aus dieser Wahl von 4.14 und 4.15 ergibt sich schließlich die Ableitung der Lyapunovfunktion zu:

$$\dot{V}(e(t), \tilde{\theta}(t)) = -e^T(t)Qe(t) \leq 0. \quad (4.16)$$

Somit ist die Ruhelage von (4.11) und (4.15) stabil im Sinne von Lyapunov und das heißt, dass  $e(t)$  und  $\tilde{\theta}(t)$  beschränkt sind. Da der Zustand  $x_m(t)$  des stabilen Referenzsystems ebenfalls beschränkt ist, ist auch  $x(t) = x_m(t) - e(t)$  beschränkt.

Um die asymptotische Konvergenz des Schätzfehlers  $e(t)$  zu beweisen, wird das Lemma von Barbălat angewandt. Dazu wird die zweite Ableitung von  $V(e(t), \tilde{\theta}(t))$  berechnet zu:

$$\ddot{V}(e(t), \dot{e}(t)) = -2e^T(t)Q\dot{e}(t). \quad (4.17)$$

Da  $e(t)$ ,  $\tilde{\theta}^T(t)$  und  $x(t)$  für alle  $t \geq 0$  beschränkt sind, folgt aus (4.11), dass auch  $\dot{e}(t)$  gleichmäßig beschränkt ist. Somit ist  $\ddot{V}(e(t), \dot{e}(t))$  beschränkt, was impliziert, dass  $\dot{V}(e(t), \tilde{\theta}(t))$  gleichmäßig stetig ist. Unter Anwendung von Barbălat's Lemma folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(e(t), \tilde{\theta}(t)) = 0. \quad (4.18)$$

Dies beweist, dass  $e(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Folglich konvergiert  $x(t)$  zu  $x_m(t)$ . Das wiederum impliziert die Konvergenz von  $y(t) = c^T x(t)$  zu  $y_m(t) = c^T x_m(t)$ , dem Referenzsystem, das  $r(t)$  mit der gewünschten Dynamik folgt.

Hierbei muss erwähnt werden, dass eine asymptotische Konvergenz der Parameterschätzungsfehler  $\tilde{\theta}(t)$  zu Null nicht garantiert wird, sondern nur, dass sie beschränkt bleiben.

## 5 $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regelungstheorie

Die  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regelungstheorie gilt als eine der neuesten Errungenschaften im Bereich der adaptiven Regelung. Sie ermöglicht den Entwurf robuster adaptiver Regelungen, deren Eigenschaften durch sehr hohe Adoptionsverstärkungen und garantierter transiente Performance geprägt sind.

Der einfachste  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regler basiert im Wesentlichen auf dem direkten MRAC. Durch eine Modifikation wird ein Zustandsschätzer eingeführt, der das Referenzsystem zur Fehlerberechnung ersetzt. Die Fehlerdynamik bleibt jedoch gleich der des direkten MRAC. Eine zweite Modifikation führt einen Tiefpassfilter ein, der die Bandbreite des Stellsignals auf die maximale Bandbreite der Aktoren (oder weniger) beschränkt. Durch diesen Tiefpassfilter wird eine Entkopplung der Regelschleife von der Adaptionschleife realisiert, was ein Hauptmerkmal der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelung ist und diese klar vom direkten MRAC unterscheidet. Diese Entkopplung ermöglicht extrem hohe Adoptionsverstärkungen, ohne dabei die Robustheitseigenschaften des geschlossenen Regelkreises zu beeinträchtigen, so dass a priori sowohl die transiente Performance als auch die Performance im stationären Zustand vorhersagbar sind. Wesentlich ist, dass im Gegensatz zu anderen adaptiven Verfahren aufgrund der hohen Adoptionsgeschwindigkeiten keine *persistency of excitation* nötig ist, um Aussagen zur Stabilität oder zur Performance treffen zu können. [HC10][CH06a]

Das laut [NAS] breite Spektrum der Anwendungsgebiete wie Flugregelungen (unbelebte Luftfahrzeuge, Raumfahrzeuge, Helikopter, Raketen), Regelungen von Anästhesiegeräten in der Medizin, Autopiloten für Boote und Roboter- und Prozessautomatisierungen, lassen die Effektivität und hervorragende Variabilität der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelung erkennen. Die erfolgreiche Untersuchung der wichtigsten Benchmarkbeispiele im Bereich der adaptiven Regelungen (siehe [RVAS82]) verdeutlichen die herausragenden Robustheits- und Stabilitätseigenschaften dieser Regelungen.

Das grundlegende Problem bei adaptiven Regelungen besteht darin, dass zur Kompensation hochfrequenter Störungen oder Parametervariationen ebenso hochfrequente Stellsignale benötigt werden. Es zeigt sich auch, dass sogar bei konstanten Parameterunsicherheiten und hohen Adoptionsverstärkungen ebenfalls hochfrequente Stell-

größen auftreten. Diese führen oft zur Instabilität des geschlossenen Regelkreises, da die Stellgrößen in der Regel jenseits der Aktuatorbandbreiten liegen und somit nicht von der Regelstrecke umgesetzt werden können. In MRAC kann es deshalb vorkommen, dass die gewünschten Systemdynamiken niemals erreicht werden können, selbst wenn der zu adaptierende Parametervektor exakt bekannt ist, weil dieser Frequenzen erzeugen würde, die außerhalb der Aktorbandbreite liegen könnten. Das macht es im Allgemeinen schwer, gewöhnliche adaptive Regler zu parametrieren, da die Wahl der Adoptionsverstärkungen sehr kritisch ist und immer einen Kompromiss zwischen transienter Performance und Robustheit darstellt.

Basierend auf diesem Wissen, dass nicht alle Klassen von Unsicherheiten perfekt kompensiert werden können, selbst wenn sie bekannt sind, wird in der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelungstheorie die Bandbreitenbeschränkung des Aktors mit in die Problemformulierung aufgenommen. Diese Reformulierung der Problemstellung stellt ein weiteres Hauptmerkmal der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelung dar. Sowohl die Entkopplung des Adoptions- und Regelkreises, als auch die Berücksichtigung der real möglichen Bandbreite des Aktors findet mithilfe eines geeigneten Tiefpassfilters an einer ganz bestimmten Stelle im Regelkreis statt.

Zusammenfassend kann demnach die Realisierbarkeit des Regelungsziels, unter Berücksichtigung der Hardwarebeschränkungen, als ein wesentlicher Aspekt der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelung verstanden werden. Weitere Vorteile sind dadurch gegeben, dass auf aufwendige Monte-Carlo-Analysen (wie etwa beim Gain Scheduling üblich) verzichtet werden kann, das Einschwingverhalten vorhersagbar ist und, das Ein-/Ausgangsverhalten im Gegensatz zu einem Regelkreis mit MRAC, im Wesentlichen linearen Charakter hat [CH06a].

In den nachfolgenden Kapiteln wird der Leser zunächst mit der einfachsten  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelungsstruktur bekannt gemacht, der Zustandsrückführung mit zeitinvarianten Unsicherheiten. Dieser Regler gilt als Grundlage zum Verständnis der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelungsstruktur und wird daher etwas ausführlicher untersucht. Anschließend wird dieser anhand eines simplen Beispiels mit dem MRAC-Regler verglichen, um die Vorteile aufzuzeigen, die sich durch die  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regelung ergeben. Nachfolgend werden die Entwurfswege für die Zustandsrückführung mit unsicherer Eingangsverstärkung und die Ausgangsrückführung für Nicht-SPR-Systeme vorgestellt, welche für die Regelung der Nanopositioniermaschine verwendet werden. Zudem werden Simulationsergebnisse der entworfenen Regler zusammen mit dem Simulationsmodell des Präzisionsantriebs aus [TAARW13] präsentiert.

## 5.1 Zustandsrückführung mit zeitinvarianten Unsicherheiten

Der folgende Entwurf orientiert sich im Wesentlichen an den Quellen [CH06a, HC10, HCK<sup>+</sup>11].

**Problemformulierung:** Gegeben sei die Systemklasse, die durch das folgende Zustandsraummodell beschrieben werden kann

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + b(u(t) + \theta^T x(t)), & x(0) &= x_0, \\ y(t) &= c^T x(t),\end{aligned}\tag{5.1}$$

wobei  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  der gemessene Zustandsvektor des Systems,  $y(t) \in \mathbb{R}$  die Regelgröße,  $u(t) \in \mathbb{R}$  die Stellgröße und  $b, c \in \mathbb{R}^n$  bekannte konstante Vektoren sind.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist die Dynamikmatrix und  $(A, b)$  ist steuerbar.  $\theta = \text{konst.}$  ist der unbekannte Parametervektor, der zu der kompakten konvexen Menge  $\theta \in \Theta_0 \subset \mathbb{R}^n$  gehört.

**Regelungsziel:** Sei  $r(t)$  ein beschränktes stückweise stetiges Referenzsignal. Das Regelungsziel ist es, einen adaptiven Regler mit Zustandsrückführung und Stellgröße  $u(t)$  so zu entwerfen, dass  $y(t)$  dem Referenzsignal  $r(t)$  mit quantitativ bestimmbarer Performance bezüglich des Einschwingverhaltens und dem Verhalten im stationären Zustand folgt.

**Regelkreisarchitektur:** Sei die Stellgröße gegeben durch einen Zustandsrückführungsanteil  $u_m(t)$  und einen adaptiven Anteil  $u_{ad}(t)$  zu

$$u(t) = u_m(t) + u_{ad}(t), \quad u_m(t) = -k_m^T x(t),\tag{5.2}$$

wobei  $k_m^T \in \mathbb{R}^n$  die Gleichung  $A_m = A - bk_m^T$  mit der stabilen Dynamikmatrix  $A_m$  erfüllt. Die zeitinvariante Zustandsrückführung  $k_m^T$  führt auf das teilweise geschlossene Regelkreissystem

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_m x(t) + b(\theta^T x(t) + u_{ad}(t)), & x(0) &= x_0, \\ y(t) &= c^T x(t).\end{aligned}\tag{5.3}$$

Als nächstes wird der Zustandsschätzer

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_m \hat{x}(t) + b(\hat{\theta}^T(t)x(t) + u_{ad}(t)), \quad \hat{x}(0) = x_0, \\ \hat{y}(t) &= c^T \hat{x}(t)\end{aligned}\tag{5.4}$$

für das System in (5.3) entworfen. Dabei bezeichnet  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  den Zustand des Schätzers und  $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^n$  die Schätzung des Parameters  $\theta$ . Letztere erhält man mit Hilfe des Adaptionsgesetzes

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \text{Proj}(\hat{\theta}(t), -\tilde{x}^T(t)Pbx(t)), \quad \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0 \in \Theta, \tag{5.5}$$

wobei die Größen  $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  den Schätzfehler,  $\Gamma \in \mathbb{R}^+$  die Adaptionsverstärkung, und  $P = P^T > 0$  die Lösung der algebraischen Lyapunovgleichung  $A_m^T P + PA_m = -Q$  für beliebige symmetrische  $Q = Q^T > 0$  repräsentieren. Die vektorwertige Funktion  $\text{Proj}(\cdot)$  stellt dabei den sog. Projektions-Operator dar. Dessen Aufgabe ist es, die Parameterschätzungen  $\hat{\theta}(t)$  stets in eine bestimmte konvexe Menge  $\Theta \supset \Theta_0$  zu projizieren (daher der Name) und somit auf  $\Theta$  zu beschränken, um so einem unkontrollierten Anwachsen der Schätzungen und möglicher Instabilität entgegenzuwirken. Der Projektions-Operator wird im Anhang A.2 näher erläutert.

Die Laplacetransformierte des adaptiven Stellsignals ist definiert als

$$u_{ad}(s) = -C(s)(\hat{\eta}(s) - k_g r(s)), \tag{5.6}$$

wobei  $r(s)$  und  $\hat{\eta}(s)$  die Laplacetransformierten von  $r(t)$  und  $\hat{\eta}(t) = \hat{\theta}^T(t)x(t)$ ,

$$k_g = -\frac{1}{c^T A_m^{-1} b} \tag{5.7}$$

und  $C(s)$  das Tiefpassfilter mit BIBO-stabiler (bounded input bounded output) und strikt-properer Übertragungsfunktion mit stationärer Verstärkung  $C(0) = 1$  sind.

Der  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regler ist demnach gegeben durch die Beziehungen in (5.2), (5.4), (5.5) und (5.6), wobei  $k_m^T$  und  $C(s)$  so gewählt werden müssen, dass die  $\mathcal{L}_1$ -Norm Stabilitätsbedingung

$$\lambda = \|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} L < 1 \tag{5.8}$$

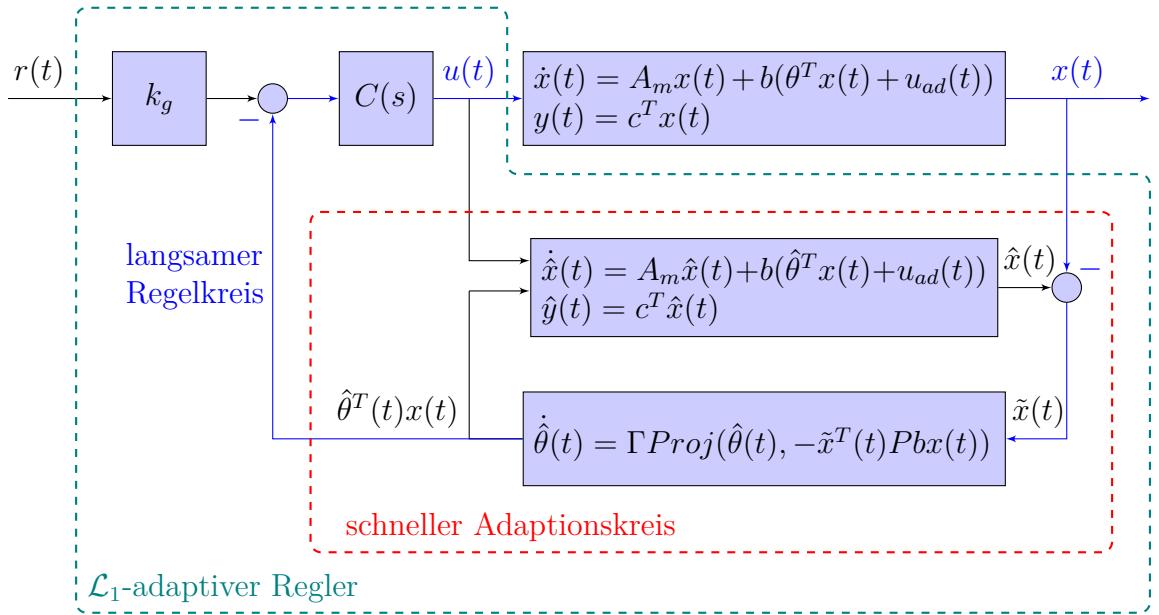


Abbildung 5.1: Geschlossener Regelkreis des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Systems in Anlehnung an [HC10, HCK<sup>+</sup>11].

eingehalten wird (bzgl.  $\mathcal{L}_1$ -Norm siehe Anhang A.1), wobei

$$G(s) = H(s)(1 - C(s)), \quad H(s) = (s\mathbb{I} - A_m)^{-1}b, \quad L = \max_{\theta \in \Theta} \|\theta\|_1 \quad (5.9)$$

mit der Einheitsmatrix  $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist.  $L$  spielt aufgrund der  $\mathcal{L}_1$ -Norm Stabilitätsbedingung eine wichtige Rolle und soll näher erläutert werden.  $L$  ist die maximale Manhattan-Distanz vom Nullvektor zu der Parameterkonfiguration  $\theta \in \Theta$  bzw.  $\hat{\theta}(t) \in \Theta$ . Durch  $L$  wird somit die 1-Norm der Parameterschätzung  $\hat{\theta}(t) \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$  der Regelstrecke bezeichnet, durch die deren Dynamik am stärksten beeinflusst wird. Alternativ beschrieben, ist  $L$  die 1-Norm der Parameterschätzung  $\hat{\theta}(t) \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$ , für die die kompensierende Zustandsrückführung  $\hat{\theta}^T(t)x(t)$  den betragsmäßig größten Wert erreichen kann. Je größer demnach der Wertebereich der Unsicherheiten  $\theta \in \Theta_0$  ist und je größer somit die Menge  $\Theta$  ist, desto größer wird  $L$ .

**Stabilitätsbeweis:** Um den Stabilitätsbeweis zu erbringen, wird zunächst die Fehlerdynamik aus (5.3) und (5.4) hergeleitet zu

$$\dot{x}(t) = A_m \tilde{x}(t) + b \tilde{\theta}^T(t)x(t), \quad \tilde{x}(0) = 0, \quad (5.10)$$

wobei  $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$  ist. Mit  $\tilde{\eta}(t) = \tilde{\theta}^T(t)x(t)$ , wobei  $\tilde{\eta}(s)$  die Laplacetransformierte ist, können die Fehlerdynamiken aus (5.10) auch im Frequenzbereich geschrieben werden als

$$\tilde{x}(s) = H(s)\tilde{\eta}(s). \quad (5.11)$$

Es wird folgender Kandidat für eine Lyapunovfunktion angenommen:

$$V(\tilde{x}(t), \tilde{\theta}(t)) = \tilde{x}^T(t)P\tilde{x}(t) + \frac{1}{\Gamma}\tilde{\theta}^T(t)\tilde{\theta}(t). \quad (5.12)$$

Anschließend muss die Ableitung berechnet werden. Zu beachten ist dabei, dass der Parameter  $\theta$  in  $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$  konstant ist und bei der Ableitung wegfällt. Schließlich erhält man nach Einsetzen von (5.5) und aufgrund der Eigenschaft (A.9) des Projektions-Operators eine Beschränkung der Ableitung der Lyapunovfunktion zu:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\tilde{x}}^T(t)P\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t)^T P \dot{\tilde{x}}(t) + \frac{1}{\Gamma} \left( \dot{\tilde{\theta}}^T(t)\tilde{\theta}(t) + \tilde{\theta}^T(t)\dot{\tilde{\theta}}(t) \right) \\ &= \tilde{x}^T(t) \left( A_m^T P + P A_m \right) \tilde{x}(t) + 2\tilde{x}^T(t)Pb\tilde{\theta}^T(t)x(t) + \frac{2}{\Gamma}\tilde{\theta}^T(t)\dot{\hat{\theta}}(t) \\ &= -\tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) + 2\tilde{x}^T(t)Pb\tilde{\theta}^T(t)x(t) + 2\tilde{\theta}^T(t)Proj(\hat{\theta}(t), -x(t)\tilde{x}^T(t)Pb) \\ &= -\tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) + 2\tilde{\theta}^T(t) \left( x(t)\tilde{x}^T(t)Pb + Proj(\hat{\theta}(t), -x(t)\tilde{x}^T(t)Pb) \right) \\ &\leq -\tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Somit sind  $\tilde{x}(t)$  und  $\tilde{\theta}(t)$  gleichmäßig beschränkt. Aus der Gleichung (5.12) folgen eine untere Beschränkung (da  $\tilde{\theta}^T(t)\tilde{\theta}(t)/\Gamma \geq 0$ ) und eine obere Beschränkung (da  $\tilde{x}(0) = 0$ ) für die Lyapunovfunktion

$$\lambda_{min}(P) \|\tilde{x}(t)\|_2^2 \leq V(t) \leq V(0) = \frac{\tilde{\theta}^T(0)\tilde{\theta}(0)}{\Gamma}, \quad (5.14)$$

wobei  $\lambda_{min}(P)$  der kleinste Eigenwert von  $P$  ist. Da der Projektions-Operator die Schätzungen auf  $\hat{\theta}(t) \in \Theta$  beschränkt, kann der Abstand von Schätzwert und tatsächlichem Parameter  $|\tilde{\theta}(t)| = |\hat{\theta}(t) - \theta|$  maximal dem Durchmesser des Kreises des Projektions-Operators (für den Fall  $\theta \in \mathbb{R}^2$ ), also maximal  $2\max_{\theta \in \Omega_1} \|\theta\|_2 < 2\max_{\theta \in \Theta} \|\theta\|_2$  entsprechen, und es gilt:

$$\frac{\tilde{\theta}^T(0)\tilde{\theta}(0)}{\Gamma} \leq \frac{4\max_{\theta \in \Theta} \|\theta\|_2^2}{\Gamma}. \quad (5.15)$$

Nach Einsetzen von (5.14) erhält man mit  $\theta_{max} = 4\max_{\theta \in \Theta} \|\theta\|_2^2$  die Beschränkung

$$\|\tilde{x}(t)\|_2^2 \leq \frac{\theta_{max}}{\lambda_{min}(P)\Gamma}. \quad (5.16)$$

Aufgrund der Tatsache, dass  $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2$  gilt, folgt die gleichmäßige Beschränkung des Schätzfehlers zu:

$$\|\tilde{x}_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \sqrt{\frac{\theta_{max}}{\lambda_{min}(P)\Gamma}}. \quad (5.17)$$

Obwohl nach obiger Analyse der Zustandsschätzfehler  $\tilde{x}(t)$  gleichmäßig beschränkt ist, ist es dennoch möglich, dass die Zustände  $x(t)$  sowie  $\hat{x}(t)$  mit gleicher Rate divergieren, so dass deren Differenz  $\tilde{x}(t)$  beschränkt bleibt. Demnach bleibt zu zeigen, dass  $\hat{x}(t)$  beschränkt ist. Anschließend kann Barbălat's Lemma angewandt werden, um die Konvergenz  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$  zu zeigen. Dieser Unterschied zu der Beweisführung aus Abschnitt 4.2.1 (MRAC) röhrt daher, dass beim MRAC das Referenzsignal  $r(t)$  als Eingang für das Referenzmodell genutzt wird und beim  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regler die Stellgröße  $u(t)$  als Eingang für den Schätzer verwendet wird.

Um mit dem Beweis fortzufahren, betrachten wir die Laplacetransformierte von (5.4) mit Anfangsauslenkung  $x_0(t)$  und schreiben sie mithilfe von  $H(s)$  und  $\hat{\eta}(s)$  um zu

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_m \hat{x}(t) + b(\hat{\theta}^T x(t) + u_{ad}(t)) + x_0(t) \\ \Rightarrow \hat{x}(s) &= (s\mathbb{I} - A_m)^{-1} (b(\hat{\theta}^T x(s) + u_{ad}(s)) + x_0(s)) \\ \Leftrightarrow \hat{x}(s) &= H(s)(\hat{\eta}(s) + u_{ad}(s)) + x_{in}(s), \end{aligned} \quad (5.18)$$

wobei  $x_{in}(s) = (s\mathbb{I} - A_m)^{-1}x_0$  die Laplacetransformierte der Eigenbewegung mit der Anfangsauslenkung  $x_0$  darstellt. Anschließend setzen wir  $u_{ad}(s)$  aus (5.6) ein und erhalten mit  $G(s)$ :

$$\hat{x}(s) = H(s)(\hat{\eta}(s) - C(s)\hat{\eta}(s) + C(s)k_g r(s)) + x_{in}(s) \quad (5.19)$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}(s) = G(s)\hat{\eta}(s) + H(s)C(s)k_g r(s) + x_{in}(s). \quad (5.20)$$

Es folgt

$$\|\hat{x}_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} \|\hat{\eta}(s)\|_{\mathcal{L}_\infty} + \|k_g H(s)C(s)\|_{\mathcal{L}_1} \|r_\tau(s)\|_{\mathcal{L}_\infty} + \|x_{in\tau}\|_{\mathcal{L}_\infty}, \quad (5.21)$$

wobei der Index  $\tau$  für *truncated* (dt. abgeschnitten) steht und für eine Funktion  $f(t)$

bedeutet:

$$f_{[t_0, \tau]}(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq t < t_0 \\ f(t), & \text{falls } t_0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{falls } t > \tau \end{cases} \quad (5.22)$$

Aus (5.17) erhält man

$$|\|\hat{x}_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} - \|x_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}| \leq \sqrt{\frac{\theta_{max}}{\lambda_{min}(P)\Gamma}} \quad (5.23)$$

und mit  $L$  aus (5.9) ergibt sich:

$$\|\hat{\eta}_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq L \|x_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}. \quad (5.24)$$

Nach Einsetzen von  $\|x_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty}$  in (5.23) folgt:

$$\|\hat{\eta}_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq L \left( \|\hat{x}_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} + \sqrt{\frac{\theta_{max}}{\lambda_{min}(P)\Gamma}} \right). \quad (5.25)$$

Nach Einsetzen von (5.25) in (5.21) und unter Beachtung der Stabilitätsbedingung aus (5.8) erhält man nach Auflösen:

$$\|\hat{x}_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \frac{\lambda \sqrt{\frac{\theta_{max}}{\lambda_{min}(P)\Gamma}} + \|k_g H(s)C(s)\|_{\mathcal{L}_1} \|r_\tau\|_{\mathcal{L}_\infty} + \|x_{int}\|_{\mathcal{L}_\infty}}{1 - \lambda}. \quad (5.26)$$

Da die Beschränkung auf der rechten Seite gleichmäßig ist, ist auch  $\hat{x}(t)$  gleichmäßig beschränkt. Nun kann Barbälats Lemma angewandt werden, denn da  $\tilde{x}(t)$  und  $\hat{x}(t)$  beschränkt sind, gilt auch, dass  $x(t) = \hat{x}(t) - \tilde{x}(t)$  beschränkt ist. Somit ist auch  $\dot{\tilde{x}}(t)$  in (5.10) beschränkt. Folglich ist

$$\ddot{V}(t) = -2\tilde{x}^T(t)Q\dot{\tilde{x}}(t) \quad (5.27)$$

beschränkt und somit  $\dot{V}(t)$  gleichmäßig stetig. Nach Barbälats Lemma gilt demzufolge

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0. \quad (5.28)$$

**Verhalten während des Einschwingvorgangs und im stationären Zustand:** Ein großer Vorteil des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers ist, dass sich im Gegensatz zu MRAC das Ver-

halten des geschlossenen adaptiven Regelkreises für bestimmte ausgewählte Parameter  $\theta$  vorab berechnen bzw. simulieren lässt. Dazu werden ein ideales Referenzsystem und sogenannte Performance-Schranken (engl. performance bounds) angewandt. Das Referenzsystem entspricht dabei einem geschlossenen Regelkreis aus einer nicht adaptiven Variante des  $\mathcal{L}_1$ -Reglers zusammen mit der betrachteten Systemklasse im Vorwärtszweig. Die Parameter  $\theta$  werden als bekannt vorausgesetzt. Aus diesem Grund wird auch vom idealen Referenzsystem gesprochen. Das Referenzsystem ist durch (5.1), (5.2) und (5.6) definiert zu:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{ref}(t) &= Ax_{ref}(t) + b(\theta^T x_{ref}(t) + u_{ref}(t)), \quad x_{ref}(0) = x_0, \\ u_{ref}(s) &= -C(s)(\theta^T x_{ref}(s) - k_g r(s)) - k_m^T x_{ref}(s), \\ y_{ref}(s) &= c^T x_{ref}(s).\end{aligned}\tag{5.29}$$

Mit den Performance-Schranken lässt sich die maximale Abweichung des geschlossenen Regelkreises von dem Referenzsystem bewerten. Dies ermöglicht es, vorab Aussagen über die maximal zu erwartenden Abweichungen treffen zu können. Sie ergeben sich für den geschlossenen Regelkreis, bestehend aus der Regelstrecke (5.1) und dem  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regler zu (Theorem 2.1.1 aus [HC10, S.23])

$$\|x_{ref} - x\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \frac{\gamma_1}{\sqrt{\Gamma}}, \quad \|u_{ref} - u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \frac{\gamma_2}{\sqrt{\Gamma}},\tag{5.30}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{ref}(t) - x(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u_{ref}(t) - u(t)\| = 0,\tag{5.31}$$

mit

$$\gamma_1 = \frac{\|C(s)\|_{\mathcal{L}_1}}{1 - \|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} L} \sqrt{\frac{\theta_{max}}{\lambda_{min}(P)}},\tag{5.32}$$

$$\gamma_2 = \|H_1(s)\|_{\mathcal{L}_1} \sqrt{\frac{\theta_{max}}{\lambda_{min}(P)}} + \|C(s)\theta^T + k_m^T\|_{\mathcal{L}_1} \gamma_1,\tag{5.33}$$

wobei

$$H_1(s) = C(s) \frac{1}{c_0^T H(s)} c_0^T\tag{5.34}$$

mit beliebigem  $c_0 \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $H_1(s)$  proper und BIBO stabil ist. Der Beweis für die angegebenen Performance-Maße kann den Referenzen [HC10, HCK<sup>+</sup>11, CH06b] entnommen werden.

Nach (5.30) können somit die Trajektorien  $x(t)$  und  $u(t)$  den Trajektorien des LTI

Referenzsystems  $x_{ref}(t)$  und  $u_{ref}(t)$  mit beliebig kleinem Fehler bzw. Abstand folgen, indem die Adoptionsverstärkung  $\Gamma$  erhöht wird. Aufgrund der linearen Eigenschaft des Referenzsystems führen somit alle Veränderungen von Anfangsbedingungen, Referenzsignalen und Parameterunsicherheiten zu gleichmäßig skalierten Änderungen der Signale  $x_{ref}(t), u_{ref}(t)$  und somit auch der Signale des nichtlinearen  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreises  $x(t), u(t)$ . Damit reduziert sich der Entwurf im Wesentlichen auf die Bestimmung von  $k_m^T$  und  $C(s)$ , um sicherzustellen, dass das Referenzsystem das gewünschte transiente und stationäre Verhalten aufweist. [HC10, S. 24]

**Entwurf des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers:** Zum Entwurf des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers wird ein weiteres System, das sogenannte Designssystem definiert. Während zur Berechnung des Ausgangs  $y_{ref}(s)$  des  $\mathcal{L}_1$  Referenzsystems  $\theta$  bekannt sein muss, ist  $y_{des}(s)$  unabhängig davon und kann somit für einen Entwurf verwendet werden:

$$\begin{aligned} x_{des}(s) &= C(s)k_g H(s)r(s) + x_{in}(s), \\ u_{des}(s) &= k_g C(s)r(s) - C(s)\theta^T x_{des}(s) - k_m^T x_{des}(s), \\ y_{des}(s) &= c^T x_{des}(s). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Da auch die Performance-Schranken  $\|y_{des} - y_{ref}\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$  für den maximalen Abstand des Designssystems von dem Referenzsystem angegeben werden können, kann dieses System zum Entwurf genutzt werden, ohne dabei die charakteristische Eigenschaft des  $\mathcal{L}_1$ -Reglers, vorab eine gewisse Performance garantieren zu können, zu verlieren. In [HC10] wurde dazu folgende wichtige Performance-Schranke bewiesen:

$$\|y_{des} - y_{ref}\|_{\mathcal{L}_{\infty}} \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \|c\|_1 \left( \|k_g H(s)C(s)\|_{\mathcal{L}_1} \|r\|_{\mathcal{L}_{\infty}} + \|x_{in}\|_{\mathcal{L}_{\infty}} \right). \quad (5.36)$$

Wird nun ein  $\mathcal{L}_1$ -adaptiver Regler mithilfe des Designssystems entworfen, so kann mit

$$\|y_{des}(t) - y(t)\|_{\mathcal{L}_{\infty}} \leq \|y_{des}(t) - y_{ref}(t)\|_{\mathcal{L}_{\infty}} + \|y_{ref}(t) - y(t)\|_{\mathcal{L}_{\infty}} \quad (5.37)$$

der maximale Abstand des Ausgangs des geschlossenen  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreises  $y(t)$  von dem Ausgang des Designssystems  $y_{des}(t)$  berechnet werden.

Bei einem Entwurf des Reglers kann nun folgendermaßen verfahren werden (in Anlehnung an [HC10]):

1. Festlegung der Dynamik des Designssystems:

Zuerst wird die gewünschte Dynamik des Designssystems  $A_m$  definiert, sodass diese Hurwitz ist.

2. Berechnung von  $L$ :

Anschließend müssen die Wertebereiche der unsicheren Parameter  $\theta$  der Regelstrecke errechnet werden. Dann wird daraus die Menge  $\Theta_0$  bestimmt. Daraufhin werden  $\epsilon_{\hat{\theta}}$  festgelegt und die Mengen  $\Omega_1$  bzw.  $\Theta$  berechnet. Schließlich wird  $L$  nach (5.9) berechnet. Je kleiner  $L$  ist, desto kleiner und besser sind die berechneten, garantierbaren Performance-Schranken.  $L$  sollte demnach so groß wie nötig und so klein wie möglich gewählt werden.

3. Zustandsrückführung durch  $k_m^T$  (optional):

Die Zustandsrückführung kann angewandt werden, wenn sich die Dynamiken der Regelstrecke  $A$  und des Designsystems  $A_m$  stark unterscheiden und  $L$  somit sehr groß ist. Die Zustandsrückführung  $-k_m^T x(t)$  aus (5.2) kann dann die Performance verbessern. Anschließend muss  $L$  erneut berechnet werden.

4. Wahl der Adoptionsverstärkung  $\Gamma$ :

Die Adoptionsverstärkung  $\Gamma$  sollte sehr groß gewählt werden, z.B.  $\Gamma = 100000$ . Die Norm  $\|y_{ref} - y\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$ , die man aus (5.30) erhält, wird somit vernachlässigbar klein.

5. Berechnung und Wahl von  $\lambda$ :

Für niedrige Ordnungen des Filters  $C(s)$  (erste oder zweite Ordnung) ist es sinnvoll, zunächst  $\lambda$  in Abhängigkeit der Filterbandbreite  $\omega_c$  zu berechnen und abzubilden. Anschließend muss  $\omega_c$  so gewählt werden, dass die  $\mathcal{L}_1$ -Norm Stabilitätsbedingung aus (5.8) eingehalten wird. Je größer  $\omega_c$  und je kleiner somit  $\lambda$  gewählt wird, desto kleiner und besser werden die Performance-Schranken  $\|y_{des} - y_{ref}\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$ . Zudem kann  $\lambda$  ebenso verringert werden, indem die Eigenwerte von  $A_m$  verlangsamt werden. Dies lässt sich dadurch begründen, dass diese die Bandbreite der Übertragungsfunktion  $H(s)$  bestimmen, welche Tiefpasscharakter hat. Da  $\lambda$  durch  $\lambda = \|H(s)(1 - C(s))\|_{\mathcal{L}_1} L$  berechnet wird und  $(1 - C(s))$  ein Hochpass ist, entsteht durch die Verringerung der Eigenwerte von  $A_m$  oder die Erhöhung der Bandbreite von  $C(s)$  ein *No-Pass-Filter*.

Wurden  $\Gamma$  groß und  $\lambda$  klein gewählt, so folgt, dass  $\|y_{des} - y\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$  aus (5.37) klein wird und somit für  $y(t)$  des geschlossenen Regelkreises  $y(t) \approx y_{des}(t)$  folgt.

Des Weiteren sei für eine sinnvolle Wahl der Bandbreite  $\omega_c$  des Filters  $C(s)$  angemerkt, dass nach [Bri05] drei Zeitskalen im adaptiven Regelkreis existieren:

- Die Zeitskala der Dynamik des geschlossenen Regelkreises mit festen Regelstrecken- und Reglerparametern

- Die Zeitskala zur Identifizierung der Regelstreckenparameter bzw. zur Adaption
- Die Zeitskala verbunden mit den Veränderungen der Regelstreckenparameter

Gemäß [Bri05] muss die Identifikation der Regelstreckenparameter schneller sein als deren Veränderungen, da die Identifizierung sonst nicht Schritt halten kann. Somit ist eine sinnvolle untere Schranke für die Filterbandbreite gegeben.

Eine obere Schranke für die Filterbandbreite ist durch die Bandbreite des Aktors in der Regelstrecke gegeben [Hov, HC10].

### 5.1.1 Simulationsbeispiel

Um einen tieferen Einblick in die beiden vorgestellten Regelungskonzepte MRAC und die  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Zustandsrückführung zu gewähren, wird nachfolgend ein einfaches Beispiel vorgestellt, anhand welchem grundlegende Eigenschaften der beiden verwendeten Regler verdeutlicht werden. Mithilfe dieses Beispiels werden die Unterschiede beim Reglerentwurf, dem transienten Verhalten des Regelkreises und der Regelgüte, die als Abweichung von einem vorgegebenen Designsysteem gemessen wird, verdeutlicht. Es sei für das Simulationsbeispiel folgende Regelstrecke angenommen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + b(u(t) + \theta^T x(t)) \\ y(t) &= c^T x(t),\end{aligned}\tag{5.38}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta^T = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{pmatrix},\tag{5.39}$$

und  $x(t) \in \mathbb{R}^2$  der Zustand der Regelstrecke (gemessen) und  $\theta \in \Theta_0 \subset \mathbb{R}^2$  ein zeitinvarianter unbekannter Parameter mit den Unsicherheiten  $\theta_i \in [-1, 1] \forall i = 1, 2$  ist. Es wurde  $\epsilon_{\hat{\theta}}$  frei gewählt zu  $\epsilon_{\hat{\theta}} = 0.03$ . Anschließend wird für den Projektions-Operator der Radius  $\theta_{Pmax}$  des Randes von  $\Omega_1$  berechnet zu:

$$\theta_{Pmax} = \max_{\theta \in \Theta_0} \|\theta\|_2 \sqrt{1 + \epsilon_{\hat{\theta}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + 0.03} \approx 1.4353\tag{5.40}$$

Um die Adaption des  $\mathcal{L}_1$ -Reglers im Falle von geringem Wissen über die Wertebereiche von  $\theta$  und somit im Falle einer konservativen Wahl der Projektionsbeschränkung zu

testen, wird  $\theta_{Pmax} = 2$  gewählt. Hieraus folgt für die Menge  $\Theta$ :

$$\Theta = \{\nu = (\nu_1 \quad \nu_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \nu_1 = [-2, 2] \wedge \nu_2 \in [-2, 2]\}. \quad (5.41)$$

Es gilt anzumerken, dass die Menge  $\Theta$  zwar die Wertebereiche für die Parameterschätzungen  $\hat{\theta}(t)$  widerspiegelt, jedoch manche Kombinationen von  $\hat{\theta}_1(t)$  und  $\hat{\theta}_2(t)$  wie z.B.  $\hat{\theta}_1(t) = 2$  und  $\hat{\theta}_2(t) = 2$  nicht erreicht werden können. Dies liegt an der Eigenschaft des Projektions-Operators,  $\hat{\theta}(t)$  auf  $\Omega_1$  zu beschränken, sodass  $\forall t \geq 0 : \|\hat{\theta}(t)\|_2 \leq \theta_{Pmax}$ . Dennoch ist die Definition einer etwas konservativeren/größeren Menge  $\Theta$  mit  $\Theta \supset \Omega_1$  sehr wertvoll, da hieraus wichtige Werte, wie  $L$ ,  $\theta_{max}$  sowie die Totzeittoleranz  $\mathcal{T}$  (siehe Kapitel 5.2) leicht berechnet werden können.

Für den  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regler ergibt sich nun nach (5.9):

$$L = \max_{\theta \in \Theta} \|\theta\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_1 = 4. \quad (5.42)$$

Beide Regler haben nun zum Ziel, das System aus (5.38) möglichst genau auf das Referenzsystem (siehe Gl. (4.8)), mit Dynamikmatrix

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

zu regeln. Hierfür bestimmen wir zunächst die für beide Regler geltende Zustandsrückführung der Form  $u_m = k_m^T x(t)$ , die die gewünschte Referenz-Eigendynamik

$$\dot{x} = Ax(t) - bk_m^T x(t) = A_m x(t)$$

erzeugt. Durch einen einfachen Vergleich der letzten Zeile von  $A$  und  $A_m$  erhalten wir die gesuchte Zustandsrückführung mit

$$k_m^T = (1.6 \quad 1.5). \quad (5.44)$$

Ferner wird  $k_g$  für beide Regler berechnet zu  $k_g = 2$ .

Sei die Bandbreitenbegrenzung des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers gegeben durch das Tiefpassfilter erster Ordnung:

$$C(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}.$$

Zur Bestimmung der Filterbandbreite wird  $\lambda$  in Abhängigkeit von  $\omega_c$  zu  $\lambda \approx 0.214$  für  $\omega_c = 40$  bestimmt (siehe Abbildung 5.2). Dies resultiert in verbesserten Performancemaßen, wie in Abschnitt 5.1 erläutert. Der  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regler ist folglich asymptotisch stabil, da die Stabilitätsbedingung  $\lambda = \|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} L < 1$  erfüllt ist. Die Adaptionsver-

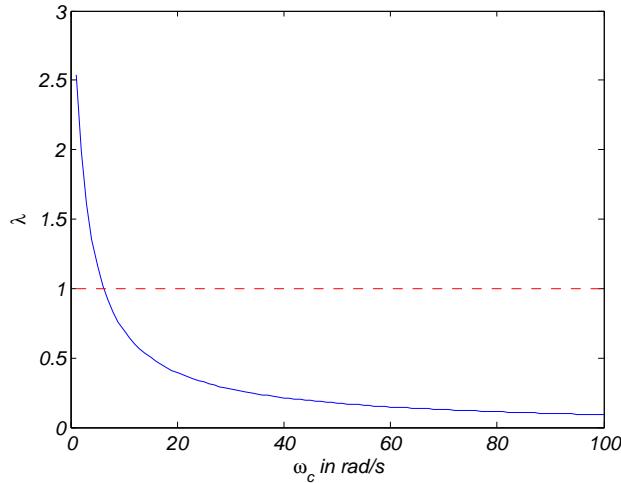


Abbildung 5.2: Darstellung der Stabilitätsgrenze (rot) und  $\lambda$  in Abhängigkeit von der Filterbandbreite  $\omega_c$ , wobei  $L = 4$  ist.

stärkung des  $\mathcal{L}_1$ -Reglers wählen wir zu  $\Gamma_1 = 100000$ .

Die Verstärkung  $\Gamma_2$  des MRAC muss deutlich kleiner gewählt werden, da der geschlossene Regelkreis sehr empfindlich gegenüber hohen Adaptionsverstärkungen reagiert und durch zu hohe  $\Gamma_2$  in die Instabilität getrieben werden kann. Grund hierfür ist im Wesentlichen die fehlende Entkopplung von Adaptions- und Regelkreis, welche zu einem *high-gain-feedback* mit hochfrequenten Stellsignalen führen kann, die von der Aktuatorik nur teilweise realisiert werden können. Durch das *high-gain-feedback* wird somit der Phasenrand des MRAC-Systems sehr gering, während er für den  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regler aufgrund der Entkopplung erhalten bleibt [HC10]. Wir wählen nun ferner mit  $\Gamma_2 = 10$  die Adaptionsverstärkung sehr klein, um robust gegenüber unmodellierten Aktuatordynamiken zu sein. Letztere sollen ebenfalls im Zuge der nachfolgenden Simulationen betrachtet werden, um den Unterschied der beiden Regler bzgl. ihres transienten Verhaltens zu untersuchen.

### Simulationsergebnisse

Nachfolgend sind in den Abbildungen 5.3 bis 5.10 die Simulationsergebnisse der Regelungen mit MRAC und der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelung dargestellt. Untersucht wurde hierbei das transiente Verhalten beider Regelkreise für unterschiedliche Unsicherheiten  $\theta$  sowie unmodellierten Aktuatordynamiken, bei sprungförmigen Referenzgrößen  $r(t)$ .

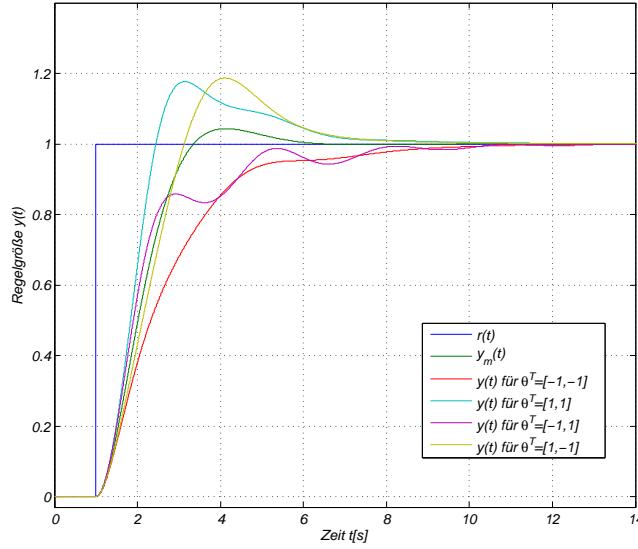


Abbildung 5.3: Vergleich des gewünschten ( $y_m(t)$ ) und des erreichten ( $y(t)$ ) transienten Verhaltens im geschlossenen Regelkreis mit MRAC für einen Einheitsprung und verschiedene  $\theta \in \Theta_0$ .

**MRAC:** Abbildung 5.3 zeigt die Sprungantworten  $y(t)$  des MRAC-Regelkreises zusammen mit den Sprungantworten  $y_m(t)$  des Referenzsystems aus (4.8). Deutlich erkennbar ist, dass sich das Einschwingverhalten für verschiedene Unsicherheiten  $\theta$  stark unterscheidet. Der Grund hierfür ist die Adoptionsverstärkung  $\Gamma_2$ , die wie weiter oben bereits angedeutet, niedrig gewählt werden muss. Folglich ist die Parameteradaption zu träge, um noch während des ersten Einschwingvorgangs akzeptable Parameterschätzungen zu erlangen. Dies wird auch in Abbildung 5.4 deutlich. Hier ist zu erkennen, dass sich das Einschwingverhalten für weitere, aufeinanderfolgende Sprünge bei  $t_2$  und  $t_3$  stets verbessert. In Abbildung 5.6 sind die dazugehörigen Parameterschätzverläufe abgebildet. Obwohl im letzten Sprung  $y_m(t)$  perfekt verfolgt wird, konvergieren die Parameter  $\hat{\theta}(t)$  nicht zu den wahren Parametern  $\theta$ . Diese Beobachtung deckt sich mit den theoretischen Vorberichtigungen und den Stabilitätsbeweisen zu MRAC aus Kapitel

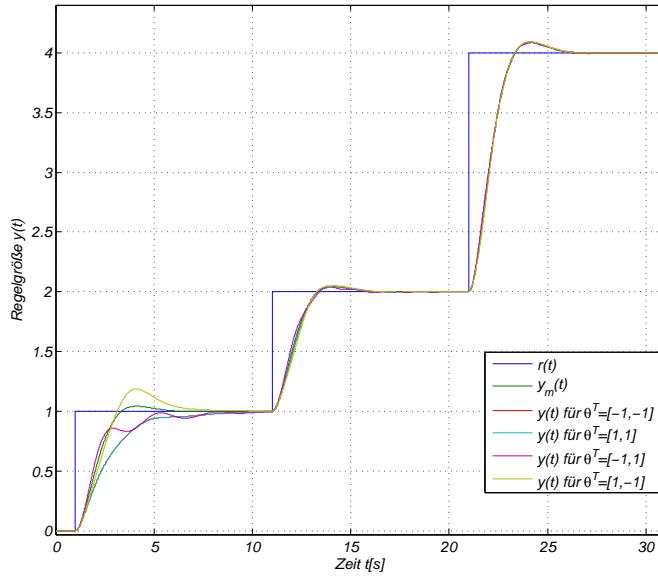


Abbildung 5.4: Vergleich des gewünschten ( $y_m(t)$ ) und des erreichten ( $y(t)$ ) transienten Verhaltens im geschlossenen Regelkreis mit MRAC für mehrere aufeinander folgende Sprünge und verschiedene  $\theta \in \Theta_0$ .

4.2.1. Abschließend lässt sich sagen, dass das transiente Verhalten des geschlossenen MRAC-Regelkreises aufgrund der langsamen Parameteradaption stark in Abhängigkeit der unbekannten Unsicherheiten  $\theta$  variiert und somit nicht vorhersagbar ist. Idealerweise sollte der Regler jedoch unabhängig von  $\theta$  weitestgehend identische Sprungantworten hervorbringen.

Nun soll das Regelverhalten für unmodellierte Aktuatordynamiken untersucht werden. Hierfür schlagen wir der Strecke die Aktuatordynamik

$$G_A(s) = \frac{2500}{s^2 + 100s + 2500} \quad (5.45)$$

mit zwei Polstellen bei  $s_{1,2} = -50$  hinzu, die weder im Streckenmodell noch in der MRAC-Regelkreisarchitektur Berücksichtigung findet. Abbildung 5.5 zeigt die Ergebnisse dieses Simulationsversuchs. Auffällig sind hochfrequente Oszillationen nach  $t_3 = 21$  s, die wahrgemerkert im Versuch ohne Aktuatordynamik nicht auftreten (siehe Abb. 5.4). Der Grund hierfür sind ebenfalls Oszillationen in den Parameterschätzungen, welche in Abbildung 5.7 zu sehen sind.

