# Fiabilitatea aparatelor medicale

Anul III Optometrie
Suport aplicații

Titular: Despina DUMINICĂ

1

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Evenimente independente*

- Experimentul reprezintă un proces a cărui ieșire nu este aprioric cunoscută.
- Fie un experiment aleatoriu care poate prezenta un număr finit de realizări (altfel spus, se poate repeta de mai multe ori fără ca rezultatul să fie neapărat același).
- Fiecare reluare (realizare) a acestui experiment se numește *încercare (probă)*.
- O încercare are întotdeauna un singur rezultat.

2

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Evenimente independente*

- Rezultatul unei încercări poartă numele de *eveniment*.
- Se numește *eveniment elementar* orice rezultat posibil al unui experiment. Prin realizarea evenimentului *A* într-o probă se înțelege că rezultatul probei a fost *A*.
- Un eveniment poate fi constituit din mai multe evenimente elementare.
- Mulțimea tuturor realizărilor posibile ale evenimentului se numește *câmp de evenimente* și se notează $\Omega$.

3

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Evenimente independente*

- Un eveniment care se produce în mod sigur la realizarea unei încercări se numește *eveniment sigur*.
- Un eveniment care nu se poate produce la efectuarea unui experiment se numește *eveniment imposibil*.
- Un eveniment care se poate produce sau nu poartă numele de *eveniment aleatoriu (întâmplător)*.
  - În logica booleană, un eveniment poate să se producă sau să nu se producă (nu există cale de mijloc !!!). Afirmația „Este posibil să plouă mâine." nu reprezintă un eveniment !

4

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Evenimente independente*

- Dacă *A* și *B* sunt evenimente, evenimentul *AUB* (notat și *A+B*) poartă numele de *eveniment compus* și se realizează într-o probă dacă la proba respectivă se obține rezultatul *A sau B*.
- $A \cap B$ (notat și *AB*) este evenimentul care se realizează într-o probă dacă în aceeași probă se realizează *și A și B*.
- *A-B* este evenimentul care se realizează într-o probă dacă în acea probă se realizează *A* și nu se realizează *B*.
- $\bar{A}$ este evenimentul opus (contrar) lui *A* și se realizează într-o probă dacă în acea probă nu se realizează *A*.
- Altfel spus, evenimentul $\bar{A}$ este constituit din toate evenimentele elementare din câmpul de evenimente $\Omega$ care nu aparțin lui *A*.

5

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Evenimente independente*

- Evenimentele pot apărea cu diferite probabilități (grade de realizare).
- Se definește *probabilitatea de apariție a unui eveniment A* numărul $P(A)=m/n$, unde *n* este numărul total de evenimente elementare din $\Omega$, iar *m* este numărul evenimentelor elementare care îl implică pe *A*.
- Cu alte cuvinte, probabilitatea de a avea loc un eveniment *A* reprezintă raportul dintre numărul de cazuri favorabile și numărul de cazuri posibile.
- Se observă că probabilitatea de realizare a unui eveniment este egală cu frecvența de realizare a evenimentului respectiv când numărul de încercări tinde spre infinit.

6

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

## *Evenimente independente*

- Probabilitatea evenimentului sigur este egală cu 1.
- Probabilitatea evenimentului imposibil este egală cu 0.
- În general, $P(A)=1-P(\bar{A})$.
- Evenimentul contrar evenimentului reuniune AUB este evenimentul *„nici A, nici B”*:

$$P(\overline{AUB}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

7

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

## *Evenimente independente*

- Două evenimente se numesc *independente* dacă:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

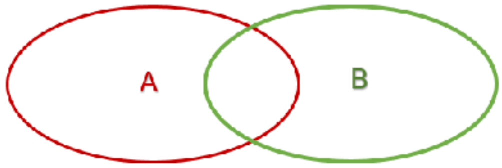
- Practic, evenimentele sunt independente dacă și numai dacă realizarea unuia nu influențează realizarea celuilalt.
- Dacă $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, se spune că evenimentele sunt *dependente*.

8

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Evenimente independente*

- Care este probabilitatea evenimentului compus *A U B* ?




A – mulțimea elevilor care studiază franceza;
B – mulțimea elevilor care studiază engleza;

9

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Evenimente independente*

- Care este probabilitatea evenimentului compus *A U B* ?

n1 – numărul elevilor care studiază doar franceza;
n2 – numărul elevilor care studiază franceza și engleza;
n3 – numărul elevilor care studiază doar engleza;

nA – numărul elevilor care studiază franceza;
nB – numărul elevilor care studiază engleza;

10

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Evenimente independente*

- Care este probabilitatea evenimentului compus *A U B* ?

nA = n1 + n2
nB = n2 + n3

n – numărul elevilor care studiază franceza sau engleza (evenimentul reuniune)

n = n1 + n2 + n3 = nA + nB – n2

11

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Evenimente independente*

- Probabilitatea evenimentului compus *A U B* se calculează astfel:

$$P(AUB) = 1 - P(\overline{AUB}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$
$$P(AUB) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$
$$P(AUB) = 1 - [(1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))]$$
$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

- Altfel spus:

*P(A U B ) =P(A)+ P(B)-P(A ∩ B).*

12

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Evenimente independente*

- Două evenimente sunt *incompatibile (disjuncte)* dacă nu pot avea loc în același timp.
- Dacă *A* și *B* sunt *incompatibile* ($A \cap B = \Phi$), atunci:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

13

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 1*

- Un sistem tehnic este constituit din trei subansambluri distincte *S1*, *S2* și *S3* a căror fiabilitate (probabilitatea de a funcționa fără defecțiune într-un interval de timp dat) este egală cu 90%, 80% și 75%. Sistemul funcționează doar dacă toate cele trei subansambluri funcționează.
- Să se determine:
- 1. Probabilitatea $P_1$ ca sistemul să funcționeze.
- 2. Probabilitatea $P_2$ ca doar două subansambluri să funcționeze.
- 3. Probabilitatea $P_3$ ca sistemul să nu funcționeze.
- 4. Probabilitatea $P_4$ ca un singur subansamblu să funcționeze.

14

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 1 - Indicații*

- Se notează următoarele evenimente:

  *Ai* – evenimentul ca subansamblul *Si* să funcționeze, $i = 1..3$;

  *X* – evenimentul ca sistemul să funcționeze.


15

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 1 - Indicații*

- Se notează următoarele evenimente:

  *Ai* – evenimentul ca subansamblul *Si* să funcționeze, $i = 1..3$;

  *X* – evenimentul ca sistemul să funcționeze.

- Se calculează:

  $P_1 = P(A1 \cap A2 \cap A3) = P(A1) \cdot P(A2) \cdot P(A3)$

  $P_2 = P(A1 \cap A2 \cap \bar{A}3) + P(A1 \cap \bar{A}2 \cap A3) + P(\bar{A}1 \cap A2 \cap A3)$
  $= P(A1) \cdot P(A2) \cdot P(\bar{A}3) + P(A1) \cdot P(\bar{A}2) \cdot P(A3) + P(\bar{A}1) \cdot P(A2) \cdot P(A3)$

  $P_3 = 1 - P_1$

  $P_4 = P(A1 \cap \bar{A}2 \cap \bar{A}3) + P(\bar{A}1 \cap A2 \cap \bar{A}3) + P(\bar{A}1 \cap \bar{A}2 \cap A3)$
  $= P(A1) \cdot P(\bar{A}2) \cdot P(\bar{A}3) + P(\bar{A}1) \cdot P(A2) \cdot P(\bar{A}3) + P(\bar{A}1) \cdot P(\bar{A}2) \cdot P(A3)$

- Răspunsuri: $P_1=0,54$; $P_2=0,375$; $P_3=0,46$; $P_4=0,08$.

16

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Probabilitate condiționată*

- *Probabilitatea condiționată de evenimentul A a evenimentului B*, notată *P(B/A)* sau $P_A(B)$, reprezintă raportul:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Aceasta reprezintă probabilitatea de realizare a evenimentului *B* știind că s-a produs evenimentul *A*.

17

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Evenimente dependente*

Dacă două evenimente sunt *dependente* se poate scrie:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \\ = P(B) \cdot P(A/B)$$

- Dacă evenimentele sunt independente, $P(A/B) = P(A)$ și rezultă $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

18

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 2*

- Se realizează o comandă de repere de tip capac pe două freze *F1* și *F2* conform unui anumit desen de execuție. Pe prima freză se realizează 40% din volumul comenzii, iar pe cea de-a doua 60%. Prima freză produce 5% rebuturi, iar cea de-a doua 3%. După fabricare, loturile provenite de la cele două freze se amestecă.
- 1. Se extrage un reper oarecare din lotul rezultat. Care este probabilitatea $P_1$ ca acesta să fi fost executat pe freza *F1* ?
- 2. Care este probabilitatea $P_2$ ca un reper executat pe freza *F1* să fie rebut ?
- 3. Se extrage un reper oarecare din lotul rezultat. Care este probabilitatea $P_3$ să fi fost prelucrat pe freza *F1* și să fie rebut ?
- 4. Se extrage un reper oarecare din lotul rezultat. Care este probabilitatea $P_4$ să fie rebut ?
- 5. Care este probabilitatea $P_5$ ca un rebut din lotul rezultat să fi fost fabricat pe freza *F1* ?

19

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 2 - Indicații*

- Se notează următoarele evenimente:

  *F1* – reper prelucrat pe freza *F1*;

  *F2* – reper prelucrat pe freza *F2*;

  *D* – reper defect.

- Se calculează: $P_1 = P(F1); P_2 = P(D/F1); P_3 = P(D \cap F1); P_4 = P(D) = P((D \cap F1) \cup (D \cap F2)); P_5 = P(F1/D)$.

20

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 2 - Indicații*

- Se notează următoarele evenimente:
  *F1* – reper prelucrat pe freza *F1*;
  *F2* – reper prelucrat pe freza *F2*;
  *D* – reper defect.

- Se calculează:
  $P_1 = P(F1)$
  $P_2 = P(D/F1)$
  $P_3 = P(D \cap F1) = P(D/F1) \cdot P(F1)$
  $P_4 = P(D) = P((D \cap F1) \cup (D \cap F2)) = P(D \cap F1) + P(D \cap F2)$
  $= P(D/F1) \cdot P(F1) + P(D/F2) \cdot P(F2)$
  $P_5 = P(F1/D) = P(D \cap F1) / P(D)$

- Răspunsuri: $P_1=0,4$; $P_2=0,05$; $P_3=0,02$; $P_4=0,038$ ; $P_5=0,526$.

21

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 3*

- Într-un laborator se prelevă zilnic două probe *P1* și *P2*. Experiența anterioară a demonstrat că probabilitățile ca cele două probe să fi fost contaminate sunt de 50% pentru prima și de 20% pentru a doua. De asemenea, probabilitatea ca măcar una dintre ele să fie contaminată este de 65%.
- Care este probabilitatea ca *P1* să fie și ea contaminată știind că *P2* este contaminată ?
- Care este probabilitatea ca *P2* să fie și ea contaminată știind că *P1* este contaminată ?

22

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 3 - Indicații*

- Se notează următoarele evenimente:
  *Ai* – evenimentul ca proba *Pi* să fie contaminată, *i* = *1..2.*

- Se calculează: P1 = P(A1/A2); P2 = P(A2/A1).

23

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 3 - Indicații*

- Se notează următoarele evenimente:
  *Ai* – evenimentul ca proba *Pi* să fie contaminată, *i* = *1..2.*

- Se calculează:
  - $P(A1 \cap A2) = P(A1) + P(A2) - P(A1 \cup A2)$
  - $P1 = P(A1/A2) = P(A1 \cap A2) / P(A2)$
  - $P2 = P(A2/A1) = P(A1 \cap A2) / P(A1)$

- Răspunsuri: $P_1=0,25$; $P_2=0,1$.