Es handelt sich hierbei um das sogenannte *bursting*-Phänomen. Damit wird ein chaotisches Verhalten beschrieben, dass durch eine zu hohe Adoptionsverstärkung im Falle von unbekannter Aktuatordynamik auftreten kann. Der Grund hierfür ist, dass, wenn

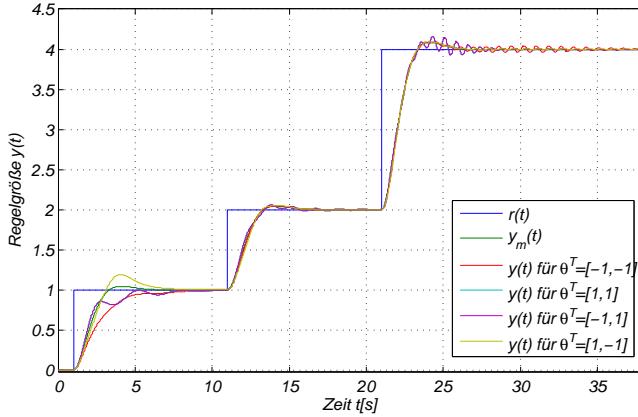


Abbildung 5.5: Vergleich des gewünschten ( $y_m(t)$ ) und des erreichten ( $y(t)$ ) transientes Verhaltens im geschlossenen Regelkreis mit MRAC für eine Folge von sprungförmigen Referenzgrößen, unmodellierten Aktuatorordynamiken und verschiedenen Konfigurationen  $\theta \in \Theta_0$ .

das System nicht mehr angeregt wird, zu wenig Informationen für den adaptiven Algorithmus bereit stehen, um alle Parameter gleichzeitig richtig anzupassen. Dies führt zu einer lokalen Divergenz der Parameterschätzungen, die lokale Ruhelage ist somit instabil. Der fehlerhafte Regler destabilisiert im darauffolgenden den Regelkreis, wodurch dieser eine Anregung erhält. Durch diese Anregung bekommt der adaptive Algorithmus ausreichende Informationen, um wieder gute Parameterschätzungen liefern zu können. Der Regler funktioniert nun wieder ordnungsgemäß und stabilisiert den Regelkreis. Dieser Vorgang kann sich in unbestimmten, nicht periodischen Zeitintervallen wiederholen. [ÅW89, S.271 f.] [ETH09]

Des Weiteren ist zu beachten, dass das Einbringen der unmodellierten Aktuator-dynamik aus (5.45) den MRAC-Regelkreis für Adoptionsverstärkungen  $\Gamma_2 \geq 81$  instabil werden lässt. Tendenziell lässt sich sagen, dass je größer  $\Gamma_2$  gewählt wird, desto schneller schmiegt sich  $y(t)$  an  $y_m(t)$  an und desto stärker neigt der geschlossene Regelkreis zu hochfrequenten Oszillationen bis hin zur Instabilität, falls unmodellierte Aktuator-dynamiken existieren.

**$\mathcal{L}_1$ -adaptive Regelung:** Die Sprungantworten des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreises ohne Aktuator-dynamik sind in Abbildung 5.8 dargestellt. Es fällt auf, dass im Gegensatz zum MRAC-Regelkreis die Regelgrößen  $y(t)$  kaum von denen des idealen MRAC-Referenzsystems  $y_m(t)$  aus (4.8) (das hier zum Vergleich gewählt wurde) abweichen und nahezu unabhängig von den auf die Regelstrecke einwirkenden Unsicherheiten  $\theta$  sind.

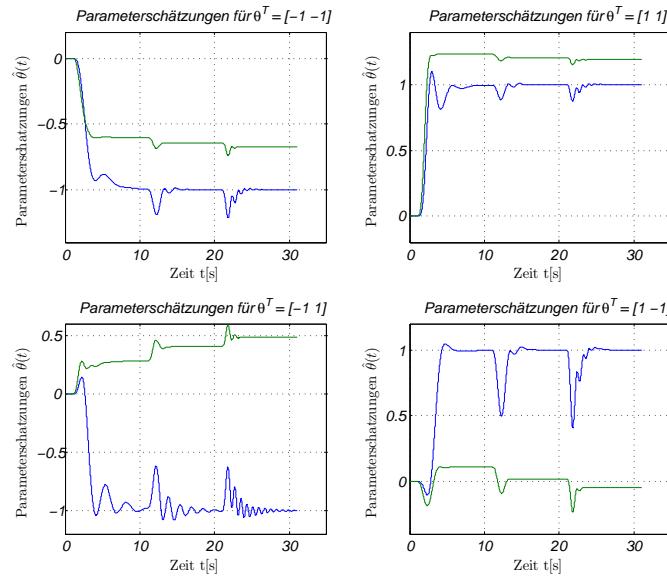


Abbildung 5.6: MRAC-Parameterschätzungen  $\hat{\theta}_1(t)$  (blau) und  $\hat{\theta}_2(t)$  (grün) für sprungförmige Referenzgrößen  $r(t)$ , für verschiedene  $\theta \in \Theta_0$  und ohne Aktuatordynamik.

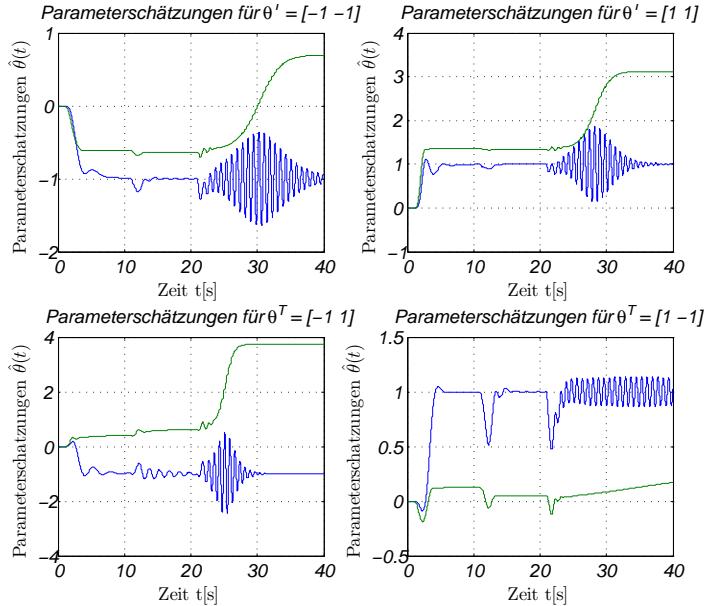


Abbildung 5.7: MRAC-Parameterschätzungen  $\hat{\theta}_1(t)$  (blau) und  $\hat{\theta}_2(t)$  (grün) für sprungförmige Referenzgrößen  $r(t)$ , für verschiedene  $\theta \in \Theta_0$  und mit Aktuatordynamik.

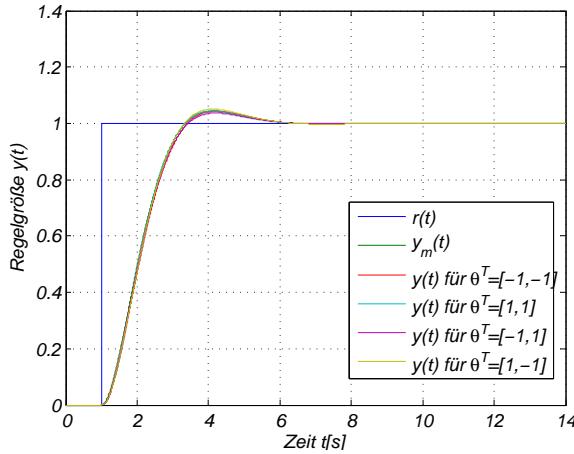


Abbildung 5.8: Vergleich des gewünschten ( $y_m(t)$ ) und des erreichten ( $y(t)$ ) transienten Verhaltens im geschlossenen Regelkreis mit  $\mathcal{L}_1$ -adaptivem Regler für einen Einheitssprung und verschiedene  $\theta \in \Theta_0$ .

Die Gründe für die Abweichungen vom MRAC-Referenzsystems sind erstens das zusätzliche Filter  $C(s)$  in der Architektur des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Designsystems. Zweitens entstehen Abweichungen durch den Adoptionsvorgang. Für alle Abweichungen zusammen können die oberen Schranken mithilfe von  $\|y_{des}(t) - y_{ref}(t)\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$  und  $\|y_{ref}(t) - y(t)\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$  berechnet werden. Letztendlich verhindern sie, dass wir dem MRAC-Referenzsystem perfekt folgen können. Auf die Darstellung der Sprungantworten mit Aktuatorodynamik wurde verzichtet, da, wie Simulationen zeigten, keine Unterschiede zu erkennen waren. Abbildung 5.9 zeigt die Regelgröße  $y(t)$  für drei aufeinanderfolgende Sprünge.

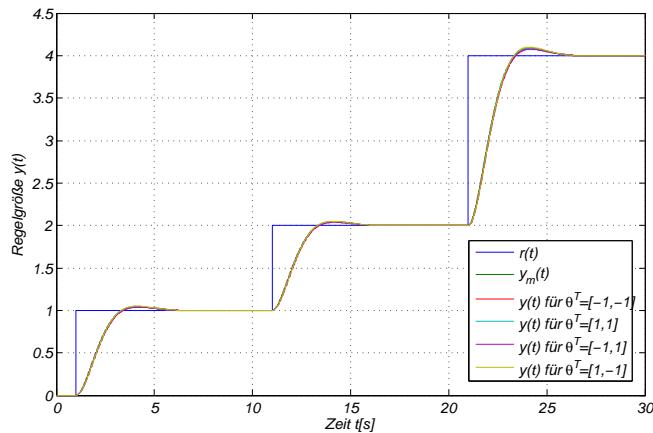


Abbildung 5.9: Vergleich des gewünschten ( $y_m(t)$ ) und des erreichten ( $y(t)$ ) transienten Verhaltens im geschlossenen Regelkreis mit  $\mathcal{L}_1$ -adaptivem Regler für mehrere aufeinander folgende Sprünge und verschiedene  $\theta \in \Theta_0$ .

ge ohne Aktuatordynamik. Es ist zu erkennen, dass sich das Übergangsverhalten des  $\mathcal{L}_1$ -Regelkreises nach jedem Sprung nahezu gleicht und das Ausgangssignal  $y(t)$  für unterschiedliche Sprunghöhen linear skaliert. Auch hier war, wie erwartet, kein Unterschied zu dem Fall mit Aktuatordynamik zu erkennen, weshalb auf die Abbildung verzichtet wurde. Die Parameterschätzverläufe im Falle ohne Aktuatordynamik sind in Abbildung 5.10 zu sehen. Wie zu erwarten war, ist wie bei MRAC keine Konvergenz zu den wahren Parametern zu erkennen. Es ist daher bemerkenswert, dass trotz der Parameterabweichungen das Referenzsystem nahezu perfekt verfolgt werden kann. Demnach scheint die Konvergenz der Parameter zu den tatsächlichen keine Voraussetzung für eine gute Performance zu sein. Zu erwähnen ist noch, dass trotz anfangs hochfrequenter Parameterschätzungen  $\hat{\theta}(t)$  die Stellgröße  $u(t)$  durch die Verwendung des Tiefpassfilters  $C(s)$  mit  $\omega_c = 40$  tiefrequent und innerhalb der zulässigen Bandbreite des Aktuators  $G_A(s)$  bleibt. Es zeigte sich zudem, dass sich die Parameter-

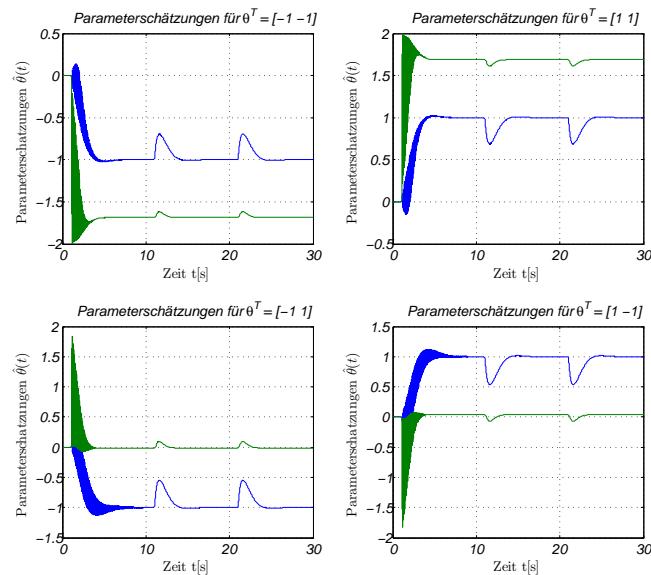


Abbildung 5.10:  $\mathcal{L}_1$  Parameterschätzungen  $\hat{\theta}_1(t)$  (blau) und  $\hat{\theta}_2(t)$  (grün) für den Fall ohne Aktuatordynamik, für sprungförmige Referenzgrößen  $r(t)$  und für verschiedene  $\theta \in \Theta_0$ .

schätzverläufe für die Fälle mit und ohne Aktuatordynamik unterscheiden. Abbildung 5.11 zeigt die Parameterschätzverläufe für die Regelstrecke mit Aktuatordynamik. Die Regelgrößenverläufe verändern sich dadurch jedoch nicht.

**Ergebnis:** Der Vergleich der beiden Regelkreise zeigt offensichtlich, dass der  $\mathcal{L}_1$  Ansatz dem MRAC-Regler in vielerlei Hinsicht überlegen ist. Dazu gehören bspw. die

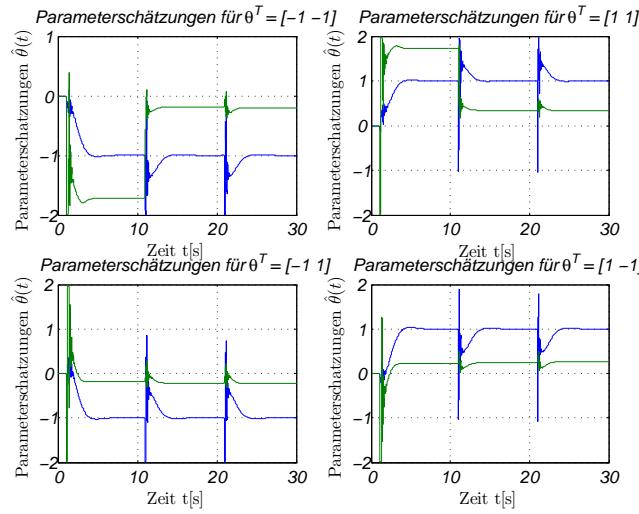


Abbildung 5.11:  $\mathcal{L}_1$  Parameterschätzungen  $\hat{\theta}_1(t)$  (blau) und  $\hat{\theta}_2(t)$  (grün) für den Fall mit Aktuatordynamik, für sprungförmige Referenzgrößen  $r(t)$  und für verschiedene  $\theta \in \Theta_0$ .

folgenden Eigenschaften:

- Ein sehr gutes transientes Verhalten für alle  $\theta \in \Theta_0$  mit nahezu perfekter Verfolgung des Referenzmodells
- Garantierte Robustheit für alle  $\theta \in \Theta_0$ , sogar für  $\Gamma \rightarrow \infty$  (siehe Seite 42)
- Erhöhte Robustheit gegenüber unmodellierten Dynamiken, da diese durch das Tiefpassfilter  $C(s)$  im Reglerentwurf berücksichtigt werden können.  $C(s)$  dämpft somit hochfrequente Stellsignalanteile, die ohnehin von der Strecke nicht umgesetzt werden könnten.

Diese Eigenschaften sind herausragende Charakteristika eines adaptiven Reglers, der momentan in der Regelungstechnikgemeinde seines Gleichen sucht. Diese Eigenschaften sind im Wesentlichen die Beweggründe für die Wahl des  $\mathcal{L}_1$ -Regelungskonzepts zur adaptiven Positions-Festwert- und Trajektorienfolgeregelung für Tetras Nanopositioniermaschine. Die Tauglichkeit des Verfahrens auf Folgeregelungskonzepte wird in Kapitel 6 näher untersucht. In den nachfolgenden Kapiteln werden aufbauend auf der hier vorgestellten  $\mathcal{L}_1$ -Regelkreisarchitektur zwei weitere  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Reglerstrukturen vorgestellt, welche vielversprechend für die betrachtete Anwendung zu sein scheinen.

## 5.2 Zustandsrückführung mit unsicherer Eingangsverstärkung

Zur Berücksichtigung weiterer Unsicherheiten wie:

- unsichere, konstante Eingangsverstärkungen  $\omega$  mit bekanntem Vorzeichen,
- zeitvariante Parameterunsicherheiten  $\theta(t)$ , sowie
- zeitabhängige Eingangsstörungen  $\sigma(t)$

lässt sich der zunächst auf zeitinvariante Parameterunsicherheiten beschränkte Ansatz aus 5.1 nach [HC10] erweitern. Diese erweiterte  $\mathcal{L}_1$ -Regelkreisarchitektur soll im Folgenden vorgestellt werden. Sie ist wieder gekennzeichnet durch die Eigenschaften:

- schneller Adaptionskreis mit hoher Adaptionsverstärkung
- bandbreitenbeschränkter langsamer Regelkreis
- beschränkte Parameterschätzungen mittels Projektions-Operator
- entkoppelte Adaptions- und Regelschleifen

### 5.2.1 Problemformulierung und Beschreibung der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreisarchitektur

Sei folgende Klasse von Systemen angenommen:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_m x(t) + b \left( \omega u(t) + \theta^T(t)x(t) + \sigma(t) \right) & x(0) = x_0, \\ y(t) &= c^T x(t),\end{aligned}\tag{5.46}$$

wobei  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  der Vektor der gemessenen Zustände,  $y(t) \in \mathbb{R}$  die Regelgröße,  $u(t) \in \mathbb{R}$  das Stellsignal und  $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die gewünschte stabile Dynamikmatrix ist;  $b, c \in \mathbb{R}^n$  sind bekannte Vektoren,  $\theta(t) \in \Theta_0 \subset \mathbb{R}^n$  ist ein Vektor von zeitvarianten unbekannten Parametern,  $\sigma(t) \in \mathbb{R}$  ist eine zeitvariante Störung und  $\omega \in \mathbb{R}$  ist eine unbekannte Konstante mit bekanntem Vorzeichen.

Es sollen folgende Annahmen gelten:

**Annahme 1** Gleichmäßige Beschränktheit der unbekannten Parameter:

$$\theta(t) \in \Theta_0, \quad |\sigma(t)| \leq \Delta_0 < \Delta, \quad \forall t \geq 0,\tag{5.47}$$

wobei  $\Theta_0$  eine bekannte konvexe, kompakte Menge und  $\Delta_0 \in \mathbb{R}^+$  eine bekannte Schranke von  $\sigma(t)$  ist, die auch groß/konservativ gewählt werden kann. Ferner wird ein  $\Delta > \Delta_0$  für die Definition der Projektionsbeschränkungen des Projektions-Operators angenommen, um Störungen zu berücksichtigen, die durch Totzeiten entstehen [HC10, S.37].

**Annahme 2** Gleichmäßige Beschränktheit der Änderungsgeschwindigkeit der Parameter:

$$||\dot{\theta}(t)|| \leq d_\theta < \infty, \quad |\dot{\sigma}(t)| \leq d_\sigma < \infty, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.48)$$

**Annahme 3** Partielles Wissen über die unbekannte Eingangsverstärkung:

$$\omega \in \Omega_{\omega_0} = [\omega_{l_0}, \omega_{u_0}] \quad \wedge \quad \Omega_{\omega_0} \subset \Omega = [\omega_l, \omega_u], \quad (5.49)$$

wobei  $0 < \omega_{l_0} < \omega_{u_0}$  die untere und obere Schranke von  $\omega$  sind und  $\Omega$  für die Projektionsbeschränkungen so gewählt wird, dass gilt:  $0 < \omega_l < \omega_{l_0} < \omega_{u_0} < \omega_u$ . Das Verhältnis der Beschränkungen der beiden Mengen bestimmt den Amplitudenrand, der durch die Projektionsbeschränkungen beliebig groß gewählt werden kann:  $g_m = \left[ \frac{\omega_l}{\omega_{l_0}}, \frac{\omega_u}{\omega_{u_0}} \right]$ . [HC10, S.37,59]

**Regelungsziel:** Das Regelungsziel ist es, eine adaptive Zustandsrückführung so zu entwerfen, dass  $y(t)$  einem gegebenen beschränkten stückweise stetigen kontinuierlichen Referenzsignal  $r(t)$  mit quantitativ bestimmbarer Performance-Schranken folgt.

**Regelkreisarchitektur:** Die erweiterte  $\mathcal{L}_1$ -Regelkreisarchitektur ist im Blockschaltbild aus Abbildung 5.12 dargestellt. Auffällig ist, dass sich die Bandbreitenbegrenzung  $C(s)$  im Vergleich zum Ansatz aus 5.1 etwas unterscheidet. Die Ursache hierfür ist, dass aufgrund der unbekannten Eingangsverstärkung die Architektur des  $\mathcal{L}_1$ -Reglers leicht verändert werden musste, um diese schätzen zu können. Im Wesentlichen kann jedoch die Übertragungsfunktion des Filters auf eine sehr ähnliche Ein-/Ausgangsdarstellung geführt werden wie bei  $C(s)$  aus Kapitel 5.1 mit dem Unterschied, dass sich  $\hat{\omega}$  zeitlich ändern kann. Für das Filter  $C(s)$  sei eine positive Verstärkung  $k > 0$  und eine strikt propere Übertragungsfunktion  $D(s)$  angenommen, sodass

$$C(s) = \frac{\hat{\omega}(s)kD(s)}{1 + \hat{\omega}(s)kD(s)} \quad (5.50)$$

eine strikt propere stabile Übertragungsfunktion mit stationärer Verstärkung  $C(0) = 1$  für alle  $\hat{\omega}(s) \in \Omega$  ist (zur Herleitung des Filters siehe A.3). Die Wahl von  $k$  und  $D(s)$  muss gewährleisten, dass die  $\mathcal{L}_1$ -Norm Bedingungen aus (5.8) und (5.9) nicht verletzt werden.

Ferner verwenden wir den Zustandsschätzer

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_m \hat{x}(t) + b \left( \hat{\omega}(t) u(t) + \hat{\theta}^T(t) x(t) + \hat{\sigma}(t) \right), \quad \hat{x}(0) = x_0, \\ \hat{y}(t) &= c^T \hat{x}(t),\end{aligned}\tag{5.51}$$

während die Adaptionsgesetze

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}(t) &= \Gamma P \text{Proj}(\hat{\theta}(t), -\tilde{x}^T(t) P b x(t)), \quad \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0, \\ \dot{\hat{\sigma}}(t) &= \Gamma P \text{Proj}(\hat{\sigma}(t), -\tilde{x}^T(t) P b), \quad \hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}_0, \\ \dot{\hat{\omega}}(t) &= \Gamma P \text{Proj}(\hat{\omega}(t), -\tilde{x}^T(t) P b u(t)), \quad \hat{\omega}(0) = \hat{\omega}_0,\end{aligned}\tag{5.52}$$

lauten. Hierbei bezeichnen  $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  den Schätzfehler,  $\Gamma \in \mathbb{R}^+$  die Adaptionsverstärkung und  $P = P^T > 0$  die Lösung der algebraischen Lyapunovgleichung  $A_m^T P + P A_m = -Q$  für beliebige  $Q = Q^T > 0$ .

Das Stellgesetz lautet

$$u(s) = -k D(s) (\hat{\eta}(s) - k_g r(s)), \tag{5.53}$$

wobei  $r(s)$  und  $\hat{\eta}(s)$  die Laplace-Transformierten von  $r(t)$  und von  $\hat{\eta}(t) = \hat{\omega}(t) u(t) + \hat{\theta}^T(t) x(t) + \hat{\sigma}(t)$  sind.

Der gesamte  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regler ist definiert durch die Gleichungen (5.51), (5.52) und (5.53). Das zugehörige Blockschaltbild ist in Abbildung 5.12 dargestellt. Damit sind die wichtigsten Bestandteile bzw. die Struktur des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers gegeben. Für die Definition des Referenzsystems und die Beweise von Performance-Schranken, die sich auf ähnliche Weise ermitteln lassen wie zuvor in Kapitel 5.1 gezeigt, sei auf [HC10] verwiesen.

## 5.2.2 Entwurf der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Zustandsrückführung für das Positioniersystem LP<sup>3</sup>S

Für den Entwurf adaptiver Positions-Festwertregelungen für den planaren Präzisionspositionierer wird zunächst das Systemmodell aus Kapitel 3 wiederholt. Das Modell des Planarmotors für die  $x$ -Richtung kann unter Berücksichtigung von Störungen  $\bar{\sigma}(t)$

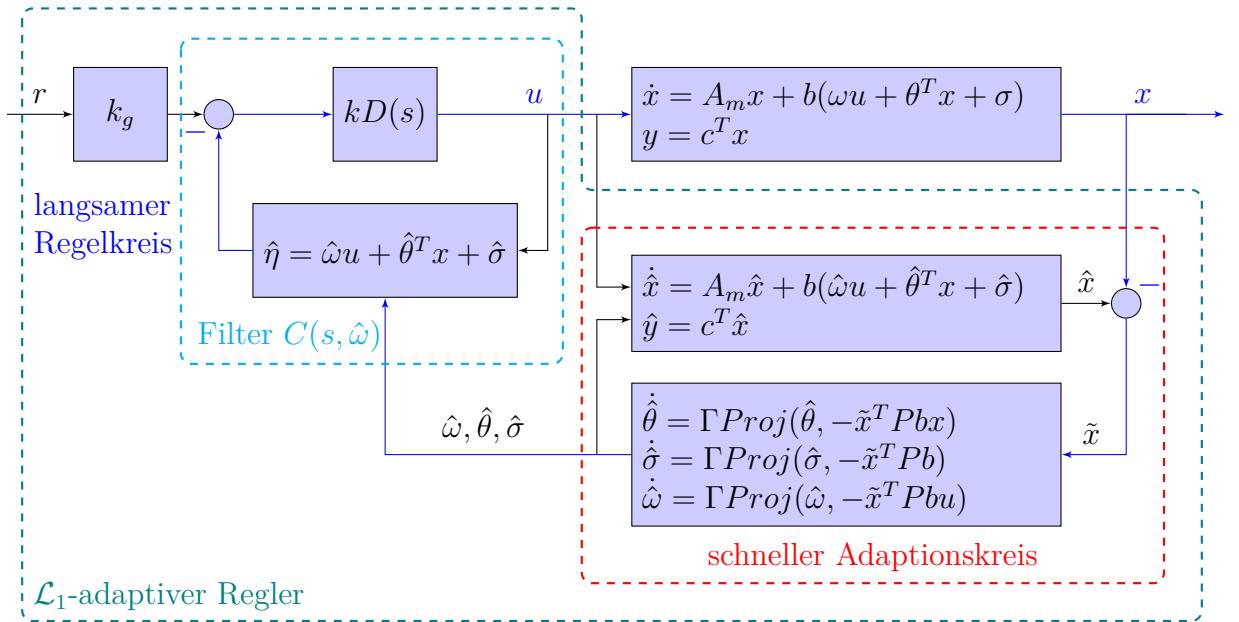


Abbildung 5.12: Geschlossener Regelkreis des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Systems für Regelstrecken mit unbekannter Eingangsverstärkung in Anlehnung an [HC10] (aus Platzgründen wird auf die Abhängigkeiten von  $t$  verzichtet).

(siehe Abbildung 3.4) beschrieben werden durch:

$$\begin{aligned}m\ddot{x}(t) + \mu_x \dot{x}(t) &= 2\epsilon K_{mx} i_{s_x}(t) + \bar{\sigma}(t) \\ \Leftrightarrow \ddot{x}(t) &= \frac{2\epsilon K_{mx} i_{s_x}(t) - \mu_x \dot{x}(t)}{m} + \sigma(t).\end{aligned}\tag{5.54}$$

Dabei seien die Parameter  $K_{mx}$ ,  $\epsilon$ ,  $m$  und  $\mu_x$  als unsicher angenommen und

$$\sigma(t) = \frac{\bar{\sigma}(t)}{m}\tag{5.55}$$

unbekannte Störungen. Daraus lässt sich das Zustandsraummodell für die Regelstrecke ablesen:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu_x}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\epsilon K_{mx}}{m} \end{pmatrix} i_{s_x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t).\end{aligned}\tag{5.56}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass sich das System mit seinen jeweiligen Unsicherheiten in die in (5.46) angegebene Systemklasse zerlegen lässt. Somit kann das zuvor beschriebene  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regelungsverfahren angewandt werden.

Um mit dem Entwurf fortfahren, definieren wir uns ein Referenzmodell, dessen Dynamik vom  $\mathcal{L}_1$ -Regler verfolgt werden soll. Das Referenzmodell soll mit der Übertragungsfunktion

$$M(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \quad (5.57)$$

$PT_2$ -Charakter haben. Hierbei beschreibt  $K$  die Verstärkung,  $T$  die Zeitkonstante und  $\xi$  die Dämpfung.  $A_m$  erhält man aus der Zustandsraum-Realisierung der Übertragungsfunktion  $M(s)$ :

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{-2\xi}{T} \end{pmatrix}, \quad b_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_m^T = \begin{pmatrix} K & 0 \end{pmatrix}, \quad d_m = 0. \quad (5.58)$$

Da für das ideale Ein-/Ausgangsverhalten im geschlossenen Regelkreis eine stationäre Verstärkung von 1 und für das transiente Verhalten kein Überschwingen gewünscht ist, wählen wir die Parameter  $K = 1$  und  $\xi = 1.2$ . Die nun noch frei wählbare Zeitkonstante  $T$  soll im Folgenden so bestimmt werden, dass für sprungförmige Sollgrößen die Stellgrößenbeschränkung der Leitungssysteme mit  $|i_{x_{i,j}}(t)| \leq 3A$  stets eingehalten wird. Im kommutierten Betrieb ergibt sich schließlich für den Stelleingang in  $x$ -Richtung  $|i_{s_x}| \leq 3A$ . Um den Einfluss der Referenzdynamik auf die Stellgröße zu bestimmen, betrachten wir die Stellsensitivität  $S_u(s)$ . Diese kann unabhängig von der Reglerübertragungsfunktion als Quotient des gewünschten Führungsverhaltens (hier  $M(s)$ ) und der Streckenübertragungsfunktion  $A_x(s)$  zu

$$S_u(s) = \frac{M(s)}{A_x(s)} = \frac{K(ms^2 + \mu_x s)}{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)2\epsilon K_{mx}} \quad (5.59)$$

ermittelt werden. Anschließend wird der Betrag

$$|S_u(jw)| = \frac{K\sqrt{m^2\omega^4 + \mu_x^2\omega^2}}{2\epsilon K_{mx}\sqrt{1 - 2T^2\omega^2 + T^4\omega^4 + 4T^2\omega^2\xi^2}} \quad (5.60)$$

für alle Frequenzen  $\omega \geq 0$  über die unsicheren Streckenparameter sowie der freien Variable  $T$  bzgl. einer Ungleichungsnebenbedingung maximiert. Das Optimierungsproblem kann folgendermaßen formuliert werden

$$\max_{T, m, K_{mx}, \mu_x, \epsilon} |S_u(j\omega)| \quad \forall \omega \geq 0 \quad (5.61)$$

bzgl. der Ungleichungsnebenbedingung  $|S_u(j\omega)| \leq \delta_u$ , wobei sich  $\delta_u$  aus der Spezifikation der höchstmöglichen Referenzsprunghöhe ( $r_{max} = 0.14$  m vom linken zum rechten Rand) sowie der Stellgrößenbeschränkung ( $u_{max} = \pm 3$  A) zusammensetzt.

Der Betrag der Stellsensitivität  $|S_u(j\omega)|$  nimmt offensichtlich zu, je größer  $m, \mu_x$  und je kleiner  $K_{mx}, \epsilon$  sind. Demnach setzen wir mit Blick auf Tabelle 3.1 die Parameter

$$K_{mx} = 0.8 \frac{N}{A}, \quad m = 30 \text{ kg}, \quad \mu_x = 14 \frac{\text{kg}}{\text{s}}, \quad \epsilon = 0.7 \quad (5.62)$$

in Gleichung (5.59) bzw. (5.60) ein und erhalten eine Übertragungsfunktion, die nun mehr nur noch von  $T$  abhängt. Um ferner 20% der Stellgröße für die Kompensation von Störungen zu reservieren wählen wir den Parameter  $\delta_u$  zu:

$$\delta_u = 0.8 \frac{u_{max}}{r_{max}}. \quad (5.63)$$

Mit  $u_{max} = 3$  und  $r_{max} = 0.14$  (dem Verfahrbereich der Nanopositioniermaschine in  $x$ -Richtung) ergibt sich:

$$\begin{aligned} |S_u(j\omega, T)| &\leq \frac{1}{0.14} \cdot 0.80 \cdot 3A \\ &\Rightarrow T \geq 1.25. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Mit der Wahl  $T = 1.25$  ergibt sich die Dynamikmatrix  $A_m$  zu:

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \underbrace{-0.64}_{-a_{m0}} & \underbrace{-1.92}_{-a_{m1}} \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

Als nächstes kann die Problemformulierung aus (5.46) vorgenommen werden. Mit der Wahl von  $A_m$  wie in (5.65),  $\sigma(t)$  wie in (5.55) und

$$\begin{aligned} b &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \theta^T = \begin{pmatrix} a_{m0} + 0 & a_{m1} - \frac{\mu_x}{m} \end{pmatrix}, \\ \omega &= \frac{2\epsilon K_{mx}}{m}, \quad c^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.66)$$

ist die  $\mathcal{L}_1$  Problemformulierung aus (5.46) vollkommen beschrieben:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_m x(t) + b \left( \omega u(t) + \theta^T(t) x(t) + \sigma(t) \right) \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= c^T x(t). \end{aligned}$$

Nach dem Entwurf des Referenzmodells können wir nun die konvexen, kompakten Mengen  $\Theta_0$ ,  $\Omega_{\omega_0}$  und  $\Delta_0$  bestimmen, die indirekt für die Projektionsschätzgesetze benötigt werden. Sie lassen sich aus 5.66, Tabelle 3.1 und Abbildung 3.4 zu

$$\Theta_0 = \{\nu_0 = (\nu_{01} \quad \nu_{02})^T \in \mathbb{R}^2 : \nu_{01} = 0.64 \wedge \nu_{02} \in [1.1832, 1.92]\}, \quad (5.67)$$

$$\Omega_{\omega_0} = [\min_{\epsilon, K_{mx}, m} \frac{2\epsilon K_{mx}}{m}, \max_{\epsilon, K_{mx}, m} \frac{2\epsilon K_{mx}}{m}] = [0.0373, 0.3284], \quad (5.68)$$

$$\Delta_0 = \max_{\bar{\sigma}, m} \frac{\bar{\sigma}(t)}{m} \approx \frac{2}{19} = 0.1053 \quad (5.69)$$

bestimmen. Daraufhin werden die Parameter  $\epsilon_{\hat{\theta}}$ ,  $\epsilon_{\hat{\omega}}$  und  $\epsilon_{\hat{\sigma}}$  für die Projektions-Operatoren aus den Adoptionsgesetzen (5.52) festgelegt zu:

$$\epsilon_{\hat{\theta}} = 0.1, \quad \epsilon_{\hat{\omega}} = 0.1, \quad \epsilon_{\hat{\sigma}} = 0.1. \quad (5.70)$$

Als nächstes wird  $\Omega$  nach (5.49) gewählt zu

$$\Omega = [0.0311, 0.3941], \quad (5.71)$$

sodass der Amplitudenrand  $g_m = [\omega_l/\omega_{l0}, \omega_u/\omega_{u0}] = [1/1.2, 1.2]$  entsteht. Als Schranke für den Projektions-Operator ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \omega_{Pmax} &= \frac{\max_{\omega \in \Omega} \omega - \min_{\omega \in \Omega} \omega}{2} = 0.1815, \\ \omega_{Pcenter} &= \omega_{Pmax} + \min_{\omega \in \Omega} \omega = 0.2126, \end{aligned} \quad (5.72)$$

wobei  $\omega_{Pcenter}$  die Mitte der Menge  $\Omega_1$  des Projektions-Operators beschreibt. Auf diese Weise stellt der Projektions-Operator sicher, dass  $\forall t \geq 0$  gilt:

$$\min_{\omega \in \Omega} \omega \leq \hat{\omega}(t) \leq \max_{\omega \in \Omega} \omega. \quad (5.73)$$

Als nächstes wird die Projektions-Schranke  $\theta_{Pmax}$  bestimmt:

$$\theta_{Pmax} = \max_{\theta \in \Theta_0} \|\theta\|_2 \sqrt{1 + \epsilon_{\hat{\theta}}} = \left\| \begin{pmatrix} 0.64 \\ 1.92 \end{pmatrix} \right\|_2 \sqrt{1 + 0.1} = 2.1226. \quad (5.74)$$

Aufgrund eines Fehlers, der erst sehr spät entdeckt wurde, wurden die Simulationen mit einer etwas konservativeren Projektionsbeschränkung von  $\theta_{Pmax} = 2.56$  ausgeführt.

Aus diesem Grund wird  $\Theta$  konservativ gewählt zu:

$$\Theta = \{\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : \nu_1 = [-2.56, 2.56] \wedge \nu_2 \in [-2.56, 2.56]\}. \quad (5.75)$$

Aus (5.75) ergibt sich:

$$L = \max_{\theta \in \Theta} \|\theta\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 2.56 \\ 2.56 \end{pmatrix} \right\|_1 = 5.12. \quad (5.76)$$

Um die Einhaltung der  $\mathcal{L}_1$ -Stabilitätsbedingung aus (5.8) für eine bestimmte Bandbreite des Filters  $C(s)$  zu überprüfen, wird zunächst  $H(s)$  und  $G(s)$  aus (5.9) mit  $D(s) = 1/s$  berechnet zu:

$$H(s) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s^2 + 1.92s + 0.64 & (s^2 + 1.92s + 0.64) \end{pmatrix}^T \quad (5.77)$$

$$G(s) = \left( 1 - \frac{\omega k D(s)}{1 + \omega k D(s)} \right) H(s) = \frac{s}{s + \omega k} H(s) \quad (5.78)$$

Anschließend wird  $\lambda$  (aus (5.8)) für unterschiedliche  $\omega k$  berechnet. Die Aktuatorband-

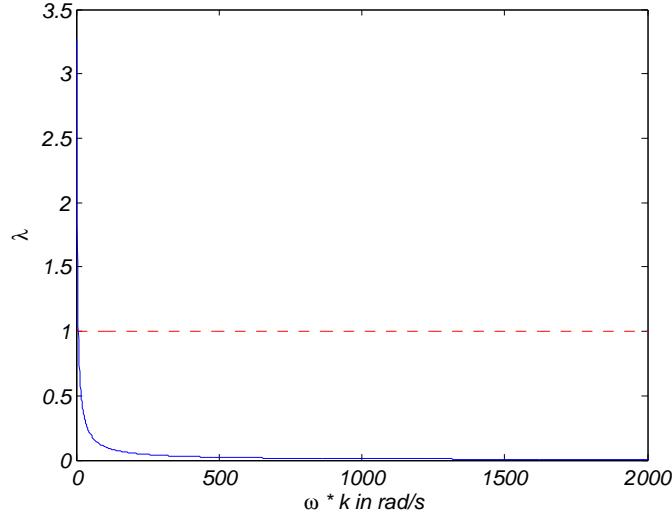


Abbildung 5.13: Berechnung von  $\lambda$  für unterschiedliche  $\omega k$ .

breite der Nanopositioniermaschine beträgt  $2 \text{ kHz} \approx 12566 \text{ rad/s}$ . Abbildung 5.13 zeigt, dass bereits bei ca.  $100 \text{ rad/s}$   $\lambda$  sehr klein und somit die Performance sehr gut ist. Die  $\mathcal{L}_1$ -Norm Bedingung ist schon ab ca.  $8 \text{ rad/s}$  erfüllt. Als nächstes wird für  $C(s)$  die maximal mögliche Bandbreite  $12566 \text{ rad/s}$  angenommen, um die bestmögliche Perfor-

mance zu erlangen. Denn je größer die Bandbreite von  $C(s)$  ist, desto besser ist die Performance im Sinne kleiner Abweichungen vom Referenzmodell. Dieser Performancegewinn geht allerdings mit einer Verminderung der Robustheit einher. Anschließend muss geprüft werden, ob die von der Firma TETRA vorgegebene Totzeit-Toleranz (*time-delay margin*) von  $\mathcal{T} = 0.002$  s für  $\omega_k = 12566$  rad/s für alle  $\theta \in \Theta$  eingehalten wird. Dazu wird die offene Kette  $L_o$  eines linearen Systems berechnet, das mit dem nichtlinearen adaptiven geschlossenen Regelkreis verwandt ist, bei dem jedoch alle Nichtlinearitäten herausgezogen und als Störung  $\tilde{\eta}_l(t)$  angesehen werden (siehe [HC10, S.47-51]). Ebenso wird der Einfluss der Totzeit als Störung  $\nu_l(t)$  modelliert, um so gewisse Vorzüge beim Stabilitätsbeweis zu erhalten. Es kann gezeigt werden, dass der berechnete Phasenrand bzw. die berechnete Totzeit-Toleranz dieser offenen Kette eine untere Schranke für den Phasenrand bzw. die Totzeit-Toleranz des nichtlinearen adaptiven geschlossenen Regelkreises bildet (siehe Beweis in [HC10]). Dazu muss jedoch gewährleistet sein, dass  $\Delta$  hinreichend groß gewählt ist, um die durch die Totzeit induzierte Störung  $\nu_l(t)$  schätzen zu können. Es wird daher das Korollar 2.2.1 aus [HC10, S.59] angewandt, welches besagt, dass die Stabilität des geschlossenen adaptiven Regelkreises gesichert ist, wenn  $\Gamma$  und  $\Delta$  ausreichend groß gewählt werden. Daher wählen wir:

$$\Gamma = 10^5, \quad \Delta = 10^3.$$

Für den Projektions-Operator der Schätzung der Störung folgt nun die Schranke:

$$\sigma_{P_{max}} = \Delta = 10^3. \quad (5.79)$$

Es sei darauf verwiesen, dass, falls die Performance-Schranken sehr genau bestimmt werden sollen,  $\Delta$  alternativ auch weniger konservativ berechnet werden kann, was jedoch sehr aufwendig ist [HC10, S.52]. Die offene Kette des linearen verwandten Systems ist:

$$L_o = \frac{C(s)}{1 - C(s)} \left( 1 + \theta^T \bar{H}(s) \right), \quad (5.80)$$

wobei

$$\bar{H}(s) = (s\mathbb{I} - A_m - b\theta^T)^{-1} b \quad (5.81)$$

und  $\theta \in \Theta$  ist. Die Totzeit-Toleranz kann, wie in der linearen Systemanalyse, aus dem

Quotienten des Phasenrands  $\Phi_m$  sowie der Durchtrittsfrequenz  $\omega_{gc}$  von  $L_o$  berechnet werden zu:

$$\mathcal{T} = \frac{\Phi_m}{\omega_{gc}}. \quad (5.82)$$

Anschließend gilt es, ein Minimierungsproblem zu lösen, da die geringste Totzeit-Toleranz für alle  $\theta \in \Theta$  ermittelt werden muss. Um einen Weg aufzuzeigen, der auch bei Systemen höherer Ordnung einfach und schnell angewandt werden kann, wurde dieses Problem mittels eines genetischen Algorithmus aus der Matlab Optimization Toolbox gelöst.

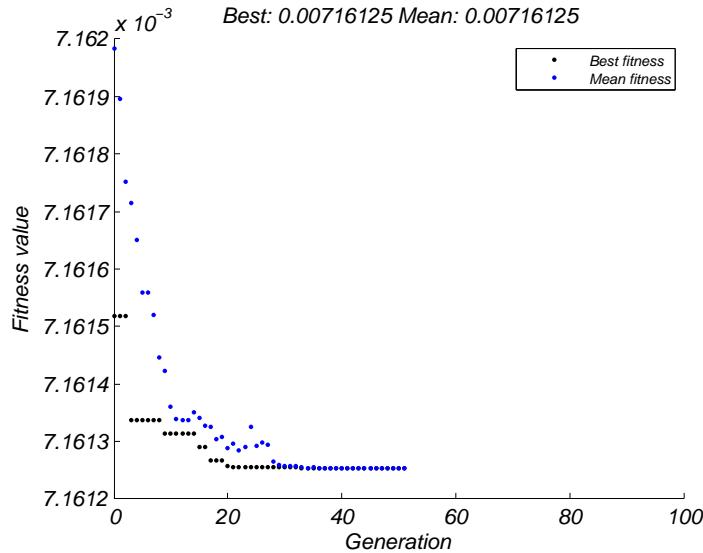


Abbildung 5.14: Ergebnis der Minimierung durch einen genetischen Algorithmus.

Als Ergebnis der numerischen Optimierung (siehe Abbildung 5.14) erhält man

$$\mathcal{T} = 7.16 \text{ ms} \quad (5.83)$$

als untere Schranke für die Totzeit-Toleranz, welche bei  $\theta^T = (-2.56 \quad 2.56)$  auftritt. Die geforderte Robustheit gegenüber Totzeiten zwischen 0 ms und 2 ms ist somit für  $\omega k = 12566 \text{ rad/s}$  und alle  $\theta \in \Theta$  gegeben.

Nun kann der Designparameter  $k$  gewählt werden zu:

$$\max_{\omega \in \Omega} \omega k = 12566 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Leftrightarrow 0.3941 \frac{\text{rad}}{\text{s}} k = 12566 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow k = 31885. \quad (5.84)$$

Da  $\min_{\omega \in \Omega} \omega = 0.0311$  rad/s ist, bewegt sich die Bandbreite von  $C(s)$  innerhalb von  $0.0311 \cdot 31885$  rad/s  $\approx 991.62$  rad/s  $\approx 157.82$  Hz und 2000 Hz. Erneut wird angemerkt, dass für eine geringere Bandbreite von  $C(s)$  die Robustheit zunimmt. Aus diesem Grund ist die geforderte Robustheit von 2 ms für alle  $\omega k$  und für alle  $\theta \in \Theta$  gegeben. Ferner beträgt  $\lambda \approx 0.0113$  für  $\omega k = 991.62$  rad/s, was bedeutet, dass die Performanceschranke  $\|y_{des} - y_{ref}\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$  des Designsystens (5.35), welches auch für diesen Regler verwendet werden kann, selbst bei der niedrigsten Bandbreite von  $C(s)$  sehr klein sein wird. Schließlich wird  $k_g$  berechnet zu:

$$k_g = -\frac{1}{c^T A_m^{-1} b} = 0.64. \quad (5.85)$$

### 5.2.3 Simulationsergebnisse

Mit dem soeben entworfenen  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regler wurden die Sprungantworten für unterschiedliche Regelstreckenparameter und Totzeiten aufgenommen und mit dem Designsysten aus (5.35) verglichen. Dabei wurde

$$C(s) = \frac{12566}{s + 12566}$$

gewählt, damit das Designsysten die bestmögliche Performance des geschlossenen adaptiven Regelkreises widerspiegelt.