24

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Teorema probabilității totale*

Dacă se poate partaja câmpul evenimentelor $\Omega$ în $n$ evenimente mutual exclusive care să îl acopere în totalitate ($A_i \cap A_j = 0, i \neq j, \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$), atunci pentru orice eveniment $E$ din $\Omega$ se poate scrie:

$$P(E) = P(E/A_1) \cdot P(A_1) + \\ +P(E/A_2) \cdot P(A_2) + \cdots P(E/A_n) \cdot P(A_n)$$

25

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 4*

- Printre cele mai frecvente surse de defectare a unui aparat se numără instalația electrică de alimentare și subansamblul de citire. În următorul an, se estimează o probabilitate de remediere a problemelor la instalația electrică de 75% și o probabilitate de remediere a problemelor la subansamblul de citire de 60%. Cele două subansambluri sunt considerate independente. Dacă se remediază doar problemele la instalația electrică, probabilitatea de funcționare corectă a aparatului va fi de 80%. Dacă se remediază doar problemele la subansamblul de citire, probabilitatea de funcționare corectă a aparatului va fi de 70%. Dacă se remediază ambele subsisteme, se consideră că aparatul va funcționa corect. Dacă niciuna dintre aceste categorii de probleme nu va putea fi remediată, probabilitatea de funcționare corectă a aparatului este de 5%.
- 1. Care este probabilitatea ca aparatul să funcționeze corect peste un an ?
- 2. Dacă problemele la instalația electrică nu se remediază în următorul an, care este probabilitatea ca defectarea aparatului să se producă doar din această cauză ?
- 3. Dacă aparatul se defectează, care este probabilitatea ca defecțiunea să provină de la subansamblul de citire ?

26

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 4 - Indicații*

- Se notează următoarele evenimente:

  *E* – evenimentul ca problemele la instalația electrică să fie remediate.

  *C* – evenimentul ca problemele la subansamblul de citire să fie remediate.

  *F* – evenimentul ca aparatul să funcționeze corect.

- Se calculează: $P(F)$, $P\left((\bar{E} \cap C)/\bar{F}\right)$, $P(\bar{C}/\bar{F})$.

27

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 4 - Indicații*

- Se notează următoarele evenimente:

  *E* – evenimentul ca problemele la instalația electrică să fie remediate.

  *C* – evenimentul ca problemele la subansamblul de citire să fie remediate.

  *F* – evenimentul ca aparatul să funcționeze corect.

Se calculează:

- $P(F) = P(F/(E \cap C)) \cdot P(E \cap C) + P\left(F/(E \cap \bar{C})\right) \cdot P(E \cap \bar{C}) + P\left(F/(\bar{E} \cap C)\right) \cdot P(\bar{E} \cap C) + P\left(F/(\bar{E} \cap \bar{C})\right) \cdot P(\bar{E} \cap \bar{C})$
- $P\left((\bar{E} \cap C)/\bar{F}\right) = \frac{P(\bar{F}/(\bar{E} \cap C)) \cdot P(\bar{E} \cap C)}{P(\bar{F})} = \frac{[1 - P(F/(\bar{E} \cap C))] \cdot P(\bar{E} \cap C)}{P(\bar{F})}$
- $P(\bar{C}/\bar{F}) = P\left(\left((E \cap \bar{C}) \cup (\bar{E} \cap \bar{C})\right)/\bar{F}\right) =$

$= P((E \cap \bar{C})/\bar{F}) + P((\bar{E} \cap \bar{C})/\bar{F}) =$

$$= \frac{P(\bar{F}/(\bar{E} \cap C)) \cdot P(\bar{E} \cap C)}{P(\bar{F})} + \frac{P(\bar{F}/(\bar{E} \cap \bar{C})) \cdot P(\bar{E} \cap \bar{C})}{P(\bar{F})}$$

28

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Teorema probabilității totale*

Dacă se poate partaja câmpul evenimentelor $\Omega$ în *n* evenimente mutual exclusive care să îl acopere în totalitate ($A_i \cap A_j = 0, i \neq j, \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$), atunci pentru orice eveniment *E* din $\Omega$ se poate scrie:

$$P(E) = P(E/A_1) \cdot P(A_1) +$$
$$+P(E/A_2) \cdot P(A_2) + \cdots P(E/A_n) \cdot P(A_n)$$

25

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 4*

- Printre cele mai frecvente surse de defectare a unui aparat se numără instalația electrică de alimentare și subansamblul de citire. În următorul an, se estimează o probabilitate de remediere a problemelor la instalația electrică de 75% și o probabilitate de remediere a problemelor la subansamblul de citire de 60%. Cele două subansambluri sunt considerate independente. Dacă se remediază doar problemele la instalația electrică, probabilitatea de funcționare corectă a aparatului va fi de 80%. Dacă se remediază doar problemele la subansamblul de citire, probabilitatea de funcționare corectă a aparatului va fi de 70%. Dacă se remediază ambele subsisteme, se consideră că aparatul va funcționa corect. Dacă niciuna dintre aceste categorii de probleme nu va putea fi remediată, probabilitatea de funcționare corectă a aparatului este de 5%.
- 1. Care este probabilitatea ca aparatul să funcționeze corect peste un an ?
- 2. Dacă aparatul se defectează în următorul an, care este probabilitatea ca defectarea aparatului să se producă doar din cauza subansamblului electric ?
- 3. Dacă aparatul se defectează în următorul an, care este probabilitatea ca subansamblul electric să fie defect ?

26

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 4 - Indicații*

- Se notează următoarele evenimente:

  *E* – evenimentul ca problemele la instalația electrică să fie remediate.

  *C* – evenimentul ca problemele la subansamblul de citire să fie remediate.

  *F* – evenimentul ca aparatul să funcționeze corect.

- Se calculează: $P(F), P\left((\bar{E} \cap C)/\bar{F}\right), P(\bar{E}/\bar{F})$.

27

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 4 - Indicații*

- Se notează următoarele evenimente:

  *E* – evenimentul ca problemele la instalația electrică să fie remediate.

  *C* – evenimentul ca problemele la subansamblul de citire să fie remediate.

  *F* – evenimentul ca aparatul să funcționeze corect.

Se calculează:

- $P(F) = P(F/(E \cap C)) \cdot P(E \cap C) + P\left(F/(E \cap \overline{C})\right) \cdot P(E \cap \bar{C}) + P\left(F/(\bar{E} \cap C)\right) \cdot P(\bar{E} \cap C) + P\left(F/(\bar{E} \cap \overline{C})\right) \cdot P(\bar{E} \cap \bar{C})$
- $P\left((\bar{E} \cap C)/\bar{F}\right) = \frac{P(\bar{F}/(\bar{E}\cap C))\cdot P(\bar{E}\cap C)}{P(\bar{F})} = \frac{[1-P(F/(\bar{E}\cap C))]\cdot P(\bar{E}\cap C)}{P(\bar{F})}$
- $P(\bar{C}/\bar{F}) = P\left(\left((E \cap \bar{C}) \cup (\bar{E} \cap \bar{C})\right)/\bar{F}\right) =$

$= P((E \cap \bar{C})/\bar{F}) + P((\bar{E} \cap \bar{C})/\bar{F}) =$

$= \frac{P(\bar{F}/(\bar{E} \cap C)) \cdot P(\bar{E} \cap C)}{P(\bar{F})} + \frac{P(\bar{F}/(\bar{E} \cap \bar{C})) \cdot P(\bar{E} \cap \bar{C})}{P(\bar{F})}$

- Răspunsuri: $P(F) = 0{,}8$; $P\left((\bar{E} \cap C)/\bar{F}\right) = 0{,}225$, $P(\bar{E}/\bar{F}) = 0{,}7$.

28

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Teorema lui Bayes*

Pentru cazul general al unui sistem complet de evenimente disjuncte $A_i$ a căror mulțime reconstituie întregul univers imagine se poate scrie formula lui Bayes:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_i P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

29

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 5*

Un test de diagnostic prezintă probabilitatea de 95% de a detecta corect o maladie în cazul unei persoane suferinde, dar și probabilitatea de 10% de a furniza un rezultat fals pozitiv în cazul unei persoane sănătoase. Se estimează că 0,5% din populație suferă de această maladie. Se administrează testul unei persoane care provine din această populație. Care sunt probabilitățile următoarelor evenimente:

1. Rezultatul testului este pozitiv.
2. Rezultatul testului este pozitiv, iar persoana suferă de acea maladie.
3. Rezultatul testului este negativ, iar persoana este sănătoasă.
4. Persoana este diagnosticată greșit (testul este negativ, deși este bolnavă, sau testul este pozitiv, deși este sănătoasă).

30

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 5 - Indicații*

- Se notează următoarele evenimente:

  *T* – Rezultatul testului este pozitiv.

  *S* – Persoana este sănătoasă.

  *G* – Persoana este diagnosticată greșit.

- Se calculează: 1. $P(T)$, 2. $P(\bar{S}/T)$, 3. $P(S/\bar{T})$, 4. $P(G) = P(T \cap S) + P(\bar{T} \cap \bar{S})$.

31

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

- *Aplicația 5 - Indicații*

- Se notează următoarele evenimente:

  *T* – Rezultatul testului este pozitiv.

  *S* – Persoana este sănătoasă.

  *G* – Persoana este diagnosticată greșit.

- Răspunsuri: $P(T)$ = 0,10425, $P(\bar{S}/T)$ = 0,04556 $P(S/\bar{T})$ = 0,99972, $P(G) = P(T \cap S) + P(\bar{T} \cap \bar{S})$ = 0,09975.

32

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

Rezultatul $\omega$ al unui experiment aleator în spațiul evenimentelor $\Omega$ poate fi descris prin intermediul variabilei aleatoare $X(\omega)$□$R$.

33

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

Pentru o valoare numerică $x_0$ dată, se poate defini evenimentul descris de toate rezultatele posibile de valoare $X \leq x_0$.

*Exemplu*: aruncarea zarului:

- $x_0 = 4{,}72$, $X = \{1, 2, 3, 4\}$;
- $x_0 < 0$, $X = \Phi$;
- $x_0 = \infty$, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

34

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

Funcția de distribuție cumulativă $F_x(x_0)$ a unei variabile aleatoare $X$ reprezintă probabilitatea evenimentului $\{X \leq x_0\}$ pentru $x_0 \in R$:

$$F_x(x_0) = P(X \leq x_0)$$

35

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

Funcția de distribuție cumulativă $F_X$ are următoarele proprietăți:

$$\lim_{x_0 \to -\infty} F_X(x_0) = 0$$

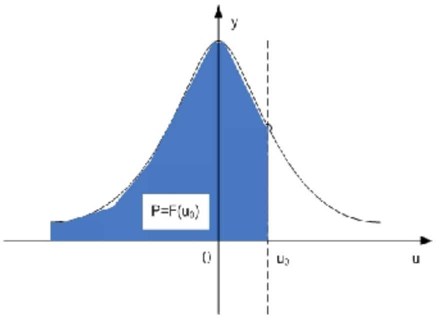
$$\lim_{x_0 \to \infty} F_X(x_0) = 1.$$

36

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

- Funcția de distribuție cumulativă poate fi privită ca aria din stânga valorii $x_o$.
- $F_X(x_0)$ este o funcție nedescrescătoare.



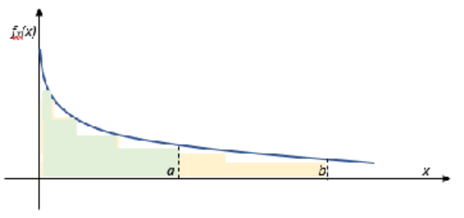

37

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

Cu ajutorul funcției de distribuție cumulative se poate determina probabilitatea unei valori de a se găsi într-un interval *(a, b]* dat:

$$P(X \in (a,b]) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$




38

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcţia de distribuţie cumulativă*

*Observaţie*:

- În tehnică, probabilitatea de apariţie a unei valori într-un anumit interval se asimilează cu proporţia de valori din intervalul respectiv (sau cu procentul acestora).
- Acest lucru este posibil deoarece proporţia se calculează ca număr de valori din interval raportat la numărul total de valori.
- Asimilarea este cu atât mai corectă cu cât numărul total de valori este mai mare.
- (Se reaminteşte că probabilitatea de realizare a unui eveniment este egală cu frecvenţa (proporţia) de realizare a evenimentului respectiv când numărul de încercări tinde spre infinit.)

39

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcţia de distribuţie cumulativă*

O variabilă aleatoare *X* se numeşte discretă dacă ea poate lua doar un număr cel mult numărabil de valori.

40

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

## *Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

Dacă variabila aleatoare $X$ poate lua doar valorile discrete $x_i$, $i = 1...n$ cu probabilitățile $p_i$, funcția de distribuție cumulativă se calculează cu expresia:

$$F_X(x_0) = \sum_{x_i < x_0} p_i \cdot x_i.$$

41

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

## *Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

*Aplicație:*

Variabila $X$ poate lua valorile discrete $x_i$, $i = 1...6$ cu probabilitățile $p_i$ conform tabelului de mai jos.
Să se calculeze valorile funcției de distribuție cumulativă $F_X$.

| $x_i$ | 1 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,15 | 0,25 | 0,25 | 0,15 | 0,1 |
| $F_X(x_i)$ | | | | | | |

42

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

Dacă variabila aleatoare $X$ ia valori continue în $R$, probabilitatea ca $X$ să ia o anumită valoare $x_0$ este egală cu 0.