In Abbildung 5.15 sind die Systemantwort des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreises auf einen Sprung bei  $t = 1$ , die Differenz  $e(t)$  zu dem Designsysten, die Stellgröße  $u(t)$  und die Parameterschätzungen  $\hat{\theta}(t)$ ,  $\hat{\omega}(t)$  und  $\hat{\sigma}(t)$  dargestellt. Dazu wurden für  $K_{mx}$ ,  $\mu_x$  und  $m$  die an der Nanopositioniermaschine von TETRA ermittelten Parameterwerte aus Tabelle 3.1 verwendet. Zudem wurde  $\epsilon = 1$  gewählt. Die tatsächlichen Parameter von  $\theta$  und  $\omega$  ergeben sich somit nach (5.66) zu:

$$\theta^T = \begin{pmatrix} 0.64 & 1.5457 \end{pmatrix}, \quad (5.86)$$

$$\omega = \frac{2\epsilon K_{mx}}{m} = 0.1686. \quad (5.87)$$

Vergleicht man diese Werte mit den Schätzungen aus Abbildung 5.15, erkennt man, dass diese stark von den tatsächlichen Werten abweichen. Es lässt sich beobachten, dass der stellgrößenorientierte Entwurf des Designsystens dafür gesorgt hat, dass die Stellgrößen wie gewünscht im Bereich zwischen  $[-2.4A, 2.4A]$  bleiben. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Stellgröße bereits vor dem Sprung bei  $t = 1$  oszilliert. Der Grund hierfür ist, dass ein realistisches Störmodell verwendet wurde, um die Performance

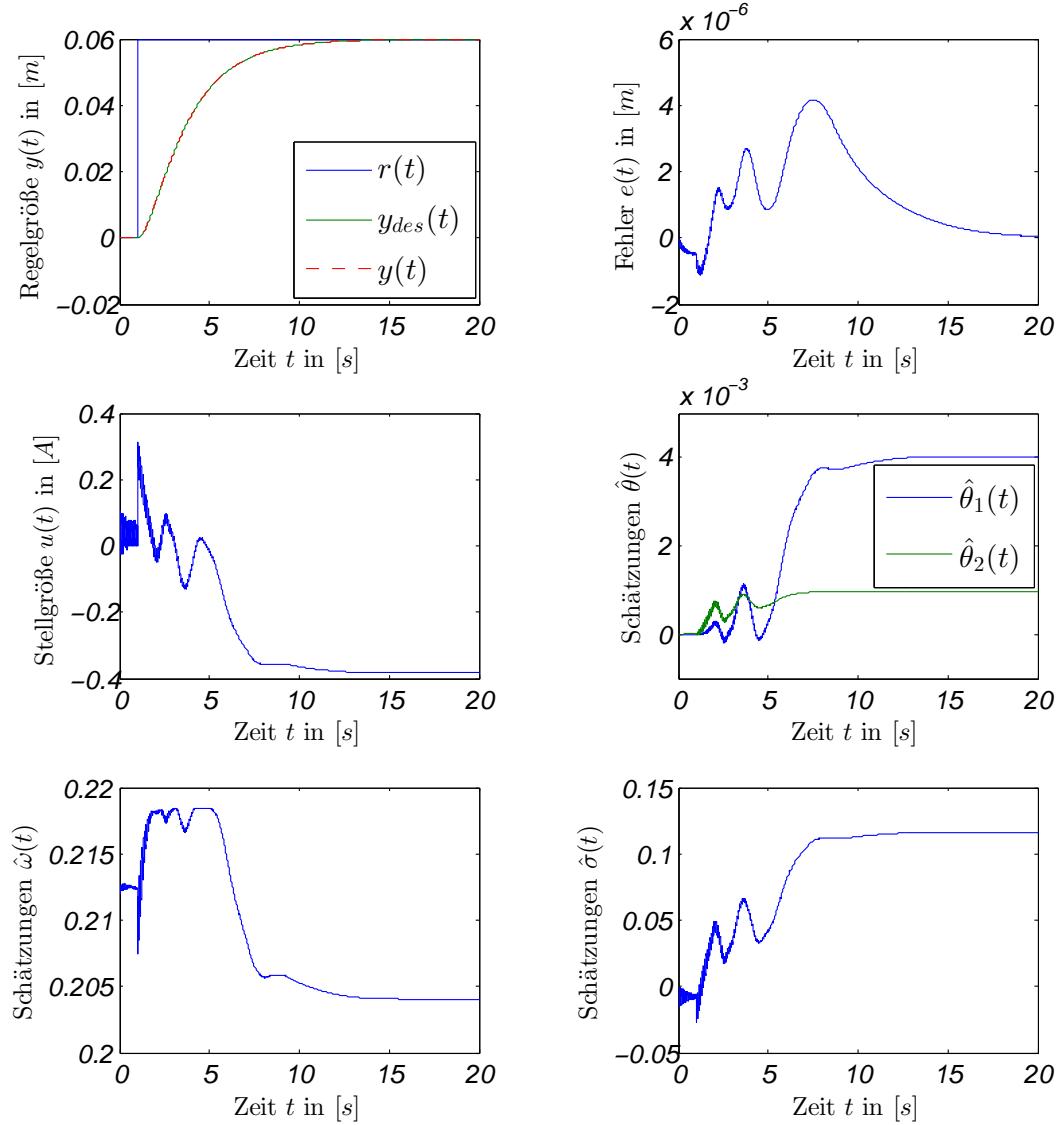


Abbildung 5.15: Sprungantwort  $y(t)$ , Differenz zum Designssystem  $e(t)$ , Stellgröße  $u(t)$  und Parameterschätzungen  $\hat{\theta}(t)$ ,  $\hat{\omega}(t)$ ,  $\hat{\sigma}(t)$  des geschlossenen adaptiven Regelkreises.

des  $\mathcal{L}_1$ -Reglers zu untersuchen. Dieses Verhalten ist folglich durch eine Anregung des Regelkreises aufgrund von Störungen (bspw. Hangabtriebskräfte) begründet (siehe Kapitel 3). Zudem lässt sich noch die Beschränktheit der Parameterschätzungen und des Fehlers  $e(t)$  sowie die Konvergenz von  $e(t) \rightarrow 0$  beobachten. Offensichtlich wird trotz des Vorhandenseins starker eingangsseitiger Störungen sowie parametrischer Unsicherheiten das transiente Verhalten des Designssystems nahezu perfekt verfolgt.

Abbildung 5.16 zeigt den Regelkreis mit derselben Regelstrecke, jedoch mit einer

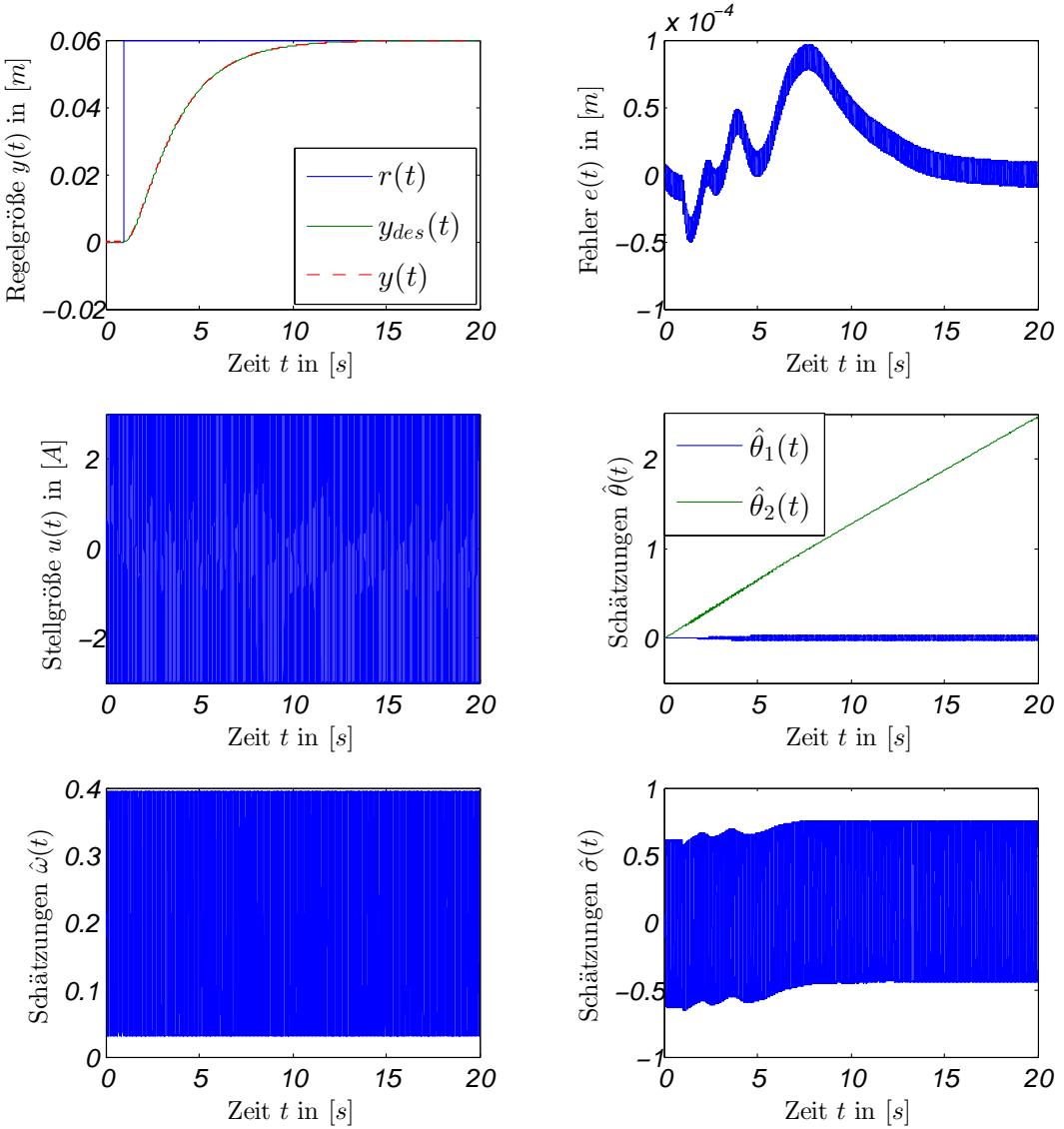


Abbildung 5.16: Sprungantwort  $y(t)$ , Differenz zum Designsystem  $e(t)$ , im Bereich  $[3, -3]$  A gesättigte Stellgröße und Parameterschätzungen  $\hat{\theta}(t), \hat{\omega}(t), \hat{\sigma}(t)$  des geschlossenen adaptiven Regelkreises mit einer Totzeit von  $\tau = 2$  ms und der Wahl  $k = 31885$ .

zusätzlichen Totzeit von  $\tau = 2$  ms. Es ist zu erkennen, dass der maximale Fehler  $e(t)$  etwa 25-fach größer ist. Dennoch bleibt  $e(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  in Form einer Dauerschwingung um die Ruhelage  $e_R = 0$  wie erwartet beschränkt. Die Amplitude der Dauerschwingung beträgt in etwa  $10 \mu\text{m}$ .

Die Stellgröße erreichte in der Simulation aufgrund der Totzeit und der hohen Bandbreite von  $C(s)$  Größen über  $500 \text{ A}$ , weshalb sie durch ein Sättigungsglied auf  $[-3A, 3A]$

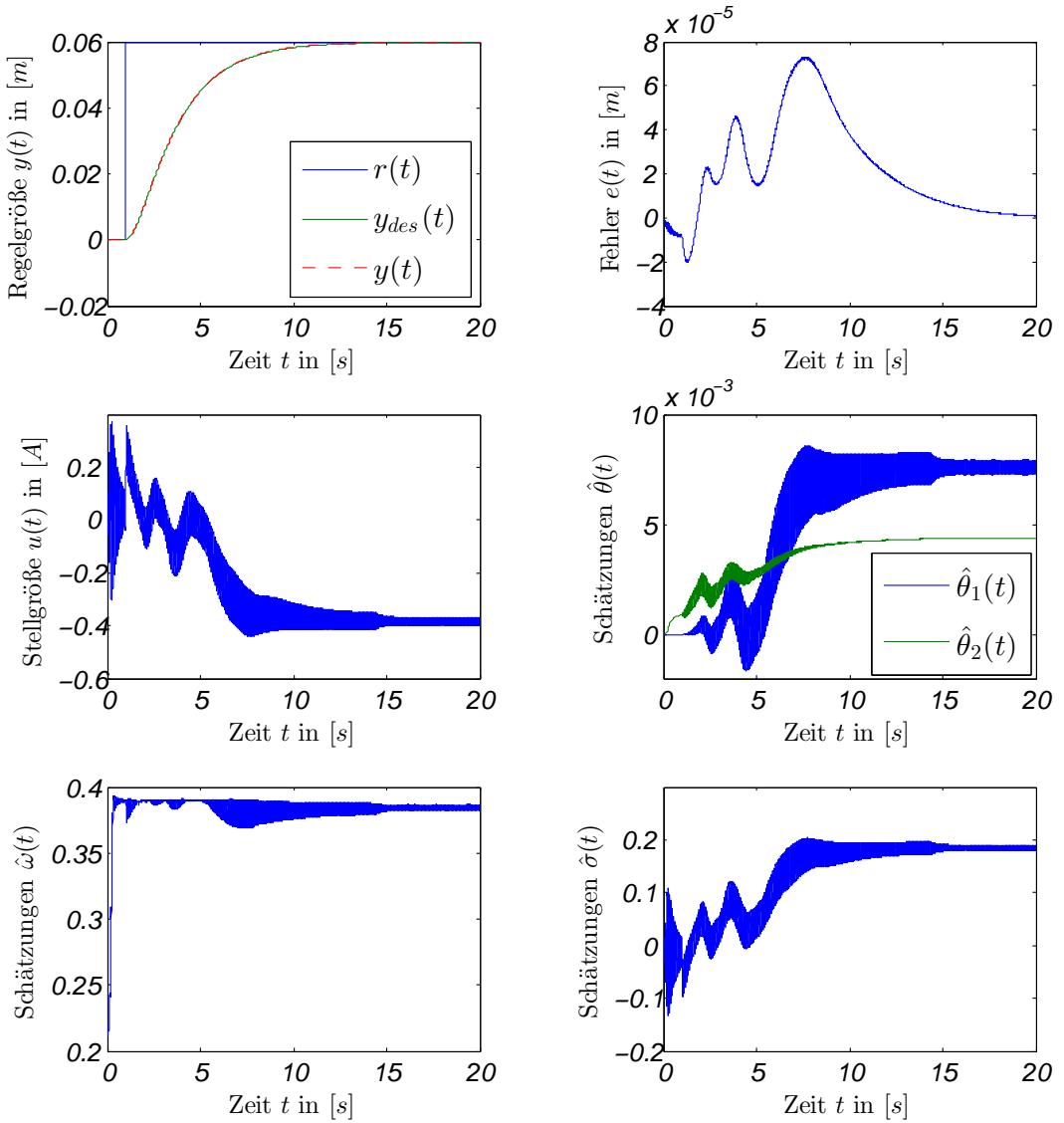


Abbildung 5.17: Sprungantwort  $y(t)$ , Differenz zum Designssystem  $e(t)$ , Stellgröße  $u(t)$  und Parameterschätzungen  $\hat{\theta}(t), \hat{\omega}(t), \hat{\sigma}(t)$  des geschlossenen adaptiven Regelkreises mit einer Totzeit von  $\tau = 2$  ms und der Wahl  $k = 1750$ .

beschränkt wurde. Diese Stellbegrenzung wurde direkt nach dem Filter  $C(s)$  eingefügt, sodass der Zustandsschätzer die gleiche Stellgröße erhält wie die Regelstrecke. Es lässt sich auch noch eine sehr starke Oszillation der beschränkten Stellgröße beobachten. Diese lässt sich durch die Wahl einer geringeren Bandbreite des Filters  $C(s)$  verringern, wodurch sich jedoch auch die Performance für geringere Totzeiten verschlechtert (z.B. wird  $\|x_{ref}\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$  und  $\|x_{ref} - x\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$  größer).

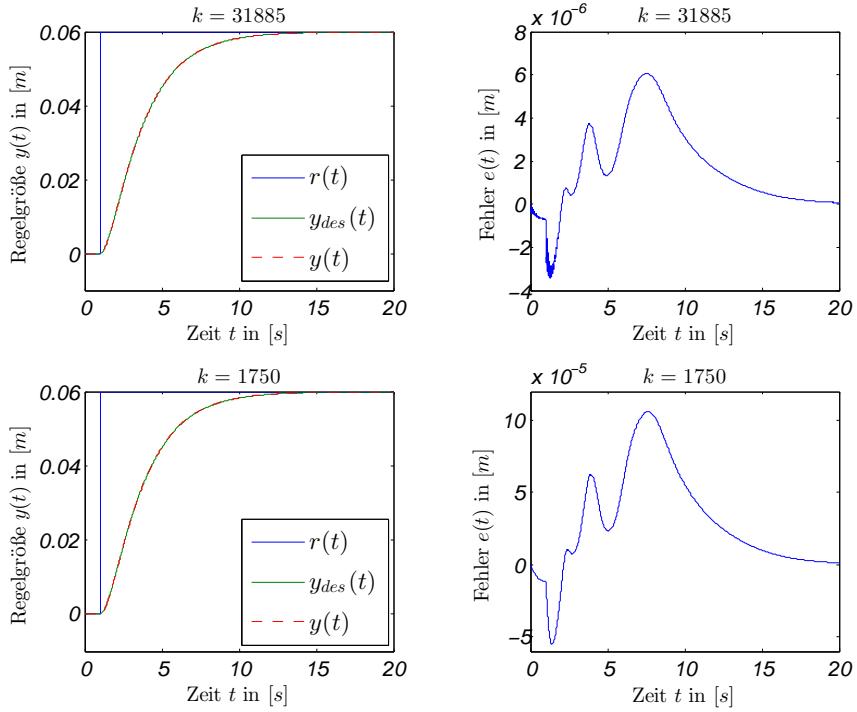


Abbildung 5.18: Vergleich der Sprungantworten und Fehler des geschlossenen adaptiven Regelkreises ohne Totzeit bei  $k = 31885$  und bei  $k = 1750$ , wobei die Eingangsverstärkung  $\omega_{l0}$  verwendet wurde.

Anschließend wurde mit dem Ziel, die Amplitude der Schwingungen von  $e(t)$  zu verringern, der Parameter  $k$  des Tiefpassfilters  $C(s)$  iterativ angepasst, sodass für  $t \rightarrow \infty$  gilt:  $|e(t)| < 100$  nm. Als Ergebnis dieser Anpassung erhält man  $k = 1750$ , wodurch die unteren und oberen Schranken der Bandbreite von  $C(s)$  bei  $\omega_l k = 54.44$  rad/s und  $\omega_u k = 689.68$  rad/s zu liegen kommen. Für die untere Schranke  $\omega_l k = 54.44$  rad/s erhält man  $\lambda \approx 0.1875$ , was bedeutet, dass die Stabilitätsbedingung aus (5.8) erfüllt ist. Die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises mit  $k = 1750$  und der Totzeit  $\tau = 2$  ms ist in Abbildung 5.17 dargestellt. Die maximal zulässige Totzeit für den neu parametrierten Regler wurde errechnet zu  $\mathcal{T} = 130.18$  ms.

Beim Vergleich von Abbildung 5.16 und Abbildung 5.17 lässt sich beobachten, dass der maximale Fehler bei der Wahl  $k = 1750$  unter einer Totzeit von  $\tau = 2$  ms etwas geringer ist. Der Grund hierfür ist, dass durch die Stellbegrenzung bei dem Regler mit  $k = 31885$  hochfrequente eingangsseitige Störungen entstehen, welche schwierig auszuregeln sind. Die Gegenüberstellung der zuletzt betrachteten Regler in Abbildung 5.18 zeigt jedoch, dass im Fall ohne Totzeit der Regler mit  $k=31885$  im Vergleich zum Regler mit  $k=1750$  geringere Abweichungen vom Referenzmodell aufweist. Hier erkennt

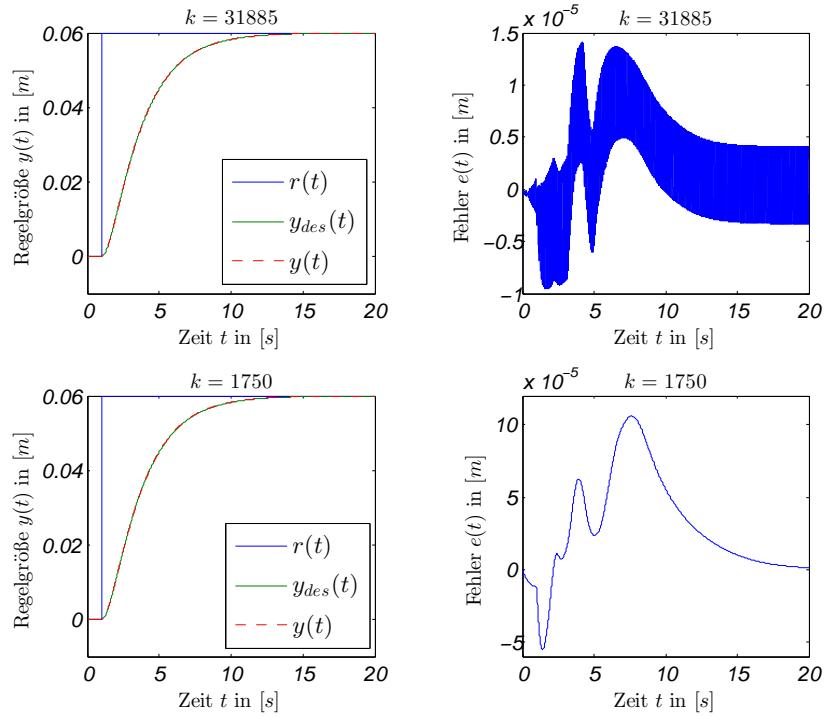


Abbildung 5.19: Vergleich der Sprungantworten und Fehler des geschlossenen adaptiven Regelkreises mit der Totzeit  $\tau = 0.5$  ms bei  $k = 31885$  und bei  $k = 1750$ , wobei die Eingangsverstärkung  $\omega_{l0}$  verwendet wird.

man, dass der Regler mit  $k = 31885$  einen um das ca. 18-fache geringeren maximalen Fehler und eine insgesamt bessere Performance hat. Offensichtlich benötigt man in der Anwesenheit von Totzeiten eine höhere Robustheit. Um diese zu erlangen muss die Filterbandbreite für  $C(s)$  geringer gewählt werden, wodurch sich jedoch die Performance für den Fall ohne Totzeit verschlechtert. Totzeiten von 2 ms sind jedoch selten und nur eine konservative Schätzung der maximalen Totzeit, die Stabilität gewährleisten soll. Im Gegensatz hierzu können Totzeiten von 0.5 ms und 1 ms gelegentlich auftreten. Abbildung 5.19 zeigt daher den Vergleich der Sprungantworten und den Fehler bei einer Totzeit von 0.5 ms. Es ist zu erkennen, dass die Performance des Reglers mit  $k = 31885$  bei dieser Totzeit immer noch besser ist, als die des Reglers mit  $k = 1750$ .

Welche Parametrierung von  $C(s)$  sich in der Praxis eignet, kann in den Simulationen nicht gänzlich beurteilt werden und muss direkt am Versuchsstand untersucht werden. Ein Grund hierfür ist, dass nicht genau bekannt ist, ob Totzeiten auftreten, ob diese konstant oder zeitvariant sind und wie groß diese sind. Der Reglerparameter  $k$  sollte somit zunächst für die beste Performance größtmöglich angesetzt werden und für mehr Robustheit gegenüber auftretenden Totzeiten stückweise verringert werden.

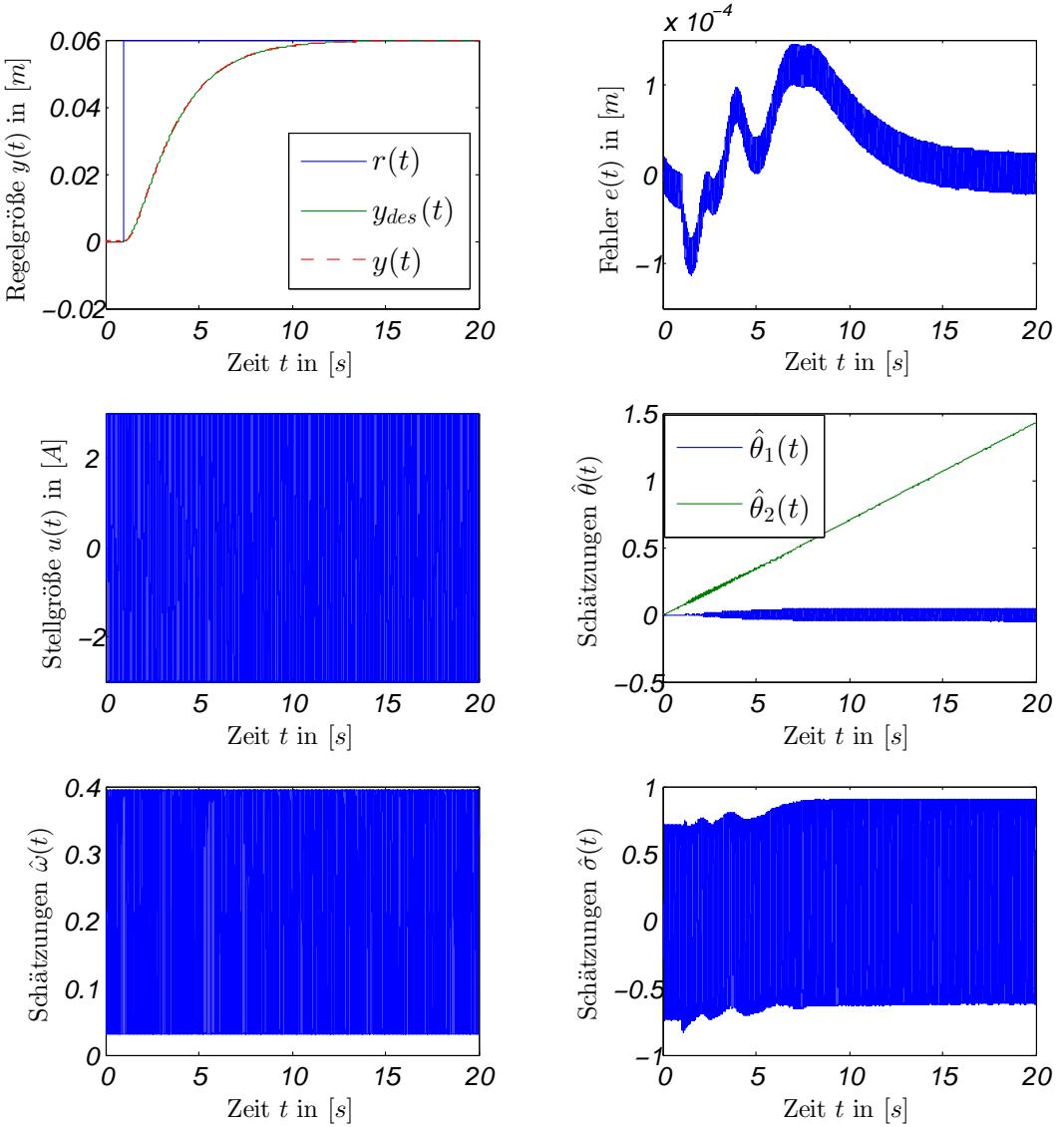


Abbildung 5.20: Extrembeispiel: Sprungantwort  $y(t)$ , Differenz zum Designsystem  $e(t)$ , im Bereich  $[3, -3]$  A gesättigte Stellgröße  $u(t)$  und Parameterschätzungen  $\hat{\theta}(t), \hat{\omega}(t), \hat{\sigma}(t)$  des geschlossenen adaptiven Regelkreises unter einer maximalen Totzeit von  $\tau = 7.16$  ms, maximaler Dämpfung  $\mu_x = 14$  kg/s und einer minimalen Eingangsverstärkung  $\omega_{l0} = (2\epsilon_{min} K_{mx_{min}})/m_{max} = 0.0373$ .

Um die Fähigkeiten des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers im Falle extremer Unsicherheiten und Totzeiten zu untersuchen, wird zuletzt ein Extrembeispiel für den Regler mit  $k = 31885$  gezeigt. Dieses ist in Abbildung 5.20 zu sehen. Hierbei hat die Regelstrecke die minimale Eingangsverstärkung  $\omega_{l0}$ , die maximale Dämpfung  $\mu_x = 14$  kg/s und wird durch die maximale Totzeit  $\tau = 7.16$  ms gestört, bei der die Stabilität des geschlossenen Regel-

kreises noch gewährleistet werden kann. Es lässt sich beobachten, dass der Regelkreis wie erwartet stabil bleibt und die Regelgröße dem Designsystem folgt. Der Fehler hat sich jedoch stark erhöht und behält für  $t \rightarrow \infty$  Oszillationen mit einer Amplitude von ca.  $23 \mu\text{m}$  bei. Die Parameterschätzungen bleiben zwar dank des Projektions-Operators beschränkt, oszillieren jedoch sehr stark, genauso wie die Stellgröße.

Als Ergebnis der simulativen Untersuchungen lässt sich allgemein festhalten, dass theoretisch mit der Vergrößerung der Bandbreite von  $C(s)$  die Performance-Schranken von  $\|x_{ref}\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$  und  $\|x_{ref} - x\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$  verkleinert und somit die Performance des geschlossenen adaptiven Regelkreises verbessert werden können. Durch Totzeiten im Regelkreis entstehen jedoch Oszillationen in den Parameterschätzungen, die aufgrund der hohen Bandbreite von  $C(s)$  auch in die Stellgröße getragen werden. Diese verhindern, dass für  $t \rightarrow \infty$   $e(t)$  gegen Null konvergiert. Stattdessen beschreibt  $e(t)$  nach der Ausregelzeit eine dauerhafte Schwingung, deren Amplitude den zulässigen Fehler der Nanopositioniermaschine von  $1 \mu\text{m}$  überschreitet. Wird demnach bei den praktischen Versuchen festgestellt, dass Totzeiten häufig und dauerhaft auftreten, sollten die daraus resultierenden Oszillationen folglich durch eine Verringerung der Bandbreite von  $C(s)$  reduziert werden, was durch eine Reduzierung von  $k$  möglich ist.

## 5.3 Ausgangsrückführung für Nicht-SPR Referenzsysteme

In der Praxis ist es oft aufwendig und teuer, die zusätzlich zur Regelgröße  $y(t)$  auftretenden Systemzustände (z.B. Geschwindigkeiten) zu messen, da dies in der Regel kostspieligere Sensorik erfordert. Aus wirtschaftlicher Sicht ist es somit sinnvoll, Regelungen, sog. Ausgangsrückführungen, zu untersuchen, die lediglich auf Grundlage des gemessenen Ausgangs  $y(t)$  (ohne Kenntnis der übrigen Systemzustände) das Regelungsproblem lösen. Aus diesem Grund betrachten wir im Folgenden  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Ausgangsrückführungen.

In [HC10] werden zwei unterschiedliche  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Ausgangsrückführungen vorgestellt, eine für SPR-Referenzsysteme und eine für Nicht-SPR-Referenzsysteme. Die Abkürzung *SPR* steht für *strictly positive real* und weist nach [IS96, S. 126 ff.] auf Systeme mit gewissen Eigenschaften hin:

1. Wenn  $G_S(s)$  SPR ist, so ist der Betrag des Relativgrads  $|n_r| \leq 1$  und die Pole und Nullstellen von  $G_S(s)$  liegen in  $Re(s) < 0$  (stabil und minimalphasig).

2.  $G_S(s)$  ist SPR, dann und nur dann, wenn  $\frac{1}{G_S(s)}$  SPR ist.
3. Wenn  $|n_r| > 1$ , so ist  $G_S(s)$  nicht SPR.

Eine notwendige Bedingung, damit  $G_S(s)$  SPR ist, ist somit, dass die Nyquist-Ortskurve von  $G_S(j\omega)$  in der rechten komplexen Halbebene liegt, was impliziert, dass die Phasenverschiebung des Systemausgangs auf eine sinusförmige Anregung am Eingang geringer als  $90^\circ$  ist [IS96, S. 128]. Folglich weist  $G_S(s)$  einen minimalen Phasenrand von  $90^\circ$  auf.

In [RH07] wird unter anderem gezeigt, dass die Verwendung der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven SPR-Ausgangsrückführung für Regelstrecken mit Relativgrad  $n_r = 2$  gewisse Schwierigkeiten birgt. So ist die Wahl der Filterbandbreite von  $C(s)$  auf relativ kleine Werte beschränkt, um die Bedingung der Stabilität des geschlossenen Regelkreises einhalten zu können. Dies führt zu einer schlechten Performance des geschlossenen adaptiven Regelkreises und somit zu einer starken Abweichung von dem Referenzmodell. Diese starke Abweichung ist in Bezug auf die geplante Folgeregelung sehr hinderlich und somit ein wesentlicher Beweggrund, die  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Ausgangsrückführung für Nicht-SPR-Referenzsysteme zu verwenden.

Dabei handelt es sich um eine adaptive Regelung mit zeitdiskretem Adoptionsgesetz (*piecewise-constant adaptive law*), deren Funktionsweise sich an der eines Dead-Beat-Reglers orientiert. Unter der Annahme, dass sich der geschlossene adaptive Regelkreis nach der vorgegebenen Dynamik der Dynamikmatrix  $A_m$  verhält, wird versucht, alle aktuellen Störungen bis zum nächsten Zeitschritt zu kompensieren. Ähnlich wie bei den zeitkontinuierlichen Reglern der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelungstheorie kann somit eine beliebig gute Performance (maximale Abweichung der Regelgröße des geschlossenen Regelkreises von der des Referenzsystems) erlangt werden. Dies erreicht man, indem die Abtastzeit beliebig klein gewählt wird. Die Abtastzeit ist somit das Pendant zu der Adoptionsverstärkung  $\Gamma$  der zeitkontinuierlichen  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regler.

Gemäß [HC10] werden im Folgenden die wichtigsten Bestandteile der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung für Nicht-SPR-Referenzsysteme kurz vorgestellt.

### 5.3.1 Problemformulierung und Beschreibung der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreisarchitektur

**Problemformulierung:** Gegeben sei ein System

$$y(s) = A(s)(u(s) + d(s)), \quad (5.88)$$

wobei  $A(s)$  eine strikt propere Übertragungsfunktion ist, mit Relativgrad  $n_r$ , für den eine untere Beschränkung bekannt ist  $1 < d_r \leq n_r$ . Die Größe  $d(s)$  ist die Laplace-Transformierte der zeitvarianten Unsicherheiten und Störungen  $d(t) = f(t, y(t))$ , die der Lipschitz-Bedingung mit

$$\frac{|f(t, y_1) - f(t, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L, \quad |f(t, y)| \leq L|y| + L_0 \quad (5.89)$$

genügen, wobei  $L$  und  $L_0$  beliebig groß gewählt werden dürfen.

**Regelungsziel:** Sei  $r(t)$  ein beschränktes kontinuierliches Referenzsignal. Das Regelungsziel ist es, einen adaptiven Ausgangsrückführungs-Regler mit Stellgröße  $u(t)$  so zu entwerfen, dass der Systemausgang  $y(t)$  der Referenz  $r(t)$  mit der Systemdynamik des Referenzmodells  $M(s)$  folgt, wobei  $M(s)$  eine minimalphasige stabile Übertragungsfunktion vom Relativgrad  $d_r > 1$  ist.

Das System (5.88) lässt sich nun über das Referenzmodell beschreiben als:

$$y(s) = M(s)(u(s) + \sigma(s)), \quad y(0) = 0, \quad (5.90)$$

wobei

$$\sigma(s) = \frac{(A(s) - M(s))u(s) + A(s)d(s)}{M(s)}. \quad (5.91)$$

Sei  $A_m, b_m, c_m^T$  eine minimale Realisierung von  $M(s)$ , mit  $A_m$  Hurwitz, so kann das System geschrieben werden als:

$$\dot{x}(t) = A_m x(t) + b_m(u(t) + \sigma(t)) \quad (5.92)$$

$$y(t) = c_m^T x(t). \quad (5.93)$$

Der Entwurf des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers setzt weiterhin voraus:

1. ein strikt properes Filter  $C(s)$  mit  $C(0) = 1$  und Relativgrad  $d_r$ ,
2. ein stabiles  $H(s) = \frac{A(s)M(s)}{C(s)A(s) + (1 - C(s))M(s)}$  sowie
3. die Einhaltung der  $\mathcal{L}_1$ -Norm Bedingung:  
 $\|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} L < 1$ , wobei  $G(s) = H(s)(1 - C(s))$  ist.

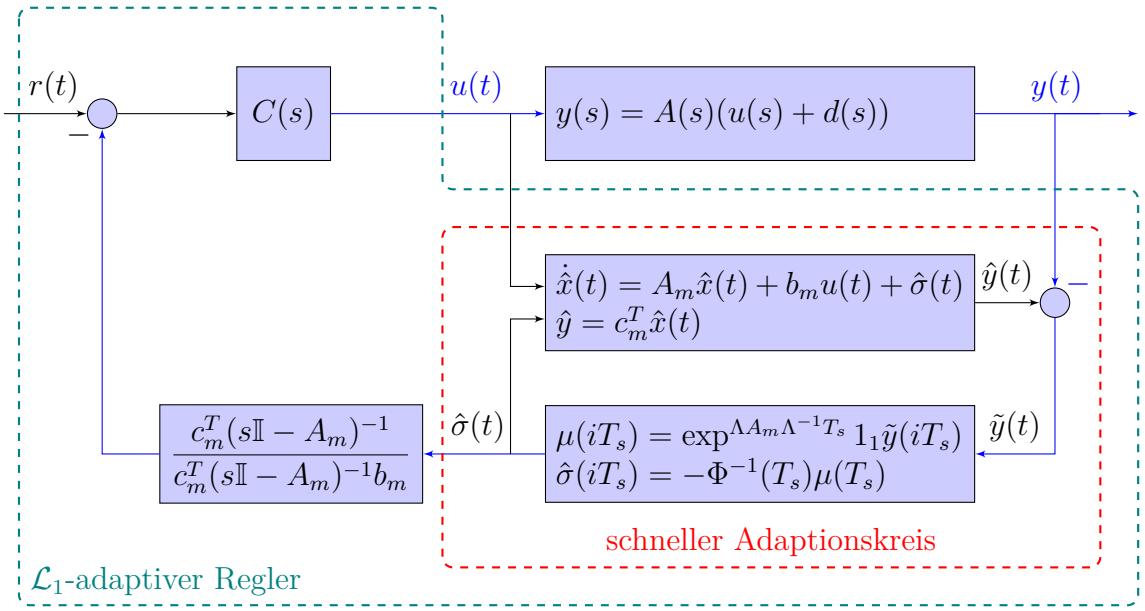


Abbildung 5.21: Geschlossener Regelkreis der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung für Nicht-SPR Referenzsysteme.

**Regelkreisarchitektur:** Der geschlossene adaptive Regelkreis setzt sich aus der Regelstrecke (5.88), dem Ausgangsschätzer (5.94), den Adoptionsgesetzen (5.95) und dem Steuergesetz (5.98) zusammen (siehe Abbildung 5.21 ).

#### Ausgangsschätzer:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_m \hat{x}(t) + b_m u(t) + \hat{\sigma}(t), \quad \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{y} &= c_m^T \hat{x}(t) \end{aligned} \tag{5.94}$$

**Adoptionsgesetze:** Das nach [HC10] hergeleitete Adoptionsgesetz wird als *Piecewise-Constant Adaptive Law* bezeichnet und ist durch

$$\hat{\sigma}(iT_s) = -\Phi^{-1}(T_s) \mu(iT_s) \tag{5.95}$$

gegeben. Dabei sind

$$\begin{aligned} \Phi(T_s) &= \int_0^{T_s} e^{\Lambda A_m \Lambda^{-1} (T_s - \tau)} \Lambda d\tau \quad \text{und} \\ \mu(iT_s) &= e^{\Lambda A_m \Lambda^{-1} T_s} 1_1 \tilde{y}(iT_s), \end{aligned} \tag{5.96}$$

worin der Ausgangsschätzfehler als  $\tilde{y}(t) = \hat{y}(t) - y(t)$  definiert ist,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} c_m^T \\ D\sqrt{P} \end{pmatrix} \quad (5.97)$$

und  $1_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$  ein Einheitsvektor ist. Zudem bezeichnet  $T_s$  die Abtastzeit,  $i = 1, 2, \dots$ , den Abtastindex und  $P = P^T$  die Lösung der algebraischen Lyapunovgleichung  $A_m^T P + P A_m = -Q$  für beliebige  $Q = Q^T > 0$ . Ferner liegt der Vektor  $c_m^T(\sqrt{P})^{-1}$  im Kern der Matrix  $D \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$ , es gilt also  $D(c_m^T(\sqrt{P})^{-1})^T = 0$ .

### Steuergesetz:

$$u(s) = C(s)r(s) - \frac{C(s)}{c_m^T(s\mathbb{I} - A_m)^{-1}b_m} c_m^T(s\mathbb{I} - A_m)^{-1}\hat{\sigma}(s) \quad (5.98)$$

**Referenzsystem des geschlossenen Regelkreises:** Das Referenzsystem des geschlossenen Regelkreises dient der Beschreibung des transienten Verhaltens. Es wird auch beschrieben als *nicht-adaptives System*, da  $\sigma(t)$  hier nicht durch die Adoptionsgesetze adaptiv ermittelt, sondern als bereits bekannt vorausgesetzt wird.

$$\begin{aligned} y_{ref}(s) &= M(s)(u_{ref}(s) + \sigma_{ref}(s)) \\ \sigma_{ref}(s) &= \frac{(A(s) - M(s))u_{ref}(s) + A(s)d_{ref}(s)}{M(s)} \\ u_{ref}(s) &= C(s)(r(s) - \sigma_{ref}(s)) \end{aligned} \quad (5.99)$$

Hieraus lässt sich das Verhalten des Ausgangs des Referenzsystems berechnen zu:

$$\begin{aligned} y_{ref}(s) &= H(s)\left(C(s)r(s) + (1 - C(s))d_{ref}(s)\right) \\ &= C(s)H(s)r(s) + G(s)d_{ref}(s) \end{aligned} \quad (5.100)$$

An dieser Stelle gilt es anzumerken, dass  $H(s)$  Tiefpasscharakter hat und  $(1 - C(s))$  ein Hochpass ist. Bei dem Produkt  $G(s) = H(s)(1 - C(s))$  handelt es sich daher um ein sogenanntes *no-pass filter*. Je geringer somit  $\|G(s)\|_{\mathcal{L}_1}$  ist, desto besser ist die Störunterdrückung des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers.

### 5.3.2 Entwurf der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung für das Positioniersystem LP<sup>3</sup>S

Der Entwurf des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführungsreglers erfolgt gemäß [JH08] mit Hilfe einer Polvorgabe der Pole von  $H(s)$ .

Die wichtigste Forderung an den zu entwerfenden Regler ist die Stabilität des geschlossenen adaptiven Regelkreises. Eine notwendige Bedingung hierfür ist, dass das Referenzsystem aus (5.99) stabil ist, wozu wiederum  $H(s)$  stabil sein muss. Es kann bewiesen werden, dass die geforderte Stabilität von  $H(s)$  einer Regelung von  $A(s)$  durch die negative Ausgangsrückführung

$$F(s) = \frac{C(s)}{M(s)(1 - C(s))} \quad (5.101)$$

gleich kommt (siehe Abbildung 5.22). Die Übertragungsfunktion dieses geschlossenen Regelkreises ergibt sich zu:

$$T(s) = \frac{\frac{A(s)}{C(s)}}{1 + A(s) \frac{C(s)}{M(s)(1 - C(s))}} = \frac{A(s)M(s)(1 - C(s))}{M(s)(1 - C(s)) + C(s)A(s)}. \quad (5.102)$$

Sei  $A(s) = \frac{A_n(s)}{A_d(s)}$ ,  $C(s) = \frac{C_n(s)}{C_d(s)}$  und  $M(s) = \frac{M_n(s)}{M_d(s)}$ , so folgt

$$H(s) = \frac{A(s)M(s)}{C(s)A(s) + (1 - C(s))M(s)} = \frac{C_d(s)M_n(s)A_n(s)}{H_d(s)}, \quad (5.103)$$

wobei

$$H_d(s) = C_n(s)A_n(s)M_d(s) + M_n(s)A_d(s)(C_d(s) - C_n(s)) \quad (5.104)$$

ist [JH08]. Ein Vergleich zwischen dem Nenner der Übertragungsfunktion  $T(s)$  und dem von  $H(s)$  offenbart, dass diese identisch sind.

Die Aufgabe des Entwurfs besteht nun darin, entsprechende  $M(s)$  und  $C(s)$  zu finden, für die  $H(s)$  bzw.  $T(s)$  stabil ist. Dies geschieht beispielsweise durch die Lösung des Polvorgabeproblems mittels einer Ausgangsrückführung an der nominellen Regelstrecke  $A_0(s)$ , welche auf Basis der durchschnittlichen Parameterwerte der Parameter aus Tabelle 3.1 definiert ist. Mit

$$\bar{m} = 24.5, \quad \bar{\mu}_x = 7, \quad \bar{K}_{mx} = 1.6, \quad \bar{\epsilon} = 1$$

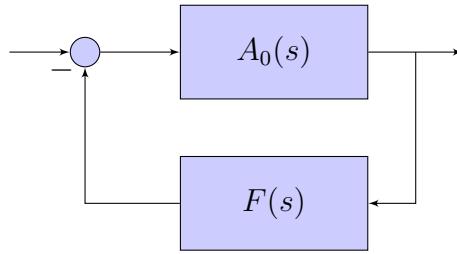


Abbildung 5.22: Blockschaltbild der Polvorgabe in Anlehnung an [JH08] mit den Übertragungsfunktionen  $A_0(s) = A_{0_n}(s)/A_{0_d}(s)$  und  $F(s) = P(s)/L(s)$ .

ergibt sich für die nominelle Strecke die Übertragungsfunktion

$$A_0(s) = \frac{3.2}{24.5s^2 + 7s}. \quad (5.105)$$

Abbildung 5.22 zeigt die Regelkreisstruktur für den Polvorgaberegler  $F(s) = P(s)/L(s)$ . Letzterer kann nun durch einen Koeffizientenvergleich des Nennerpolynoms des geschlossenen Regelkreises  $T(s)$  mit einem Hurwitzpolynom  $A_{cl}(s)$  mit gewünschter Pollage bestimmt werden.

Dieser Vergleich führt bekanntlich auf die Diophantische Gleichung [JH08]:

$$A_{0_n}(s)P(s) + A_{0_d}(s)L(s) = A_{cl}(s), \quad (5.106)$$

dessen Lösung die Koeffizienten der Zähler und Nennerpolynome  $P(s)$  bzw.  $L(s)$  von  $F(s)$  liefert. Führt man nun mit  $\alpha_l$  und  $\beta_l$  Koeffizientenvektoren der Koeffizienten von  $A_{cl}(s)$  bzw.  $P(s)$  und  $L(s)$  ein, so kann Gleichung (5.106) in Form des linearen Gleichungssystems

$$\beta_l = S_l^{-1}\alpha_l, \quad (5.107)$$

angeschrieben werden. Die Koeffizienten von  $P(s)$  und  $L(s)$  resultieren folglich aus der Inversion der sogenannten Sylvestermatrix  $S_l$  [JH08].

Da wir uns für die Übertragungsfunktionen  $M(s)$  und  $C(s)$  interessieren, muss nun noch die für das gewünschte Ein-/Ausgangsverhalten gefundene Ausgangsrückführung  $F(s) = P(s)/L(s)$  mit Gleichung (5.101) verglichen werden. Aus dieser erhält man:

$$F(s) = \frac{C(s)}{M(s)(1 - C(s))} = \frac{C_n(s)M_d(s)}{M_n(s)(C_d(s) - C_n(s))}. \quad (5.108)$$

Da  $C_d(s) - C_n(s)$  jedoch keinen konstanten Term beinhaltet, wird die Ausgangsrück-

führung für  $A_0(s)/s$  entworfen, um einen geeigneten Regler  $F(s)$  zu erhalten, der anschließend in  $M(s)$  und  $C(s)$  zerlegt werden kann [JH08]. Der Integriereranteil  $1/s$  wird zunächst der Regelstrecke zugeordnet, wodurch diese die fiktive Ordnung  $n = 3$  erhält. Da das Polynom  $A_{cl}(s)$  den Grad  $2n - 1$  haben muss, müssen fünf Pole für  $H(s)$  festgelegt werden. Die Polynome  $L(s)$  und  $P(s)$  sind somit zweiten Grades. Anschließend wurde frei festgelegt, dass  $M(s)$  ein  $PT_2$ -Glied beschreiben soll. Aus dem Vergleich

$$\frac{1}{s} \frac{P(s)}{L(s)} = \frac{C_n(s)M_d(s)}{M_n(s)(C_d(s) - C_n(s))} \quad (5.109)$$

lässt sich schließlich erkennen, dass  $C(s)$  dritter Ordnung sein muss.

Als Vorgabe für die Pole für  $H(s)$  wurden  $s_{1,2,3} = -2000$ ,  $s_4 = -1.4907$  und  $s_5 = -0.4293$  verwendet. Die ersten drei Polvorgaben bestimmen im Wesentlichen die Koeffizienten von  $C(s)$ , die letzten beiden die von  $M(s)$ . Dabei wurden  $s_4$  und  $s_5$  so berechnet, dass sie ein  $PT_2$ -System mit einer Zeitkonstanten  $T = 1.25$  und einer Dämpfung von  $\xi = 1.2$  wie in Kapitel 5.2.2, beschreiben. Die Polplatzierung ergab:

$$M(s) = \frac{1}{1.5664 s^2 + 3.0017 s + 1}, \quad (5.110)$$

$$C(s) = \frac{3.9197E10}{3.9197E10 + 1.201E7 s + 6001.6343 s^2 + s^3}, \quad (5.111)$$

$$H(s) = \frac{1.2543E11 + 3.8431E7 s + 19205.2297 s^2 + 3.2 s^3}{1.25E11 + 3.77E11 s + 1.97E11 s^2 + 2.94E8 s^3 + 1.47E s^4 + 24.5 s^5}. \quad (5.112)$$

Anschließend muss die Stabilität des geschlossenen adaptiven Regelkreises für das gewählte Referenzmodell und das gewählte Filter untersucht werden. Dies geschieht in drei Schritten:

1. Überprüfung der Stabilität von  $H(s)$  für alle möglichen Parameterwerte in der Regelstrecke  $A(s)$ . Hierzu wird das Theorem von Kharitonov verwendet (siehe Anhang A.4).
2. Überprüfung der Stabilität des geschlossenen adaptiven Regelkreises gegenüber Störungen  $f(t, y(t))$ . Hierfür wird die Einhaltung der  $\mathcal{L}_1$ -Norm Bedingung  $\|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} L < 1$  überprüft.

### 3. Überprüfung der Robustheit gegenüber Totzeiten.

Zur Überprüfung von Schritt 1 muss  $H(s)$  für alle Parameter  $m, \mu_x, K_{mx}$  und  $\epsilon$ , deren Wertebereiche in Tabelle 3.1 angegeben sind, stabil sein, was mithilfe des Kharitonov Theorems untersucht wird. Für die Koeffizienten  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_5$  des Polynoms  $H_d(s)$  aus (5.104) gilt  $\delta_i \in [X_i, Y_i]$ . Hierfür ergeben sich die Ober- und Untergrenzen  $Y_i$  bzw.  $X_i$  aus den minimalen und maximalen Parameterwerten von  $m, \mu_x, K_{mx}$  und  $\epsilon$ . Da die vier Kharitonov Polynome  $K^1(s), K^2(s), K^3(s)$  und  $K^4(s)$  Hurwitz sind, ist folglich auch  $H(s)$  trotz der Parametervariationen Hurwitz (siehe Anhang A.4).

Zur Überprüfung von Schritt 2 muss die  $\mathcal{L}_1$ -Norm Bedingung erfüllt sein. Für die nominelle Regelstrecke mit den durchschnittlichen Parameterwerten wurde dazu  $\|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} = 1.5897 \cdot 10^{-4}$  errechnet. Im Gegensatz zu dem  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regler aus Kapitel 5.2 ändert sich bei der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung jedoch  $H(s)$  mit einer Veränderung der Regelstrecke  $A(s)$ . Die  $\mathcal{L}_1$ -Norm Bedingung muss allerdings für alle möglichen Parameter aus Tabelle 3.1 gelten. Aus diesem Grund musste die  $\|G(s)\|_{\mathcal{L}_1}$  auch für andere Regelstreckenparametrierungen berechnet werden. Hierzu wurde eine Optimierung mittels eines genetischen Algorithmus angewandt, welche als Ergebnis einen maximalen Wert von

$$\max_{m, \mu_x, K_{mx}, \epsilon} \|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} = 1.5929 \cdot 10^{-4} \quad (5.113)$$

ergab. Als nächstes musste die Lipschitzkonstante  $L$  aus (5.89) mithilfe von Gleichung (3.28) bestimmt werden, wobei aufgrund der Linearität des Terms  $\mu_{p,x}\dot{x}(t)$  dieser dem linearen Dämpfungsterm der Regelstrecke hinzugeschlagen wurde. Er ist somit Bestandteil des Dämpfungskoeffizienten  $\mu_x$ . Folglich genügt es, die Betrachtungen auf die Gleichung

$$F_{p,x}(x, \dot{x}) = 0.5(\tanh(\delta\dot{x}) + 1)\bar{F}_{p,x}^+(x) - 0.5(\tanh(\delta\dot{x}) - 1)\bar{F}_{p,x}^-(x) \quad (5.114)$$

zu beschränken. Die Lipschitzkonstante  $L$  kann nun folgendermaßen berechnet werden:

$$L = \max_{t \geq 0} \left( \max_{x, \dot{x} \in \mathcal{X}} \left( \left\| \frac{\partial F_{p,x}(x, \dot{x})}{\partial \bar{x}} \right\|_1 \right) \right), \quad (5.115)$$

wobei  $\bar{x} = (x \ \dot{x})^T$  ist.

Die Jacobimatrix  $J(x, \dot{x}) = \frac{\partial F_{p,x}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}$  wurde dazu berechnet zu:

$$\begin{aligned} J(x, \dot{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{p,x}(x, \dot{x})}{\partial x} & \frac{\partial F_{p,x}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.5(\tanh(\delta \dot{x}) + 1) \frac{d\bar{F}_{p,x}^+(x)}{dx} - 0.5(\tanh(\delta \dot{x}) - 1) \frac{d\bar{F}_{p,x}^-(x)}{dx} \\ (0.5\delta(1 - \tanh(\delta \dot{x})^2)) \cdot (\bar{F}_{p,x}^+(x) - \bar{F}_{p,x}^-(x)) \end{pmatrix}^T. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Die Lipschitzkonstante wurde nach der Normbildung und Maximierung ermittelt zu:

$$L = 317.14 \quad (5.117)$$

und hiernach konservativ festgelegt auf

$$L = 350. \quad (5.118)$$

Es folgte die Berechnung und Verifizierung der  $\mathcal{L}_1$ -Norm Bedingung:

$$\|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} L = 1.5929 \cdot 10^{-4} \cdot 350 = 0.0558 \leq 1 \quad (5.119)$$

Die Robustheit und somit die Stabilität des geschlossenen adaptiven Regelkreises gegenüber allen möglichen auftretenden Störungen ist somit gegeben.

Anschließend wird in Schritt 3 die Robustheit gegenüber Totzeiten untersucht. Da nach bestem Wissen noch keine Methode zur Berechnung der *time-delay margin* für diese  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Ausgangsrückführung existiert, wurde sie simulativ für die nominelle Regelstrecke  $A_0(s)$  zu  $\mathcal{T} = 5.7$  ms bestimmt. Durch eine heuristische Suche wurden des Weiteren simulativ die Parameter ermittelt, für die die *time-delay margin* minimal wird. Sie ergab sich bei  $m = 19, \mu_x = 14, K_{mx} = 2.4, \epsilon = 1.3$  zu  $\mathcal{T} = 3.1$  ms. Die konservative Vorgabe von  $\mathcal{T} = 2$  ms ist somit knapp erfüllt.

Um eine höhere Robustheit als mit diesem Regler (im Folgenden Regler 1 genannt) zu erlangen, wurde ein weiterer Regler (im Folgenden Regler 2 genannt) mit geringerer Bandbreite entworfen. Es wurden die Polagen  $s_{1,2,3} = -1000, s_4 = -1.4907$  und  $s_5 = -0.4293$  als Vorgabe für die Pole von  $H(s)$  verwendet und es ergaben sich die Übertragungsfunktionen:

$$M(s) = \frac{1}{1.5703 s^2 + 3.0032 s + 1}, \quad (5.120)$$

$$C(s) = \frac{4.8997E9}{s^3 + 3001.6342 s^2 + 3.0049E6 s + 4.8997E9}, \quad (5.121)$$

$$H(s) = \frac{0.1306 s^3 + 392.1 s^2 + 3.925E5 s + 6.4E8}{s^5 + 3002 s^4 + 3.006E6 s^3 + 1.006E9 s^2 + 1.922E9 s + 6.4E8}. \quad (5.122)$$

Anschließend wurde die Stabilitätsprüfung nach Kharitonov sowie die Verifizierung der  $\mathcal{L}_1$ -Norm Bedingung auf gleiche Weise durchgeführt (siehe oben). Für diesen zweiten Regler konnte simulativ eine *time-delay margin* von 7.6 ms für die nominelle Regelstrecke  $A_0(s)$  und eine minimale *time-delay margin* von 4.1 ms für die Regelstrecke mit den Parametern  $m = 19, \mu_x = 14, K_{mx} = 2.4, \epsilon = 1.3$  (im Nachfolgenden  $A_1(s)$  genannt) ermittelt werden.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Untersuchung der Robustheit gegenüber Totzeiten für  $\mathcal{L}_1$ -Ausgangsrückführungen für Nicht-SPR Referenzsysteme in den meisten Fällen nur schwer durchführbar ist und in diesem Fall nur deshalb möglich war, weil ein genaues Regelstreckenmodell zur Verfügung stand. Eine präzise Modellierung widerspricht jedoch gewissermaßen der Philosophie adaptiver Regelungen, sodass die Totzeit-Toleranz anhand eines simplen nominellen Streckenmodells ausreichend groß gewählt werden sollte, falls kein präzises Modell zur Verfügung steht.

### 5.3.3 Simulationsergebnisse

Mit den soeben entworfenen  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführungen wurden die Sprungantworten für unterschiedliche Regelstreckenparameter und Totzeiten aufgenommen und das Führungsverhalten mit dem des Referenzsystems (5.100) verglichen. Dabei wurde  $H(s)$  mit  $A_0(s)$  berechnet und  $d(s) = 0$  gesetzt. Somit folgt:

$$y_{ref}(s) = C(s)H(s)r(s). \quad (5.123)$$

In Abb. 5.23 sind die Sprungantworten (bei  $t = 1$  s) des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreises mit Regler 1 bzw. Regler 2 zusammen mit allen relevanten Stell-, Schätz- und Fehlergrößen dargestellt, wobei der Fehler  $e(t)$  die Differenz zwischen der Regelgröße und dem Ausgang des Referenzsystems beschreibt. Als Regelstreckenparametrierung wurde zunächst  $A_0(s)$  aus (5.105) verwendet. Es lässt sich beobachten, dass besonders zu Beginn des Sprunges (bei ca.  $1 \text{ s} < t < 5 \text{ s}$ ) die Performance des Regelkreises mit Regler 1 die von Regler 2 übersteigt. Dafür beinhaltet jedoch das Stellsignal von Regler 1 im Vergleich mit Regler 2 hochfrequenter Signalanteile mit geringer Amplitude. Die-

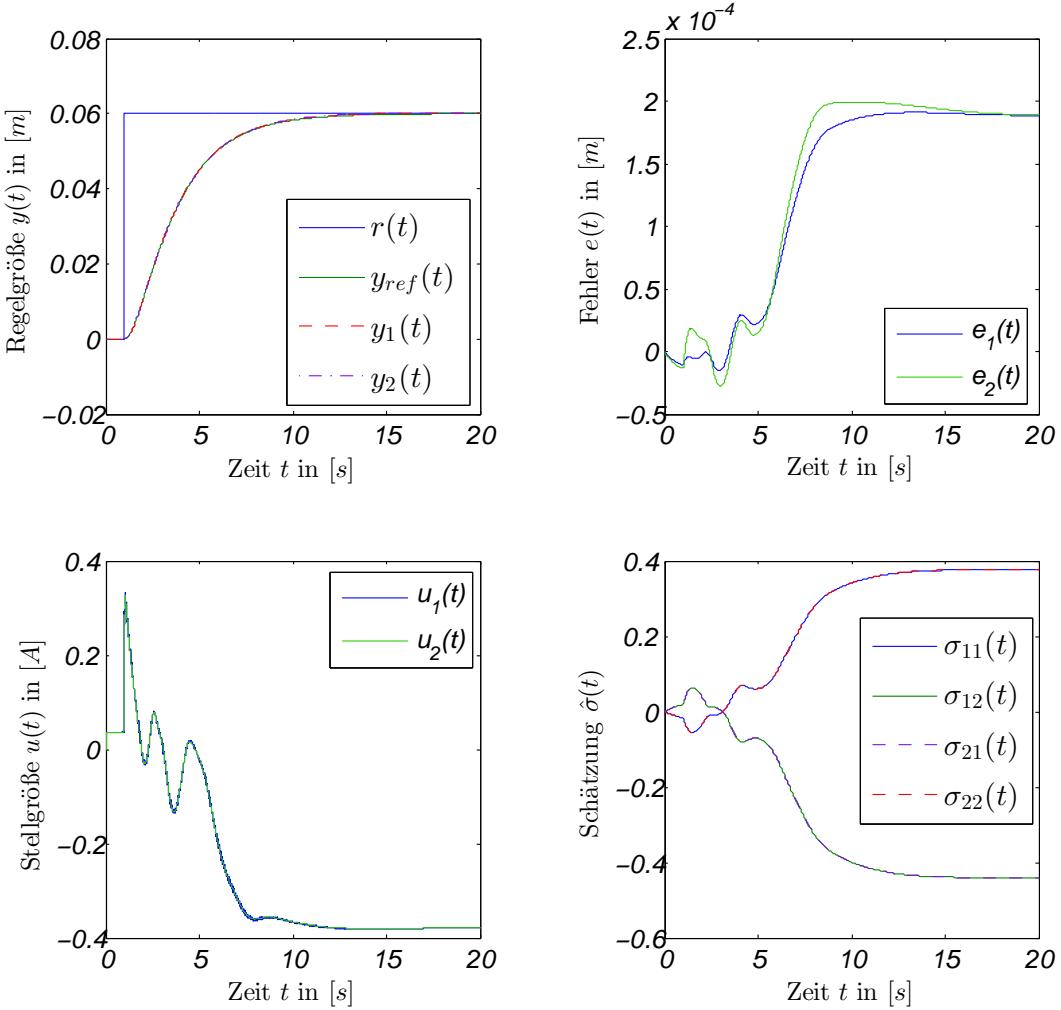


Abbildung 5.23: Sprungantworten, Fehler, Stellgrößen und Parameterschätzungen der geschlossenen adaptiven Regelkreise mit Regler 1 ( $y_1(t)$ ,  $e_1(t)$ ,  $u_1(t)$ ,  $\sigma_{11}(t)$  und  $\sigma_{12}(t)$ ) und mit Regler 2 ( $y_2(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $\sigma_{21}(t)$  und  $\sigma_{22}(t)$ ), ohne Totzeit und mit  $A(s) = A_0(s)$ .

se hochfrequenten Schwingungen werden durch den Einfluss von Totzeiten verstärkt, was sich negativ auf die Robustheit des Regelkreises auswirkt. Abbildung 5.24 zeigt die Sprungantworten der Regelkreise mit Regler 1 bzw. Regler 2 beim Vorhandensein einer Totzeit von  $\tau = 3.1$  ms und der mit  $m = 19$ ,  $\mu_x = 14$ ,  $K_{mx} = 2.4$ ,  $\epsilon = 1.3$  parametrisierten Regelstrecke  $A_1(s)$ . Die Abbildungen 5.23 und 5.24 lassen deutlich erkennen, dass im Gegensatz zu Regler 2 durch das Filter von Regler 1 (hohe Bandbreite) mehr hochfrequente Anteile aus dem schnellen Adoptionskreis in den langsamen Regelkreis gelangen können. Die Entkopplung von Adoptionskreis und Regelkreis ist somit schwä-

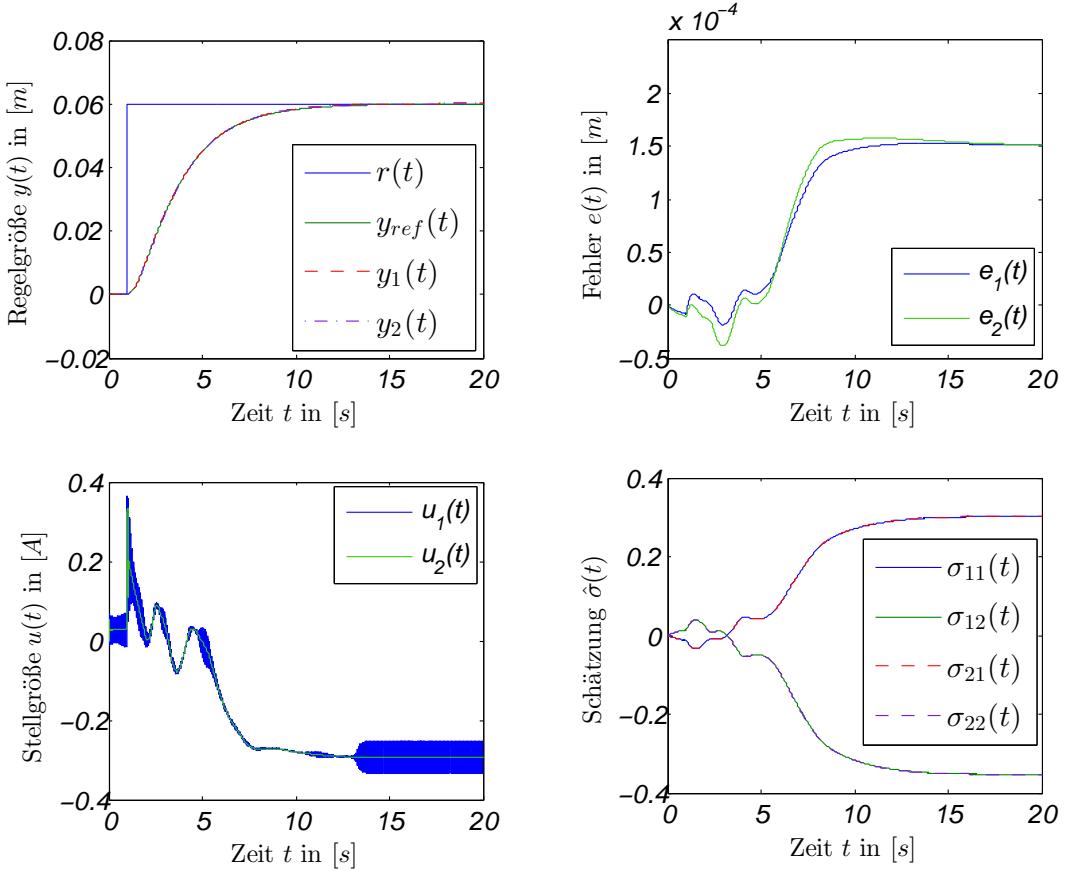


Abbildung 5.24: Sprungantworten, Fehler, Stellgrößen und Parameterschätzungen der geschlossenen adaptiven Regelkreise mit Regler 1 ( $y_1(t)$ ,  $e_1(t)$ ,  $u_1(t)$ ,  $\sigma_{11}(t)$  und  $\sigma_{12}(t)$ ) und mit Regler 2 ( $y_2(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $\sigma_{21}(t)$  und  $\sigma_{22}(t)$ ), mit Totzeit  $\tau = 3.1$  ms und  $A(s) = A_1(s)$ .

cher als bei Regler 2. Aus diesem Grund ist Regler 2 robuster gegenüber Totzeiten. Um dies zu verdeutlichen, zeigen Abbildung 5.25 und Abbildung 5.26 die Sprungantworten der beiden Regelkreise an der Regelstrecke  $A_1(s)$  und mit einer Totzeit von  $\tau = 4.1$  ms. Der Regelkreis mit Regler 1 wird instabil, während der mit Regler 2 die Regelungsaufgabe weiterhin erfüllt. Das Stellsignal des letzteren weist nun ebenfalls hochfrequente Oszillationen auf. Eine weitere Erhöhung der Totzeit sorgt dafür, dass auch Regler 2 instabil wird.

Es ist in allen Abbildungen zu erkennen, dass der Regelfehler  $e(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  nicht zu Null konvergiert, jedoch in einer kleinen Umgebung nahe Null beschränkt bleibt. Dieses Ergebnis stimmt mit der Theorie überein. Betrachtet man das Adoptionsgesetz genauer, so erkennt man, dass  $\mu(iT_s)$ , welches zum Zeitpunkt  $iT_s$  berechnet wird, im

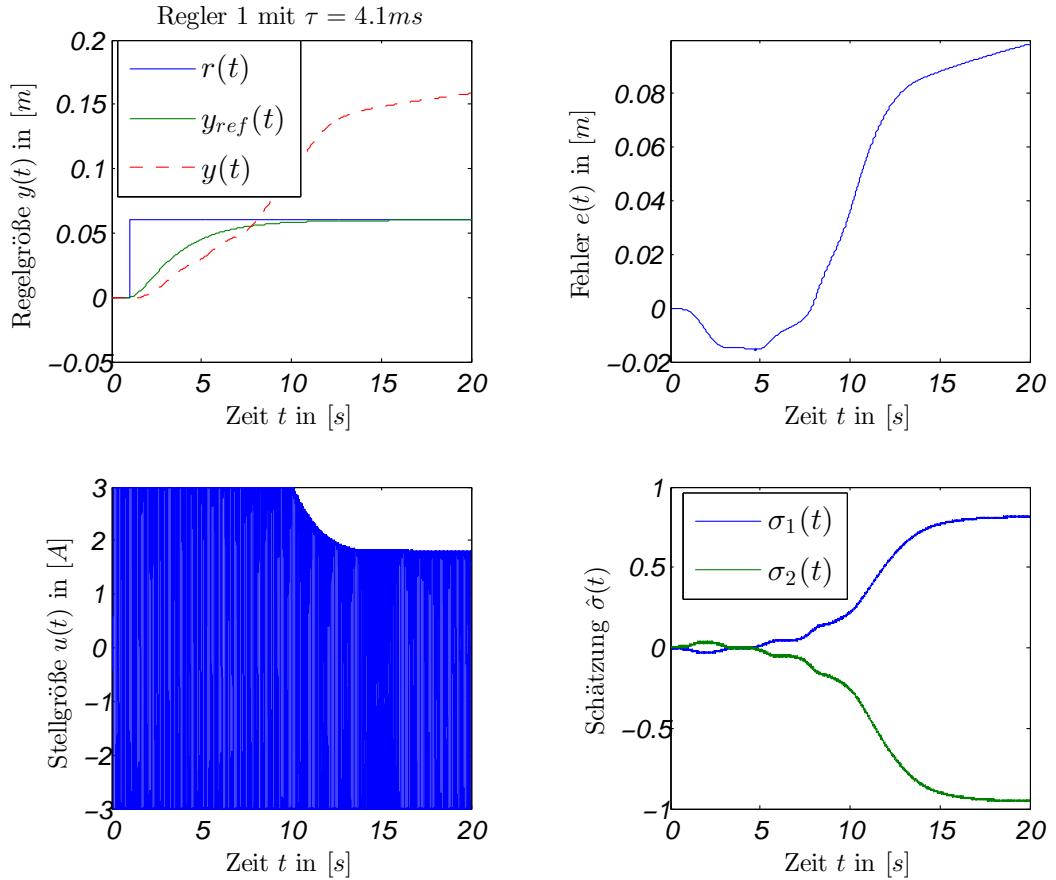


Abbildung 5.25: Sprungantwort, Fehler, Stellgröße und Parameterschätzung des geschlossenen adaptiven Regelkreises mit Regler 1, mit Totzeit  $\tau = 4.1$  ms und  $A(s) = A_1(s)$ .

Prinzip einer Schätzung des Fehlers  $\tilde{y}((i+1)T_s)$  für den nächsten Zeitpunkt  $t = (i+1)T_s$  ist. Bei der Berechnung dieser Schätzung wird davon ausgegangen, dass die Dynamik des geschlossenen Regelkreises der von  $A_m$  gleicht. Diese Annahme gilt für große Zeitbereiche, betrachtet man jedoch die Dynamik des Regelkreises für Zeitabschnitte  $|t_1 - t_2| < T_s$ , so wird diese Annahme hinfällig, da in dieser Zeitspanne keine Adaption erfolgt. Diese Abweichung kann folglich theoretisch beliebig verringert werden, wenn  $T_s$  kleiner gewählt wird.

Als Ergebnis lässt sich allgemein festhalten, dass ebenso wie im Fall für die  $\mathcal{L}_1$ -Zustandsrückführung auch bei der Ausgangsrückführung qualitativ gilt, dass ein Regler mit einer größeren Bandbreite von  $C(s)$  eine bessere Performance aufweist. Verbunden mit dieser Wahl des Filters, ist jedoch eine schwache Entkopplung des schnellen Adaptionskreises vom langsamen Regelkreis. Dies bewirkt, dass beim Auftreten von

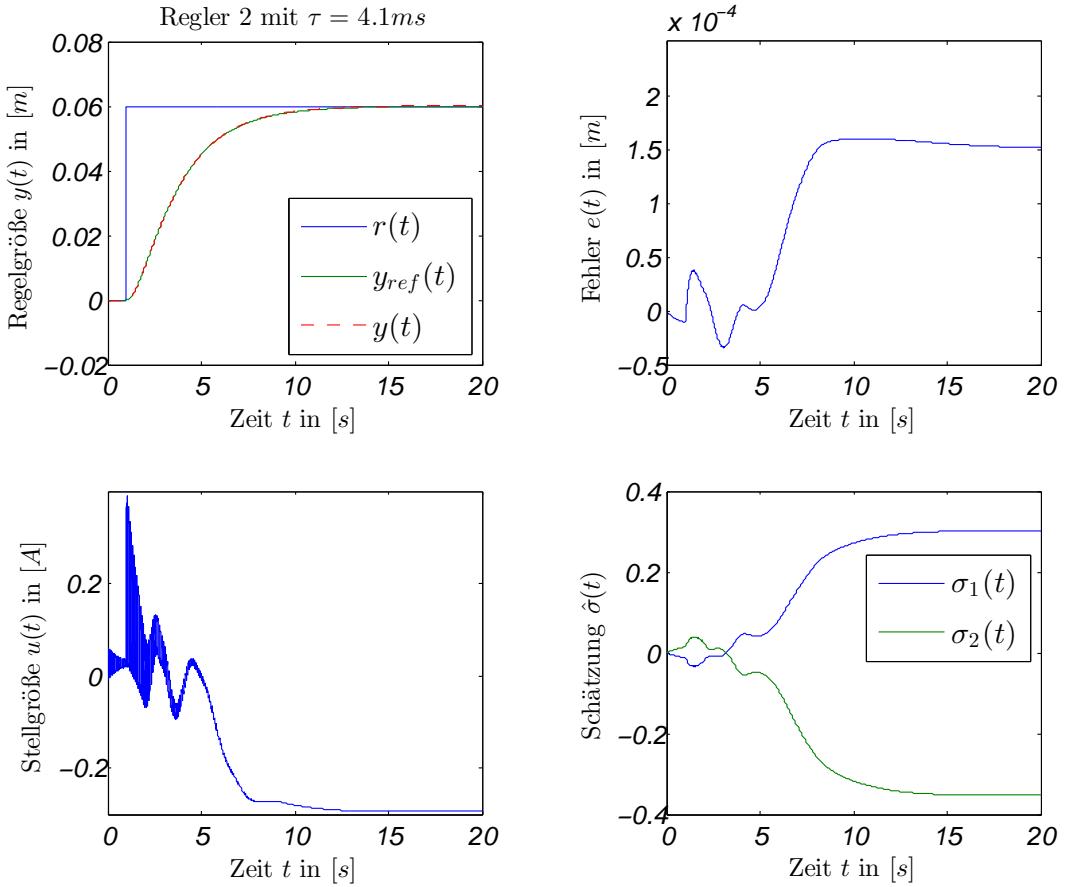


Abbildung 5.26: Sprungantwort, Fehler, Stellgröße und Parameterschätzung des geschlossenen adaptiven Regelkreises mit Regler 2, mit Totzeit  $\tau = 4.1$  ms und  $A(s) = A_1(s)$ .

Totzeiten im Regelkreis hochfrequente Oszillationen in der Stellgröße entstehen, die den geschlossenen Regelkreis sehr schnell instabil werden lassen können.

Diese Oszillationen lassen sich folglich nur durch eine Verringerung der Filterbandbreite unterdrücken, was wiederum die Performance, im Sinne der Abweichung vom Referenzmodell, negativ beeinflusst. Grob gesprochen bewirkt eine Erhöhung der Filterbandbreite eine Verbesserung der Performance aber im Gegenzug auch eine Abschwächung der Entkopplung zwischen Adaptions- und Regelkreis und somit eine Verschlechterung der Robustheitseigenschaften des geschlossenen Regelkreises. Eine Verringerung der Filterbandbreite hingegen bewirkt das genaue Gegenteil, nämlich eine Verbesserung der Robustheit durch eine stärkere Entkopplung mit dem Nachteil der Verschlechterung der Performance. Folglich stellen die Anforderungen an Performance und Robustheit gegensätzliche Problemstellungen dar, so dass bei der Wahl von  $C(s)$

stets zwischen den beiden Eigenschaften abgewogen werden muss.

Ferner wurden im Gegensatz zur  $\mathcal{L}_1$ -Zustandsregelung bei der Ausgangsrückführung bleibende Regelabweichungen beobachtet, die aufgrund der technischen Beschränkungen für die Abtastzeit von  $T_s \geq 0.5$  ms nicht verringert werden können. Um die stationären Regelfehler, die bei der  $\mathcal{L}_1$ -Ausgangsrückführung für eine Positions-Festwertregelung auftreten zu beseitigen, wäre die Verwendung einer äußeren Regelschleife mit einem reinen I-Regler oder einem PI-Regler denkbar.

Da sich Festwertregelungen nicht für die Trajektorienverfolgungen eignen, eine Aufgabe, die in den meisten Positionieranwendungen von signifikanter Bedeutung ist, sollen im nächsten Kapitel mögliche Folgeregelungsansätze für die betrachteten  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Zustands- und Ausgangsrückführungen vorgestellt werden.

# 6 Folgeregelung

Für einen Großteil der Anwendungen einer NPM sind hoch präzise Trajektorienverfolgungen von enormer Wichtigkeit. Selbst einfachste Anwendungen, bei denen nur zwischen zwei Punkten verfahren wird, nutzen bereits Referenzvorgaben mit Dynamikprofilen für Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung, die bestmöglich verfolgt werden sollen. Hierfür benötigt man Folgeregelungen, weil Festwertregler für die Trajektorienverfolgung gänzlich ungeeignet sind und immer einen sogenannten Schleppfehler verursachen.

Eine Folgeregelung besteht häufig aus einer Kombination von Vorsteuerung und Regelung (siehe Abbildung 6.1). Erstere wird dabei meist so ausgelegt, dass die Regelstrecke vollständig (sofern möglich) bzw. approximativ invertiert wird. Die Vorsteuerung bewirkt folglich, dass die Regelgröße möglichst schnell an die Führungsgröße angepasst wird. Zudem konvergiert ein asymptotisch stabiles System durch eine Vorsteuerung nach dem Abklingen seiner Eigenbewegung auf die Referenztrajektorie. Die Regelung hat dahingegen die Aufgabe, Störungen sowie Ungenauigkeiten der Vorsteuerung zu kompensieren und die Konvergenz (Eigenbewegung) zu beschleunigen. Die Regelgüte wird dabei durch das Vermögen der Regelung, dieser vorher festgelegten Solltrajektorie zu folgen, bestimmt [Lun13, S.347].

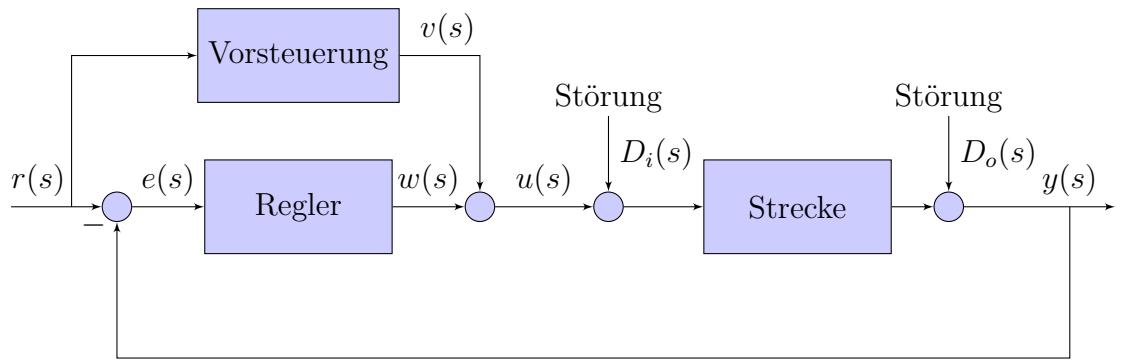


Abbildung 6.1: Blockschaltbild einer Folgeregelung.

Der Nachteil einer solchen fix parametrierten Folgeregelung besteht darin, dass

die Vorsteuerung sehr empfindlich auf Modellfehler bzw. Parameteränderungen in der Regelstrecke reagiert. Dies kann sehr schnell zu inakzeptablen Trajektorienfolgefehlern führen. Daher liegt die Idee nahe, die Gesamtheit aller auftretenden Störungen und Modellunsicherheiten mittels eines  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Festwertreglers zu kompensieren, sodass in sehr guter Näherung zunächst ein nahezu konstantes, störfreies, lineares Ein-/Ausgangsverhalten der Regelstrecke erzeugt wird. Bezuglich diesem Ein-/Ausgangsverhalten, dass näherungsweise durch das  $\mathcal{L}_1$  Designssystem beschrieben wird, entwerfen wir einen fix parametrierten Standardfolgeregler bestehend aus Vorsteuerung und einer frei wählbaren Ausgangsrückführung. Die Ausgangsrückführung wird zunächst nicht zwingend benötigt, da der  $\mathcal{L}_1$ -Regler die Strecke stabilisiert. Die Vorsteuerung sorgt demnach dafür, dass nach Abklingen der Eigenbewegung des geschlossenen  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreises das System auf die Solltrajektorie gezogen wird. Die Ausgangsrückführung kann die Performance allerdings verbessern, da der  $\mathcal{L}_1$ -Regler keine perfekte Kompensation ermöglichen kann. Demnach werden nach wie vor Störungen auftreten, die sich aus den Fehlern zwischen dem Designssystem und dem geschlossenen  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreis ergeben. Diese Fehler können durch die Ausgangsrückführung der Folgeregelung nochmal um ein Weiteres unterdrückt werden. Das Ergebnis dieses Ansatzes ist eine Kaskaden-Regelkreisstruktur bestehend aus innerem  $\mathcal{L}_1$ -aktivem Regelkreis und äußerem Standard-Folgeregelungskreis.

Im Folgenden werden harmonische (Sinus-/Kosinus-) Trajektorien und ruckbeschränkte Referenztrajektorien mit trapezförmigen Beschleunigungsprofilen verwendet. Letztere erzeugen im Wesentlichen rampenförmige Positions vorgaben.

## 6.1 Folgeregelung für die $\mathcal{L}_1$ -adaptive Zustandsrückführung

Zum Entwurf der Folgeregelung und insbesondere zur Berechnung der Vorsteuerung wird eine Beschreibung des Ein-/Ausgangsverhaltens des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreises benötigt. Da das Referenzsystem von dem unbekannten Parameter  $\theta$  abhängig ist, wurde hierfür das Designssystem der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Zustandsrückführung aus (5.35) verwendet. Sei im Nachfolgenden angenommen, dass wie in Kapitel 5.2 die gewünschte Dynamik durch die Dynamikmatrix  $A_m$  beschrieben wird. Des Weiteren sei das Referenzmodell mit dieser Dynamik und einer stationären Verstärkung von 1  $M(s)$  genannt mit  $M(s) = k_g c^T H(s)$ , wobei  $H(s) = (s\mathbb{I} - A_m)^{-1}b$  ist. Der Ausgang des Designssystems

ergibt sich somit zu:

$$y_{des}(s) = C(s)M(s)r(s). \quad (6.1)$$

Das Blockschaltbild der Folgeregelung wird in Abbildung 6.2 gezeigt. Da der  $\mathcal{L}_1$ -Regler nicht alle Unsicherheiten und Störungen perfekt kompensieren kann, ist zu erwarten, dass Abweichungen zum Designsystem auftreten werden. Diese Abweichungen sollen im Folgenden durch die ausgangsseitigen Störungen  $D_o(s)$  modelliert werden. Abweichungen, die durch Ungenauigkeiten in der Vorsteuerung entstehen, bspw. durch die im nächsten Kapitel beschriebene Näherung des Designsystems, sollen ferner durch eingangsseitige Störungen  $D_i(s)$  angedeutet werden.

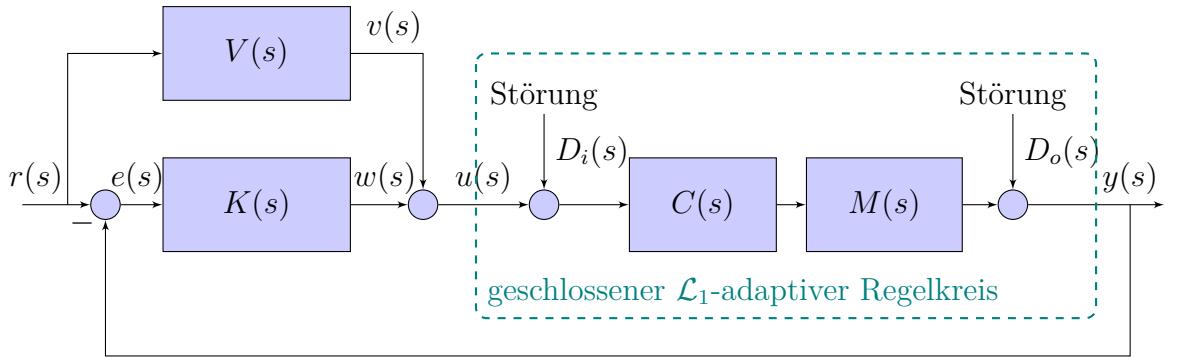


Abbildung 6.2: Blockschaltbild der Folgeregelungsstruktur für den Fall der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Zustandsrückführung mit Vorsteuerung  $V(s)$ , Regler  $K(s)$  und dem geschlossenen  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreis  $C(s)M(s)$ .

### 6.1.1 Entwurf der Vorsteuerung

In der Regelungstechnik gibt es mehrere Ansätze, um eine Folgeregelung bzw. die Vorsteuerung darin zu entwerfen. Hierzu zählen beispielsweise der *computed-torque*-Ansatz, der flachheitsbasierte Ansatz und die Invertierung im Frequenzbereich. In dieser Arbeit wird die Vorsteuerung durch eine Invertierung im Frequenzbereich entworfen.

Eine Vorsteuerung invertiert im Idealfall die Streckenübertragungsfunktion, sodass das Ein-/Ausgangsverhalten von  $r(t)$  zu  $y(t)$  1 ist. Für den Fall, dass der Relativgrad der Regelstrecke  $n > 0$  ist und diese folglich im Frequenzbereich wegen der Akausalität der resultierenden Übertragungsfunktion nicht vollständig invertiert werden kann, kann dennoch eine perfekte Inversion erfolgen, falls Ableitungen der Referenzgröße

$r(t)$  bekannt sind. Diese können dann in die Vorsteuerung mit eingehen. Im Falle einer BIBO-stabilen Strecke, gleicher Anfangsbedingungen zwischen  $r(t)$  und  $y(t)$  sowie deren Ableitungen und der Abwesenheit von Störungen folgt die Regelgröße der Referenz perfekt. Unterscheiden sich die Anfangsbedingungen, so folgt die Regelgröße  $y(t)$  der Referenz  $r(t)$  erst nach Abklingen der Eigendynamik. Letztere kann durch den Regler  $K(s)$  beschleunigt werden. Hierbei ergibt sich die Problemstellung, dass das Filter

$$C(s) = \frac{\hat{\omega}(s)k}{s + \hat{\omega}(s)k}$$

zeitvariant ist und  $C(s)M(s)$  eine Übertragungsfunktion dritten Grades ist. Tetra verwendet ruckbeschränkte Transitionstrajektorien für Punkt-zu-Punkt-Bewegungen mit trapezförmigen Beschleunigungsprofilen. Dies bedeutet, dass der Ruck springt und stückweise stetig ist, die Beschleunigung ist trapezförmig, die Geschwindigkeit ist doppel S-förmig und die Position ist rampenförmig. Die verwendete NC (*Numerical Control*) stellt allerdings lediglich Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvorgaben in numerischer Form zur Verfügung, jedoch keine Ruckvorgaben, sodass mit dem Stand dieses Systems zunächst maximal bis zur 2. Ableitung vorgesteuert werden kann. Da wir dieses Szenario und dessen Möglichkeiten unter Verwendung der adaptiven Regelungen explizit untersuchen möchten, beschränken wir uns ebenfalls auf die Vorsteuerung bis zur 2. Ableitung. Es sei jedoch erwähnt, dass prinzipiell die Möglichkeit besteht die Trajektorien bis zur 3. Ableitung auszurechnen und entsprechend vorzusteuern.

Für die Inversion von  $M(s)$  reichen Sollvorgaben bis zur 2. Ableitung aus. Möchte man allerdings  $C(s)$  mit invertieren, so benötigt man die 3. Ableitung, sowie die Schätzungen  $\hat{\omega}(s)$ , die zusammen mit dem Reglerparameter  $k$  als Koeffizienten vor dem 3. Ableitungsterm auftreten. Hierbei stellt sich jedoch die Frage wie sinnvoll die Inversion von  $C(s)$  ist. Sollte der Filter  $C(s)$  invertiert werden, so muss darauf geachtet werden, dass die durch das invertierte Filter erzeugten Signale nicht zu hohe Frequenzanteile beinhalten. Dies ist nötig, um den  $\mathcal{L}_1$ -Regler Grundsatz, die Aktuatorbandbreite im Reglerentwurf zu berücksichtigen, nicht zu verletzen. Da die Referenztrajektorie jedoch vom Kunden so gewählt werden sollte, dass der Läufer ihr mit der verfügbaren Aktuatorbandbreite und Stellgröße folgen kann, ist dieser Grundsatz in den meisten Fällen erfüllt. Des Weiteren muss jedoch unbedingt beachtet werden, dass durch den zeitvarianten Filter  $C(s)$  sowohl Betrag (unbekannte Eingangsverstärkung), als auch Phase der Regelgröße adaptiert werden [HC10, S.79 f.]. Wenn wir nun den Filter mit  $k\hat{\omega}(s)$  invertieren, so entsteht ein zeitvarianter invertierter Filter  $1/C(s)$ , das  $C(s)$

entgegenwirkt, sodass infolge dessen die Phasenadaption des  $\mathcal{L}_1$ -Reglers nicht mehr funktioniert. Aus diesem Grund wurde auf eine Inversion des Filters  $C(s)$  für die Vorsteuerung verzichtet.

Die Vorsteuerung wird nun somit ohne Beachtung von  $C(s)$  entworfen und da die Bandbreite des Filters viel größer ist als die von  $M(s)$ , kann in einer guten Näherung angenommen werden, dass für nicht allzu hochfrequente Signale gilt:

$$C(s)M(s) \approx M(s). \quad (6.2)$$

Da  $M(s) = 0.64/(s^2 + 1.92s + 0.64)$  ein  $PT_2$ -System ist, lässt sich die Strecke  $M(s)$  im

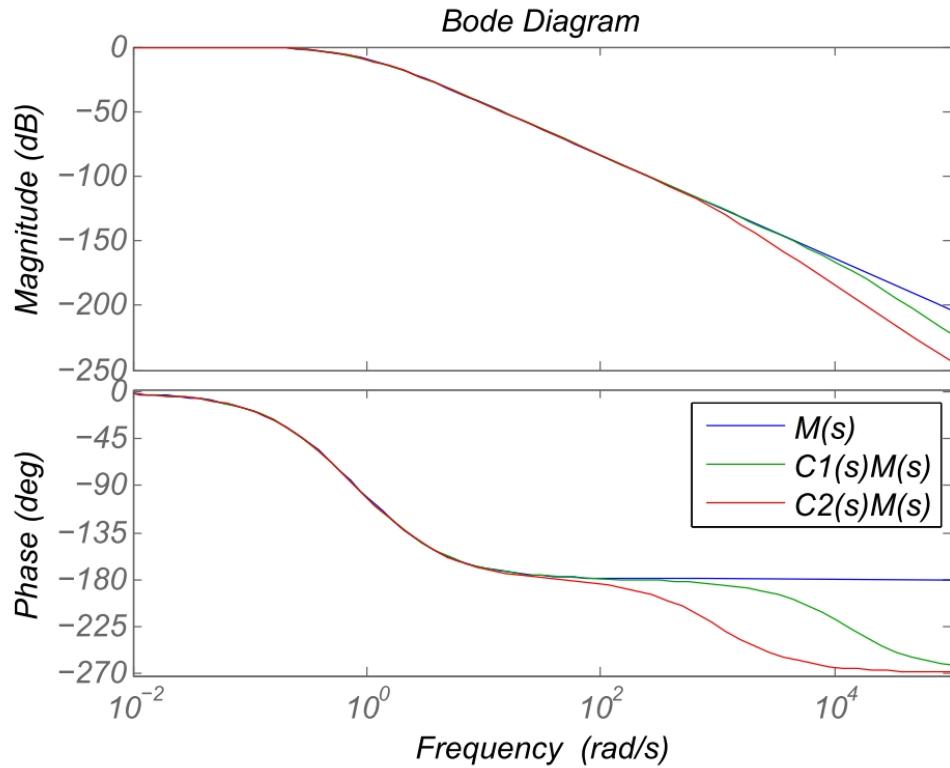


Abbildung 6.3: Genauigkeit der Näherung (6.2) für  $C1(s) = 12566/(s + 12566)$  und  $C2(s) = 992/(s + 992)$ .

Frequenzbereich nicht invertieren, da die resultierende Inverse negativen Relativgrad hätte. Daher nimmt man hypothetisch an, man könne die Inverse bestimmen und erhält die Übertragungsfunktion mit negativem Relativgrad. Die Rücktransformation in den Zeitbereich zeigt, dass entsprechende Zeitableitungen der Referenz benötigt werden,

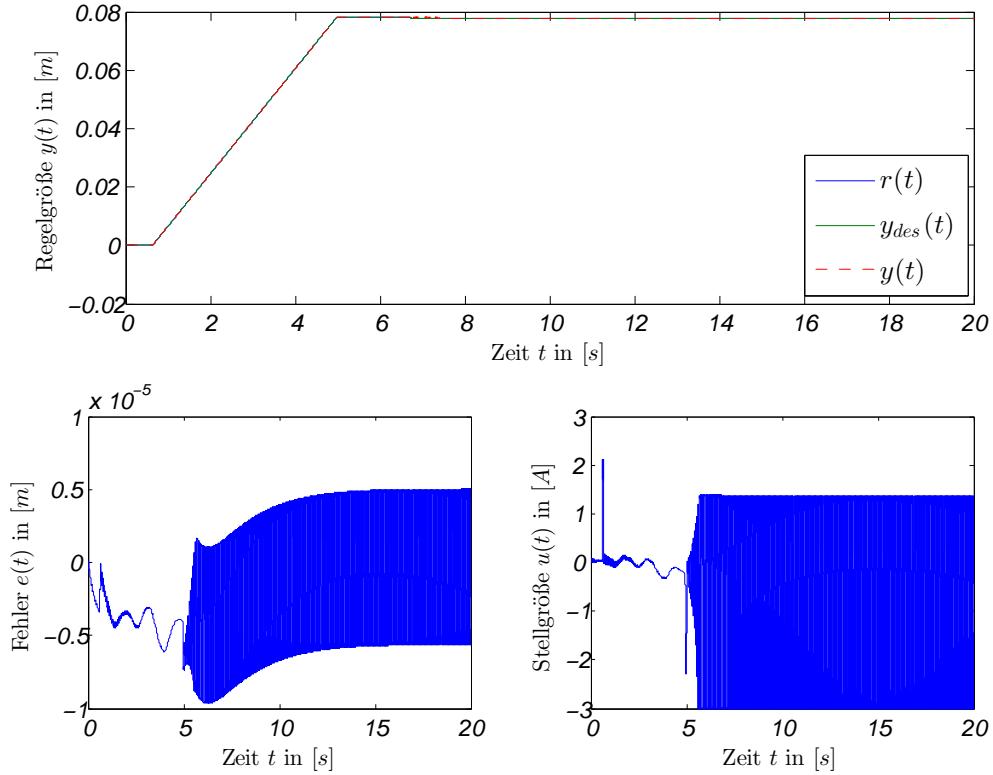


Abbildung 6.4: Performance der Vorsteuerung (6.3) mit  $K(s) = 0$  für die mit  $m = 19.24$ ,  $\mu_x = 7.2$ ,  $K_{mx} = 1.62$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\tau = 0$  ms parametrierte Regelstrecke und für die  $\mathcal{L}_1$ -Reglerparameter,  $\Gamma = 10^5$ ,  $k = 31885$ .  $e(t) = r(t) - y(t)$  bezeichnet den Trajektorienfolgefehler.

durch deren Kenntnis folglich eine perfekte Inversion der Strecke erfolgen kann. Da diese Zeitableitungen durch die NC vorgegeben werden und somit bekannt sind, kann die Inversion von  $M(s)$  exakt erfolgen. Die Vorsteuerung  $v(t)$  ist somit gegeben zu:

$$v(t) = \frac{\ddot{r}(t) + 1.92\dot{r}(t) + 0.64r(t)}{0.64} \quad (6.3)$$

Abbildung 6.3 zeigt mithilfe eines Bodediagrammes die Genauigkeit der Näherung (6.2) für unterschiedliche Bandbreiten des zeitvarianten Filters  $C(s)$ . Des Weiteren ist in Abbildung 6.4 die Performance der bloßen Vorsteuerung aus Gleichung (6.3) (ohne den Regler  $K(s)$ ) für den geschlossenen  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreis dargestellt.

Der Fehler  $e(t) = r(t) - y(t)$  wurde hier bezüglich des Referenzsignals  $r(t)$  gemessen. Es fällt auf, dass die geforderte Genauigkeit von  $1 \mu m$  nicht eingehalten werden kann und sowohl die Stellgröße, als auch das Fehlersignal starke Oszillationen aufweisen. Der Grund hierfür ist die hohe Bandbreite des Filters  $C(s)$  und somit eine schwache

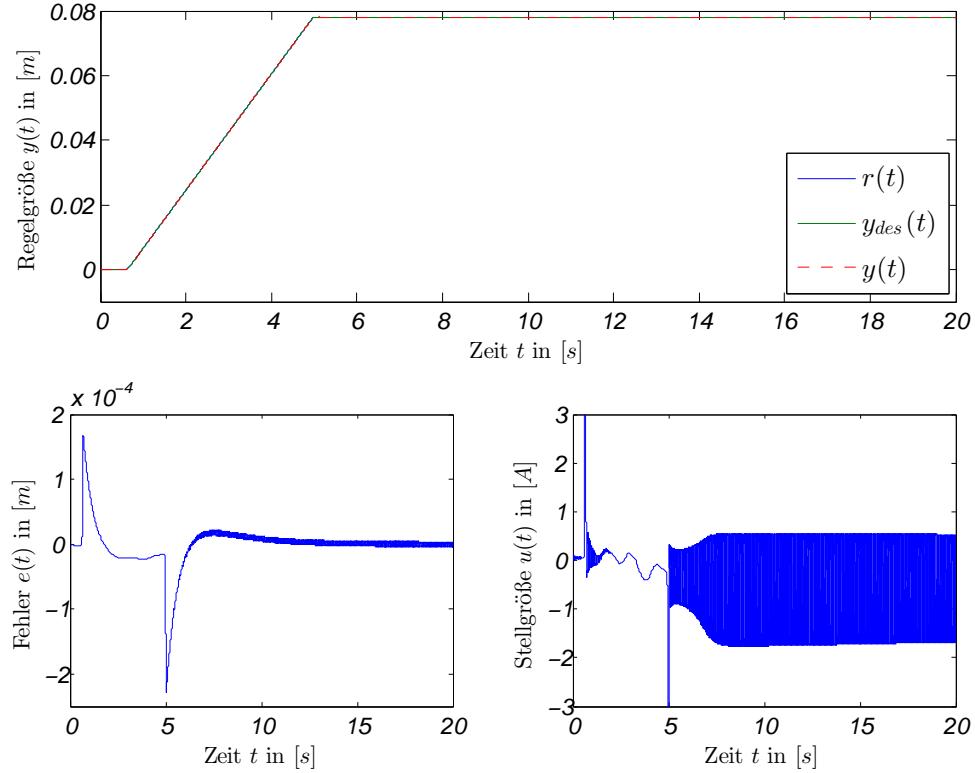


Abbildung 6.5: Performance der Vorsteuerung mit Stellbegrenzung für die minimale Bandbreite von  $C(s)$  bei  $k = 31885$  und  $\tau = 0$  ms. Diese ergibt sich aus einem minimalen  $\omega$  und somit aus  $m = 30$ ,  $\mu_x = 14$ ,  $K_{mx} = 0.8$  und  $\epsilon = 0.7$ .