43

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

Se poate însă considera un interval foarte mic $dx$ centrat în jurul valorii $x_0$ și se poate calcula probabilitatea $P$ ca variabila $X$ să ia valori în acest interval:

$$P\{x_0 \leq X < x_0 + dx\}$$
$$= F_X(x_0 + dx) - F_X(x_0) = f_X(x_0) \cdot dx$$

44

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

Funcția $f_x(x)$ poartă numele de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare $X$:

$$f_X(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{F_X(x + dx) - F_X(x)}{dx} = \frac{dF_X}{dx}$$

45


## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

Funcția $f_x(x)$ poartă numele de densitate de probabilitate a variabilei aleatoare $X$:

$$f_X(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{F_X(x + dx) - F_X(x)}{dx} = \frac{dF_X}{dx}$$


46

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

Ca urmare:

Dacă *X* este o variabilă continuă având densitatea de probabilitate $f_x$, funcția de distribuție cumulativă a acesteia se poate calcula astfel:

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx, \qquad x_0 \in \mathcal{R}$$

47

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcția de distribuție cumulativă*

Integrala funcției densitate de probabilitate este egală cu 1 (100%):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

48

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Variabile aleatoare. Funcţia de distribuţie cumulativă*

În aceste condiţii:

$$P(X \in (a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

(aria de sub graficul funcţiei de densitate $f_x$ cuprinsă între punctele a şi b)

49

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Indicatori cantitativi ai funcţiei de distribuţie cumulative*

*Funcţia procentuală $\alpha$* reprezintă valoarea $x_\alpha$ pentru care:

$$F_x(x_\alpha) = \frac{\alpha}{100}$$

50

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

## *Indicatori cantitativi ai funcției de distribuție cumulative*

Dacă $\alpha$ = 50, valoarea $x_{50}$ poartă numele de *mediană* și reprezintă valoarea de la mijlocul șirului ordonat al valorilor variabilei aleatoare *X* (valoarea $x_\alpha$ pentru care există probabilitatea de 50% ca variabila aleatoare *X* să ia valori inferioare: $X \le x_{□}$):

$$F_x(x_{50}) = 0{,}5$$

51

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

## *Indicatori cantitativi ai funcției de distribuție cumulative*

*Aplicații:*

- Se dă șirul X = {1, 4, 9, 6, 3, 1, 5, 8, 4, 9}. Să se determine mediana.
- Se dă șirul X = {10, 20, 40, 20, 50, 80, 30, 100, 25, 90, 45, 75}. Să se determine valoarea $x_{25}$.

52

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

## *Indicatori cantitativi ai funcției de distribuție cumulative*

*Media* oferă informații asupra zonei din spațiul real *R* în care este concentrată masa funcției de probabilitate.

Media mai este numită „valoare așteptată a distribuției" („expected value"):

$\mu_X = E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$ (pentru valori discrete)

$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x) \cdot dx$ (pentru valori continue)

53

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

## *Indicatori cantitativi ai funcției de distribuție cumulative*

*Aplicație:*

Variabila *X* poate lua valorile discrete $x_i$, $i = 1 \ldots 6$ cu probabilitățile $p_i$ conform tabelului de mai jos.
Să se calculeze valorile mediei *E[X]*.

| $x_i$ | 1 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,15 | 0,25 | 0,25 | 0,15 | 0,1 |

Răspuns: *E[X] = 1,78.*

54

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Indicatori cantitativi ai funcției de distribuție cumulative*

*Momentul central de ordin n*:

$\sigma_X^n = \sum_i (x_i - \mu_X)^n \cdot p_i$ (valori discrete)

$\sigma_X^n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^n \cdot f_X(x) \cdot dx$ (valori continue)

55

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Indicatori cantitativi ai funcției de distribuție cumulative*

Dacă *n* = 2, $\sigma_X^2$ poartă numele de varianță sau dispersie:

$\sigma_X^2 = Var[X]$.

$\sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot p_i$ (valori discrete)

$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) \cdot dx$ (valori continue)

56

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Indicatori cantitativi ai funcției de distribuție cumulative*

Varianța $\sigma_X^2 = Var[X]$ oferă informații asupra împrăștierii valorilor în jurul mediei.

Valoarea $\sigma_X$ poartă numele de abatere medie pătratică (abatere standard). Se mai notează *Std[X]*.

57

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Indicatori cantitativi ai funcției de distribuție cumulative*

Se mai definește coeficientul de variație $Cov_X$:

$$Cov_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{Std[X]}{E[X]}$$

$Cov_X$ este un indicator combinat folosit pentru a descrie simultan împrăștierea și localizarea.

58

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Aplicaţii:*

- Se dă şirul X = {10, 15, 20, 30, 50}. Să se calculeze valorile mediei *E[X]*, varianţei *Var[X]*, abaterii medii pătratice *Std[X]* şi coeficientului de variaţie $Cov_X$.

Răspunsuri: $E[X] = 25; Var[X] = 200; Std[X] = 14,142; Cov_X = 0,5657$.

59

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Aplicaţii:*

- Variabila *X* poate lua valorile discrete $x_i$, $i = 1...6$ cu probabilităţile $p_i$ conform tabelului de mai jos. Să se calculeze valorile varianţei *Var[X]*, abaterii medii pătratice *Std[X]* şi coeficientului de variaţie $Cov_X$.

| $x_i$ | 1 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,15 | 0,25 | 0,25 | 0,15 | 0,1 |

Răspunsuri: $Var[X] = 0,3576; Std[X] = 0,598; Cov_X = 0,336$.

60

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

## *Distribuții de probabilitate*

- Un *proces stochastic* (proces aleatoriu) este un proces în a cărui evoluție ulterioară există o incertitudine.
- Altfel spus, deși se cunoaște starea inițială, există mai multe posibilități de continuare (evoluție) a procesului.
- Opusul procesului stochastic poartă numele de *proces determinist*.