Entkopplung von Adaptionskreis und Regelkreis. Zudem läuft das Stellsignal bereits bei der geringen Masse  $m = 19.24$  in die Sättigung, weshalb sich der Regler nicht eignet. Welche Möglichkeiten es gibt, diese Oszillationen zu beseitigen, wird später genauer untersucht werden. Zunächst wurde untersucht, ob sich der Fehler  $e(t)$  mithilfe einer Zustandsrückführung  $u_m(t) = -k_m^T x(t)$  (siehe (5.2)) der Regelstrecke innerhalb des  $\mathcal{L}_1$ -Reglers verringern lässt.  $k_m^T$  wurde dabei für die gemittelte Strecke, d.h. zu

$$k_m^T = \begin{pmatrix} \frac{\min_{\theta \in \Theta_0} \theta_1 + \max_{\theta \in \Theta_0} \theta_1}{2} & \frac{\min_{\theta \in \Theta_0} \theta_2 + \max_{\theta \in \Theta_0} \theta_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6400 & 1.5516 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

entworfen. Damit erhalten wir das neue  $\Theta_0$  zu:

$$\Theta_0 = \{\nu_0 = (\nu_{01} \quad \nu_{02})^T \in \mathbb{R}^2 : \nu_{01} = 0 \wedge \nu_{02} \in [-0.3684, 0.3684]\}. \quad (6.5)$$

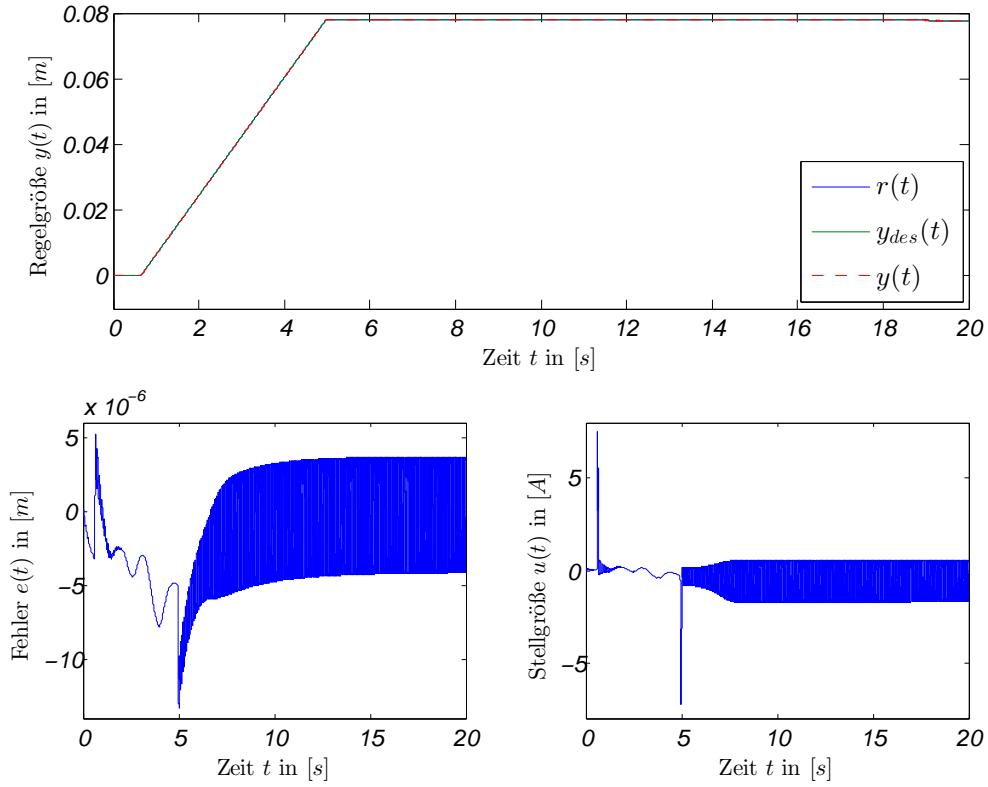


Abbildung 6.6: Performance der Vorsteuerung ohne Stellbegrenzung für die minimale Bandbreite von  $C(s)$  bei  $k = 31885$ ,  $\tau = 0$  ms und ohne Stellbegrenzung. Die Parameter sind  $m = 30$ ,  $\mu_x = 14$ ,  $K_{mx} = 0.8$  und  $\epsilon = 0.7$ .

Mit  $\epsilon_{\hat{\theta}} = 0.1$  ergibt sich:

$$\theta_{Pmax} = \max_{\theta \in \Theta_0} \|\theta\|_2 \sqrt{1 + \epsilon_{\hat{\theta}}} = 0.3684 \cdot \sqrt{1 + 0.1} \approx 0.3864 \quad (6.6)$$

sowie

$$\Theta = \{\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : \nu_1 = [-0.3864, 0.3864] \wedge \nu_2 \in [-0.3864, 0.3864]\}. \quad (6.7)$$

$L$  lässt sich anschließend berechnen zu:

$$L = \max_{\theta \in \Theta} \|\theta\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 0.3864 \\ 0.3864 \end{pmatrix} \right\|_1 = 0.7728. \quad (6.8)$$

In Simulationen zeigte sich jedoch, dass diese Zustandsrückführung keine erkennbare Veränderung der Regelgröße bzw. des Fehlersignals  $e(t)$  brachte. Ein Grund hierfür könnte einerseits sein, dass ein Großteil der Abweichungen des geschlossenen adaptiven

Regelkreises von dem Designsyste durch die Schätzungen bzw. die großen unveränderten Projektionsbeschränkungen  $\Delta$  und  $\Omega$  der Schätzungen  $\hat{o}(t)$  sowie  $\hat{\omega}(t)$  erzeugt werden. Andererseits könnte der Fehler auch durch die Näherung (6.2) bedingt sein, was im Folgenden genauer untersucht werden muss.

Abbildung 6.5 zeigt die Performance für die Parameter  $m = 30$ ,  $K_{mx} = 0.8$  und  $\epsilon = 0.7$ , wodurch die Bandbreite von  $C(s)$  minimiert wird (siehe (5.68)). Zudem wurde  $\mu_x = 14$  gewählt, um den Stellgrößenaufwand zu maximieren und somit den ungünstigsten Fall zu simulieren. Es ist zu erkennen, dass sich die Regelgüte stark verringert hat. Der Fehler  $e(t)$  ist besonders bei  $t = 1$  s und  $t = 5$  s sehr groß, wenn die Solltrajektorie trapezförmig beschleunigt. Der Grund hierfür ist, dass die Stellgröße in die Stellbegrenzung  $[-3A, 3A]$  läuft. Die Ursache ist darin zu suchen, dass sich die maximale Stellgröße des  $\mathcal{L}_1$ -Folgereglers ( $\mathcal{L}_1$ -Reglers mitsamt Vorsteuerung) stark von der Stellgröße bei bloßer Festwertregelung, d.h. ohne Vorsteuerung, unterscheidet (siehe stellgrößenorientierter Entwurf des Referenzmodells in Abschnitt 5.2.2). Zur Einhaltung der Stellgrößenbeschränkungen bei einer Folgeregelung müssen im Wesentlichen algebraische Bedingungen hergeleitet werden, die die zu erwartenden Unsicherheiten sowie die maximalen Geschwindigkeits- ( $\dot{r}_{max}(t)$ ) und Beschleunigungsvorgaben ( $\ddot{r}_{max}(t)$ ) in Relation zur maximalen Stellgröße setzen. Aufgrund der Vorsteuerung beeinflussen die zuletzt genannten Größen den Stellauflauf wesentlich. Die Festlegung der Größen  $\dot{r}_{max}(t)$  und  $\ddot{r}_{max}(t)$  fällt vornehmlich in den Aufgabenbereich der Trajektorienplanung. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu übersteigen, wird daher der Einfachheit halber die Stellgrößenbeschränkung zunächst vernachlässigt. Abbildung 6.6 zeigt für die gleichen Parametereinstellungen die Performance des  $\mathcal{L}_1$ -Folgereglers aus Abbildung 6.5 mit Vorsteuerung  $v(t)$  und  $K(s) = 0$ , ohne Stellbeschränkungen. Der maximale Fehler beträgt nun nur noch  $13.3\mu m$ .

Um den Einfluss verschiedener Reglerparametrierungen auf die Regelgüte der Vorsteuerung zu untersuchen, wurden Simulationen mit unterschiedlichen Werten für  $k$  und  $\Gamma$  durchgeführt, welche in der Abbildung 6.7 zu sehen sind. Für die Wahl  $\Gamma = 10^4$  (in blau dargestellt) ist zu erkennen, dass mit einer Verringerung von  $k$  auch der Betrag der Stellsensitivität abnimmt. Gleichzeitig verringern sich die Oszillationen im Fehlersignal. Der maximale Fehler vergrößert sich jedoch. Wird nun die Adoptionsverstärkung auf  $\Gamma = 10^5$  (in rot dargestellt) erhöht, so verringern sich die Amplituden der Oszillationen wesentlich. Für  $k = 31885$  stellen sich dauerhafte Schwingungen mit einer Amplitude von  $4\mu m$  im Fehlersignal  $e(t)$  ein. Es fällt zudem auf, dass sich die maximalen Fehler der Regelgrößendifferenzen  $e(t)$  mit zunehmendem  $k$  und somit mit zunehmender Bandbreite von  $C(s)$  verringern. Diese Tatsache lässt sich auch in der

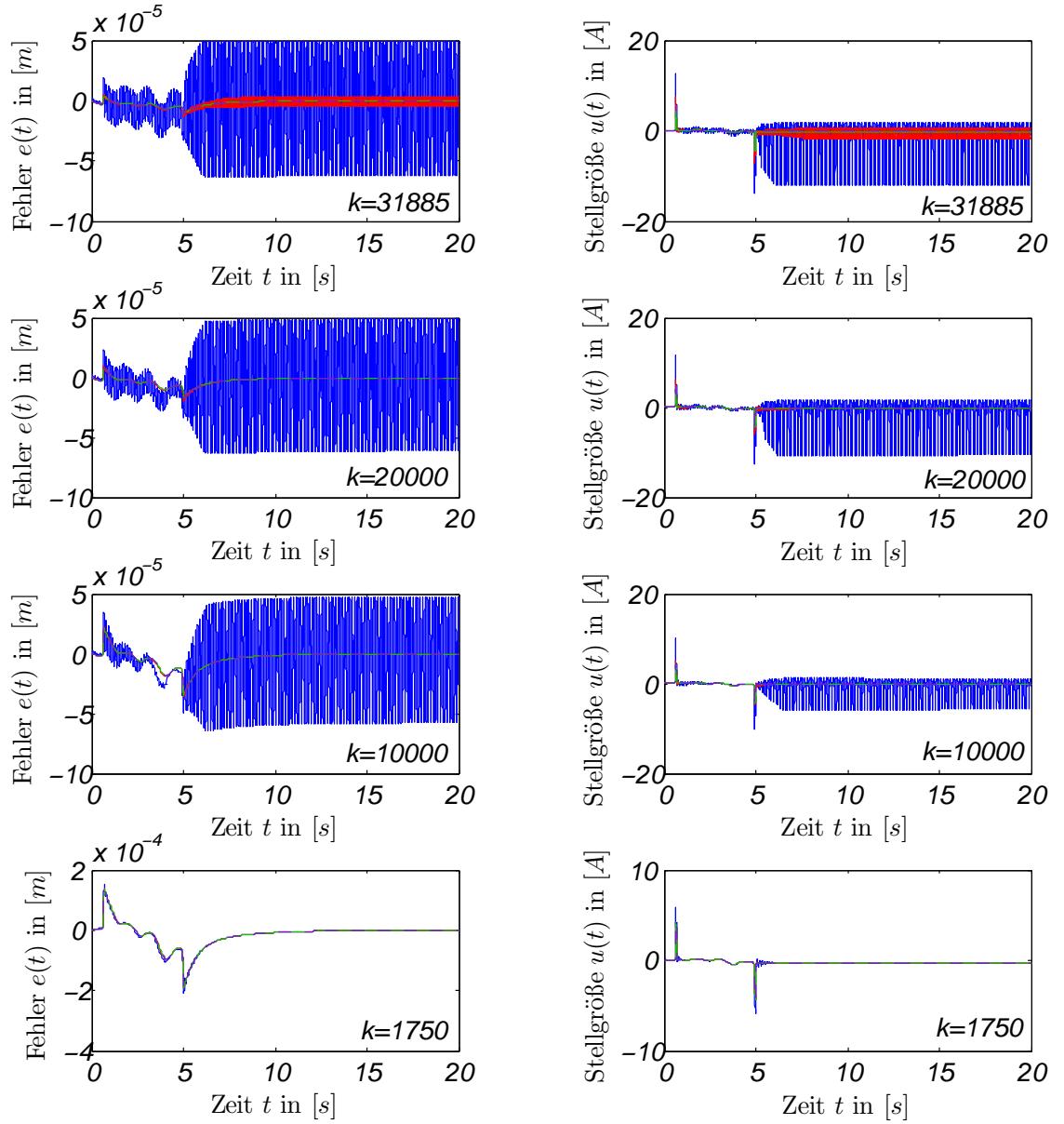


Abbildung 6.7: Vergleich der Performance der Vorsteuerung für unterschiedliche  $k$  und  $\Gamma$  mit  $\Gamma = 10^4$  (blau),  $\Gamma = 10^5$  (rot),  $\Gamma = 10^6$  (grün) und  $\Gamma = 10^7$  (lila, gestrichelt). Die Parameter der Regelstrecke werden mit  $m = 30$ ,  $\mu_x = 14$ ,  $K_{mx} = 0.8$  und  $\epsilon = 0.7$  so gewählt, dass  $\hat{\omega}(s)$  und somit auch die Bandbreite von  $C(s)$  minimal wird.

Simulation mit  $\Gamma = 10^6$  (in grün dargestellt) beobachten. Hier ist ebenfalls zu erkennen, dass die Erhöhung von  $\Gamma$  einen positiven Effekt auf die Stellgröße hat, deren maximale Amplitude und deren Schwingungsneigung sich dadurch verringern. In der

Simulation mit der sehr hohen Adoptionsverstärkung  $\Gamma = 10^7$  (in lila und gestrichelt dargestellt) lässt sich beobachten, dass die Erhöhung der Adoptionsverstärkung keine merkliche Verbesserung der Performance mehr bewirkt. Somit können wir abschließend festhalten, dass die Vergrößerung von  $k$  den maximalen Fehler zwar verringert, jedoch aufgrund der schwächeren Entkopplung von Adoptionskreis und Regelkreis hochfrequente Oszillationen erzeugt. Eine anschließende Erhöhung von  $\Gamma$  wirkt stabilisierend und verringert deren Amplituden. Eine weitere Vergrößerung der Adoptionsverstärkung auf  $\Gamma = 10^7$  bewirkt keine Steigerung der Regelgüte mehr. Da mit der Vergrößerung von  $\Gamma$  die Performance-Schranken zwischen dem geschlossenen  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreis und dem Referenzsystem verkleinert werden, liegt es nun nahe, dass der übrig gebliebene Fehler aufgrund der Näherung (6.2) und aufgrund der Abweichung des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Referenzsystems von dem Designsysteem entsteht. In beiden Fällen lässt sich mithilfe der Vergrößerung von  $k$  die Regelgüte steigern. Dies gilt jedoch nur, sofern keine Totzeiten den Regelkreis stören. Andernfalls liefert ein  $\mathcal{L}_1$ -adaptiver Regler mit geringerem  $k$ , also ein Regler der robuster gegenüber Totzeiten ist, eine bessere Performance. Dies wird später durch weitere Simulationen genauer analysiert.

Die Beobachtungen bestätigen somit die Berechnungen aus Kapitel 5.1, dass die Performance-Schranken und somit die Abweichungen des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Systems vom Designsysteem mit dem Referenzmodell  $M(s)$  durch Vergrößerung von  $\Gamma$  und  $k$  verringert werden können. Die besten Einstellparameter für den Fall  $\tau = 0$  ms sind daher  $k = 31885$  und  $\Gamma = 10^6$  (falls die zur Verfügung stehende Rechenleistung diese hohe Adoptionsverstärkung erlaubt). Trotz dieser hohen Filterbandbreite und Adoptionsverstärkung konnte der maximale Fehler jedoch nicht bis auf  $1 \mu\text{m}$  verringert werden.

Anschließend soll nun untersucht werden, wie sich die Verläufe des Fehlers und der Stellgröße verhalten, wenn Totzeiten den Regelkreis stören. Dazu wird zunächst eine Totzeit von  $\tau = 0.5$  ms verwendet. Abbildung 6.8 zeigt die Fehler- und die Stellgrößenverläufe für diesen Fall für unterschiedliche  $k$  und  $\Gamma$ . Es lässt sich beobachten, dass sich für  $\Gamma = 10^4$  (in blau dargestellt) die Performance nur geringfügig gegenüber Abbildung 6.7 verschlechtert hat. Für  $\Gamma = 10^5$  (in rot dargestellt) in Abbildung 6.8 ist eine deutliche Reduzierung der Positionsgenauigkeit gegenüber dem totzeitfreien Regelkreis aus Abbildung 6.7 zu erkennen. Zudem haben sich die maximalen Stellgrößen erhöht. Die Regelgüte mit  $\Gamma = 10^5$  ist für alle  $k$  sowohl mit, als auch ohne Totzeit, besser als mit  $\Gamma = 10^4$ . Des Weiteren zeigt Abbildung 6.8 die Fehler- und die Stellgrößenverläufe für  $\tau = 0.5$  ms und  $\Gamma = 10^6$  (in grün dargestellt). Erneut ist besonders für größere  $k$  eine Verbesserung gegenüber dem Fall  $\Gamma = 10^5$  zu erkennen. Es zeigt sich somit, dass die Wahl einer höheren Adoptionsverstärkung auch im Falle von Totzeiten vorteilhaft

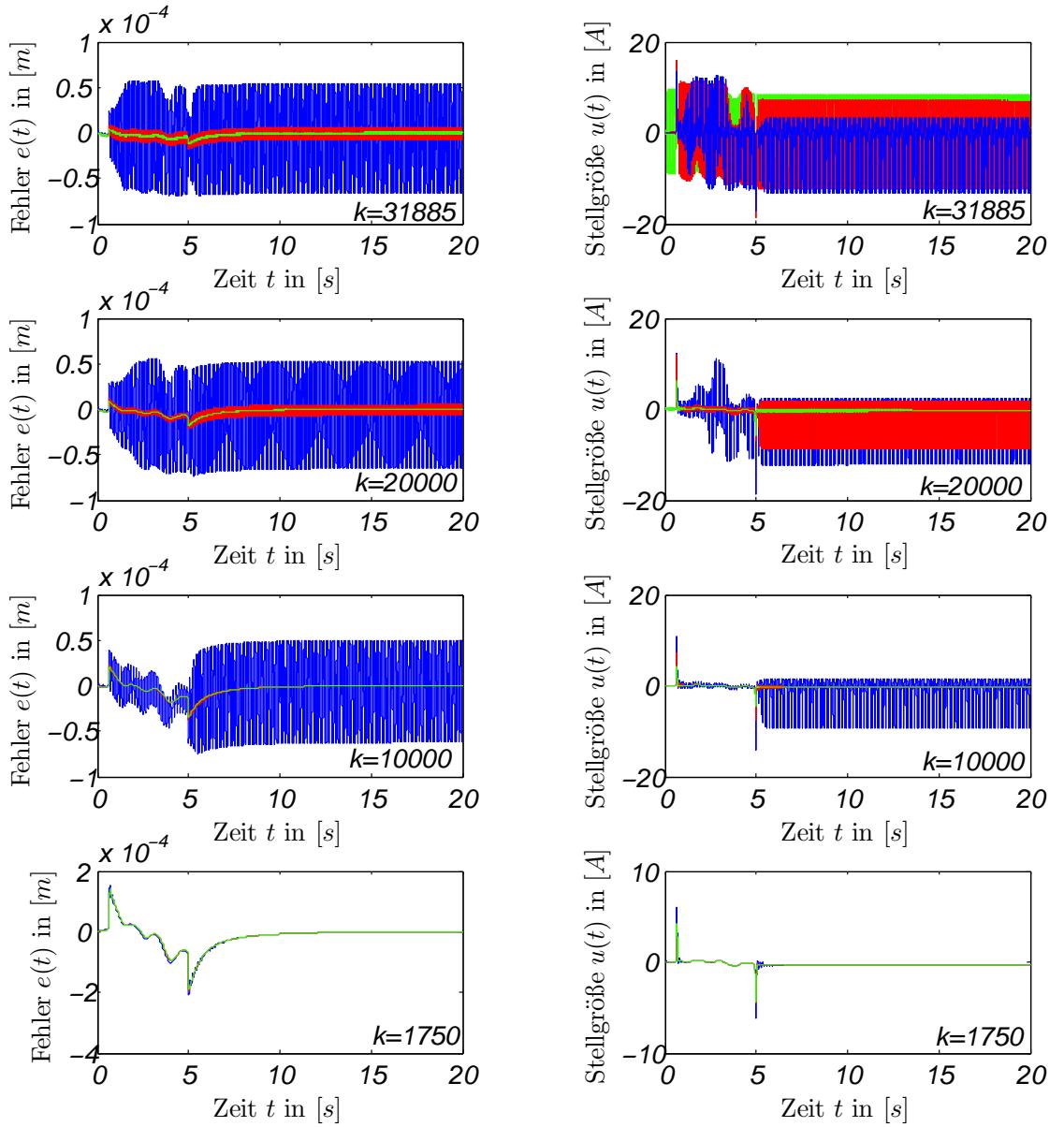


Abbildung 6.8: Vergleich der Performance der Vorsteuerung für  $\tau = 0.5$  ms und für unterschiedliche  $k$  und  $\Gamma$  mit  $\Gamma = 10^4$  (blau),  $\Gamma = 10^5$  (rot) und  $\Gamma = 10^6$  (grün). Die Parameter der Regelstrecke werden mit  $m = 30$ ,  $\mu_x = 14$ ,  $K_{mx} = 0.8$  und  $\epsilon = 0.7$  so gewählt, dass  $\hat{\omega}(s)$  und somit auch die Bandbreite von  $C(s)$  minimal wird.

ist, während ein  $\mathcal{L}_1$ -adaptiver Regler mit einem zu groß gewählten  $k$  in diesem Fall zu *high-gain feedback* neigt und Oszillationen mit großen Amplituden zwischen den Stellbegrenzungen ausführt. Es kann in seltenen Fällen vorkommen, dass die Zyklus-

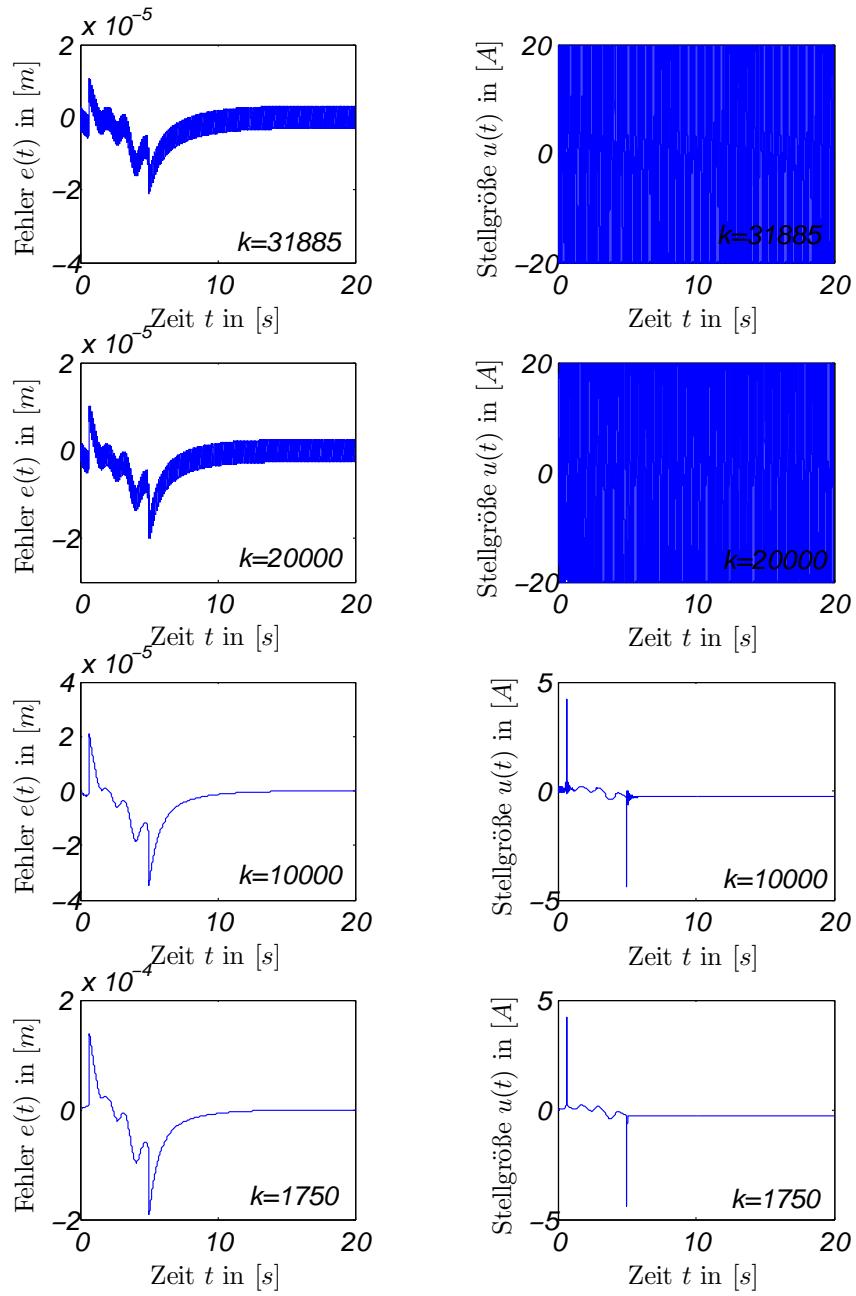


Abbildung 6.9: Vergleich der Performance der Vorsteuerung für unterschiedliche  $k$ ,  $\Gamma = 10^6$  und  $\tau = 1$  ms. Die Parameter der Regelstrecke werden mit  $m = 30$ ,  $\mu_x = 14$ ,  $K_{mx} = 0.8$  und  $\epsilon = 0.7$  so gewählt, dass  $\hat{\omega}(s)$  und somit auch die Bandbreite von  $C(s)$  minimal wird.

zeit von  $\tau = 0.5$  ms nicht eingehalten werden kann. Die Totzeit verdoppelt sich somit auf  $\tau = 1$  ms. Abbildung 6.9 zeigt diesen Fall. Hierbei sei angemerkt, dass eine Stellbegrenzung eingeführt werden musste, da andernfalls die Simulationsdauer sehr stark

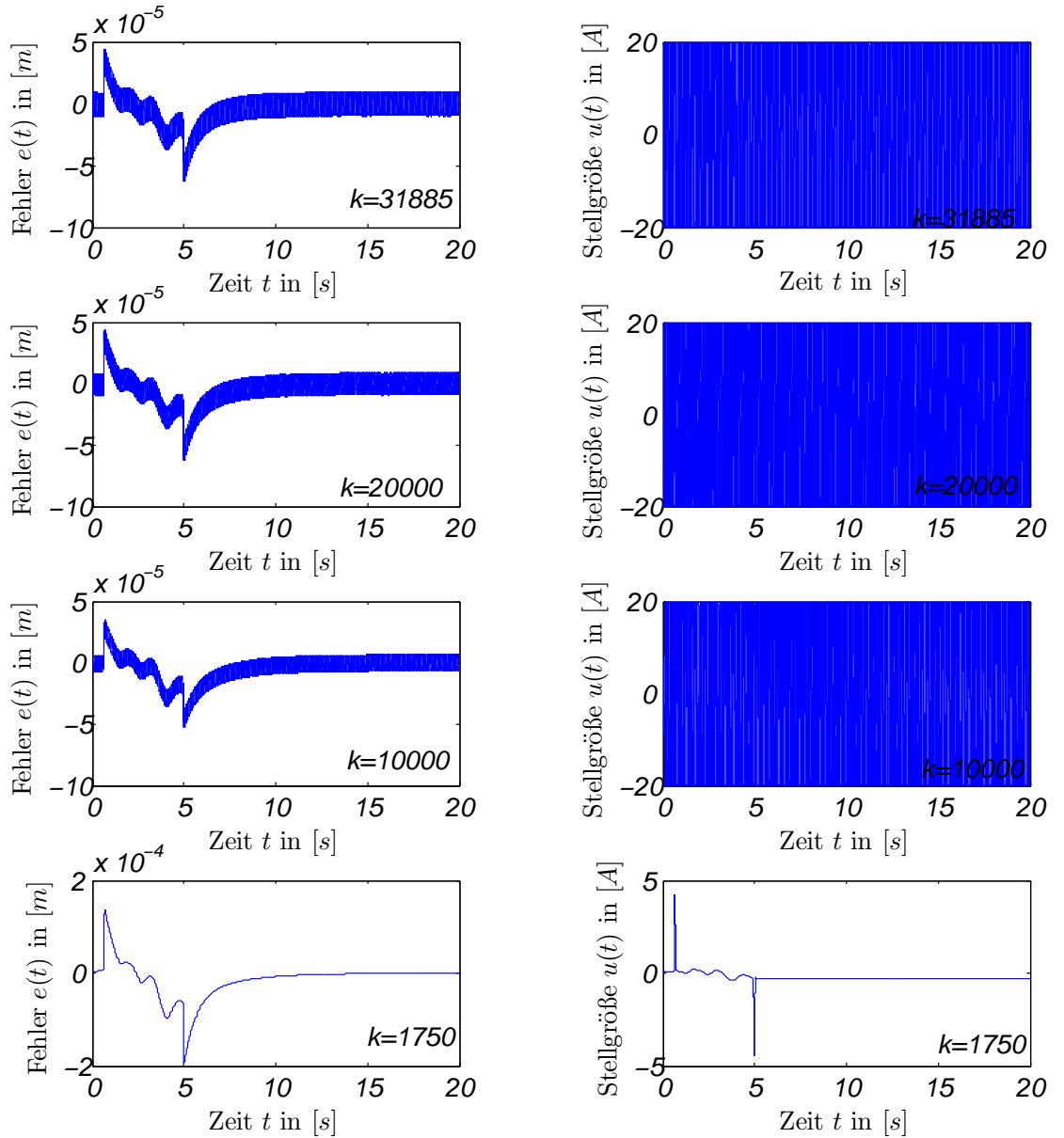


Abbildung 6.10: Vergleich der Performance der Vorsteuerung für unterschiedliche  $k$ ,  $\Gamma = 10^6$  und  $\tau = 2$  ms. Die Parameter der Regelstrecke werden mit  $m = 30$ ,  $\mu_x = 14$ ,  $K_{mx} = 0.8$  und  $\epsilon = 0.7$  so gewählt, dass  $\hat{\omega}(s)$  und somit auch die Bandbreite von  $C(s)$  minimal wird.

anstieg. Diese wurde jedoch großzügig auf  $[-20A, 20A]$  gesetzt. Es ist zu erkennen, dass die Stellgröße für  $k = 31885$  und  $k = 20000$  mit großer Amplitude oszilliert, was in der Praxis sehr viel Energie erfordern würde. Für  $k = 10000$  ist dagegen dieses *high-gain feedback*-Verhalten verschwunden, tritt jedoch bei den Parameterwerten

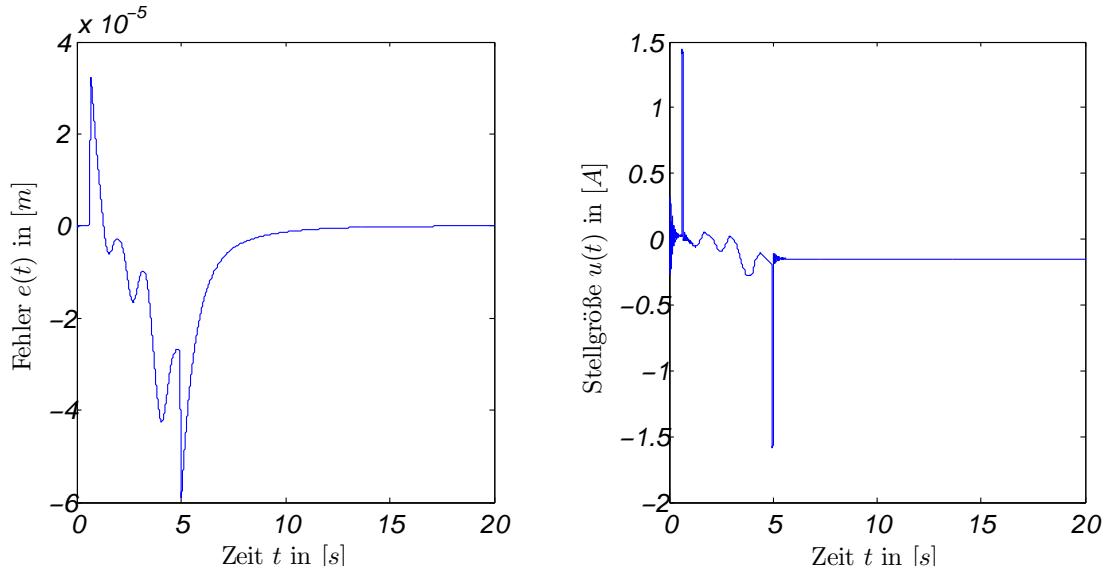


Abbildung 6.11: Performance der Vorsteuerung für  $k = 2400$ ,  $\Gamma = 10^6$  und  $\tau = 1$  ms.  
Die Parameter der Regelstrecke werden mit  $m = 19$ ,  $\mu_x = 0$ ,  $K_{mx} = 2.4$  und  $\epsilon = 1.3$  so gewählt, dass die Oszillationen der Stellgröße am größten werden.

$\mu_x = 0$ ,  $m = 19$ ,  $K_{mx} = 2.4$  und  $\epsilon = 1.3$  erneut auf, sodass  $k$  auf  $k = 2400$  verringert werden musste. Abbildung 6.11 zeigt den Fehler- und den Stellgrößenverlauf hierfür.

Eine Verdrei- bzw. Vervierfachung der Totzeit am Versuchsstand des LP<sup>3</sup>S ist zwar sehr unrealistisch, soll aber dennoch untersucht werden, um auch für diesen konservativen Fall die Stabilität des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers gewährleisten zu können. Abbildung 6.10 zeigt die Fehler- und die Stellgrößenverläufe für eine maximale Totzeit von 2 ms. Es wird für die Implementierung des Reglers die Wahl von  $\Gamma = 10^6$  und  $k = 2400$  empfohlen, was zu einem maximalen Fehler von ca.  $140 \mu\text{m}$  bei  $\tau = 0.5$  ms und  $\tau = 1$  ms und zu einem maximalen Fehler von ca.  $141 \mu\text{m}$  bei  $\tau = 2$  ms führt. Eine größere Wahl von  $k$  würde zwar den maximalen Fehler stark verringern, würde jedoch auch zu einem nicht vertretbaren Stellauflauf führen. Somit kann die geforderte Genauigkeit von  $1 \mu\text{m}$  für die gewünschte Solltrajektorie durch die Anwendung einer Vorsteuerung allein nicht eingehalten werden.

Um die Genauigkeit des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers im Zusammenhang mit der Vorsteuerung zu verbessern, gibt es mehrere Möglichkeiten, die beim Entwurf eines neuen Prototypen eines Präzisionspositionierers beachtet werden können:

- Verringerung der Zykluszeit: Eine Verringerung der Zykluszeit bewirkt geringere Totzeiten, wodurch der Reglerparameter  $k$  vergrößert werden kann, ohne dass *high-gain feedback* entsteht. Dadurch vergrößert sich die Bandbreite des Filters  $C(s)$  und somit verbessert sich auch die Performance des geschlossenen Regelkreises. In der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelungstheorie wird dieser Sachverhalt durch die Berechnung der Performance-Schranken zwischen Designsystem und Referenzsystem bewiesen.
- Verkleinerung der Menge  $\Omega_0$  bzw.  $\Omega$  durch Verringerung der Wertebereiche der Regelstreckenparameter: Eine Verkleinerung der Menge  $\Omega$  bewirkt eine höhere untere Bandbreite bei gleichbleibender oberer Bandbreitenbegrenzung, wodurch die Regelgüte für minimale  $\hat{\omega}(s)$  verbessert wird.
- Steigerung der Rechenleistung: Durch eine gesteigerte Rechenleistung werden größere Adoptionsverstärkungen möglich, die besonders im totzeitbehafteten Fall sowohl den Fehler- als auch den Stellgrößenverlauf verbessern. Zudem wird dadurch eine größere Wahl von  $k$  möglich, ohne einen Regler mit *high-gain feedback* im Fall von Totzeiten zu erhalten.
- Verwendung eines schnelleren Aktuators: Für den Fall, dass entweder die Totzeiten verringert, oder die Adoptionsverstärkung erhöht werden können, kann bei Verwendung eines schnelleren Aktuators (größere Bandbreite) der Reglerparameter  $k$  vergrößert werden. Dadurch werden schließlich die Performance-Schranken zwischen dem Designsystem und dem Referenzsystem verkleinert.
- Änderung der Solltrajektorie: Durch eine Anpassung der Solltrajektorie, wie beispielsweise einer langsameren Beschleunigung, der Verwendung glatterer Trajektorien, kann der maximale Fehler weiter verringert werden.
- Verringerung der Störungen: Letztlich kann durch Verringerung der maximalen Störungen von  $\sigma(t)$  und der maximalen Änderungsgeschwindigkeit  $\dot{\sigma}(t)$  die Performance noch weiter verbessert werden [HC10, S. 40 f.]. Im Hinblick auf die Störungen, die unter anderem durch magnetisierbare Eisenteile innerhalb des Verfahrbereichs hervorgerufen werden, ist die Reduktion der Störungen, bspw. durch Verwendung von Edelstahlteilen, durchaus realistisch.

Durch die Verwendung der Ausgangsrückführung  $K(s)$  in der äußeren Regelkaskade (siehe Abbildung 6.2), können Abweichungen und Ungenauigkeiten, die zwischen der

Vorsteuerung und dem geschlossenen  $\mathcal{L}_1$ -Regelkreis der inneren Regelkaskade auftreten, zusätzlich ausgeregelt bzw. unterdrückt werden. Es bleibt jedoch zu untersuchen, inwieweit sich die Regelgüte mittels  $K(s)$  verbessern lässt.

### 6.1.2 Entwurf der äußeren Reglerkaskade $K(s)$

Wie oben bereits angedeutet, können die Aufgaben der äußeren Reglerkaskade  $K(s)$  wie folgt zusammengefasst werden:

1. Kompensation von Streckeninversionsfehlern verursacht durch Ungenauigkeiten in der Vorsteuerung, die durch die Näherung (6.2) entstehen (siehe  $D_i(s)$  in Abbildung 6.2).
2. Ausregelung von Abweichungen des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreises von dem Designsystem (siehe  $D_o(s)$  in Abbildung 6.2).
3. Beschleunigung der Eigenbewegung des geschlossenen  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreises.

Um diese Forderungen zu erfüllen, wird ein PID-Regler verwendet, dessen Parameter aus der Lösung des Polvorgabeproblems bzgl. der Trajektorienfolgefahrdynamik ermittelt werden können. Da wir uns auf die Vorsteuerung der Trajektorien bis zur 2. Ableitung beschränken und  $C(s)$  aufgrund der Adaption von  $\hat{\omega}(s)$  zeitvariant und somit nicht genau bekannt ist, machen wir erneut von der Näherung (6.2) Gebrauch. Es gilt:

$$M(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{\frac{1}{0.64}s^2 + \frac{1.92}{0.64}s + 1} = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (6.9)$$

Aus der inversen Laplace-Transformation der Ein-/Ausgangsdarstellung (6.9) erhält man die Ein-/Ausgangs-Differentialgleichung:

$$a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t). \quad (6.10)$$

Mit

$$u(t) = a_2 \ddot{r}(t) + a_1 \dot{r}(t) + a_0 r(t) + w(t) \quad (6.11)$$

erhält man aus (6.10) und (6.11) unter Berücksichtigung, dass  $e(t) = r(t) - y(t)$  ist, die Trajektorienfolgefahlerdynamik:

$$a_2(\ddot{y}(t) - \ddot{r}(t)) + a_1(\dot{y}(t) - \dot{r}(t)) + a_0(y(t) - r(t)) = w(t) \quad (6.12)$$

$$\Leftrightarrow a_2\ddot{e}(t) + a_1\dot{e}(t) + a_0e(t) = -w(t). \quad (6.13)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{e}(t) + \frac{a_1}{a_2}\dot{e}(t) + \frac{a_0}{a_2}e(t) = -\frac{1}{a_2}w(t). \quad (6.14)$$

Für den Eingang  $w(t)$  wird nun folgender PID-Regler-Ansatz verwendet:

$$w(t) = a_2(K_D\dot{e}(t) + K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau) \quad (6.15)$$

Nach dem Einsetzen in (6.14) erhält man:

$$\ddot{e}(t) + \left( \frac{a_1}{a_2} + K_D \right) \dot{e}(t) + \left( \frac{a_0}{a_2} + K_P \right) e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau = 0 \quad (6.16)$$

$$\Rightarrow \ddot{e}(t) + \left( \frac{a_1}{a_2} + K_D \right) \ddot{e}(t) + \left( \frac{a_0}{a_2} + K_P \right) \dot{e}(t) + K_I e(t) = 0 \quad (6.17)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{e}(t) + (1.92 + K_D) \ddot{e}(t) + (0.64 + K_P) \dot{e}(t) + K_I e(t) = 0 \quad (6.18)$$

Setzt man (6.18) mit dem gewünschten charakteristischen Polynom

$$p(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_3) \quad (6.19)$$

gleich, so erhält man die Verstärkungen des PID-Reglers. Zunächst wurde  $s_{1,2} = -5 \pm 5i$  und  $s_3 = -7$  gewählt, sodass  $K_I = 350$ ,  $K_P = 119.36$  und  $K_D = 15.08$  ist. Der PID-Regler wird schließlich mit einem Filterkoeffizienten für den D-Anteil beschrieben durch:

$$K_1(s) = K_P + \frac{K_D s}{\frac{1}{800}s + 1} + \frac{K_I}{s} \quad (6.20)$$

In Abbildung 6.12 ist das Bodediagramm für die offenen Ketten  $K_1(s)C_1(s)M(s)$  und  $K_1(s)C_2(s)M(s)$  mit minimaler ( $C_2(s)$ ) und maximaler ( $C_1(s)$ ) Bandbreite des Filters  $C(s)$  zu sehen. Den Berechnungen zufolge beträgt der Phasenrand im ungünstigsten Fall, der der minimalen Bandbreite des Filters entspricht,  $\Phi = 48.1^\circ$ . Die *time-delay margin* beträgt  $\mathcal{T} = 80.5$  ms. Diese Werte gelten für das Designssystem, von dem der geschlossene Regelkreis geringfügig abweicht. Es wurde versucht, die exakte Totzeit-

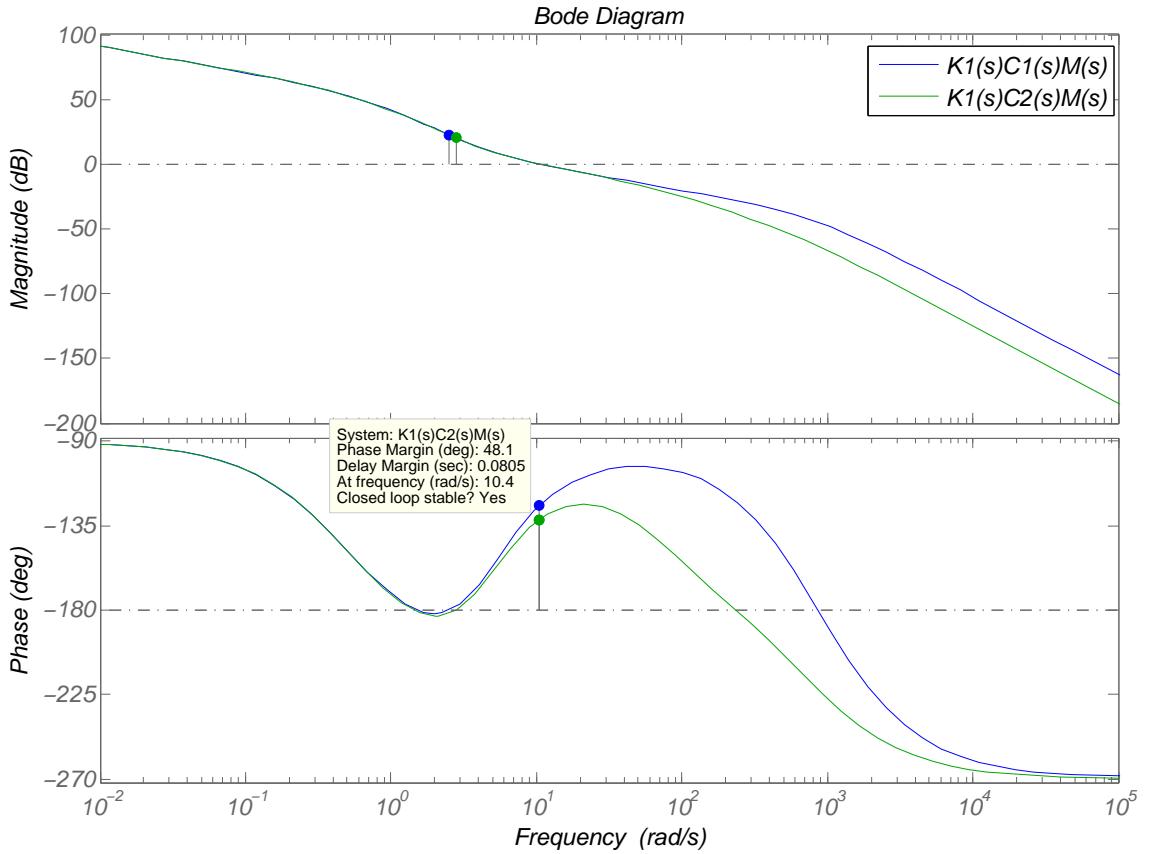


Abbildung 6.12: Bodediagramme der offenen Ketten  $K_1(s)C_1(s)M(s)$  und  $K_1(s)C_2(s)M(s)$ .

toleranz durch eine Erweiterung des äquivalenten LTI-Sytems aus [HC10, S.50 ff.] um den PID-Regler zu berechnen, was jedoch nicht gelang. Die Abbildung lässt zudem insbesondere für höhere Frequenzen eine Phasenverschiebung des Systems in Abhängigkeit der Schätzungen  $\hat{\omega}(s)$  erkennen. Diese Tatsache könnte insbesondere für die Verfolgung von höherfrequenten Referenztrajektorien problematisch sein. Abbildung 6.13 zeigt die Fehler- und Stellgrößenverläufe für unterschiedliche Regelstreckenparameter und für die Totzeit  $\tau = 0.5$  ms. Es ist zu erkennen, dass die Regelung in der äußeren Regelkaskade den maximalen Fehler von  $140 \mu\text{m}$  auf  $59.5 \mu\text{m}$  reduziert hat. Zwischen den Peaks bei  $t = 1$  s und  $t = 5$  s bleibt der Fehler geringer als  $5 \mu\text{m}$ . Zudem ist die stationäre Genauigkeit sehr hoch. Trotz der errechneten *time-delay margin* von  $\mathcal{T} = 80.5$  ms (siehe Abbildung 6.12) für das Designsystem wurde festgestellt, dass der Folgeregel器 bereits bei einer Totzeit von  $\tau = 2$  ms instabil wurde, wenn ein cosinusförmiges Referenzsignal mit der Kreisfrequenz 1 rad/s und der Amplitude 2 cm verwendet wurde. Der Grund hierfür war ein Wind-Up-Effekt des Integriereranteils, der entstand,

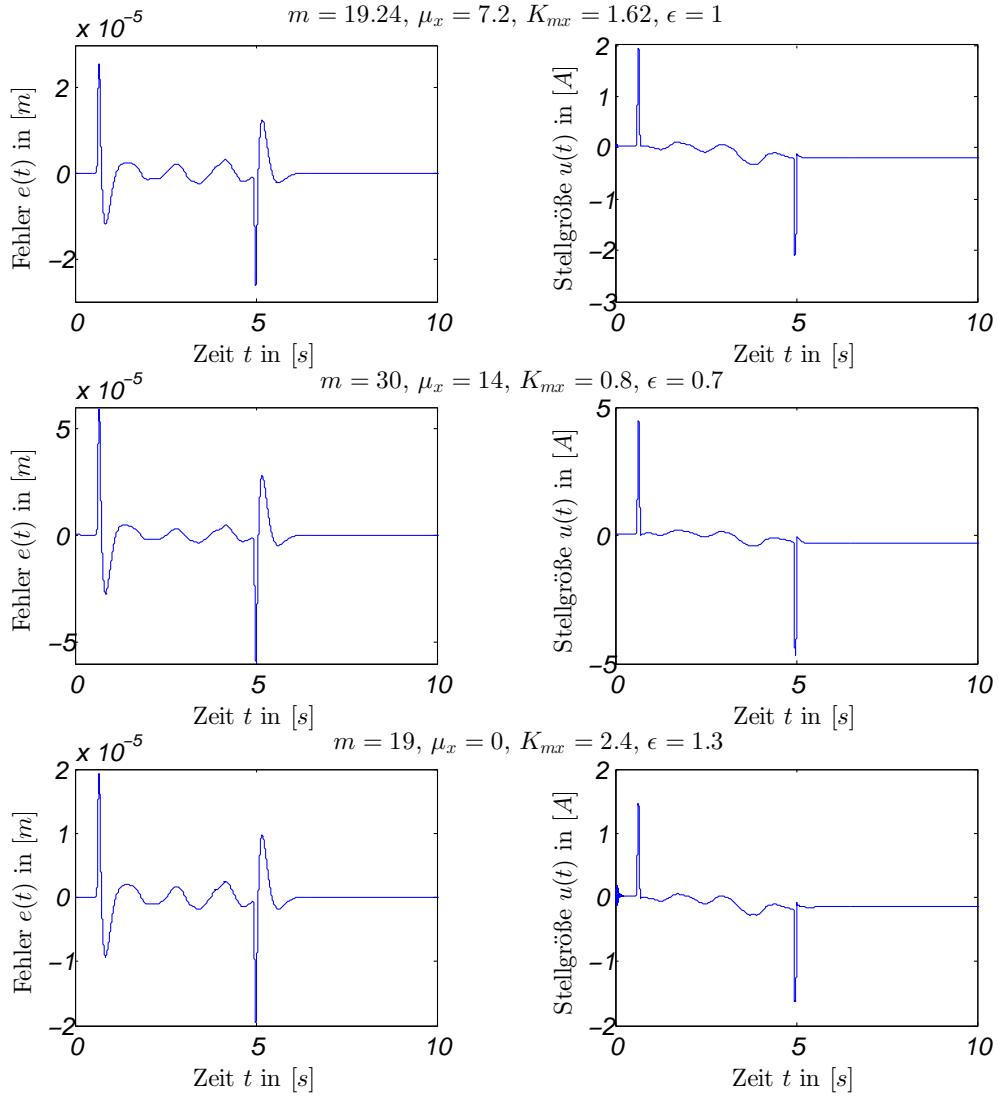


Abbildung 6.13: Fehler- und Stellgrößenverläufe für unterschiedliche Regelstreckenparameter, für den Regler  $K_1(s)$  und für die Totzeit  $\tau = 0.5$  ms.

wenn die Stellgröße die neu auf  $\pm 20$  A gesetzte Stellgrenze erreichte. Zur Lösung dieses Problems gibt es zwei Möglichkeiten:

- Verringerung der Geschwindigkeit der Fehlerdynamik, sodass sich die nichtlinearen Störungen verringern, die durch dieser Regelstrecke inhärente Stellbegrenzungen erzeugt werden. Hierdurch vergrößert sich der maximale Fehler  $e(t)$  jedoch noch mehr.
- Implementierung eines PID-Reglers mit Anti-Windup Mechanismus. Hierfür kann

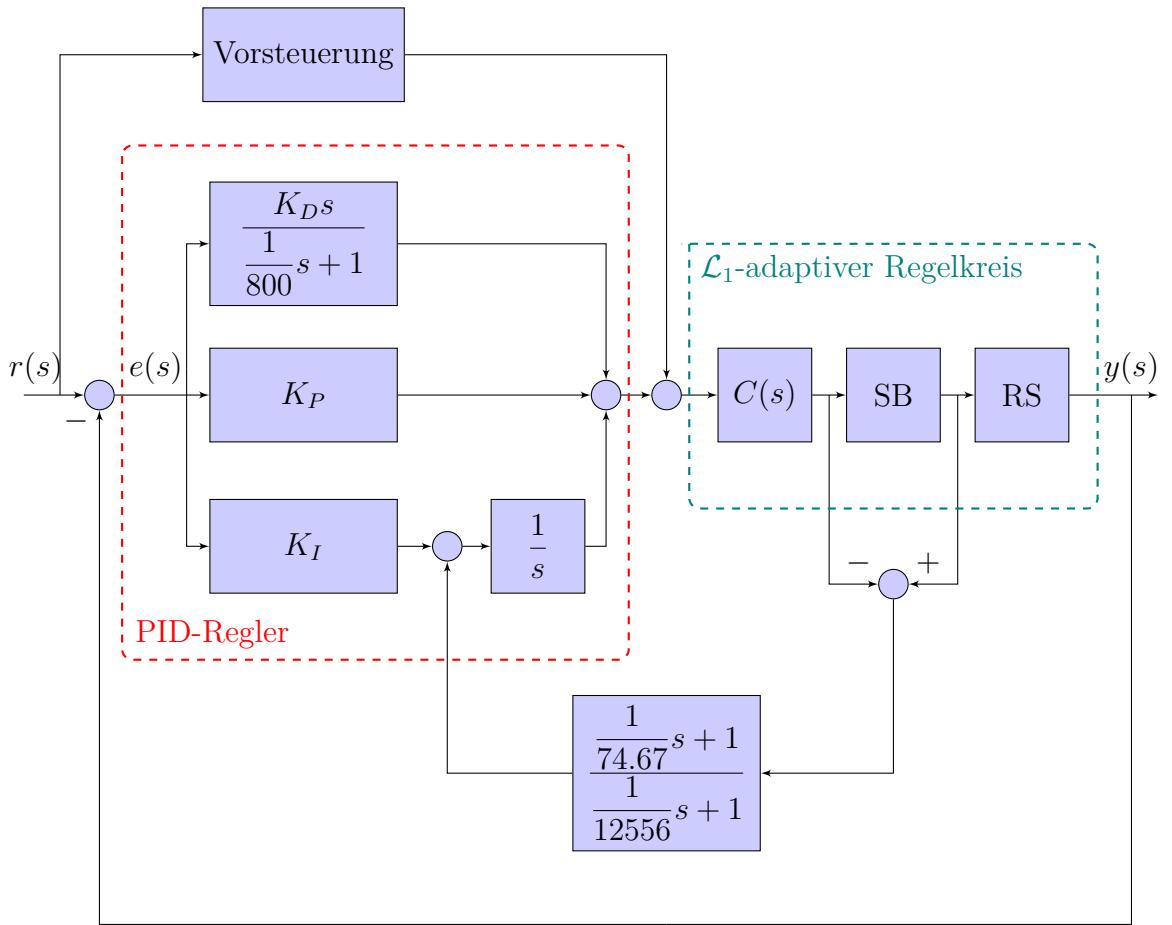


Abbildung 6.14: Erweiterung der Back-Calculation Methode auf Grundlage von [ÅH95]. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Darstellung des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreises stark abstrahiert und beschränkt sich auf das Filter, die Stellbegrenzung (SB) und die Regelstrecke (RS).

jedoch keine herkömmliche Anti-Windup Methode verwendet werden, da der Regler in der äußeren Regelkaskade von dem Stellbegrenzungsglied in der inneren Regelkaskade durch das zeitvariante Filter  $C(s)$  getrennt wird.