61

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

## *Distribuții de probabilitate*

- Incertitudinea evoluției ulterioare a unui proces stochastic poate fi descrisă prin *distribuții de probabilitate*.
- *Distribuțiile de probabilitate*, numite și *repartiții*, reprezintă expresii analitice ale funcțiilor de distribuție cumulativă care descriu anumite categorii de procese stochastice.
- Distribuțiile de probabilitate pot fi *discrete* sau *continue*.

62

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții discrete*

*Distribuția uniformă discretă*

Dacă variabila aleatoare *X* poate lua doar *n* valori, cu probabilități egale, densitatea de probabilitate are expresia:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in \{1,2 \dots n\} \\ 0 & \hat{\imath}\ rest \end{cases}$$

Distribuția variabilei aleatoare X poartă numele de distribuție uniformă discretă.

63

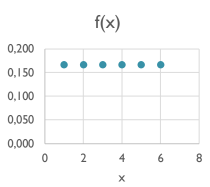
# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

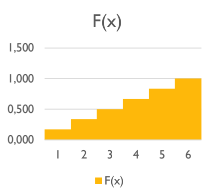
*Distribuții discrete*

*Distribuția uniformă*

<u>*Exemplu*</u>: aruncarea zarului

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x \in \{1,2 \dots 6\} \\ 0 & \hat{\imath}\ rest \end{cases}$$




64

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții discrete*

*Distribuția binomială*

Se consideră variabila aleatoare *Y* care poate avea doar două valori:

- 1 – succes, cu probabilitatea *p*;
- 0 – eșec, cu probabilitatea (*1-p*).

Un proces a cărui ieșire poate fi descrisă de variabila aleatoare *Y* poartă numele de proces Bernoulli.

65

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții discrete*

*Distribuția binomială*

Fie *X* variabila aleatoare discretă care reprezintă numărul de succese dacă se efectuează *n* experimente.

*X* poate lua valori de la *0* la *n*.

Fie $Y_i$ rezultatul experimentului „*i*”.

Atunci $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Distribuția variabilei aleatoare *X* astfel definite poartă numele de *distribuție binomială*.

66

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții discrete*

*Distribuția binomială*

Probabilitatea de a obține *k* reușite din *n* experimente are expresia:

$$P(k;n,p) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \;\; k = 1 \ldots n,$$

unde *p* reprezintă probabilitatea de succes.

67

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții discrete*

*Distribuția binomială*

*Exemplu*:

Se consideră un sac care conține bile albastre și roșii. Probabilitatea de a extrage o bilă albastră este de 0,2. Care este probabilitatea *P1* ca, din 5 încercări, să extragem o singură bilă albastră ? Dar probabilitatea *P2* să extragem o singură bilă roșie ?

- *Răspuns: P1 = 0,4096; P2 = 0,0064.*

68

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții discrete*

*Distribuția binomială*

Pentru o distribuție binomială:

$$\mu_X = E[X] = np$$
$$\sigma_X^2 = Var[X] = np(1-p)$$

69

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții discrete*

*Distribuția geometrică*

*Distribuția geometrică* modelează un proces Bernoulli la care primul succes se înregistrează la încercarea „*t*”.

Altfel spus, încercările *1…(t-1)* au avut de fiecare dată rezultatul 0 (eșec), iar încercarea *t* a avut rezultatul 1.

70

## I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Distribuţii discrete*

*Distribuţia geometrică*

Probabilitatea de a obţine primul succes la încercarea „*t*" are expresia:

$$P(t; p) = (1 - p)^{t-1} \cdot p, \qquad t = 1, 2 \ldots$$

71

## I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Distribuţii discrete*

*Distribuţia geometrică*

*Exemplu*:

Se consideră un sac care conţine bile albastre şi roşii. Probabilitatea de a extrage o bilă albastră este de 0,2. Care este probabilitatea *P** să extragem prima bilă albastră la a treia încercare ?

- *Răspuns: P* = 0,128.*

72

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

## *Distribuții discrete*

### *Distribuția geometrică*

$$\mu_T = E[T] = \sum_{t=1}^{\infty}(1-p)^{t-1} \cdot p = p \cdot [1 + 2 \cdot (1-p) + 3 \cdot (1-p)^2 + \cdots] = \frac{p}{[1-(1-p)]^2} = \frac{1}{p}$$

73

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

## *Distribuții discrete*

### *Distribuția Poisson*

Dacă se consideră o categorie de evenimente stochastice care au loc într−o perioadă continuă de timp (de exemplu, numărul de defectări ale unei anumite componente într−o perioadă de timp dată) pentru care rata $\lambda$ de producere a evenimentului este constantă, distribuția caracteristică acestei situații poartă numele de *distribuție Poisson*.

Este necesar ca evenimentele să fie independente între ele.

74

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții discrete*

*Distribuția Poisson*

Probabilitatea ca în perioada de observație *(0,t)* să aibă loc *k* evenimente se calculează cu expresia:

$$P(k;(0,t),\lambda) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}, k = 1,2 \ldots$$

75

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții discrete*

*Distribuția Poisson*

$$E[K] = \lambda t$$
$$Var[K] = \lambda t$$

Se constată că distribuția Poisson derivă din distribuția binomială când $p \to 0, n \to \infty$ și produsul $\lambda t$ rămâne constant.

76

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

## *Distribuţii discrete*

### *Distribuţia Poisson*

*Exerciţiul 1:*

În medie, un reper se defectează de două ori în cinci ani. Se presupune că defectarea acestuia urmează o lege Poisson. Să se determine:

a) Probabilitatea *P1* de a avea loc o singură defectare în trei ani.

b) Probabilitatea *P2* de a nu avea loc nicio defectare în trei ani.

c) Probabilitatea *P3* de a avea cel mult două defectări în trei ani.

d) Probabilitatea *P4* de a avea cel puţin o defectare în trei ani.

77


# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

## *Distribuţii discrete*

### *Distribuţia Poisson*

*Exerciţiul 1:*

În medie, un reper se defectează de două ori în cinci ani. Se presupune că defectarea acestuia urmează o lege Poisson. Să se determine:

a) Probabilitatea *P1* de a avea loc o singură defectare în trei ani.

b) Probabilitatea *P2* de a nu avea loc nicio defectare în trei ani.

c) Probabilitatea *P3* de a avea cel mult două defectări în trei ani.

d) Probabilitatea *P4* de a avea cel puţin o defectare în trei ani.