Um die Performance der Regelung nicht zu verschlechtern, wurde eine Erweiterung des *Back-Calculation-Ansatzes* von [ÅH95] entworfen. Beim Standard *Back-Calculation-Ansatz* wird die Differenz der Signale vor und hinter dem Sättigungsglied mit einem Faktor, der sogenannten *Back-Calculation-Zeitkonstante*, gewichtet und auf den Integrierereingang addiert. Diese Methode setzt bei vorhandener Stellgrößensättigung den Integriererzustand dynamisch auf einen Wert zurück, so dass die resultierende Stellgröße innerhalb der Beschränkung bleibt [ÅH95]. Die Problemstellung beim vorliegenden Folgeregler besteht nun im Wesentlichen darin, dass nur die durch das Tiefpassfilter

$C(s)$  gefilterte Stellgröße für einen Vergleich vor und hinter dem Sättigungsglied herangezogen werden kann. Folglich wird erst mit einer Verzögerung wahrgenommen, dass die Stellgröße einen Wert angenommen hat, der die Stellgrößenbeschränkung verletzt. Während dieser Zeit wird trotz dem Standard *Back-Calculation*-Verfahren im I-Anteil weiter über den Regelfehler integriert, was im vorliegenden Beispiel zu einem instabilen Regelkreis führte.

Anschließend wurde dieser Ansatz intuitiv durch eine Inversion des Filters  $C(s)$  erweitert mit der Idee die größtmögliche Verzögerung zu invertieren und es zeigte sich, dass diese Methode den Regelkreis stabilisieren kann. Bei der Invertierung ist es wichtig, das Filter  $C_2(s)$  mit der niedrigsten Bandbreite zu verwenden, denn dieses verzögert das Stellsignal und somit die Wahrnehmung der Tatsache, dass die Stellgrößenbegrenzung verletzt wurde, am stärksten. Abbildung 6.14 zeigt schematisch den erweiterten *Back-Calculation* Mechanismus, der eine schnelle Fehlerdynamik ermöglicht. Durch diese schnelle Fehlerdynamik wird wiederum der maximale Regelfehler für vorgegebene Solltrajektorien verkleinert.

Ein mathematischer Stabilitätsbeweis der Folgeregelung mit dieser Erweiterung ist jedoch mitunter schwierig, da es sich um eine Kombination aus dem adaptiven  $\mathcal{L}_1$ -Regler, der nichtlinearen Stellbegrenzung und dem PID-Regler handelt. In simulativen Versuchen blieb der Folgeregler allerdings stabil und zeigte eine gute Performance (hierzu wurde die Stellbegrenzung 4.2 A gewählt, die benötigt wird, um den Läufer mit der maximalen Beschleunigung 0.3 m/s<sup>2</sup> zu beschleunigen, wenn die Regelstreckenparameter so gewählt sind, dass die Eingangsverstärkung minimal wird).

Um die Performance weiter zu verbessern, wird ein zweiter Regler entworfen, welcher die Eigenwerte der Fehlerdynamik auf  $s_{1,2} = -8 \pm 8i$  und  $s_3 = -80$  festlegt. Der neue PID-Regler ergibt sich damit zu:

$$K_2(s) = 1407.4 + \frac{94.08s}{\frac{1}{800}s + 1} + \frac{10240}{s} \quad (6.21)$$

Darüber hinaus werden die Reglerparameter  $k = 2400$  und  $\Gamma = 10^6$  beibehalten. Abbildung 6.15 zeigt das Bodediagramm der offenen Ketten  $K_2(s)C_1(s)M(s)$  und  $K_2(s)C_2(s)M(s)$  mit minimaler ( $C_2(s)$ ) und maximaler ( $C_1(s)$ ) Bandbreite des Filters  $C(s)$ . Die Fehler- und Stellgrößenverläufe für unterschiedliche Regelstreckenparameter zeigt Abbildung 6.16. Es ist zu beobachten, dass die Fehlerverläufe zwei Spitzen bei  $t = 1$  s und  $t = 5$  s aufweisen, zu den gleichen Zeitpunkten, an denen die Solltrajektorie trapezförmig beschleunigt wird. Der maximale Fehler beträgt somit ca. 15  $\mu$ m. Zwi-

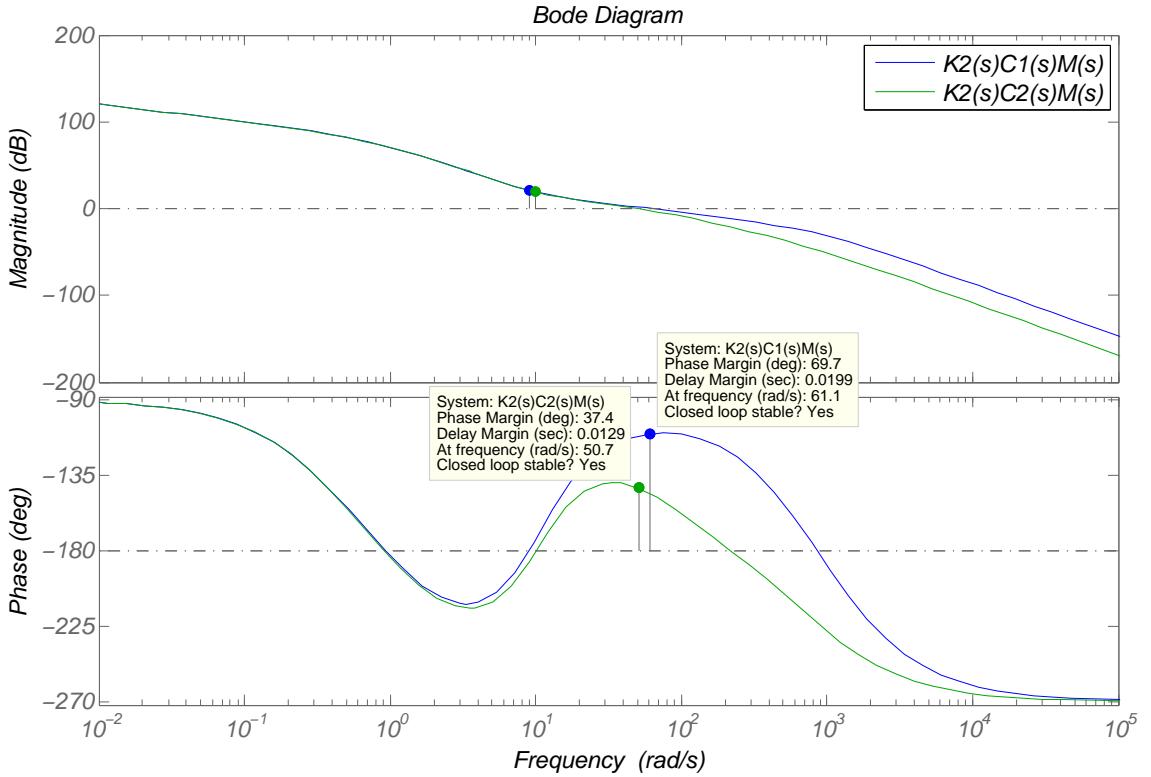


Abbildung 6.15: Bodediagramme der offenen Ketten  $K_2(s)C_1(s)M(s)$  und  $K_2(s)C_2(s)M(s)$ .

schen den beiden Spitzen und nach der zweiten Spalte wird die geforderte Genauigkeit der Nanopositioniermaschine von  $1 \mu\text{m}$  eingehalten.

Anschließend wurde die Systemantwort der Regelkaskade, bestehend aus  $\mathcal{L}_1$ -adaptivem Regelkreis, Vorsteuerung und PID-Regler, für eine cosinusförmige Referenz mit unterschiedlichen Frequenzen und gleicher maximaler Beschleunigung von  $0.3 \text{ m/s}^2$  getestet. Um das Einschwingverhalten in den Versuchen mit zu erfassen, wurden für die Regelgröße und den Sollwert unterschiedliche Anfangsbedingungen gewählt. Es ließ sich beobachten, dass sich die Performance für Totzeiten von  $\tau = 0.5 \text{ ms}$  und  $\tau = 2 \text{ ms}$  aufgrund der geringen Wahl von  $k = 2400$  nur irrelevant unterscheiden. Aus diesem Grund werden die nachfolgenden Versuche mit der größeren Totzeit  $\tau = 2 \text{ ms}$  durchgeführt.

Abbildung 6.17 zeigt die Systemantwort für ein Cosinussignal der Frequenz  $0.33 \text{ Hz}$ . Der maximale Fehler beträgt im eingeschwungenen Zustand  $1.28 \mu\text{m}$ . Die maximale Stellgröße beträgt in diesem Fall ca.  $1.99 \text{ A}$ . In Abbildung 6.18 wurde ein Cosinussignal

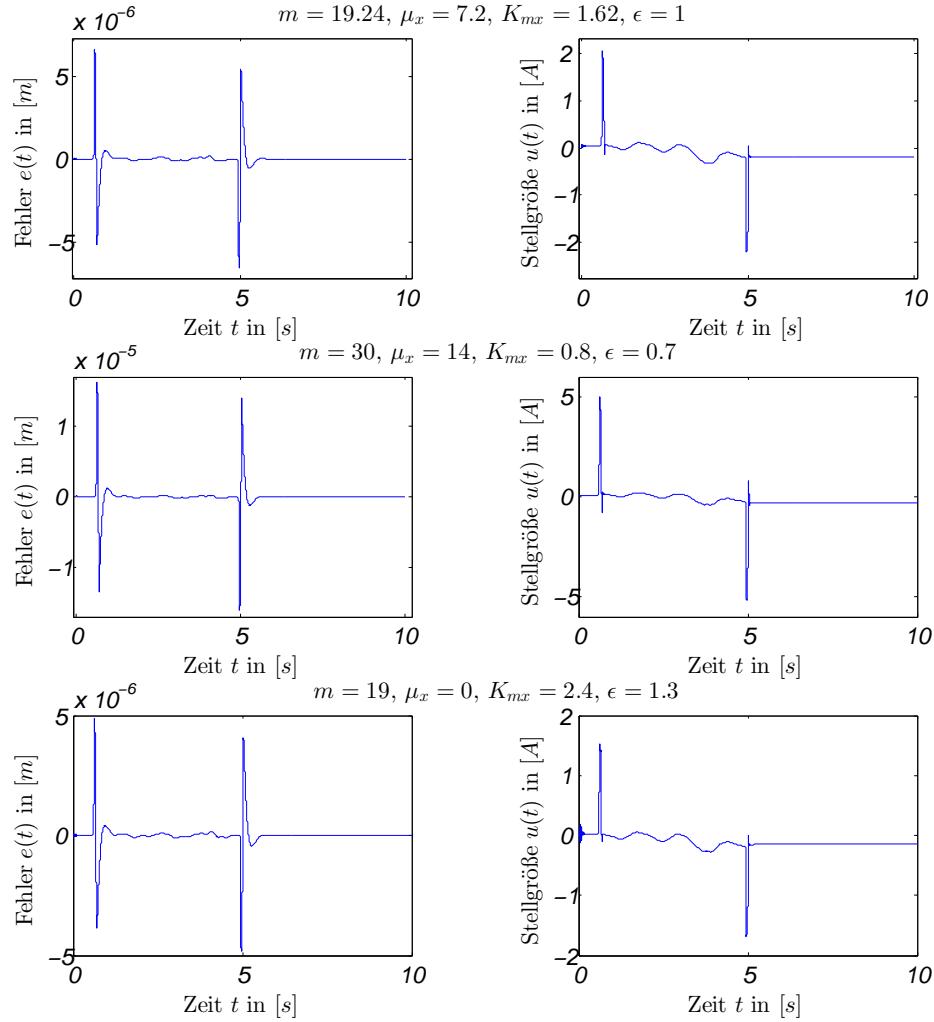


Abbildung 6.16: Fehler- und Stellgrößenverläufe für unterschiedliche Regelstreckenparameter, für den verwendeten Regler  $K_2(s)$  und für die Totzeit  $\tau = 0.5$  ms. Es wird die rampenförmige Solltrajektorie verwendet.

mit 5 Hz als Referenz verwendet. Der maximale Fehler im eingeschwungenen Zustand ist daraufhin angestiegen auf  $8.2 \mu\text{m}$ . Werden die extremen Regelstreckenparameter  $m = 30, \mu_x = 14, K_{mx} = 0.8$  und  $\epsilon = 0.7$  verwendet, so steigt der maximale Fehler im eingeschwungenen Zustand auf  $20.4 \mu\text{m}$  an (siehe Abbildung 6.19). Der Grund für diese größer werdende Regelabweichung bei größer werdender Frequenz des Referenzsignals zeigt sich unter anderem in dem Bodediagramm 6.3, das die Genauigkeit der Näherung (6.2) (hier noch für  $k = 31885$ ) aufzeigt. Es ist zu erkennen, dass (unabhängig von  $k$ ) für größer werdende Frequenzen sowohl Betrag als auch Phase von  $C(s)M(s)$

stärker von  $M(s)$  abweichen. Eine Veränderung von  $k$  verschiebt lediglich die Grenzfrequenz von  $C(s)$ . Die Näherung (6.2), die die Grundlage der verwendeten Vorsteuerung bildet, wird somit für größere Frequenzen ungenauer. Ähnliches ist für die offenen Ketten 6.15, deren Amplitudengang die Wirksamkeit der Regelung (6.21) beschreibt, zu beobachten. Auch hier verschlechtert sich mit zunehmender Frequenz die Regelung. Beide Tatsachen bewirken zusammen, dass für hochfrequenteren Referenztrajektorien die Regelabweichung zunimmt.

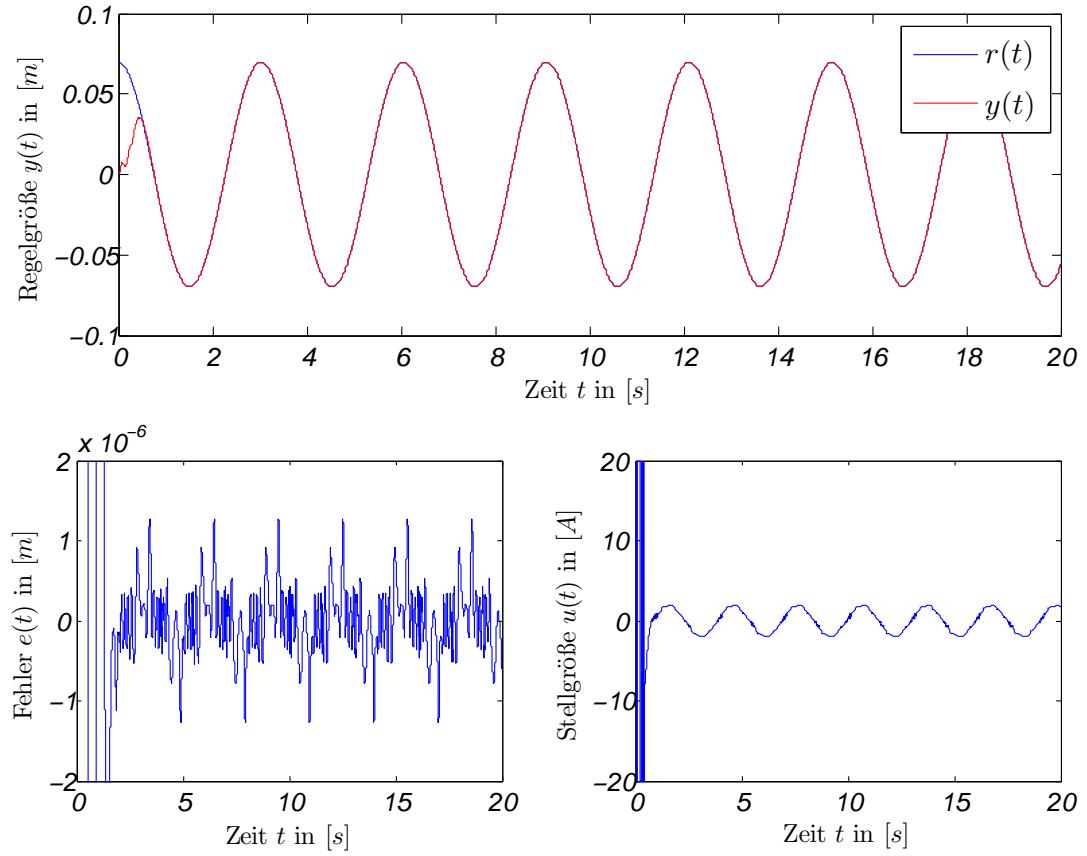


Abbildung 6.17: Systemantwort auf ein Cosinussignal mit 0.33 Hz als Referenz und einer Totzeit von  $\tau = 2$  ms. Es werden die ermittelten Regelstreckenparameter des Präzisionspositionierers mit  $m = 19.24$ ,  $\mu_x = 7.2$ ,  $K_{mx} = 1.62$  und  $\epsilon = 1.08$  verwendet.

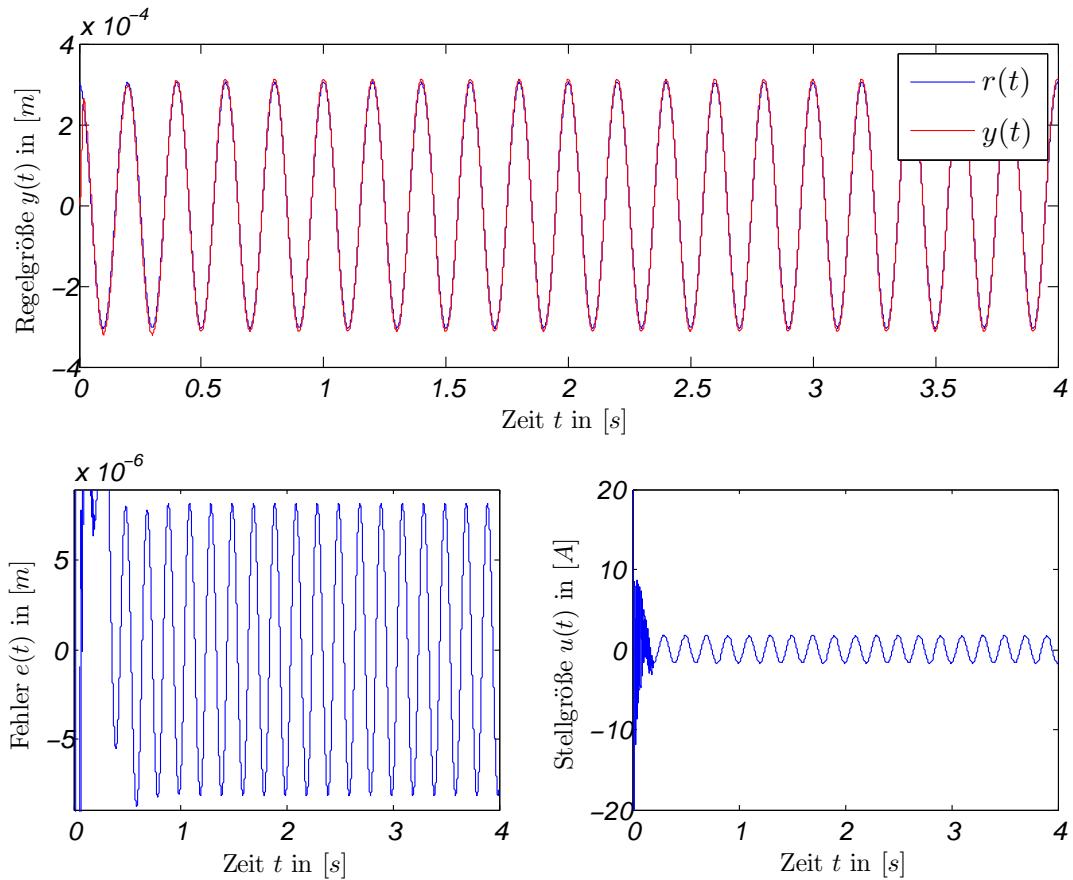


Abbildung 6.18: Systemantwort auf ein Cosinussignal mit 5 Hz als Referenz und einer Totzeit von  $\tau = 2$  ms. Es werden die ermittelten Regelstreckenparameter des Präzisionspositionierers mit  $m = 19.24$ ,  $\mu_x = 7.2$ ,  $K_{mx} = 1.62$  und  $\epsilon = 1.08$  verwendet.

## 6.2 Folgeregelung für die $\mathcal{L}_1$ -adaptive Ausgangsrückführung

Zur Berechnung der Folgeregelung für den Fall unbekannter Zustände wurde das Ein-/Ausgangsverhalten des Referenzsystems (5.100) der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung verwendet. Dieses ergibt sich im Idealfall, d.h. ohne Berücksichtigung von Störungen, zu:

$$y_{ref}(s) = C(s)H(s)r(s). \quad (6.22)$$

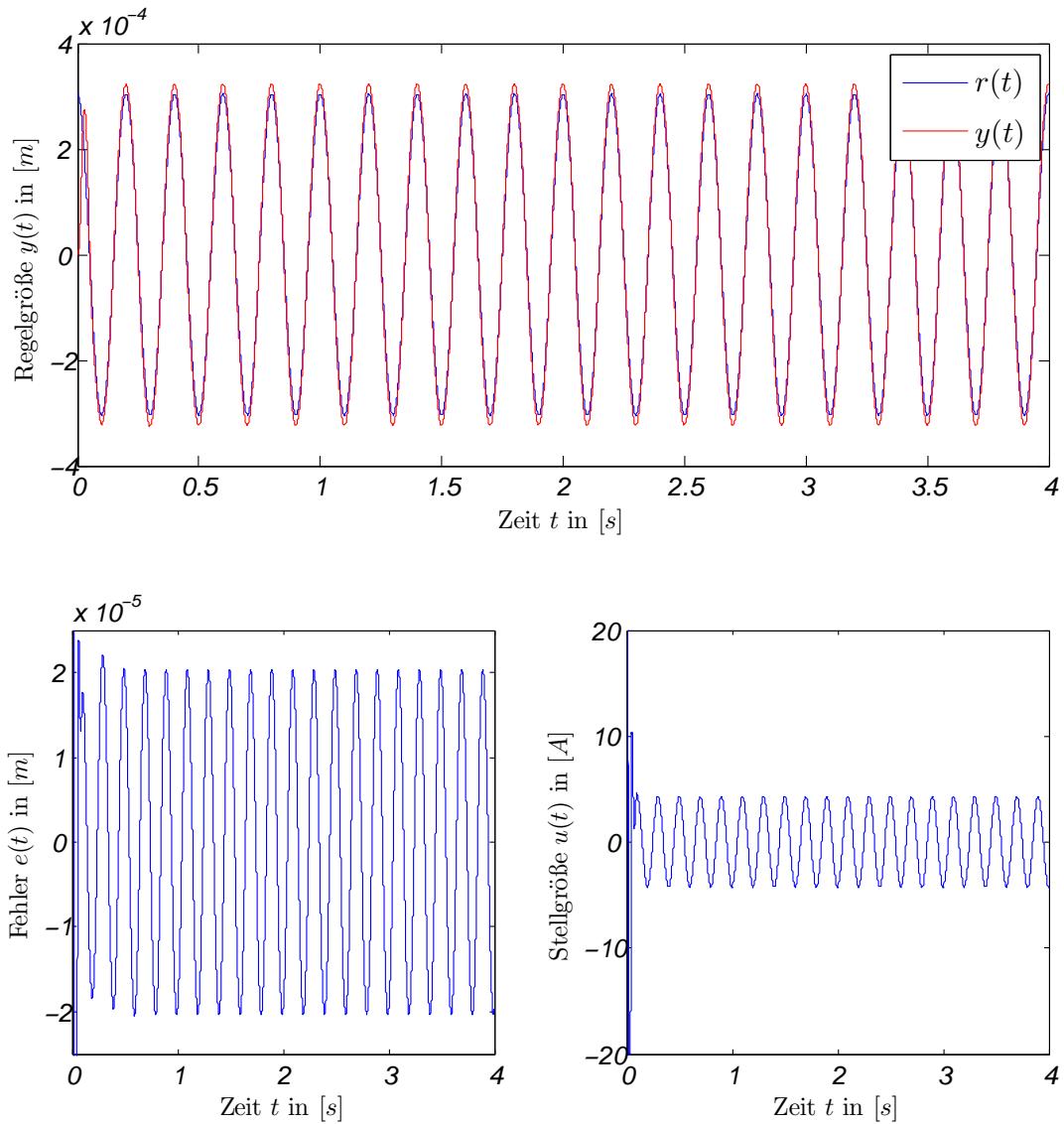


Abbildung 6.19: Systemantwort auf ein Cosinussignal mit 5 Hz als Referenz und einer Totzeit von  $\tau = 2$  ms. Es werden die Regelstreckenparameter  $m = 30$ ,  $\mu_x = 14$ ,  $K_{mx} = 0.8$  und  $\epsilon = 0.7$  verwendet.

Abbildung 6.20 zeigt das Blockschaltbild der Folgeregelung. Hierbei werden durch die ausgangsseitigen Störungen  $D_o(s)$  die Abweichungen des Referenzsystems vom  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreis beschrieben. Die eingangsseitigen Störungen  $D_i(s)$  beschreiben Ungenauigkeiten in der Vorsteuerung, die durch eine Näherung des Referenzsystems entstehen können. Letztere wird im nächsten Unterkapitel genauer erklärt.

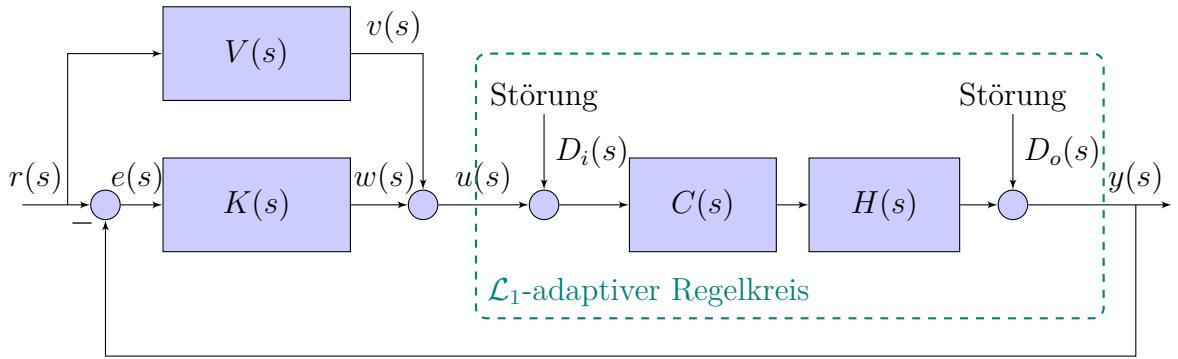


Abbildung 6.20: Blockschaltbild der Folgeregelung für den Fall der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung.

### 6.2.1 Entwurf der Vorsteuerung

Der Entwurfsweg der Vorsteuerung unterscheidet sich für den Fall der betrachteten  $\mathcal{L}_1$ -Ausgangsrückführung nicht wesentlich vom Vorsteuerungsentwurf aus Abschnitt 6.1.1. Der einzige Unterschied ergibt sich lediglich durch die Tatsache, dass im Gegensatz zum zeitvarianten Filter  $C(s)$  aus Kapitel 6.1.1 nun die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{A(s)M(s)}{C(s)A(s) + (1 - C(s))M(s)} \quad (6.23)$$

unsicher ist und zeitvariant sein kann aufgrund der unsicheren Übertragungsfunktion  $A(s)$  der Regelstrecke. Unterschiedliche Parameter der Regelstrecke  $A(s)$  erzeugen somit ein leicht verändertes  $H(s)$ . Anhand der Übertragungsfunktion (6.23) kann man sich nun leicht davon überzeugen, dass mit zunehmender Bandbreite von  $C(s)$  der Einfluss von  $A(s)$  auf  $H(s)$  sinkt. Denn für eine unendlich hohe Bandbreite von  $C(s)$ , was bedeutet, dass  $C(s) \approx 1$  ist, strebt  $H(s)$  gegen  $M(s)$  und zwar unabhängig von  $A(s)$ . Eine möglichst hohe Bandbreite von  $C(s)$  ist somit von Nutzen, um  $C(s)H(s)$  möglichst genau vorsteuern zu können. Allerdings lässt sich die Bandbreite des Filters nur auf Kosten der Robustheit und somit nicht beliebig vergrößern. Des Weiteren ist  $C(s)H(s)$  eine Übertragungsfunktion achter Ordnung, womit für eine exakte Vorsteuerung Solltrajektorien benötigt werden, die mindestens sieben mal stetig differenzierbar sind, was eine sehr spezielle Forderung ist, die selbst modernste Bahnplanungsalgorithmen nicht erfüllen. Die hier betrachteten Trajektorien sind lediglich zwei mal stetig differenzierbar. Um dennoch eine Vorsteuerung entwerfen zu können, wurden zwei Lösungsvorschläge entwickelt:

1. Es werden durch eine heuristische Suche spezielle Pollagen zum Entwurf des

$\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers gesucht, sodass für den relevanten Frequenzbereich gilt:

$$C(s)H(s) \approx M(s). \quad (6.24)$$

2. Es werden durch eine heuristische Suche spezielle Pollagen zum Entwurf des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers gesucht, sodass für den relevanten Frequenzbereich gilt:

$$H(s) \approx M(s). \quad (6.25)$$

Daraufhin wird das Filter  $C(s)$  so invertiert, dass die Aktuatorbandbreite eingehalten wird. Hierbei sei angemerkt, dass das Filter in der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung zeitinvariant ist und somit nicht die Aufgabe der Phasenadaption, wie bei der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Zustandsrückführung, zu erfüllen hat. Anschließend wird das invertierte Filter mit der Vorsteuerung in Reihe geschaltet.

Im ersten Fall zeigt sich, dass die Pole in der komplexen Ebene sehr weit nach links gelegt werden müssen, um eine gute Übereinstimmung der Bodediagramme von  $M(s)$  und  $C(s)H(s)$  zu erlangen, worunter jedoch die Robustheit leidet. Aus diesem Grund wird sich im Folgenden auf den zweiten Lösungsvorschlag konzentriert. Für diesen kann eine sehr gute Übereinstimmung der Bodediagramme von  $M(s)$  und  $H(s)$  gefunden werden, wenn die Pole bei  $s_{1,2,3} = -900$ ,  $s_4 = -1.2$  und  $s_5 = -0.1084$  platziert werden. Für diese Pollagen und die möglichen Parametermengen ist der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil. Diese Tatsache lässt sich mithilfe des Kharitonov-Theorems sowie der  $\mathcal{L}_1$ -Norm Bedingung  $\|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} L < 1$  überprüfen und verifizieren. Demnach kann die *time-delay margin* für die nominelle Regelstrecke  $A_0(s)$  zu  $\mathcal{T} = 4.6$  ms und für  $A_1(s)$  zu  $\mathcal{T} = 2.2$  ms bestimmt werden. Abbildung 6.21 zeigt die Bodediagramme von  $H(s)$ ,  $M(s)$ ,  $C(s)$  und  $C(s)H(s)$  für die nominelle Regelstrecke  $A_0(s)$ . Für Abweichungen der Regelstreckenparameter ändert sich das Bodediagramm von  $H(s)$  nur geringfügig, was in den Abbildungen 6.22 und 6.23 zu erkennen ist. Diese Abweichungen in den Bodediagrammen treten nur in Bereichen jenseits der Bandbreite von  $C(s)$  auf, so wie anhand der Analysen der Übertragungsfunktion (6.23) bereits festgestellt wurde. Wird die Vorsteuerung nun für  $M(s)$  entworfen, so handelt es sich ebenfalls um eine Näherung, ähnlich der aus Kapitel 6.1.

Es folgt aus

$$M(s) = \frac{1}{7.714s^2 + 10.06s + 1}, \quad (6.26)$$

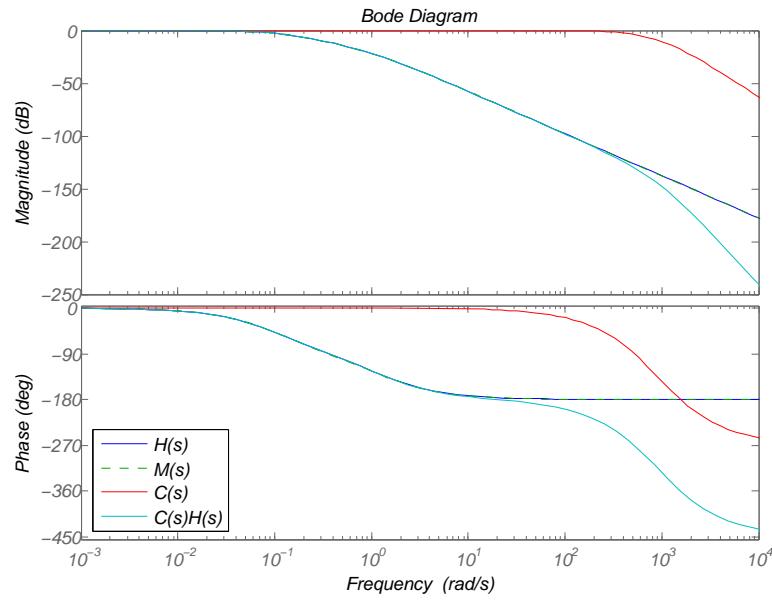


Abbildung 6.21: Bodediagramme von  $H(s)$ ,  $M(s)$ ,  $C(s)$  und  $C(s)H(s)$ , wobei die nominelle Regelstrecke  $A_0(s)$  zur Bestimmung von  $H(s)$  verwendet wird.

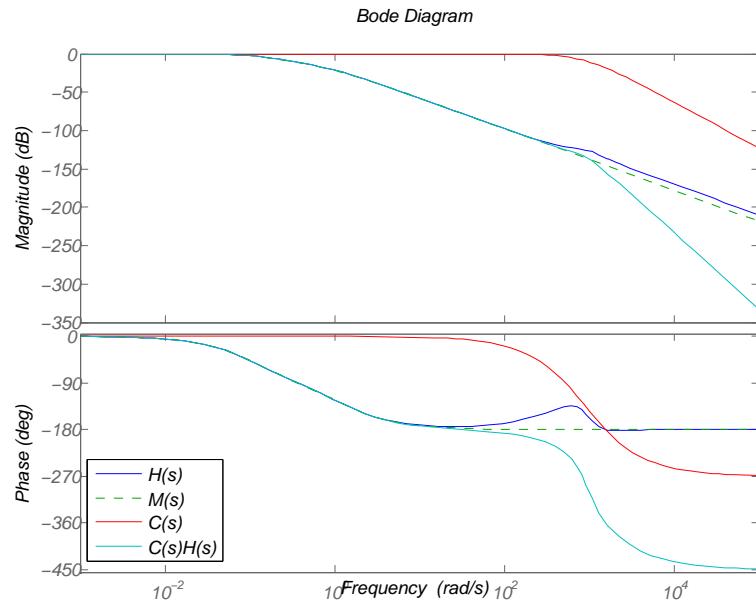


Abbildung 6.22: Bodediagramme von  $H(s)$ ,  $M(s)$ ,  $C(s)$  und  $C(s)H(s)$ , wobei die Regelstreckenparameter  $m = 19$ ,  $\mu_x = 0$ ,  $K_{mx} = 2.4$  und  $\epsilon = 1.3$  zur Bestimmung von  $A(s)$  bzw.  $H(s)$  verwendet werden.

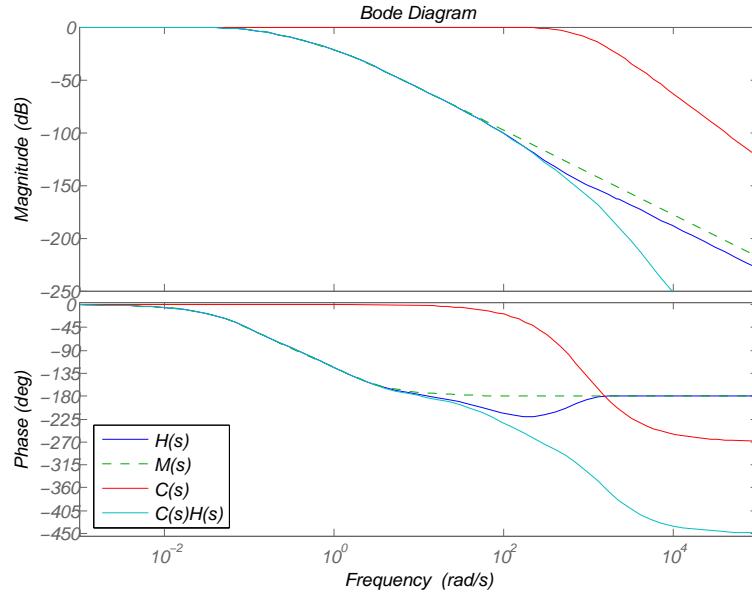


Abbildung 6.23: Bodediagramme von  $H(s)$ ,  $M(s)$ ,  $C(s)$  und  $C(s)H(s)$ , wobei die Regelstreckenparameter  $m = 30$ ,  $\mu_x = 14$ ,  $K_{mx} = 0.8$  und  $\epsilon = 0.7$  zur Bestimmung von  $A(s)$  bzw.  $H(s)$  verwendet werden.

dass die Vorsteuerung  $v(t)$ , die  $M(s)$  invertiert und somit eine Approximation der Inversen von  $H(s)$  darstellt, durch

$$v(t) = 7.714 \ddot{r}(t) + 10.06 \dot{r}(t) + r(t) \quad (6.27)$$

gegeben ist. Anschließend wird das Filter

$$C(s) = \frac{7.2603E8}{(s^3 + 2701.0227 s^2 + 2.4328E6 s + 7.2603E8)} \quad (6.28)$$

invertiert. Um es proper zu realisieren, werden ihm drei Pole bei  $s_{1,2,3} = -12556$  hinzugefügt, wodurch die Reihenschaltung von

$$C(s)C_{inv}(s) = \frac{1}{(s + 12556)^3} \quad (6.29)$$

eine Bandbreite von weniger als 2000 Hz erhält. Die Bedingung des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers, dass die Aktuatorbandbreite bei dem Reglerentwurf berücksichtigt wird, wird somit eingehalten. Schließlich wird das invertierte Filter  $C_{inv}(s)$  mit der Vorsteuerung von  $M(s)$  in Reihe geschaltet.

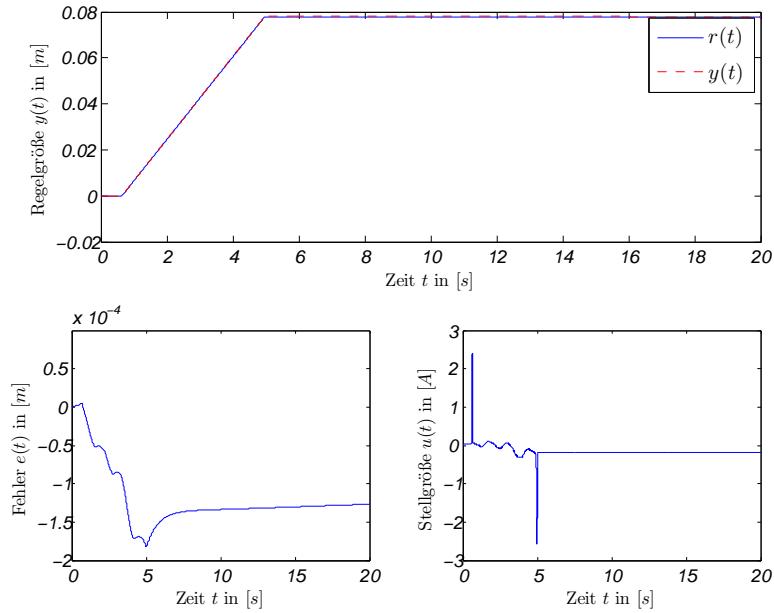


Abbildung 6.24: Regelstrecken-, Fehler- und Stellgrößenverlauf bei Vorsteuerung der rampenförmigen Solltrajektorie und  $\tau = 0$  ms.

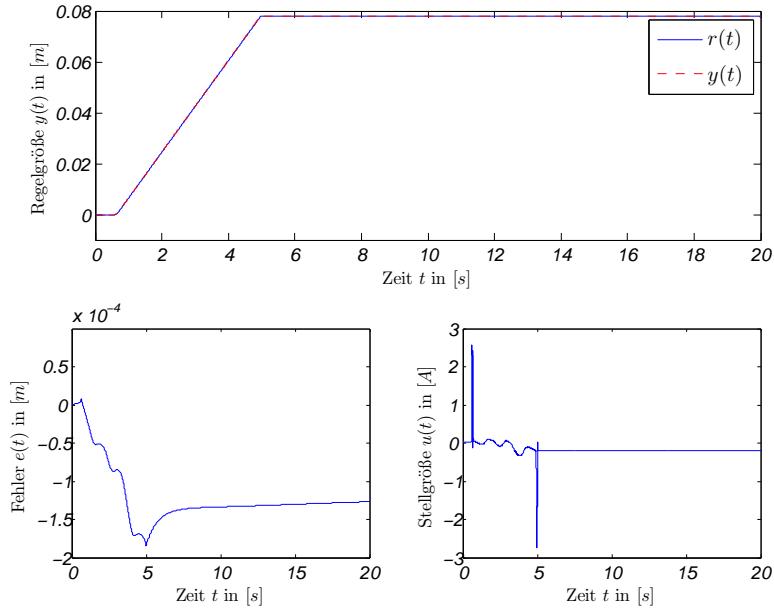


Abbildung 6.25: Regelstrecken-, Fehler- und Stellgrößenverlauf bei Vorsteuerung der rampenförmigen Solltrajektorie und  $\tau = 2$  ms.

Abbildung 6.24 zeigt die Regelgüte bei Verwendung der bloßen Vorsteuerung für die nominelle Regelstrecke  $A_0(s)$  mit  $m = 24.5$ ,  $\mu_x = 7$ ,  $K_{mx} = 1.6$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\tau = 0$  ms und dem Regelfehler  $e(t) = r(t) - y(t)$ . Abbildung 6.25 zeigt die Ergebnisse der gleichen Simulation mit einer Totzeit  $\tau = 2$  ms. Es ist zu erkennen, dass sich die Fehler- und Stellgrößenverläufe kaum merklich unterscheiden. Im Gegensatz zu dem  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regler mit Zustandsrückführung aus Kapitel 6.1 treten hier keine Probleme durch Oszillationen der Stellgröße mit großer Amplitude auf. Die hier entworfene  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Ausgangsrückführung muss daher nicht weiter modifiziert werden. Allerdings verbleiben stationäre Regelfehler. Das Ergebnis ist, dass die Genauigkeit nicht eingehalten werden kann. Aus diesem Grund wird auch hier ein PID-Regler in der äußeren Regelkaskade benötigt, dessen Zielstellung die Beseitigung verbliebener Störungen bzw. stationärer Regelfehler sowie eine beschleunigte Fehlerdynamik ist.

### 6.2.2 Entwurf der äußeren Regelkaskade $K(s)$

Der PID-Regler in der äußeren Regelkaskade für die  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Ausgangsrückführung wird auf die gleiche Weise entworfen, wie der für die  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Zustandsrückführung aus Kapitel 6.1.2. Es wurden die Pollagen  $s_1 = -10$ ,  $s_2 = -12$  und  $s_3 = -100$  gewählt, sodass sich  $K_I = 12000$ ,  $K_P = 2319.9$  und  $K_D = 120.7$  ergibt. In Abbildung 6.26 sind die Bodediagramme für die offenen Ketten  $K_3(s)C(s)H_{min}(s)$  und  $K_3(s)C(s)H_{max}(s)$  zu sehen.  $H_{min}(s)$  wurde hierbei mit den Regelstreckenparametern  $\mu_x = 14$ ,  $m = 30$ ,  $K_{mx} = 0.8$  und  $\epsilon = 0.7$  bestimmt,  $H_{max}(s)$  wurde mit  $\mu_x = 0$ ,  $m = 19$ ,  $K_{mx} = 2.4$  und  $\epsilon = 1.3$  bestimmt. Es zeigt sich bei einem Vergleich mit Abbildung 6.15, dass die offenen Ketten weiter beieinander liegen als die bei der Zustandsrückführung. Aus dieser Tatsache resultiert schließlich eine noch geringere Abweichung des Ein-/Ausgangsverhaltens des geschlossenen Regelkreises für Parameteränderungen der Regelstrecke. Ähnlich wie bei der Folgeregelung für die  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Zustandsregelung wurde auch hier ein Anti-Windup Mechanismus mit Back-Calculation entworfen. Da jedoch diesmal  $H(s)$  unsicher ist, war eine Inversion von  $C(s)$  nicht ausreichend, um den Regelkreis zu stabilisieren. Da des Weiteren  $C(s)$  hier eine höhere Bandbreite hat, war es möglich den Anti-Windup nach [ÅH95] mit der *Back-Calculation*-Zeitkonstante  $1/T_t$  zu implementieren und den Regelkreis durch die Standardvariante zu stabilisieren. In [ÅH95] wird zudem empfohlen,  $T_t$  größer als die Vorstellzeit  $T_d$  und kleiner als die Nachstellzeit  $T_i$  zu wählen, was mit einer Wahl von  $T_t = 0.0667$  eingehalten wurde. Abbildung 6.27 zeigt die Regelgrößen-, Fehler-, und Stellgrößenverläufe für die rampeförmige Solltrajektorie, für  $\tau = 0.5$  ms und für die nominelle Regelstrecke  $A_0(s)$ .

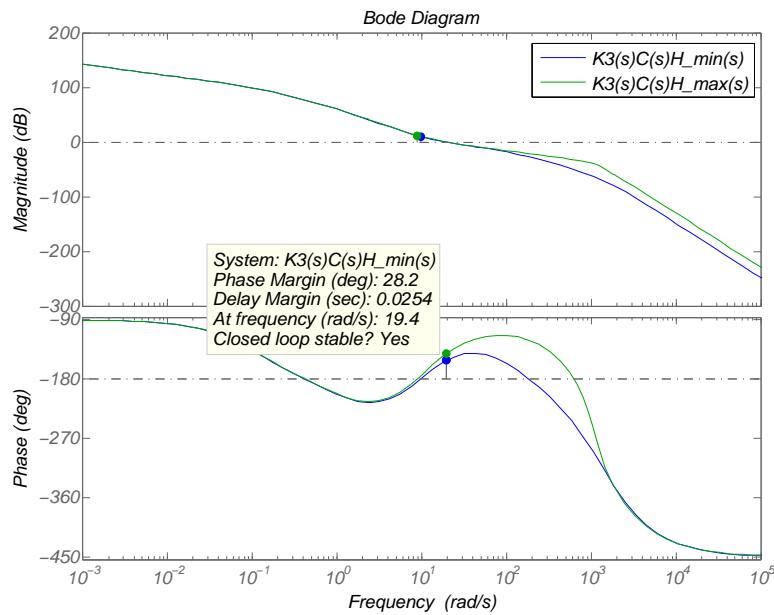


Abbildung 6.26: Bodediagramme für die offenen Ketten  $K_3(s)C(s)H_{min}(s)$  und  $K_3(s)C(s)H_{max}(s)$ .

Es ist zu erkennen, dass der maximale Fehler  $1.07 \mu\text{m}$  beträgt und die geforderte Genauigkeit somit fast eingehalten wird. Abbildung 6.28 zeigt, dass für ein Cosinussignal mit 3 Hz und einer Amplitude von  $0.844 \text{ mm}$ , die so gewählt wurde, dass die Beschleunigung des Läufers mit  $0.3 \text{ m/s}^2$  maximal ist, die geforderte Genauigkeit von  $1 \mu\text{m}$  eingehalten wird. Der maximale Fehler im eingeschwungenen Zustand beträgt ca.  $0.73 \mu\text{m}$ . Zuvor ist jedoch eine relativ hohe Überschwingweite zu erkennen. Diese resultiert aus dem geringen Phasenrand des scharf eingestellten PID-Reglers. In der Praxis sind hohe Überschwingweiten bei Präzisionspositionierern oft unerwünscht. Diese Problemstellung kann jedoch leicht gelöst werden, indem man die Anfangswerte der Referenz und der aktuellen Position identisch wählt.

Abbildung 6.29 zeigt die Fehler- und Stellgrößenverläufe für eine rampenförmige Solltrajektorie und für ein Cosinussignal mit der Frequenz 3 Hz bei den verschiedenen Regelstreckenparametrierungen  $\mu_x = 14$ ,  $m = 30$ ,  $K_{mx} = 0.8$  und  $\epsilon = 0.7$  ( $H_{min}(s)$ ) sowie  $\mu_x = 0$ ,  $m = 19$ ,  $K_{mx} = 2.4$  und  $\epsilon = 1.3$  ( $H_{max}(s)$ ). Es ist zu erkennen, dass für  $H_{min}(s)$  die maximalen dynamischen Fehler am größten sind. Diese betragen für die Simulation mit der rampenförmigen Solltrajektorie  $7.43 \mu\text{m}$  und für die mit der cosinusförmigen Referenz  $6.85 \mu\text{m}$ . Zwischen den beiden Spitzen bleibt der Fehler in der ersten Simulation jedoch kleiner als  $0.4 \mu\text{m}$ . Der stationäre Fehler beträgt hierbei für

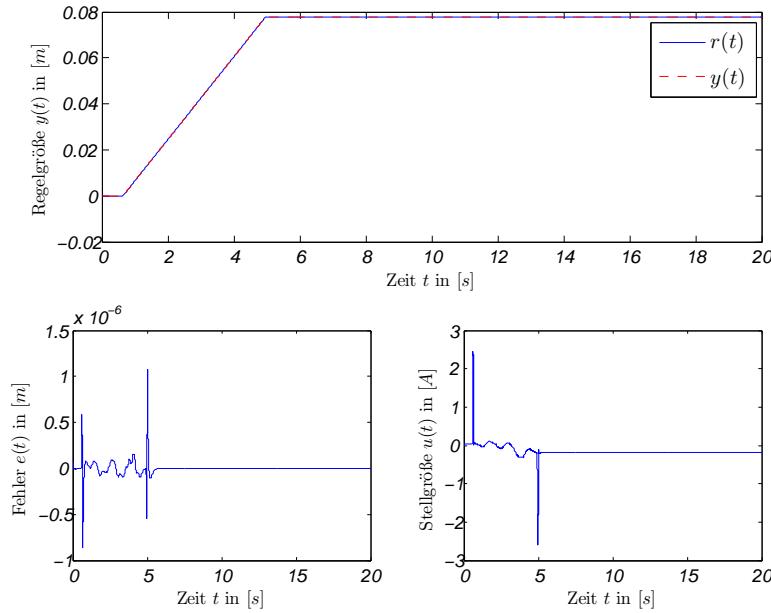


Abbildung 6.27: Regelgrößen-, Fehler-, und Stellgrößenverläufe für die rampenförmige Solltrajektorie, für  $\tau = 0.5$  ms und für die nominelle Regelstrecke  $A_0(s)$ .

$t > 6$  s weniger als 1 nm. In den Simulationen mit der in  $H_{max}(s)$  resultierenden Regelstreckenparametrierung beträgt der maximale Fehler  $2.82 \mu\text{m}$ . Zwischen den Spitzen bleibt der Fehler kleiner als  $0.2 \mu\text{m}$ . Der stationäre Fehler für  $t > 6$  s ist nun ebenfalls geringer und beträgt in der Simulation weniger als 0.22 nm. Für das cosinusförmige Referenzsignal beträgt der maximale Fehler im eingeschwungenen Zustand  $2.9 \mu\text{m}$ .

### 6.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein intuitives Folgeregelungskonzept für den  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Festwert-Regelkreis entwickelt. Dieses besteht aus einer Vorsteuerung und einem PID-Regler mit einem Anti-Windup Mechanismus.

Erstere steuert näherungsweise das Designsystem der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Zustandsrückführung bzw. das Referenzsystem der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung vor, sodass Referenz und Ausgang nahezu identisch sind. Hierbei gilt es zu beachten, dass die Vorsteuerung und somit die Folgeregelung bei der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Zustandsrückführung umso besser ist, je kleiner die Menge  $\Omega$  ist und umso größer  $k$  gewählt werden kann. Auf diese Weise vergrößert sich die minimale und die maximale Bandbreite von  $C(s)$ ,

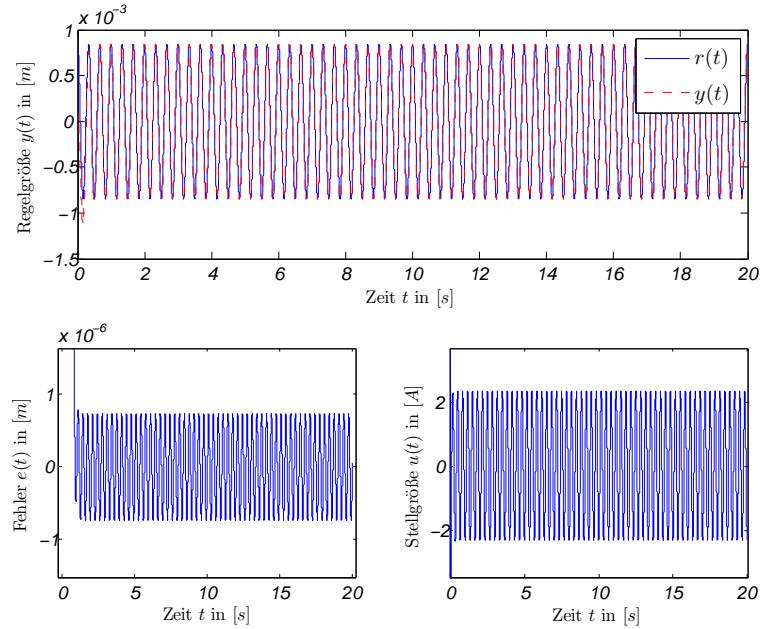


Abbildung 6.28: Regelgrößen-, Fehler-, und Stellgrößenverläufe für eine cosinusförmige Solltrajektorie mit 3 Hz und der maximalen Beschleunigung des Läufers 0.3 m/s<sup>2</sup> für  $\tau = 0.5$  ms und für die nominelle Regelstrecke  $A_0(s)$ .

wodurch sich die Performance des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers und die Performance der Folgeregelung verbessern. Weitere Ansätze zur Verbesserung sind die Erhöhung der Rechenleistung, um eine größere Adoptionsverstärkung anwenden zu können sowie die Verwendung glatterer Solltrajektorien.

Um eine Vorsteuerung für die  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Ausgangsrückführung zu entwickeln, musste ein Kunstgriff angewandt werden, da  $C(s)H(s)$  eine Übertragungsfunktion achter Ordnung ist. Hierzu wurden die Pole beim Entwurf des Reglers so platziert, dass die Bodediagramme von  $H(s)$  und  $M(s)$  für die nominelle Regelstrecke weitestgehend übereinstimmen. Anschließend wurde  $M(s)$  für die Vorsteuerung invertiert und eine Approximation von  $1/C(s)$  in Reihe geschaltet. Es gilt anzumerken, dass  $C(s)$  so invertiert wurde, dass  $C(s)C_{inv}(s)$  die Bandbreitenbeschränkung des Aktors einhält, um mit der Idee der Bandbreitenbegrenzung des  $\mathcal{L}_1$  Ansatzes konform zu sein. Die so entworfene Vorsteuerung in Verbindung mit der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelung zeigte sehr gute Ergebnisse, wenn man bedenkt, dass der  $\mathcal{L}_1$ -Regler mit Ausnahme der apriori bekannten Parametermengen, keinerlei Information über die Regelstrecke besitzt. Sie lässt sich weiter verbessern, indem  $C(s)$  erhöht wird. Hierdurch verringern sich die Abweichungen.

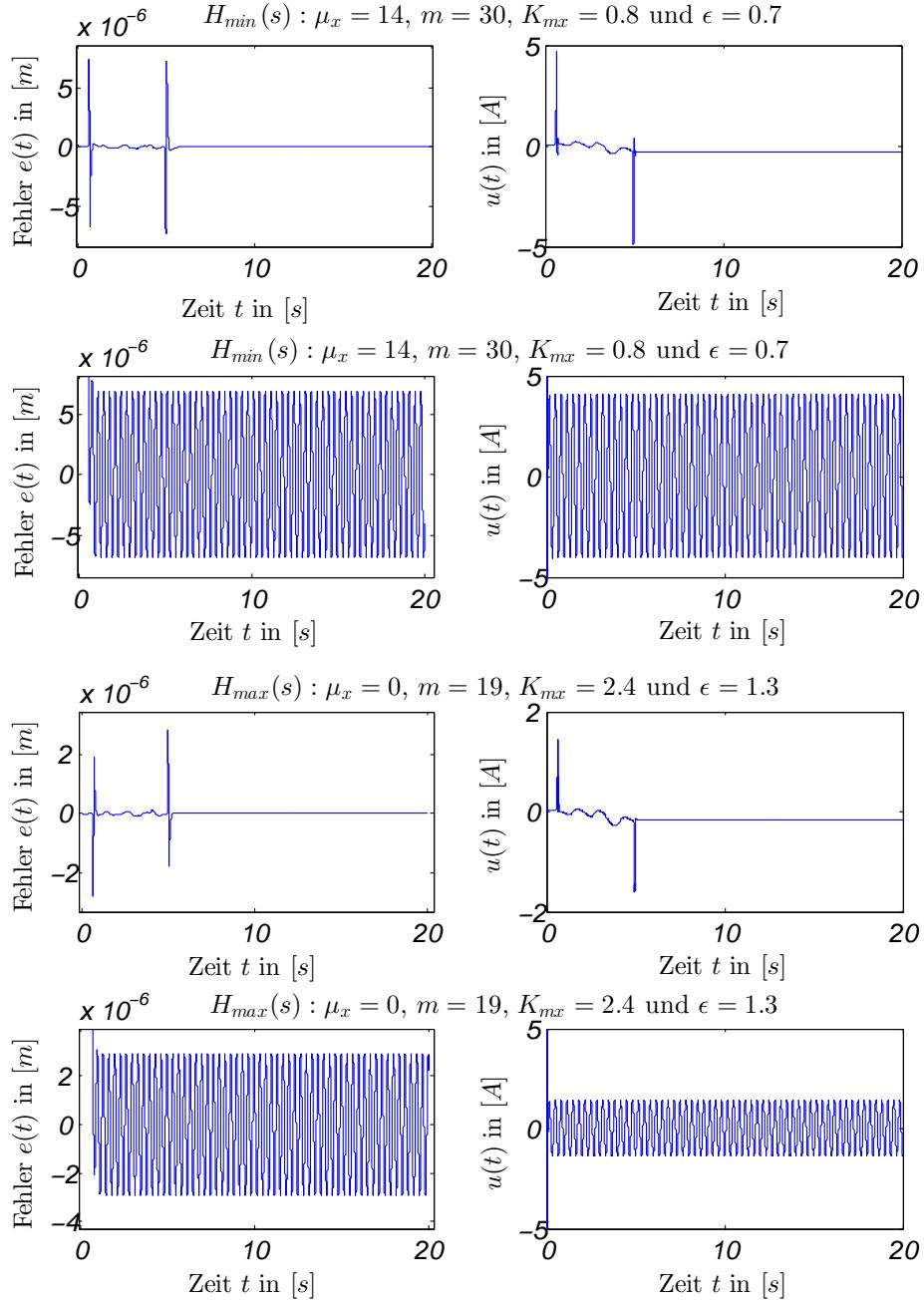


Abbildung 6.29: Regelgrößen-, Fehler-, und Stellgrößenverläufe für die rampen- sowie cosinusförmigen Solltrajektorien, für  $\tau = 0.5$  ms und für die Regelstreckenparameter  $A_0(s)$ .

gen von  $H_{min}(s)$  und  $H_{max}(s)$  zu  $H(s)$ , welches mit  $A_0(s)$  berechnet wird. Gleichzeitig verbessert sich die Performance des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers. Die Abweichungen lassen

sich ebenfalls verringern, wenn sich die Wertebereiche der Regelstreckenparameter in Tabelle 3.1 verkleinern lassen.

Generell lässt sich somit festhalten, dass die Vorsteuerung und somit auch die Folgeregelung sowohl für die  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Zustandsrückführung, als auch für die  $\mathcal{L}_1$ -Ausgangsrückführung umso genauer ist, je kleiner die Parameterwertebereiche sind. Da diese für Präzisionspositionierer im Allgemeinen eher klein zu sein scheinen, ist der entwickelte Folgeregler hierfür bestens geeignet.

Schließlich wurde für den Folgeregler ein gewöhnlicher PID-Regler mit einem Anti-Windup Mechanismus entworfen, wobei dieser als Polvorgaberegler für die Trajektorienfolgefehlerdynamik ausgelegt wurde.

Die Simulationsergebnisse zeigten für den Folgeregler mit  $\mathcal{L}_1$ -adaptiver Zustandsrückführung für einen Cosinus mit 0.33 Hz als Referenzsignal einen maximalen dynamischen Trajektorienfolgefehler von  $1.28 \mu\text{m}$ . Bei einer Simulation mit der rampenförmigen Solltrajektorie stieg der maximale dynamische Trajektorienfolgefehler auf  $15 \mu\text{m}$  an. Vor und nach dieser Spitze wird die geforderte Genauigkeit von  $1 \mu\text{m}$  eingehalten. Dies zeigt die Notwendigkeit der Verwendung hinreichend glatter Sollvorgaben.

Die Simulationsergebnisse für den Folgeregler mit der  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung zeigten überraschenderweise eine noch bessere Performance. Dies mag unter anderem an dem Filter  $C(s)$  liegen, das etwas größer gewählt werden konnte, ohne dass die Stellgröße stark zu oszillieren anfing. Hier lag für die Regelstrecke  $A_0(s)$  der maximale dynamische Fehler bei der rampenförmigen Solltrajektorie bei  $1.07 \mu\text{m}$  und für eine cosinusförmige Solltrajektorie mit der Frequenz 3 Hz lag er bei ca.  $0.73 \mu\text{m}$ . Für den Fall der geringsten Eingangsverstärkung und der maximalen Last und Reibung ( $\epsilon = 0.7$ ,  $K_{mx} = 0.8$ ,  $m = 30$  und  $\mu_x = 14$ ) wurde der Fehler maximal ( $7.43 \mu\text{m}$ ). Abgesehen von der Spitze bei der rampenförmigen Solltrajektorie war der maximale dynamische Trajektorienfolgefehler jedoch geringer als  $0.4 \mu\text{m}$ . Dass selbst bei solch starken Abweichungen von der nominellen Regelstrecke der Fehler so gering bleibt, zeigt die exzellente Zusammenarbeit des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers mit dem entworfenen Folgeregler.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Die Zielstellung dieser Masterarbeit war die Untersuchung und Bewertung gängiger adaptiver Regelungen auf die Anwendbarkeit für die adaptive Festwert- und Folgeregelung von Präzisionspositioniersystemen am Beispiel des LP<sup>3</sup>S. Der Grundgedanke für die Verwendung von adaptiven Regelungsverfahren ist dabei in erster Linie betriebswirtschaftlicher Natur. Ein Regler soll demnach für eine große Anzahl an Positioniersystemen mit unbekannten zeitvarianten Parametern und unbekannten Störungen anwendbar sein. Dies würde zu der wünschenswerten Eigenschaft führen, dass eine einmalige Parametrierung ausreicht, um für alle Nanopositioniermaschinen des gleichen Typs eine nahezu identische Performance zu erhalten.

Nach eingehender Analyse der Konzeption und Regelung verschiedenster Präzisionspositionierer nach dem Stand der Technik folgte eine Übersicht der Modellbeschreibung des planaren Positioniersystems LP<sup>3</sup>S aus [TAARW13], das die Basis der nachfolgenden Betrachtungen bildete. Die Erkenntnisse der Modellbildung flossen direkt in der anschließenden Übersicht gängiger adaptiver Regelungsverfahren mit ein und waren wesentlich zur Beurteilung der Tauglichkeit und der Auswahl geeigneter Methoden für die Regelung von Planarantrieben. MRAC sowie die  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regelung erwiesen sich als geeignete Verfahren und wurden einem Vergleich unterzogen. In Simulationsstudien anhand eines einfachen Beispiels zeigte sich schnell, dass die  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regelung MRAC überlegen war, sodass diese für die Regelung des LP<sup>3</sup>S favorisiert wurde. Wesentliche Beweggründe für die Auswahl des  $\mathcal{L}_1$ -Reglers waren die Entkopplung der Adaptionsschleife von der Regelschleife, die durch eine Tiefpass-Beobachter-Kombination realisiert wird, und die dadurch schier unendlich hoch wählbare Adaptionsverstärkung bei trotzdem garantierbarer Robustheit. Anhand von detaillierten Analysen der Eigenschaften von  $\mathcal{L}_1$ -Reglern wurden Einstellregeln formuliert und somit ein *work-flow* für den Entwurf  $\mathcal{L}_1$ -adaptiver Regler präsentiert. Für die Regelung des LP<sup>3</sup>S wurden  $\mathcal{L}_1$ -Zustandsrückführungen und für den Fall nicht messbarer Geschwindigkeiten  $\mathcal{L}_1$ -Ausgangsrückführungen entworfen.

Simulative Untersuchungen der Zustandsregelung zeigten, dass im Falle großer Totzeiten sowie einer hohen Filterbandbreite in  $C(s)$  starke Oszillationen mit großer Am-

plitude im Stellgrößenverlauf auftraten. Die Amplituden der Oszillationen lassen sich durch eine Verringerung der Bandbreite von  $C(s)$  sowie durch eine Vergrößerung der Adoptionsverstärkung verringern. Letztere Lösung ist generell zu favorisieren, da hierdurch die Performance allgemein verbessert wird. Da jedoch nur eine begrenzte Rechenleistung zur Verfügung steht, kann die Adoptionsverstärkung auch nur bis zu einem gewissen Grad erhöht werden. Sind anschließend die Amplituden der Oszillationen der Stellgröße immer noch zu groß, so muss die Bandbreite von  $C(s)$  verringert werden mit dem Nachteil von Performance-Einbußen für den totzeitfreien Fall. Demnach stellen die Forderungen nach Performance und Robustheit gegensätzliche Zielstellungen dar, was den Filterentwurf komplex gestaltet.

Neben der Positions-Festwertregelung wurde ein intuitives Folgeregelungskonzept erarbeitet, das auf einer Kaskadenregelungsstruktur mit unterlagerter  $\mathcal{L}_1$ -adaptiver Regelung und einer Vorsteuerung sowie einer PID-Ausgangsrückführung für die äußere Reglerkaskade beruht. Dabei wurde die Idee verfolgt, mittels  $\mathcal{L}_1$ -Regler ein Ein-/Ausgangsverhalten vorzugeben, bzgl. dessen ein Standard Folgeregler entworfen werden kann, dessen Vorsteuerung die (approximative) Streckeninversion realisiert, während die äußere Reglerkaskade letzte Störungen unterdrücken soll.

Für die praktische Anwendung wurde die Folgeregelung mit Anti-Windup-Mechanismen ausgestattet und simulativ erprobt. Dabei zeigten sich gute Ergebnissen. Obwohl die Spezifikation nicht in allen Fällen eingehalten wird, ist es dennoch sehr bemerkenswert, dass die  $\mathcal{L}_1$ -Regelung trotz vollständig unbekannter Parameter und Störungen so gute Ergebnisse erzielt. Zur weiteren Steigerung der Performance sollte in zukünftigen Arbeiten gegebenenfalls untersucht werden, ob die angegebenen Totzeiten und Parameterwertebereiche möglicherweise zu konservativ gewählt wurden und ob diese auch kleiner angegeben werden können. Denn es zeigte sich, dass der für die  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regler entwickelte Folgeregler umso genauer ist, je kleiner die Parameterwertebereiche bzw. Unsicherheiten sind. Da diese für Präzisionspositionierer im Allgemeinen eher klein sind, ist der entwickelte Folgeregler hierfür bestens geeignet. Die Ergebnisse der Simulationen zeigten, dass selbst bei starken Abweichungen von der nominellen Regelstrecke der Fehler relativ gering bleibt. Dies zeigt die exzellente Zusammenarbeit des  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Reglers mit dem entworfenen Folgeregler.

Da es nicht mehr gelang, die entworfenen Regler gegen Ende der Arbeit in der Praxis zu testen, wird dies das Hauptziel zukünftiger Forschungen sein. Hier gilt es insbesondere festzustellen, wie groß die Adoptionsverstärkung gewählt werden kann. Zudem muss untersucht werden, wie häufig Totzeiten auftreten. Daraufhin kann eine Feinjustierung des Reglerparameters  $k$  erfolgen, wodurch die Performance möglicherweise

weiter verbessert werden kann. Sollte sich die  $\mathcal{L}_1$ -adaptive Regelung im Zusammenspiel mit der entwickelten Folgeregelung hier bewähren, so liegt es nahe, den Entwurf des gesamten Kaskadenreglers auf MIMO-Systeme zu erweitern. Auf diese Weise können mit möglichst geringem Rechenaufwand auch die beiden übrigen Regelgrößen  $y(t)$  und  $\phi(t)$  der Nanopositioniermaschine durch den  $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regler geregelt werden.

# Anhang

# A Systemtheorie

## A.1 $\mathcal{L}_1$ -Norm eines Systems

Die folgende Beschreibung der  $\mathcal{L}_1$ -Norm eines Systems wurde in Anlehnung an [HCK<sup>+</sup>11] verfasst. Die  $\mathcal{L}_1$ -Norm eines Systems beschreibt das Verhältnis zwischen den Höchstwerten des Eingangs und des Ausgangs eines Systems. Die  $\mathcal{L}_1$ -Norm wird auch als Spitze-Spitze-Verstärkung eines Systems bezeichnet („peak-to-peak gain“ [HCK<sup>+</sup>11]).

Sei  $G(s)$  ein properes exponentiell stabiles System, wobei alle Anfangszustände null sind. Für ein beschränktes Eingangssignal  $u(t)$  kann somit der Ausgang  $y(t)$  durch Faltung berechnet werden zu

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau,$$

wobei  $g(t)$  die Impulsantwort von  $G(s)$  ist. Mit

$$\|y\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} |y(t)|$$

erhält man für  $y(t)$  die Schranke

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t |g(\tau)||u(t-\tau)|d\tau \\ &\leq \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \|u\|_{\mathcal{L}_\infty}. \end{aligned}$$

Die  $\mathcal{L}_1$ -Norm von  $G(s)$  ist definiert als

$$\|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau, \quad (\text{A.1})$$

was zu folgender Beschränkung führt

$$\|y\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} \|u\|_{\mathcal{L}_\infty}. \quad (\text{A.2})$$

Diese Beschränkung ist nur gegeben, wenn  $G(s)$  proper und stabil ist. Andernfalls existiert die  $\mathcal{L}_1$ -Norm nicht und die Impulsantwort  $g(t)$  ist unbeschränkt.

Für MIMO-Systeme mit  $m$  Eingängen und  $l$  Ausgängen ist die  $\mathcal{L}_1$ -Norm von  $G(s)$  definiert als

$$\|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} = \max_{i=1,\dots,l} \left( \sum_{j=1}^m \int_0^\infty |g_{ij}(\tau)| d\tau \right), \quad (\text{A.3})$$

wobei  $g_{ij}(t)$  der Eintrag  $(i, j)$  in der Impulseantwortmatrix des Systems  $G(s)$  ist.

Als Hilfe zur Berechnung kann folgende Ungleichung verwendet werden:

$$\|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} \leq \|G_2(s)\|_{\mathcal{L}_1} \|G_1(s)\|_{\mathcal{L}_1}, \quad (\text{A.4})$$

wobei  $G(s) = G_2(s)G_1(s)$  ist mit den exponentiell stabilen und properen Systemen  $G_1(s)$  und  $G_2(s)$ . [HCK<sup>+</sup>11]

## A.2 Projektions-Operator

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in der folgenden Beschreibung auf die Abhängigkeiten der Variablen  $\theta(t)$ ,  $\hat{\theta}(t)$  und  $y(t)$  von der Zeit  $t$  verzichtet.

In Adoptionsgesetzen wird der Projektions-Operator (engl.: *projection operator*)  $Proj(\hat{\theta}, y)$  häufig verwendet, um Parameterdriften und unkontrolliertes Anwachsen der Schätzungen  $\hat{\theta}$  zu verhindern [HC10]. Dazu wird die gewünschte Parameteränderung  $y$  in Richtung einer geschlossenen konvexen Menge  $\Omega_0$ , einer Menge, die alle möglichen Parameterwerte  $\theta$  beinhaltet, abgelenkt, falls sich die aktuelle Schätzung  $\hat{\theta}$  bereits außerhalb von  $\Omega_0$  und somit innerhalb eines sogenannten Toleranzbereiches befindet.

Die Definition des Projektions-Operators setzt zunächst die Annahme einer kompakten konvexen Menge mit glatter Beschränkung voraus [HC10]:

$$\Omega_c = \{\hat{\theta} \in \mathbb{R}^n \mid f(\hat{\theta}) \leq c\}, \quad 0 \leq c \leq 1, \quad (\text{A.5})$$

wobei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  folgende konvexe glatte Funktion ist [HC10]:

$$f(\hat{\theta}) = \frac{(1 + \epsilon_{\hat{\theta}})\hat{\theta}^T \hat{\theta} - \theta_{Pmax}^2}{\epsilon_{\hat{\theta}} \theta_{Pmax}^2}. \quad (\text{A.6})$$

$\epsilon_{\hat{\theta}} > 0$  bezeichnet dabei eine beliebige Toleranzschranke, die indirekt die Größe des

Toleranzbereiches angibt, in dem der Adoptionsvektor bzw. die Parameteränderung  $y$  abgelenkt wird. Je kleiner dieser Bereich ist, desto härter wird  $y$  darin abgelenkt. Des Weiteren ist  $\theta_{P_{max}}$  die obere Beschränkung, die sich durch den Projektions-Operator für die 2-Norm der Schätzungen  $\hat{\theta}$  ergibt.  $\theta_{P_{max}}$  wird durch einen Vorfaktor, der sich durch die Wahl von  $\epsilon_{\hat{\theta}}$  ergibt und durch die Vektornorm (euklidische Norm) bestimmt zu (zur Herleitung siehe A.15)

$$\theta_{P_{max}} = \max_{\theta \in \Theta_0} \|\theta\|_2 \sqrt{1 + \epsilon_{\hat{\theta}}}. \quad (\text{A.7})$$

Der Projektions-Operator ist mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definiert als [HC10]:

$$Proj(\hat{\theta}, y) = \begin{cases} y, & \text{wenn } f(\hat{\theta}) < 0, \\ y, & \text{wenn } f(\hat{\theta}) \geq 0 \text{ und } \nabla f^T y \leq 0, \\ y - \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \left\langle \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, y \right\rangle f(\hat{\theta}) & \text{wenn } f(\hat{\theta}) \geq 0 \text{ und } \nabla f^T y > 0. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Dieser verändert  $y$  somit nicht, wenn  $\hat{\theta}$  zu der Menge  $\Omega_0 = \{\hat{\theta} \in \mathbb{R}^n | f(\hat{\theta}) \leq 0\}$  gehört. Hierbei ist noch zu erwähnen, dass  $\Theta_0$  aus Kapitel 5.1 eine Teilmenge von  $\Omega_0$  ist, also  $\Theta_0 \subseteq \Omega_0$  gilt (siehe Abbildung A.4). In der Menge  $\{\hat{\theta} \in \mathbb{R}^n | 0 \leq f(\hat{\theta}) \leq 1\}$  (innerhalb des Toleranzbereiches) sorgt der Projektions-Operator im Falle  $\nabla f^T y > 0$  für eine weiche Ablenkung des Vektors  $y$  in Richtung der Menge  $\Omega_0$ . Als Ergebnis dieser Ablenkung gilt

$$(\hat{\theta} - \theta)^T (Proj(\hat{\theta}, y) - y) \leq 0, \quad (\text{A.9})$$

für gegebene Vektoren  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta \in \Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$  und  $\hat{\theta} \in \Omega_1$ . (in Anlehnung an [HCK<sup>+</sup>11, S.68] [HC10, S.291-294])

Die dritte Gleichung des Projektions-Operators lässt sich folgendermaßen veranschaulichen:

$$y - \underbrace{\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \underbrace{\left\langle \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, \underbrace{y}_{\vec{b}} \right\rangle}_{\underbrace{\vec{a}}_{\vec{b}_a}} f(\hat{\theta})}_{\vec{b}_a}. \quad (\text{A.10})$$

Das Skalarprodukt  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  liefert eine Projektion von  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$  (siehe Abbildung A.1). Da

$\vec{a}$  ein Vektor der Länge  $|\vec{a}| = a = 1$  ist, gilt

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a \cdot b \cdot \cos \phi = b \cdot \cos \phi = b_a \quad (\text{A.11})$$

Um einen Vektor zu erhalten, wird  $b_a$  nun mit dem Einheitsvektor  $\vec{a}$  multipliziert

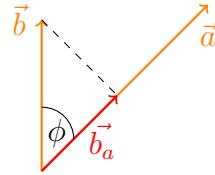


Abbildung A.1: Projektion von  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$

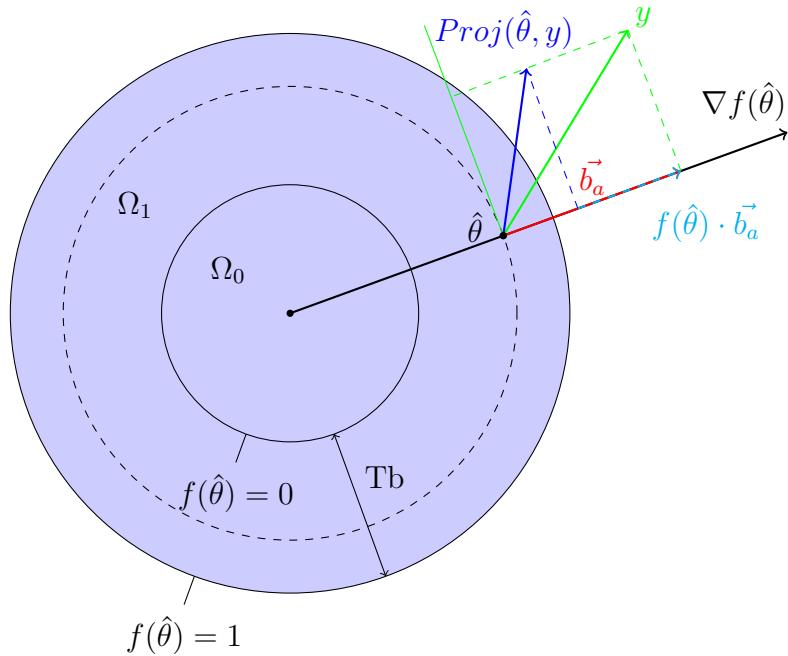


Abbildung A.2: Projektions-Operator mit  $\vec{b}_a = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \left\langle \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, y \right\rangle$ ; die aktuelle Pa-

rameterschätzung  $\hat{\theta}(t)$  befindet sich in der Menge  $\Omega_1$ , und somit im durch die Größe von  $\epsilon_{\hat{\theta}}$  festgelegten Toleranzbereich ( $T_b$ ), weswegen die Parameteränderung  $y$  durch  $0 \leq f(\hat{\theta}) \leq 1$  in der Richtung  $\nabla f(\hat{\theta})$  gestaucht wird (In Anlehnung an [HCK<sup>+</sup>11]).

und man erhält  $\vec{b}_a$ . Da für den betrachteten Fall  $f(\hat{\theta}) \geq 0$  gilt und  $f(\hat{\theta})$  maximal  $f(\hat{\theta}) = 1$  werden kann, erfolgt durch  $f(\hat{\theta}) \cdot \vec{b}_a$  eine Stauchung von  $\vec{b}_a$ . Der durch den

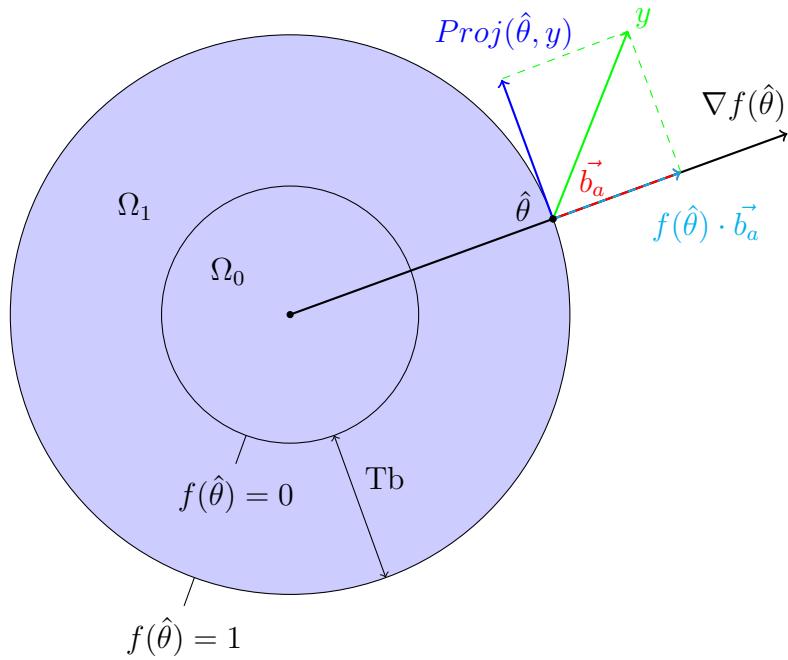


Abbildung A.3: Projektions-Operator mit  $\vec{b}_a = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \left\langle \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, y \right\rangle$ ; die aktuelle Parameterschätzung  $\hat{\theta}(t)$  befindet sich am Rand der Menge  $\Omega_1$  und im Toleranzbereich ( $Tb$ ). Daraus folgt  $f(\hat{\theta}) = 1$ , weswegen die Komponente in Richtung  $\nabla f(\hat{\theta})$  komplett aus der Parameteränderung  $y$  entfernt wird;  $\hat{\theta}(t)$  bewegt sich auf dem Rand der Menge  $\Omega_1$  und verlässt diese nicht! Die Parameterschätzungen sind somit beschränkt (In Anlehnung an [HCK<sup>+</sup>11]).

Projektions-Operator abgeleitete Vektor der Änderung der Parameterschätzungen ergibt sich schließlich zu  $Proj(\hat{\theta}, y) = y - f(\hat{\theta}) \cdot \vec{b}_a$ , wie in Abbildung A.2 zu sehen ist. Schlimmstenfalls verläuft dieser Vektor tangential zum Rand der Menge  $\Omega_1$  (siehe A.3), die Parameterschätzungen  $\hat{\theta}$  verlassen diesen jedoch nicht. Folglich verbleiben die Schätzungen für alle Zeiten in  $\Omega_1$  und sind somit beschränkt, wodurch ein unkontrolliertes Anwachsen vermieden werden kann.

**Beispiel:** Sei  $\theta \in \Theta_0 \subseteq \Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$  mit  $\theta_1 \in [-12, 8]$  und  $\theta_2 \in [-5, 5]$  (siehe Abbildung A.4) und  $\epsilon_{\hat{\theta}} = 0.21$ , so lässt sich  $\theta_{Pmax}$  berechnen zu:

$$\theta_{Pmax} = \max_{\theta \in \Theta_0} \left\| \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \right\|_2 \sqrt{1 + \epsilon_{\hat{\theta}}} = \left\| \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix} \right\|_2 \sqrt{1 + 0.21} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} \cdot 1.1 = 14.3.$$

Hieraus lässt sich die Menge  $\Theta$  berechnen zu:

$$\Theta = \{\nu = (\nu_1 \quad \nu_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \nu_1 = [-14.3, 14.3] \wedge \nu_2 \in [-14.3, 14.3]\} \quad (\text{A.12})$$

und es ergibt sich für  $L$ :

$$L = \max_{\theta \in \Theta} \|\theta\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 14.3 \\ 14.3 \end{pmatrix} \right\|_1 = 28.6. \quad (\text{A.13})$$

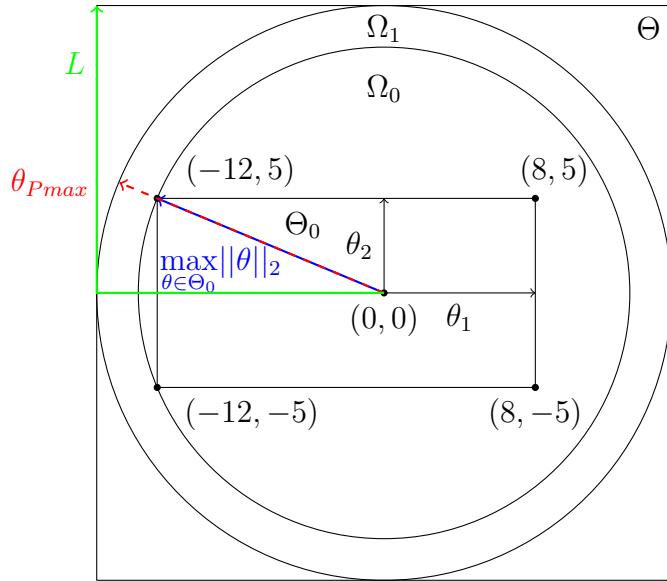


Abbildung A.4: Veranschaulichung der Mengen  $\Theta_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  und  $\Theta$  bezüglich des Beispiels.

**Herleitung von  $\theta_{Pmax}$ :** Aufgrund der Definition von  $\Omega_c$  durch  $f(\hat{\theta})$  ist die 2-Norm von  $\hat{\theta}$  von besonderer Bedeutung für die Definition von  $\Omega_0$  ( $c = 0$ ) und  $\Omega_1$  ( $c = 1$ ). Die Menge  $\Omega_0$  ist bekannt, da  $\Theta_0$  bekannt ist. Des Weiteren soll  $\Omega_0$  eine Teilmenge von  $\Omega_1$  sein. Es liegt nahe, den Radius des Randes von  $\Omega_1$  (also  $\theta_{Pmax}$ ) mithilfe der 2-Norm von  $\hat{\theta}$  und einem Vorfaktor so zu definieren, dass die Forderung  $\Omega_0 \subset \Omega_1$  eingehalten wird. Aufgrund des Quadrates  $\theta_{Pmax}^2$  in  $f(\hat{\theta})$  setzen wir nun folgendermaßen an:

$$\theta_{Pmax}^2 = \kappa^2 \cdot \max_{\theta \in \Theta_0} \theta^T \theta = \kappa^2 \cdot \max_{\hat{\theta} \in \Omega_0} \hat{\theta}^T \hat{\theta}, \quad (\text{A.14})$$

wobei  $\kappa \in \mathbb{R}^+$  ist. Um zu gewährleisten, dass für alle  $\hat{\theta} \in \Omega_0$   $f(\hat{\theta}) \leq 0$  gilt, muss folgende Ungleichung nach  $\kappa$  aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}
& \frac{(1 + \epsilon_{\hat{\theta}}) \cdot \max_{\hat{\theta} \in \Omega_0} \hat{\theta}^T \hat{\theta} - \theta_{P_{max}}^2}{\epsilon_{\hat{\theta}} \theta_{P_{max}}^2} \leq 0 \\
\Leftrightarrow & (1 + \epsilon_{\hat{\theta}}) \max_{\hat{\theta} \in \Omega_0} \hat{\theta}^T \hat{\theta} - \theta_{P_{max}}^2 \leq 0 \\
\Leftrightarrow & (1 + \epsilon_{\hat{\theta}}) \max_{\hat{\theta} \in \Omega_0} \hat{\theta}^T \hat{\theta} - \kappa^2 \max_{\hat{\theta} \in \Omega_0} \hat{\theta}^T \hat{\theta} \leq 0 \\
\Leftrightarrow & (1 + \epsilon_{\hat{\theta}}) \leq \kappa^2 \\
\Leftrightarrow & \sqrt{(1 + \epsilon_{\hat{\theta}})} \leq \kappa \quad \vee \quad -\sqrt{(1 + \epsilon_{\hat{\theta}})} \geq \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R}^+ \\
\Rightarrow & \sqrt{(1 + \epsilon_{\hat{\theta}})} \leq \kappa.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

**Anmerkung:** Das Beispiel zeigt einen oft angewandten Entwurfsweg, bei dem zunächst die Menge  $\Theta_0$  aller möglichen Regelstreckenparameter  $\theta$  definiert wird. Die Menge  $\Omega_0$  ist dann festgelegt durch  $\max_{\theta \in \Theta_0} \|\theta\|_2$ . Auf diese Weise wird sichergestellt, dass sich die wahren Parameter in  $\Omega_0$  befinden, wie in [JBP92] gefordert. Anschließend wird  $\epsilon_{\hat{\theta}}$  frei festgelegt und damit die Härte der Ablenkung und somit auch  $\theta_{P_{max}}$  bzw.  $\Omega_1$  bestimmt. Daraufhin kann dann  $\Theta$  definiert und  $L$ , welches für den Stabilitätsbeweis benötigt wird, berechnet werden.

In Bezug auf die Schätzungen  $\hat{\omega}(t)$  und  $\hat{\sigma}(t)$  sind beim Entwurf der  $\mathcal{L}_1$  adaptiven Zustandsrückführung mit unbekannter Eingangsverstärkung jedoch die konvexe Menge  $\Omega$  und die Schranke  $\Delta$  von besonderer Wichtigkeit. Diese werden unabhängig von  $\epsilon_{\hat{\omega}}$  und  $\epsilon_{\hat{\sigma}}$  bestimmt, indem die Stabilität gegenüber einem gewissen Amplitudenrand  $g_m$  und einer gewissen Totzeit (welche maximal die Störung  $\Delta_n$  induziert) gefordert wird. Damit die Berechnungen bezüglich der Stabilität Gültigkeit haben, muss sichergestellt werden, dass mithilfe der Projektions-Operatoren diese Schranken für die Schätzungen eingehalten werden. Aus diesem Grund werden in [HC10] die konvexen Mengen  $\Omega_1$  bzw. die Werte  $\omega_{P_{max}}$  und  $\sigma_{P_{max}}$  durch die bekannte Menge  $\Omega$ , bzw. die bekannte Schranke  $\Delta$  definiert. Hierbei muss darauf geachtet werden, dass die Mitte  $\omega_{P_{center}}$  der Menge  $\Omega$  üblicherweise nicht Null ist. Werden  $\epsilon_{\hat{\omega}}$  sowie  $\epsilon_{\hat{\sigma}}$  anschließend klein gewählt, so befinden sich die wahren Parameter weiterhin in  $\Omega_0$ , wie in [JBP92] gefordert.