Indicaţii: $\lambda$ = 2/5. a) *P1 = P(1;(0,3),2/5)*; b) *P2= P(0;(0,3),2/5)*; c) *P3= P(0;(0,3),2/5) + P(1;(0,3),2/5) + P(2;(0,3),2/5)*; d) *P4 = 1 - P(0;(0,3),2/5)*.

Răspunsuri: a) *P1 = 0,3614*; b) *P2 = 0,3011*; c) *P3 = 0,8794*; d) *P4 = 0,69894*.

78

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții discrete*

*Distribuția Poisson*

*Exercițiul 2:*

În medie, un reper se defectează o dată la 8 ani. Determinați probabilitatea ca în 10 ani:

a) reperul să nu se defecteze niciodată;

b) reperul să se defecteze o singură dată;

c) reperul să se defecteze de cel puțin două ori.

79

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții discrete*

*Distribuția Poisson*

*Exercițiul 2:*

În medie, un reper se defectează o dată la 8 ani. Determinați probabilitatea ca în 10 ani:

a) reperul să nu se defecteze niciodată;

b) reperul să se defecteze o singură dată;

c) reperul să se defecteze de cel puțin două ori.

Indicații: $\lambda = 1/8$. a) $P1 = P(0;(0,10),1/8)$; b) $P2 = P(1;(0,10),1/8)$; c) $P3 = 1-[P(0;(0,10),1/8) + P(1;(0,10),1/8)]$.

Răspunsuri: $P1 = 0{,}2865$; b) $P2 = 0{,}3581$; c) $P3 = 0{,}3554$.

80

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Distribuţii discrete*

*Distribuţia Poisson*

*Exerciţiul 3:*

Probabilitatea ca întregul subansamblu din care face parte reperul din exemplul precedent să se defecteze odată ce acesta s-a defectat este de 5%.

Calculaţi probabilitatea *P** ca subansamblul să funcţioneze după 10 ani în condiţiile în care reperul se defectează o singură dată în cei 10 ani.

81

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Distribuţii discrete*

*Distribuţia Poisson*

*Exerciţiul 3:*

Probabilitatea ca întregul subansamblu din care face parte reperul din exemplul precedent să se defecteze odată ce acesta s-a defectat este de 5%.

Calculaţi probabilitatea *P** ca subansamblul să funcţioneze după 10 ani în condiţiile în care reperul se defectează o singură dată în cei 10 ani.

*Indicaţii:*

*Se notează:*

*D – evenimentul ca reperul să se defecteze o singură dată în 10 ani;*

*S - evenimentul ca întregul subansamblu să se defecteze.*

*P(S/D) = 0,05.*

*P* = P(NSxD) = P(NS/D) x P(D).*

*Răspuns: P* = 0,3402.*

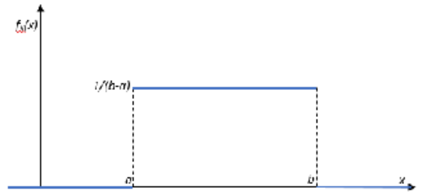
82

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția uniformă continuă*

O variabilă aleatoare are o distribuție uniformă continuă pe intervalul *[a,b]* dacă poate lua orice valoare din interval cu aceeași probabilitate.



83

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția uniformă continuă*

Densitatea de probabilitate $f_X(x)$ are expresia:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0 & \text{î } rest \end{cases}$$

Se constată că $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot dx = 1$.

84

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția uniformă continuă*

Funcția de distribuție cumulativă:

$$F_X(x_0) = P(X < x_0) = \frac{x_0 - a}{b - a}$$

85

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția uniformă continuă*

*Media și dispersia:*

$$E[X] = \frac{a + b}{2}$$

$$Var[X] = \frac{(b - a)^2}{12}$$

86

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Aplicație*:

Lungimea *X* a unui reper este asimilată cu o variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate $f(x)=k$ pentru $x$ cuprins în intervalul [19,8...20,2] și 0 în rest.

Dimensiunea nominală și abaterile admisibile ale reperului sunt $20^{\pm 0,15}$.

Dintr-un lot de 1000 de repere, aproximativ câte vor fi neconforme ?

87

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Aplicație*:

Lungimea *X* a unui reper este asimilată cu o variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate $f(x)=k$ pentru $x$ cuprins în intervalul [19,8...20,2] și 0 în rest.

Dimensiunea nominală și abaterile admisibile ale reperului sunt $20^{\pm 0,15}$.

Dintr-un lot de 1000 de repere, aproximativ câte vor fi neconforme ?

*Indicație:* Se calculează probabilitatea *P* de apariție a unui reper neconform:
$P = F(19,85) + [1 - F(20,15)]$

*Răspuns:* $P = 0,25$.

88

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția exponențială*

Variabila aleatoare *X* are o distribuție exponențială de parametru *λ>0* dacă distribuția sa de probabilitate are expresia:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & \hat{\imath}\ rest \end{cases}.$$

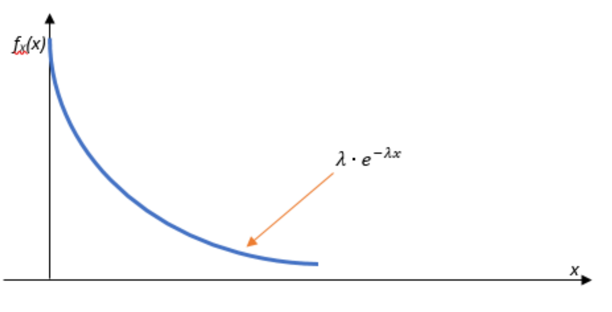
Se constată că $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot dx = 1$.

89

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția exponențială*




90

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Distribuţii continue*

*Distribuţia exponenţială*

Parametrul $\lambda$ are semnificaţia unei rate constante de producere a unui eveniment.

Un exemplu remarcabil este rata de defectare constantă a unui echipament *h(t)* = $\lambda$.

Rata de defectare constantă este utilizată pentru descrierea matematică a porţiunii utile (perioadei de funcţionare normală) a graficului „cadă de baie" ce descrie evoluţia în timp a ratei de defectare a unui produs.