### A.3 Herleitung des Filters $C(s)$

Die Übertragungsfunktion des Filters  $C(s)$  und seine Abhängigkeit von  $\hat{\omega}(s)$  in dem  $\mathcal{L}_1$  adaptiven Regler aus Kapitel 5.2 lässt sich aus Abbildung 5.12 und dem Stellgesetz aus (5.53) herleiten:

$$u(s) = -kD(s)(\hat{\eta}(s) - k_g r(s)), \quad (\text{A.16})$$

wobei

$$\hat{\eta}(s) = \hat{\omega}(s)u(s) + \hat{\theta}^T(s)x(s) + \hat{\sigma}(s). \quad (\text{A.17})$$

Nach dem Einsetzen von A.17 in A.16 erhält man:

$$\begin{aligned} u(s) &= -kD(s) \left( \hat{\omega}(s)u(s) + \hat{\theta}^T(s)x(s) + \hat{\sigma}(s) - k_g r(s) \right) \\ \Leftrightarrow u(s)(1 + kD(s)\hat{\omega}(s)) &= -kD(s)\hat{\theta}^T(s)x(s) - kD(s)\hat{\sigma}(s) + kD(s)k_g r(s) \\ \Leftrightarrow u(s) &= -\frac{kD(s)}{1 + kD(s)\hat{\omega}(s)}\hat{\theta}^T(s)x(s) - \frac{kD(s)}{1 + kD(s)\hat{\omega}(s)}\hat{\sigma}(s) + \frac{kD(s)}{1 + kD(s)\hat{\omega}(s)}k_g r(s) \\ \Leftrightarrow u(s) &= -\underbrace{\frac{1}{\hat{\omega}(s)} \frac{\hat{\omega}(s)kD(s)}{1 + kD(s)\hat{\omega}(s)}}_{C(s)} \hat{\theta}^T(s)x(s) - \underbrace{\frac{1}{\hat{\omega}(s)} \frac{\hat{\omega}(s)kD(s)}{1 + kD(s)\hat{\omega}(s)}}_{C(s)} \hat{\sigma}(s) \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{\hat{\omega}(s)} \frac{\hat{\omega}(s)kD(s)}{1 + kD(s)\hat{\omega}(s)}}_{C(s)} k_g r(s) \\ \Leftrightarrow u(s) &= \frac{C(s)}{\hat{\omega}(s)} \left( k_g r(s) - \hat{\sigma}(s) - \hat{\theta}^T x(s) \right). \end{aligned}$$

### A.4 Kharitonov Theorem

Sei  $\mathcal{I}(s)$  eine Menge von reellen Polynomen vom Grad  $n$  der Form:

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \cdots + \delta_n s^n, \quad (\text{A.18})$$

wobei die Koeffizienten im Wertebereich

$$\delta_0 \in [X_0, Y_0], \delta_1 \in [X_1, Y_1], \dots, \delta_n \in [X_n, Y_n] \quad (\text{A.19})$$

liegen und  $0 \notin [X_n, Y_n]$  gilt [JH08].

Alle Polynome in der Familie  $\mathcal{I}(s)$  sind Hurwitz, dann und nur dann, wenn die folgenden vier Kharitonov Polynome Hurwitz sind [JH08]:

$$\begin{aligned}K^1(s) &= X_0 + X_1s + Y_2s^2 + Y_3s^3 + X_4s^4 + X_5s^5 + Y_6s^6 + \dots, \\K^2(s) &= X_0 + Y_1s + Y_2s^2 + X_3s^3 + X_4s^4 + Y_5s^5 + Y_6s^6 + \dots, \\K^3(s) &= Y_0 + X_1s + X_2s^2 + Y_3s^3 + Y_4s^4 + X_5s^5 + X_6s^6 + \dots, \\K^4(s) &= Y_0 + Y_1s + X_2s^2 + X_3s^3 + Y_4s^4 + Y_5s^5 + X_6s^6 + \dots.\end{aligned}\tag{A.20}$$

# Literaturverzeichnis

- [ÅH95] ÅSTRÖM, Karl J. ; HAGGLUND, Tore: *PID controllers: Theory, design and tuning.* 2. S.l : Instrument society of America, 1995. – ISBN 9781556175169
- [ÅW89] ÅSTRÖM, Karl J. ; WITTENMARK, B.: *Adaptive control.* Reading : Addison-Wesley, 1989. – ISBN 9780201097207
- [BHL11] BAOQUAN KOU ; HE ZHANG ; LIYI LI: Analysis and design of a novel 3-DOF Lorentz-force-driven DC planar motor. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 47 (2011), Nr. 8, S. 2118–2126. – ISSN 0018-9464
- [Bhu04] BHUSHAN, Bharat (Hrsg.): *Springer handbook of nanotechnology.* Berlin and London : Springer, 2004. – ISBN 9783540012184
- [Bri05] BRIAN D. O. ANDERSON: Failures of adaptive control theory and their resolution. In: *Communications in Information and Systems* (2005), Nr. 5, 1–20. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.127.881>, Abruf: 14.09.2013
- [Bun] BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG UND FORSCHUNG: *Nanotechnologien: Auf dem Gebiet der allerkleinsten Dinge ist Deutschland ganz groß.* <http://www.hightech-strategie.de/de/113.php>, Abruf: 10.06.2013
- [CH06a] CHENGYU CAO ; HOVAKIMYAN, N.: Design and Analysis of a Novel L1 Adaptive Controller, Part I: Control Signal and Asymptotic Stability. In: *2006 American Control Conference*, IEEE, 2006. – ISBN 1-4244-0209-3, S. 3397–3402
- [CH06b] CHENGYU CAO ; HOVAKIMYAN, N.: Design and Analysis of a Novel L1 Adaptive Controller, Part II: Guaranteed Transient Performance. In: *2006 American Control Conference*, IEEE, 2006. – ISBN 1-4244-0209-3, S. 3403–3408

- [DAG10] DIAN, Songyi ; ARAI, Yoshikazu ; GAO, Wei: Dynamic compensation of modeling uncertainties and disturbances of a precision planar motion stage based on sliding mode observer. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 46 (2010), Nr. 9-12, S. 899–912. <http://dx.doi.org/10.1007/s00170-009-2009-8>, Abruf: 14.09.2013. – DOI 10.1007/s00170-009-2009-8. – ISSN 0268-3768
- [DEM07] DEVASIA, Santosh ; ELEFTHERIOU, Evangelos ; MOHEIMANI, S. O. R.: A survey of control issues in nanopositioning. In: *IEEE transactions on control systems technology* 15 (2007), Nr. 5, S. 802–823. <http://dx.doi.org/10.1109/TCST.2007.903345>, Abruf: 14.09.2013. – DOI 10.1109/TCST.2007.903345. – ISSN 1063-6536
- [Dev02] DEVASIA, S.: Should model-based inverse inputs be used as feedforward under plant uncertainty? In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (2002), Nr. 11, S. 1865–1871. <http://dx.doi.org/10.1109/TAC.2002.804478>, Abruf: 14.09.2013. – DOI 10.1109/TAC.2002.804478. – ISSN 00189286
- [DGK<sup>+</sup>05] DEJIMA, Shuichi ; GAO, Wei ; KATAKURA, Kei ; KIYONO, Satoshi ; TOMITA, Yoshiyuki: Dynamic modeling, controller design and experimental validation of a planar motion stage for precision positioning. In: *Precision Engineering* 29 (2005), Nr. 3, S. 263–271. <http://dx.doi.org/10.1016/j.precisioneng.2004.11.005>, Abruf: 14.09.2013. – DOI 10.1016/j.precisioneng.2004.11.005. – ISSN 01416359
- [ETE] ETEL: *ETEL: Motion Technology.* <http://www.etel.ch/motion-systems/design/>, Abruf: 21.06.2013
- [ETH09] ETH ZÜRICH: *Adaptive Control.* <http://control.ee.ethz.ch/~apnoco/Lectures2009/13-Adaptive%20Control.pdf>. Version: 2009, Abruf: 01.08.2013
- [GDY<sup>+</sup>04] GAO, Wei ; DEJIMA, Shuichi ; YANAI, Hiroaki ; KATAKURA, Kei ; KIYONO, Satoshi ; TOMITA, Yoshiyuki: A surface motor-driven planar motion stage integrated with an XYθ<sub>Z</sub> surface encoder for precision positioning. In: *Precision Engineering* 28 (2004), Nr. 3, S. 329–337. <http://dx.doi.org/10.1016/j.precisioneng.2003.12.003>, Ab-

- ruf: 14.09.2013. – DOI 10.1016/j.precisioneng.2003.12.003. – ISSN 01416359
- [HC10] HOVAKIMYAN, Naira ; CAO, Chengyu: *Advances in design and control.* Bd. 21: *L1 adaptive control theory: Guaranteed robustness with fast adaptation.* Philadelphia and Pa : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM 3600 Market Street Floor 6 Philadelphia PA 19104), 2010. – ISBN 978-0-898717-04-4
- [HCK<sup>+</sup>11] HOVAKIMYAN, Naira ; CHENGYU CAO ; KHARISOV, Evgeny ; XARGAY, Enric ; GREGORY, Irene M.: L1 Adaptive Control for Safety-Critical Systems. In: *IEEE Control Systems* 31 (2011), Nr. 5, S. 54–104. <http://dx.doi.org/10.1109/MCS.2011.941961>, Abruf: 14.09.2013. – DOI 10.1109/MCS.2011.941961. – ISSN 1066-033X
- [Hov] HOVAKIMYAN, Naira: *Unsubstantiated and wrong claims about L1 Adaptive Control.* <http://naira.mechse.illinois.edu/2012/05/03/clarifications-on-l1-adaptive-control/>, Abruf: 21.05.2013
- [IS96] IOANNOU, P. A. ; SUN, Jing: *Robust adaptive control.* Upper Saddle River and NJ : PTR Prentice-Hall, 1996. – ISBN 0134391004
- [JPB92] JEAN-BAPTISTE POMET, Laurent P.: Adaptive Nonlinear Regulation: Estimation from the Lyapunov Equation. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* (1992), Nr. 37, S. 729–740. – ISSN 00189286
- [JH08] J.WANG, C. C. ; HOVAKIMYAN, N.: L1 Adaptive Controller for a Missile Longitudinal Autopilot Design. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (2008)
- [KBP<sup>+</sup>12] KHAN, Muneeb U. ; BENCHEIKH, Nabil ; PRELLE, Christine ; LAMARQUE, Frédéric ; BEUTEL, Tobias ; BUTTGENBACH, Stephanus: A Long Stroke Electromagnetic XY Positioning Stage for Micro Applications. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 17 (2012), Nr. 5, S. 866–875. <http://dx.doi.org/10.1109/TMECH.2011.2142319>, Abruf: 14.09.2013. – DOI 10.1109/TMECH.2011.2142319. – ISSN 1083-4435
- [Lun13] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik.* 7. Berlin [u.a.] : Springer, 2013 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 3642295614

- [M.R05] M.R. HAMERS: *Actuation principles of permanent magnet synchronous planar motors: a literature survey*. Technische Universiteit Eindhoven, 2005
- [NAS] NASA: *L1 Adaptive Control: Guaranteed Robustness With Fast Adaptation*. [https://technology.grc.nasa.gov/techdays2012/TechDays\\_TOPsheets/PS-00921-1112\\_B112\\_AS.pdf](https://technology.grc.nasa.gov/techdays2012/TechDays_TOPsheets/PS-00921-1112_B112_AS.pdf), Abruf: 05.06.2013
- [Nol] NOLIAC: *Material characteristics*. <http://www.noliac.com/Default.aspx?ID=143#6086>, Abruf: 10.06.2013
- [Phy] PHYSIK INSTRUMENTE: *PI: Produkte, Piezo-Nanopositioniertechnik /Nanostellsysteme, Modellübersicht Piezo-Nanopositioniersysteme, Scantische*. [http://www.physikinstrumente.de/de/produkte/nanopositionierung/nanopositionierung\\_mehrachstische\\_modelle.php](http://www.physikinstrumente.de/de/produkte/nanopositionierung/nanopositionierung_mehrachstische_modelle.php), Abruf: 27.06.2013
- [RH07] RICK HINDMAN, Chengyu Cao Naira H.: Designing a High Performance, Stable L 1 Adaptive Output Feedback Controller. In: *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit* (2007)
- [RVAS82] ROHRS, Charles E. ; VALAVANI, Lena ; ATHANS, Michael ; STEIN, Gunter: *Robustness of Adaptive Control Algorithms in the Presence of Unmodeled Dynamics*. Ft. Belvoir : Defense Technical Information Center, SEP 1982
- [SCH08] SHENG-CHIH HUANG, Shao-Kang Hung Mei-Yung Chen Chih-Hsien Lin Li-Chen F.: Adaptive Sliding-Mode Control for a Precision Positioner with Hybrid Mechanism. In: *Proceedings of the 17th World Congress* (2008)
- [TAARW] TREICHEL, Kai ; AL AZRAK, Remon ; REGER, Johann ; WULFF, Kai: Robust Output Feedback Trajectory Tracking Control of an Electrodynamic Planar Motion Stage for Precision Positioning.
- [TAARW13] TREICHEL, Kai ; AL AZRAK, Remon ; REGER, Johann ; WULFF, Kai: Modeling a Planar Motion Stage for Precision Positioning. (2013)
- [TET] TETRA GMBH: *TETRA, Galerie - Kategorie: Antriebe*. [http://www.tetra-ilmenau.de/index.php?view=category&catid=5&option=com\\_joomgallery&Itemid=12&lang=de](http://www.tetra-ilmenau.de/index.php?view=category&catid=5&option=com_joomgallery&Itemid=12&lang=de), Abruf: 27.08.2013

- [WZ03] WEIWEN WANG ; ZHIQIANG GAO: A comparison study of advanced state observer design techniques. In: *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003*, IEEE, 2003. – ISBN 0-7803-7896-2, S. 4754–4759
- [ZS07] ZIMMERMANN, Jan ; SAWODNY, Oliver: Modeling for Simulation and Control of a X-Y High Precision Positioning Table. In: *2007 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering*, IEEE, 2007. – ISBN 978-1-4244-1153-5, S. 1093–1098

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Zweiachsige Positionierplattformen [ETE]. . . . .	4
2.2	Piezoelektrisches planares Positioniersystem [Phy]. . . . .	5
2.3	Kontaktloser Planarantrieb und Ansicht des Läufers von unten [TET]. . . . .	6
2.4	PID-Regler mit Vorsteuerung und Störbeobachter. . . . .	10
3.1	Links: Draufsicht auf Läufer und Stator; Rechts: Seitenansicht einer Permanentmagnetenreihe, wobei die Feldlinien der einzelnen Permanentmagnete in grün, die vertikalen Flussdichtevektoren in rot und der Betrag der vertikalen Vektorkomponenten in schwarz dargestellt sind [TAARW13]. . . . .	13
3.2	Auf den Läufer wirkende Kräfte und Drehmomente [TAARW13]. . . . .	14
3.3	Blockschaltbild der Regelstrecke mit Teilsystemen. . . . .	15
3.4	Störkräfte für die $x$ -Achse [TAARW13]. . . . .	22
4.1	Allgemeine Struktur adaptiver Regler in Anlehnung an [ÅW89]. . . . .	24
4.2	Indirekte adaptive Regelung in Anlehnung an [IS96]. . . . .	25
4.3	Direkte adaptive Regelung in Anlehnung an [IS96]. . . . .	25
4.4	Übersicht: Adaptive Regelungen. . . . .	26
5.1	Geschlossener Regelkreis des $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Systems in Anlehnung an [HC10, HCK <sup>+</sup> 11]. . . . .	38
5.2	Darstellung der Stabilitätsgrenze (rot) und $\lambda$ in Abhängigkeit von der Filterbandbreite $\omega_c$ , wobei $L = 4$ ist. . . . .	47
5.3	Vergleich des gewünschten ( $y_m(t)$ ) und des erreichten ( $y(t)$ ) transienten Verhaltens im geschlossenen Regelkreis mit MRAC für einen Einheitsprung und verschiedene $\theta \in \Theta_0$ . . . . .	48
5.4	Vergleich des gewünschten ( $y_m(t)$ ) und des erreichten ( $y(t)$ ) transienten Verhaltens im geschlossenen Regelkreis mit MRAC für mehrere aufeinander folgende Sprünge und verschiedene $\theta \in \Theta_0$ . . . . .	49

5.5 Vergleich des gewünschten ( $y_m(t)$ ) und des erreichten ( $y(t)$ ) transienten Verhaltens im geschlossenen Regelkreis mit MRAC für eine Folge von sprungförmigen Referenzgrößen, unmodellierten Aktuatordynamiken und verschiedenen Konfigurationen $\theta \in \Theta_0$ . . . . .	50
5.6 MRAC-Parameterschätzungen $\hat{\theta}_1(t)$ (blau) und $\hat{\theta}_2(t)$ (grün) für sprungförmige Referenzgrößen $r(t)$ , für verschiedene $\theta \in \Theta_0$ und ohne Aktuatordynamik. . . . .	51
5.7 MRAC-Parameterschätzungen $\hat{\theta}_1(t)$ (blau) und $\hat{\theta}_2(t)$ (grün) für sprungförmige Referenzgrößen $r(t)$ , für verschiedene $\theta \in \Theta_0$ und mit Aktuatordynamik. . . . .	51
5.8 Vergleich des gewünschten ( $y_m(t)$ ) und des erreichten ( $y(t)$ ) transienten Verhaltens im geschlossenen Regelkreis mit $\mathcal{L}_1$ -adaptivem Regler für einen Einheitssprung und verschiedene $\theta \in \Theta_0$ . . . . .	52
5.9 Vergleich des gewünschten ( $y_m(t)$ ) und des erreichten ( $y(t)$ ) transienten Verhaltens im geschlossenen Regelkreis mit $\mathcal{L}_1$ -adaptivem Regler für mehrere aufeinander folgende Sprünge und verschiedene $\theta \in \Theta_0$ . . . . .	52
5.10 $\mathcal{L}_1$ Parameterschätzungen $\hat{\theta}_1(t)$ (blau) und $\hat{\theta}_2(t)$ (grün) für den Fall ohne Aktuatordynamik, für sprungförmige Referenzgrößen $r(t)$ und für verschiedene $\theta \in \Theta_0$ . . . . .	53
5.11 $\mathcal{L}_1$ Parameterschätzungen $\hat{\theta}_1(t)$ (blau) und $\hat{\theta}_2(t)$ (grün) für den Fall mit Aktuatordynamik, für sprungförmige Referenzgrößen $r(t)$ und für verschiedene $\theta \in \Theta_0$ . . . . .	54
5.12 Geschlossener Regelkreis des $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Systems für Regelstrecken mit unbekannter Eingangsverstärkung in Anlehnung an [HC10] (aus Platzgründen wird auf die Abhängigkeiten von $t$ verzichtet). . . . .	58
5.13 Berechnung von $\lambda$ für unterschiedliche $\omega k$ . . . . .	62
5.14 Ergebnis der Minimierung durch einen genetischen Algorithmus. . . . .	64
5.15 Sprungantwort $y(t)$ , Differenz zum Designsystem $e(t)$ , Stellgröße $u(t)$ und Parameterschätzungen $\hat{\theta}(t), \hat{\omega}(t), \hat{\sigma}(t)$ des geschlossenen adaptiven Regelkreises. . . . .	66
5.16 Sprungantwort $y(t)$ , Differenz zum Designsystem $e(t)$ , im Bereich $[3, -3]$ A gesättigte Stellgröße und Parameterschätzungen $\hat{\theta}(t), \hat{\omega}(t), \hat{\sigma}(t)$ des geschlossenen adaptiven Regelkreises mit einer Totzeit von $\tau = 2$ ms und der Wahl $k = 31885$ . . . . .	67

5.17 Sprungantwort $y(t)$ , Differenz zum Designsystem $e(t)$ , Stellgröße $u(t)$ und Parameterschätzungen $\hat{\theta}(t), \hat{\omega}(t), \hat{\sigma}(t)$ des geschlossenen adaptiven Regelkreises mit einer Totzeit von $\tau = 2$ ms und der Wahl $k = 1750$ . . . . .	68
5.18 Vergleich der Sprungantworten und Fehler des geschlossenen adaptiven Regelkreises ohne Totzeit bei $k = 31885$ und bei $k = 1750$ , wobei die Eingangsverstärkung $\omega_{l0}$ verwendet wurde. . . . .	69
5.19 Vergleich der Sprungantworten und Fehler des geschlossenen adaptiven Regelkreises mit der Totzeit $\tau = 0.5$ ms bei $k = 31885$ und bei $k = 1750$ , wobei die Eingangsverstärkung $\omega_{l0}$ verwendet wird. . . . .	70
5.20 Extrembeispiel: Sprungantwort $y(t)$ , Differenz zum Designsystem $e(t)$ , im Bereich $[3, -3]$ A gesättigte Stellgröße $u(t)$ und Parameterschätzungen $\hat{\theta}(t), \hat{\omega}(t), \hat{\sigma}(t)$ des geschlossenen adaptiven Regelkreises unter einer maximalen Totzeit von $\tau = 7.16$ ms, maximaler Dämpfung $\mu_x = 14$ kg/s und einer minimalen Eingangsverstärkung $\omega_{l0} = (2\epsilon_{min} K_{mx_{min}})/m_{max} = 0.0373$ . . . . .	71
5.21 Geschlossener Regelkreis der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung für Nicht-SPR Referenzsysteme. . . . .	75
5.22 Blockschaltbild der Polvorgabe in Anlehnung an [JH08] mit den Übertragungsfunktionen $A_0(s) = A_{0_n}(s)/A_{0_d}(s)$ und $F(s) = P(s)/L(s)$ . . . . .	78
5.23 Sprungantworten, Fehler, Stellgrößen und Parameterschätzungen der geschlossenen adaptiven Regelkreise mit Regler 1 ( $y_1(t), e_1(t), u_1(t), \sigma_{11}(t)$ und $\sigma_{12}(t)$ ) und mit Regler 2 ( $y_2(t), e_2(t), u_2(t), \sigma_{21}(t)$ und $\sigma_{22}(t)$ ), ohne Totzeit und mit $A(s) = A_0(s)$ . . . . .	83
5.24 Sprungantworten, Fehler, Stellgrößen und Parameterschätzungen der geschlossenen adaptiven Regelkreise mit Regler 1 ( $y_1(t), e_1(t), u_1(t), \sigma_{11}(t)$ und $\sigma_{12}(t)$ ) und mit Regler 2 ( $y_2(t), e_2(t), u_2(t), \sigma_{21}(t)$ und $\sigma_{22}(t)$ ), mit Totzeit $\tau = 3.1$ ms und $A(s) = A_1(s)$ . . . . .	84
5.25 Sprungantwort, Fehler, Stellgröße und Parameterschätzung des geschlossenen adaptiven Regelkreises mit Regler 1, mit Totzeit $\tau = 4.1$ ms und $A(s) = A_1(s)$ . . . . .	85
5.26 Sprungantwort, Fehler, Stellgröße und Parameterschätzung des geschlossenen adaptiven Regelkreises mit Regler 2, mit Totzeit $\tau = 4.1$ ms und $A(s) = A_1(s)$ . . . . .	86
6.1 Blockschaltbild einer Folgeregelung. . . . .	88

6.2	Blockschaltbild der Folgeregelungsstruktur für den Fall der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Zustandsrückführung mit Vorsteuerung $V(s)$ , Regler $K(s)$ und dem geschlossenen $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreis $C(s)M(s)$ . . . . .	90
6.3	Genauigkeit der Näherung (6.2) für $C1(s) = 12566/(s + 12566)$ und $C2(s) = 992/(s + 992)$ . . . . .	92
6.4	Performance der Vorsteuerung (6.3) mit $K(s) = 0$ für die mit $m = 19.24$ , $\mu_x = 7.2$ , $K_{mx} = 1.62$ , $\epsilon = 1$ , $\tau = 0$ ms parametrierte Regelstrecke und für die $\mathcal{L}_1$ -Reglerparameter, $\Gamma = 10^5$ , $k = 31885$ . $e(t) = r(t) - y(t)$ bezeichnet den Trajektorienfolgefehler. . . . .	93
6.5	Performance der Vorsteuerung mit Stellbegrenzung für die minimale Bandbreite von $C(s)$ bei $k = 31885$ und $\tau = 0$ ms. Diese ergibt sich aus einem minimalen $\omega$ und somit aus $m = 30$ , $\mu_x = 14$ , $K_{mx} = 0.8$ und $\epsilon = 0.7$ . . . . .	94
6.6	Performance der Vorsteuerung ohne Stellbegrenzung für die minimale Bandbreite von $C(s)$ bei $k = 31885$ , $\tau = 0$ ms und ohne Stellbegrenzung. Die Parameter sind $m = 30$ , $\mu_x = 14$ , $K_{mx} = 0.8$ und $\epsilon = 0.7$ . . . . .	95
6.7	Vergleich der Performance der Vorsteuerung für unterschiedliche $k$ und $\Gamma$ mit $\Gamma = 10^4$ (blau), $\Gamma = 10^5$ (rot), $\Gamma = 10^6$ (grün) und $\Gamma = 10^7$ (lila, gestrichelt). Die Parameter der Regelstrecke werden mit $m = 30$ , $\mu_x = 14$ , $K_{mx} = 0.8$ und $\epsilon = 0.7$ so gewählt, dass $\hat{\omega}(s)$ und somit auch die Bandbreite von $C(s)$ minimal wird. . . . .	97
6.8	Vergleich der Performance der Vorsteuerung für $\tau = 0.5$ ms und für unterschiedliche $k$ und $\Gamma$ mit $\Gamma = 10^4$ (blau), $\Gamma = 10^5$ (rot) und $\Gamma = 10^6$ (grün). Die Parameter der Regelstrecke werden mit $m = 30$ , $\mu_x = 14$ , $K_{mx} = 0.8$ und $\epsilon = 0.7$ so gewählt, dass $\hat{\omega}(s)$ und somit auch die Bandbreite von $C(s)$ minimal wird. . . . .	99
6.9	Vergleich der Performance der Vorsteuerung für unterschiedliche $k$ , $\Gamma = 10^6$ und $\tau = 1$ ms. Die Parameter der Regelstrecke werden mit $m = 30$ , $\mu_x = 14$ , $K_{mx} = 0.8$ und $\epsilon = 0.7$ so gewählt, dass $\hat{\omega}(s)$ und somit auch die Bandbreite von $C(s)$ minimal wird. . . . .	100
6.10	Vergleich der Performance der Vorsteuerung für unterschiedliche $k$ , $\Gamma = 10^6$ und $\tau = 2$ ms. Die Parameter der Regelstrecke werden mit $m = 30$ , $\mu_x = 14$ , $K_{mx} = 0.8$ und $\epsilon = 0.7$ so gewählt, dass $\hat{\omega}(s)$ und somit auch die Bandbreite von $C(s)$ minimal wird. . . . .	101

6.11 Performance der Vorsteuerung für $k = 2400$ , $\Gamma = 10^6$ und $\tau = 1$ ms. Die Parameter der Regelstrecke werden mit $m = 19$ , $\mu_x = 0$ , $K_{mx} = 2.4$ und $\epsilon = 1.3$ so gewählt, dass die Oszillationen der Stellgröße am größten werden. . . . .	102
6.12 Bodediagramme der offenen Ketten $K_1(s)C_1(s)M(s)$ und $K_1(s)C_2(s)M(s)$ . . . . .	106
6.13 Fehler- und Stellgrößenverläufe für unterschiedliche Regelstreckenpara- meter, für den Regler $K_1(s)$ und für die Totzeit $\tau = 0.5$ ms. . . . .	107
6.14 Erweiterung der Back-Calculation Methode auf Grundlage von [ÅH95]. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Darstellung des $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreises stark abstrahiert und beschränkt sich auf das Filter, die Stellbegrenzung (SB) und die Regelstrecke (RS). . . . .	108
6.15 Bodediagramme der offenen Ketten $K_2(s)C_1(s)M(s)$ und $K_2(s)C_2(s)M(s)$ . . . . .	110
6.16 Fehler- und Stellgrößenverläufe für unterschiedliche Regelstreckenpara- meter, für den verwendeten Regler $K_2(s)$ und für die Totzeit $\tau = 0.5$ ms. Es wird die rampenförmige Solltrajektorie verwendet. . . . .	111
6.17 Systemantwort auf ein Cosinussignal mit 0.33 Hz als Referenz und einer Totzeit von $\tau = 2$ ms. Es werden die ermittelten Regelstreckenparameter des Präzisionspositionierers mit $m = 19.24$ , $\mu_x = 7.2$ , $K_{mx} = 1.62$ und $\epsilon = 1.08$ verwendet. . . . .	112
6.18 Systemantwort auf ein Cosinussignal mit 5 Hz als Referenz und einer Totzeit von $\tau = 2$ ms. Es werden die ermittelten Regelstreckenparameter des Präzisionspositionierers mit $m = 19.24$ , $\mu_x = 7.2$ , $K_{mx} = 1.62$ und $\epsilon = 1.08$ verwendet. . . . .	113
6.19 Systemantwort auf ein Cosinussignal mit 5 Hz als Referenz und einer Totzeit von $\tau = 2$ ms. Es werden die Regelstreckenparameter $m = 30$ , $\mu_x = 14$ , $K_{mx} = 0.8$ und $\epsilon = 0.7$ verwendet. . . . .	114
6.20 Blockschaltbild der Folgeregelung für den Fall der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Aus- gangsrückführung. . . . .	115
6.21 Bodediagramme von $H(s)$ , $M(s)$ , $C(s)$ und $C(s)H(s)$ , wobei die nomi- nelle Regelstrecke $A_0(s)$ zur Bestimmung von $H(s)$ verwendet wird. . . . .	117
6.22 Bodediagramme von $H(s)$ , $M(s)$ , $C(s)$ und $C(s)H(s)$ , wobei die Re- gelstreckenparameter $m = 19$ , $\mu_x = 0$ , $K_{mx} = 2.4$ und $\epsilon = 1.3$ zur Bestimmung von $A(s)$ bzw. $H(s)$ verwendet werden. . . . .	117
6.23 Bodediagramme von $H(s)$ , $M(s)$ , $C(s)$ und $C(s)H(s)$ , wobei die Re- gelstreckenparameter $m = 30$ , $\mu_x = 14$ , $K_{mx} = 0.8$ und $\epsilon = 0.7$ zur Bestimmung von $A(s)$ bzw. $H(s)$ verwendet werden. . . . .	118

6.24 Regelstrecken-, Fehler- und Stellgrößenverlauf bei Vorsteuerung der rampenförmigen Solltrajektorie und $\tau = 0$ ms. . . . .	119
6.25 Regelstrecken-, Fehler- und Stellgrößenverlauf bei Vorsteuerung der rampenförmigen Solltrajektorie und $\tau = 2$ ms. . . . .	119
6.26 Bodediagramme für $K_3(s)C(s)H_{min}(s)$ und $K_3(s)C(s)H_{max}(s)$ . . . . .	121
6.27 Regelgrößen-, Fehler-, und Stellgrößenverläufe für die rampenförmige Solltrajektorie, für $\tau = 0.5$ ms und für die nominelle Regelstrecke $A_0(s)$ . . . . .	122
6.28 Regelgrößen-, Fehler-, und Stellgrößenverläufe für eine cosinusförmige Solltrajektorie mit 3 Hz und der maximalen Beschleunigung des Läufers $0.3 \text{ m/s}^2$ für $\tau = 0.5$ ms und für die nominelle Regelstrecke $A_0(s)$ . . . . .	123
6.29 Regelgrößen-, Fehler-, und Stellgrößenverläufe für die rampen- sowie cosinusförmigen Solltrajektorien, für $\tau = 0.5$ ms und für die Regelstreckenparameter $A_0(s)$ . . . . .	124
A.1 Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ . . . . .	133
A.2 Projektions-Operator mit $\vec{b}_a = \frac{\nabla f}{\ \nabla f\ } \left\langle \frac{\nabla f}{\ \nabla f\ }, y \right\rangle$ ; die aktuelle Parameterschätzung $\hat{\theta}(t)$ befindet sich in der Menge $\Omega_1$ , und somit im durch die Größe von $\epsilon_{\hat{\theta}}$ festgelegten Toleranzbereich (Tb), weswegen die Parameteränderung $y$ durch $0 \leq f(\hat{\theta}) \leq 1$ in der Richtung $\nabla f(\hat{\theta})$ gestaucht wird (In Anlehnung an [HCK <sup>+</sup> 11]). . . . .	133
A.3 Projektions-Operator mit $\vec{b}_a = \frac{\nabla f}{\ \nabla f\ } \left\langle \frac{\nabla f}{\ \nabla f\ }, y \right\rangle$ ; die aktuelle Parameterschätzung $\hat{\theta}(t)$ befindet sich am Rand der Menge $\Omega_1$ und im Toleranzbereich (Tb). Daraus folgt $f(\hat{\theta}) = 1$ , weswegen die Komponente in Richtung $\nabla f(\hat{\theta})$ komplett aus der Parameteränderung $y$ entfernt wird; $\hat{\theta}(t)$ bewegt sich auf dem Rand der Menge $\Omega_1$ und verlässt diese nicht! Die Parameterschätzungen sind somit beschränkt (In Anlehnung an [HCK <sup>+</sup> 11]). . . . .	134
A.4 Veranschaulichung der Mengen $\Theta_0$ , $\Omega_0$ , $\Omega_1$ und $\Theta$ bezüglich des Beispiels.	135

# Tabellenverzeichnis

### 3.1 Unsicherheiten wichtiger Parameter des Läufers für die Bewegung in $x$ -Richtung. . . . . 23

# Abkürzungsverzeichnis und Formelzeichen

## Abkürzungsverzeichnis:

APPC	Adaptive Pole Placement Control
BIBO	Bounded Input Bounded Output
DCA	Digital Current Amplifier
DNS	Desoxyribonukleinsäure
EMKK	Elektromagnetische Kraftkopplung
LS	Leitungssystem
LTI	Linear Time Invariant
mbH	mit beschränkter Haftung
MIMO	Multi Input Multi Output
MRAC	Model Reference Adaptive Control
MRC	Model Reference Control
NC	Numerical Control
NPM	Nanopositioniermaschine
PC	Personal Computer
PID-Regler	Proportional-Integral-Differential-Regler
PWM	Pulsweitenmodulation
SISO	Single Input Single Output
SPR	Strictly Positive Real
STR	Self-Tuning Regulator

## Griechische Formelzeichen:

$\alpha$	geometrieabhängige Konstante
$\alpha_l$	Koeffizientenvektor von $A_{cl}(s)$
$\bar{\epsilon}$	durchschnittliche Eingangsverstärkung (nominelle Regelstrecke)
$\bar{\mu}_x$	durchschnittliche Reibung (nominelle Regelstrecke)
$\bar{\sigma}(t)$	Störkräfte auf den Läufer
$\beta_l$	Koeffizientenvektor von $P(s)$ und $L(s)$

$\Delta$	Projektionsbeschränkung von $\hat{\sigma}(t)$
$\delta$	Störmodellparameter
$\Delta_0$	bekannte Schranke von $\sigma(t)$
$\delta_u$	Schranke für Ungleichungsnebenbedingung
$\epsilon$	stationäre Verstärkung
$\epsilon_{\hat{\omega}}$	Toleranzschranke im Projektions-Operator für $\hat{\omega}(t)$
$\epsilon_{\hat{\sigma}}$	Toleranzschranke im Projektions-Operator für $\hat{\sigma}(t)$
$\epsilon_{\hat{\theta}}$	Toleranzschranke im Projektions-Operator für $\hat{\theta}(t)$
$\Gamma$	Adoptionsverstärkung
$\Gamma_1$	Adoptionsverstärkung des $\mathcal{L}_1$ -Reglers
$\gamma_1$	Wert zur Beschreibung der maximal zu erwartenden Abweichungen des Zustands
$\Gamma_2$	Adoptionsverstärkung des MRAC
$\gamma_2$	Wert zur Beschreibung der maximal zu erwartenden Abweichungen der Stellgröße
$\hat{\theta}(t)$	Systemparameterschätzung
$\hat{\theta}_C(t)$	Reglerparameterschätzung
$\hat{\eta}(s)$	adaptive Zustandsrückführung
$\hat{\omega}(t)$	Schätzung der Eingangsverstärkung und zeitvarianter adaptiver Parameter des Filters $C(s)$
$\hat{\omega}_0$	Anfangsbedingung für $\hat{\omega}(t)$
$\hat{\sigma}(iT_s)$	stückweise stetiges Adoptionsgesetz (piecewise constant adaptive law)
$\hat{\sigma}(t)$	Schätzung der Störung
$\hat{\sigma}_0$	Anfangsbedingung für $\hat{\sigma}(t)$
$\hat{\theta}_0$	Anfangsbedingung für $\hat{\theta}(t)$
$\Lambda$	Matrix aus stückweise stetigem Adoptionsgesetz
$\lambda$	Ergebnis der $\mathcal{L}_1$ -Stabilitätsbedingung
$\lambda_{min}(\cdot)$	Funktion, welche den kleinsten Eigenwert des Arguments liefert
$\mathcal{T}$	Totzeittoleranz
$\mu(iT_s)$	Schätzung des Ausgangsschätzfehlers $\tilde{y}((i+1)T_s)$ für den nächsten Zeitschritt $(i+1)T_s$
$\mu_\phi$	Reibkoeffizient bezüglich Drehbewegungen
$\mu_x$	Reibkoeffizient bezüglich Bewegungen in x-Richtung
$\mu_y$	Reibkoeffizient bezüglich Bewegungen in y-Richtung
$\mu_{p,x}$	Dämpfungskoeffizient

---

$\nu$	Wertebereich für $\hat{\theta}(t)$
$\nu_0$	Wertebereich für $\theta(t)$
$\nu_l(t)$	Einfluss der Totzeit
$\Omega$	Projektionsbeschränkung von $\hat{\omega}(t)$
$\Omega_0$	Menge, die alle möglichen $\theta$ enthält
$\Omega_1$	Menge der durch $Proj(\cdot)$ beschränkten Schätzungen
$\omega_c$	Bandbreite von $C(s)$
$\Omega_{\omega_0}$	Menge aller möglichen Eingangsverstärkungen
$\omega_{gc}$	Durchtrittsfrequenz (gain crossover frequency)
$\omega_{l0}$	untere Schranke von $\omega$
$\omega_l$	untere Schranke von $\hat{\omega}(t)$
$\omega_{Pmax}$	obere Schranke des Projektions-Operators für $\hat{\omega}(t)$
$\omega_{u0}$	obere Schranke von $\omega$
$\omega_u$	obere Schranke von $\hat{\omega}(t)$
$\Phi^{-1}(T_s)$	diskrete Transitionsmatrix
$\Phi_m$	Phasenrand
$\rho$	Leiterabstand
$\rho_j$	Phasenverschiebung der benachbarten Leiter
$\sigma(t)$	zeitvariante Störung
$\sigma_{Pmax}$	obere Schranke des Projektions-Operators für $\hat{\sigma}(t)$
$\sigma_{ref}(t)$	Störungen im Referenzsystem
$\tau$	Totzeit
$\tau$ im Index	abgeschnitten (truncated), steht für Funktion $f_{[t_0, \tau]}(t)$
$\Theta$	Menge, die alle möglichen $\hat{\theta}(t)$ enthält
$\theta$	tatsächliche Systemparameter (zeitinvariant)
$\theta(t)$	tatsächliche Systemparameter (zeitvariant)
$\Theta_0$	Menge, die alle möglichen Systemparameter $\theta(t)$ enthält
$\theta_C$	Reglerparameter, für welche gewünschtes Verhalten des Regelkreises eintritt
$\theta_{C_i}$	Reglerverstärkung am Betriebspunkt i
$\theta_{max}$	Quadrat des maximalen Schätzfehlers
$\theta_{Pmax}$	obere Schranke des Projektions-Operators für $\hat{\theta}(t)$
$\tilde{\eta}_l(t)$	als Störung modellierte Nichtlinearitäten
$\tilde{\eta}(s)$	adaptiver Zustandsrückführungsfehler
$\tilde{\theta}(t)$	Parameterschätzfehler
$\xi$	Dämpfung des Referenzmodells

---

**Römische Formelzeichen:**

$1_1$	Einheitsvektor
$\bar{B}$	effektive magnetische Flussdichte
$\bar{F}_{p,x}^+$	richtungsabhängige Störkraft
$\bar{F}_{p,x}^-$	richtungsabhängige Störkraft
$\bar{l}_{x_{ij}}$	effektive Länge der Leiterwindung $X_{ij}$
$\bar{H}(s)$	System zur Berechnung der offenen Kette $L_0(s)$
$\bar{K}_{mx}$	durchschnittliche Motorkonstante (nominelle Regelstrecke)
$\bar{m}$	durchschnittliche Masse (nominelle Regelstrecke)
$\bar{x}$	Vektor zur Berechnung der Lipschitzkonstante
$\hat{B}(\cdot)$	maximale Amplitude der magnetischen Flussdichte
$\hat{x}(t)$	Zustand des Schätzers
$\hat{y}(t)$	Ausgang des Schätzers
$\kappa$	Konstante zur Herleitung von $\theta_{Pmax}$
$\mathbb{I}$	Einheitsmatrix
$\tilde{x}(t)$	Zustandsschätzfehler
$\tilde{y}(t)$	Ausgangsschätzfehler
$\vec{a}$	Vektor zur Erklärung des Projektions-Operators
$\vec{b}_a$	Vektor zur Erklärung des Projektions-Operators
$\vec{b}$	Vektor zur Erklärung des Projektions-Operators
$A$	Dynamikmatrix
$A(s)$	strikt propere Übertragungsfunktion
$A_0(s)$	nominelle Regelstrecke
$a_1$	Koeffizient der Ein-/Ausgangs-Differentialgleichung für $M(s)$
$A_1(s)$	Regelstrecke $A(s)$ mit bestimmten Parametern
$A_i$	Dynamikmatrix am Betriebspunkt i
$A_m$	Dynamikmatrix des Referenzmodells
$A_s(s)$	Übertragungsfunktion der unterlagerten Stromregelung
$A_{0d}$	Nennerpolynom von $A_0(s)$
$A_{0n}$	Zählerpolynom von $A_0(s)$
$A_{cl}(s)$	Hurwitzpolynom
$A_{EMK}$	Verhältnis von Kraft zu Strom der elektromagnetischen Kraftkopplung
$A_{L_\phi}(s)$	entkoppelte Übertragungsfunktion des Läufers
$A_{L_x}(s)$	entkoppelte Übertragungsfunktion des Läufers
$A_{L_y}(s)$	entkoppelte Übertragungsfunktion des Läufers

$a_{m0}$	Hurwitzpolynomkoeffizient
$a_{m1}$	Hurwitzpolynomkoeffizient
$b$	Eingangsvektor
$B(\cdot)$	magnetische Flussdichte
$B_i$	Eingangsmatrix am Betriebspunkt i
$b_m$	Eingangsvektor des MRAC-Referenzsystems
$B_o(q, \dot{q})$	Vektor der Reibkräfte
$B_u(q, \dot{q})$	Eingangsverstärkung
$C(q, \dot{q})$	Euler-, Corioliskräfte
$C(s)$	Tiefpassfilter mit stationärer Verstärkung 1
$c^T$	Ausgangsvektor (transponiert)
$C_1(s)$	$C(s)$ mit maximaler Bandbreite
$C_2(s)$	$C(s)$ mit minimaler Bandbreite
$C_d(s)$	Nennerpolynom von $C(s)$
$C_i$	Ausangsmatrix am Betriebspunkt i
$c_m^T$	Ausgangsvektor des MRAC-Referenzsystems (transponiert)
$C_n(s)$	Zählerpolynom von $C(s)$
$D$	Vektor aus dem stückweise stetigen Adoptionsgesetz
$D(q)$	Trägheitsmatrix
$D(s)$	strik propere Übertragungsfunktion (im Filter $C(s)$ )
$d(t)$	zeitvariante Unsicherheiten und Störungen
$d_1$	Abstand vom Schwerpunkt des Läufers
$d_2$	Abstand vom Schwerpunkt des Läufers
$d_\sigma$	Schranke der Änderungsgeschwindigkeit der Störungen
$d_\theta$	Schranke der Änderungsgeschwindigkeit der Systemparameter
$D_i$	Durchgangsmatrix am Betriebspunkt i
$D_i(s)$	eingangsseitige Störungen
$d_m$	Durchgangsfaktor des Referenzmodells
$D_o(s)$	ausgangsseitige Störungen
$d_r$	untere Beschränkung von $n_r$
$d_{ref}(s)$	bekannte zeitvariante Störung im Referenzsystem
$e(t)$	Regelfehler
$e_R$	Ruhelage
$f(\hat{\theta})$	Funktion zur Berechnung des Projektions-Operators
$F(s)$	Hilfs-Ausgangsrückführung beim Entwurf der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung

---

$f(t, y(t))$	Störungen bei der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung
$F_L$	Kraft auf den Läufer
$F_R$	Reibkraft
$F_x$	Kraft auf den Läufer in x-Richtung
$F_y$	Kraft auf den Läufer in y-Richtung
$F_{p,x}(x, \dot{x})$	periodische Störkräfte in x-Richtung
$F_{x_{ij}}$	Kraft in x-Richtung verübt durch i-tes Leitersystem, j-te Phase
$g(q)$	Gravitationskräfte
$G(s)$	No-pass filter dessen $\mathcal{L}_1$ -Norm als Maß für die Störunterdrückung des $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Regelkreises dient
$G_A(s)$	Aktuatordynamik
$g_m$	Amplitudenrand (gain margin)
$G_S(s)$	Regelstrecke
$H(s)$	System mit den erwünschten Übertragungsfunktionen vom Eingang zu den Zuständen
$H_1(s)$	stabiles MIMO-System
$H_d(s)$	Nennerpolynom von $H(s)$
$H_{max}(s)$	$H(s)$ mit den Regelstreckenparametern $\mu_x = 0$ , $m = 19$ , $K_{mx} = 2.4$ und $\epsilon = 1.3$
$H_{min}(s)$	$H(s)$ mit den Regelstreckenparametern $\mu_x = 14$ , $m = 30$ , $K_{mx} = 0.8$ und $\epsilon = 0.7$
$I$	Massenträgheitsmoment
$i(t)$	Stromistwert
$i^r(t)$	Stromsollwert nach Kommutierung
$i_{s_\phi}(t)$	Stromsollwert vor Kommutierung
$i_{s_x}(t)$	Stromsollwert vor Kommutierung
$i_{s_y}(t)$	Stromsollwert vor Kommutierung
$i_{x_{ij}}$	Strom durch Leiter $X_{ij}$
$J(\cdot)$	Jacobimatrix
$K$	Verstärkung des Referenzmodells
$k$	positive Verstärkung (im Filter $C(s)$ )
$K(s)$	PID-Regler/äußere Regelkaskade
$K^i(s)$	i-tes Kharitonov Polynom
$K_D$	Differentielle Verstärkung
$k_g$	Vorfilter
$K_I$	Integrale Verstärkung

---

---

$k_m^T$	Verstärkungsfaktor für die Zustandsrückführung (transponiert)
$K_P$	Proportionale Verstärkung
$K_{mx}$	Motorkonstante
$L$	maximale Manhattan-Distanz vom Nullvektor zur Parameterkonfiguration $\theta$ (bei $\mathcal{L}_1$ -Zustandsrückführung) und Lipschitzkonstante (bei $\mathcal{L}_1$ -Ausgangsrückführung)
$L(s)$	Nennerpolynom der Hilfsausgangsrückführung $F(s)$
$L_0$	Schranke bei der $\mathcal{L}_1$ -adaptiven Ausgangsrückführung
$L_0(s)$	offene Kette zur Bestimmung der Totzeittoleranz
$m$	Masse
$M(s)$	Referenzmodell
$M_d(s)$	Nennerpolynom von $M(s)$
$M_n(s)$	Zählerpolynom von $M(s)$
$M_z$	Drehmoment um die z-Achse des Läufers
$n_r$	Relativgrad
$P$	Matrix, welche Lyapunovgleichung löst
$P(s)$	Zählerpolynom der Hilfsausgangsrückführung $F(s)$
$p(s)$	gewünschtes charakteristisches Polynom zur Polfestlegung beim Folgeregler
$Proj(\cdot)$	Projektions-Operator
$Q$	positiv definite, symmetrische Matrix der Lyapunovgleichung
$q$	generalisierte Koordinaten
$r(t)$	Referenz
$r_{max}$	höchstmögliche Referenzsprunghöhe
$S_l$	Sylvestermatrix
$S_u(s)$	Stellsensitivität
$T$	Zeitkonstante des Referenzmodells
$t$	Zeit
$T(s)$	komplementäre Sensitivitätsfunktion
$T_d$	Vorstellzeit
$T_m$	Magnetperiode
$T_s$	Abtastzeit
$T_t$	Verstärkung des Anti-Windup
$u(t)$	Stellgröße/Regelstreckeneingang
$u_m(t)$	Zustandsrückführungsanteil der Stellgröße
$u_{ad}(t)$	adaptiver Anteil der Stellgröße

---

---

$u_{des}(t)$	Stellgröße des Designsystems
$u_{max}$	Stellgrößenbeschränkung
$u_{nom}(t)$	nominelles Regelgesetz
$u_{ref}(t)$	Stellgröße des Referenzsystems
$V(\cdot)$	Lyapunovfunktion
$V(s)$	Vorsteuerung
$v(s)$	Ausgang der Vorsteuerung bei der Folgeregelung
$w(s)$	Reglerausgang bei der Folgeregelung
$x(t)$	Zustand
$x_0$	Vektor der Zustands-Anfangsbedingungen
$X_i$	untere Schranke des i-ten Koeffizienten im Kharitonov Theorem
$x_m(t)$	Zustand des MRAC-Referenzsystems
$x_{des}(t)$	Zustand des Designsystems
$X_{ij}$	i-tes Leitersystem, j-te Phase, die Kraft in x-Richtung ausübt
$x_{in}(s)$	Laplacetransformierte der Eigenbewegung mit Anfangsauslenkung $x_0$
$x_{ref}(t)$	Zustand des Referenzsystems
$y(t)$	Regelgröße
$Y_i$	obere Schranke des i-ten Koeffizienten im Kharitonov Theorem
$y_m(t)$	Regelgröße des MRAC-Referenzsystems
$y_{des}(t)$	Regelgröße des Designsystems
$Y_{ij}$	i-tes Leitersystem, j-te Phase, die Kraft in y-Richtung ausübt
$y_{ref}(t)$	Regelgröße des Referenzsystems
$z_0$	Flughöhe des Läufers

# **Erklärung**

Die vorliegende Arbeit habe ich selbstständig ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer oder anderer Prüfungen noch nicht vorgelegt worden.

Fulda, den 26. 09. 2013

Markus Pappert