91

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Distribuţii continue*

*Distribuţia exponenţială*

Funcţia de distribuţie cumulativă:

$$F_X(x_0) = P(X < x_0) = 1 - e^{-\lambda x_0}$$

92

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția exponențială*

*Media și dispersia:*

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

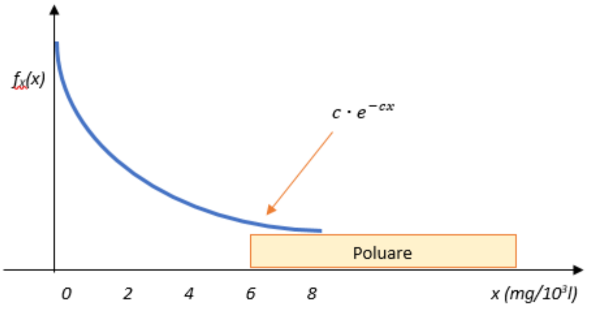
$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

93

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Aplicație*:

Concentrația zilnică a unei substanțe poluante într-un râu are distribuția exponențială prezentată în următoarea figură:




94

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii și analiza riscului

*Aplicaţie*:

a) Dacă media zilnică a substanţei poluante este de 2mg/$10^3$l, determinaţi constanta *c* din expresia distribuţiei exponenţiale.

b) Se consideră că râul este poluat dacă substanţa are o concentraţie mai mare de 6mg/$10^3$l. Care este probabilitatea *P1* de apariţie a unui caz de poluare într-o zi ?

c) Care este numărul aproximativ de zile z la care apare un caz de poluare ? Concentraţiile din zile diferite se consideră independente între ele.

d) Care este probabilitatea *P2* să apară cel mult un caz de poluare în următoarele trei zile ?

95

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii și analiza riscului

*Aplicaţie*:

a) Dacă media zilnică a substanţei poluante este de 2mg/$10^3$l, determinaţi constanta *c* din expresia distribuţiei exponenţiale.

b) Se consideră că râul este poluat dacă substanţa are o concentraţie mai mare de 6mg/$10^3$l. Care este probabilitatea *P1* de apariţie a unui caz de poluare într-o zi ?

c) Care este numărul aproximativ de zile z la care apare un caz de poluare ? Concentraţiile din zile diferite se consideră independente între ele.

d) Care este probabilitatea *P2* să apară cel mult un caz de poluare în următoarele trei zile ?

*Indicaţii:*

*a) E[X] = 1/c;* b) *P1 = P(X>6) = 1 – F(6);* c) *z ≈ 1/P1;* d) 2 $= \sum_{k=0}^{1} C_3^k \cdot 1\ ^k \cdot (1-1\ )^{3-k}$

*Răspunsuri:*

*a) E[X] = 0,5; b) P1 = 0.0498; c) z = 20; d) P2 = 0,9928.*

96

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

***Teorema limitei centrale***: suma $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ a variabilelor aleatoare independente $X_1, X_2 \ldots X_n$ este o variabilă aleatoare care, pentru valori mari ale lui *n*, tinde către o distribuție normală (gaussiană), oricare ar fi distribuțiile variabilelor $X_1, X_2 \ldots X_n$.

97

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

- *Consecință*: dacă o mărime fizică suportă influența mai multor factori independenți, dintre care nici unul nu este preponderent, se consideră că se supune unei legi normale.

98

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

- *Exemplu*: distribuția normală este utilizată pentru a descrie comportamentul erorilor experimentale, care apar de regulă ca rezultat al suprapunerii efectelor mai multor fenomene aleatoare independente între ele.

99

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

*Densitatea de probabilitate* are expresia:

$$f_X(x;\ \mu_X, \sigma_X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_X} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right]^2} \quad ,$$

$$-\infty < x < \infty;\ -\infty < \mu_X < \infty;\ \sigma_X > 0$$

100

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuţii continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

*Media:*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_X} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right]^2} dx$$

$$E[X] = \mu_X$$

101

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuţii continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

*Dispersia:*

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \cdot f(x)dx$$

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_X} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right]^2} dx$$

$$Var[X] = \sigma_X^2$$

102

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Distribuţii continue*

*Distribuţia normală (gaussiană)*

*Observaţie*: Dacă o populaţie de dimensiune mare distribuită normal este analizată prin intermediul unui eşantion aleator de talie n fomat din variabilele independente $x_1 \ldots x_n$, se vor folosi relaţiile:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Valorile $\bar{x}$ şi $s$ reprezintă *estimatori* ai mediei aritmetice şi abaterii medii pătratice.

Valoarea *(n-1)* reprezintă numărul gradelor de libertate.

103

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Distribuţii continue*

*Distribuţia normală (gaussiană)*

- O variabilă aleatoare normal distribuită de medie $\mu_X$ şi abatere medie pătratică $\sigma_X$ este referită de regulă ca

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X).$$

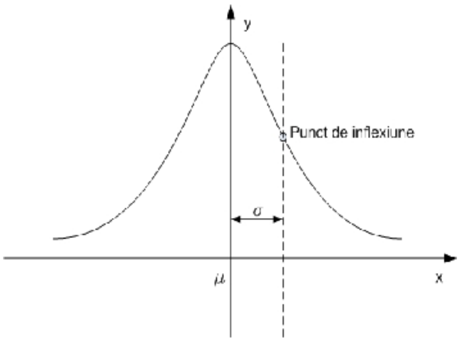
104

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuţii continue*

*Distribuţia normală (gaussiană)*

Reprezentarea grafică poartă numele de "clopot al lui Gauss", datorită formei sale asemănătoare cu un clopot.



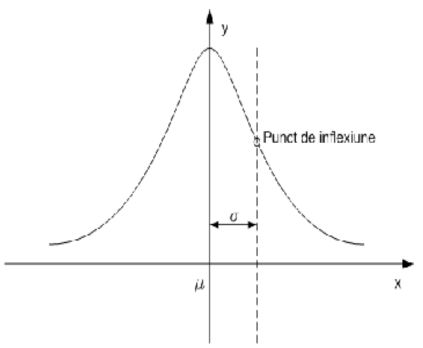

105

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuţii continue*

*Distribuţia normală (gaussiană)*

- Funcția este simetrică în raport cu $x=\mu$, având un maxim de valoare $(\mu\ 1/(\sigma\sqrt{2}\ ))$ și având ca asimptotă orizontală la ambele ramuri ale clopotului dreapta *Ox*.
- Valoarea $\sigma$ poziţionează punctul de inflexiune al curbei în raport cu media $\mu$.



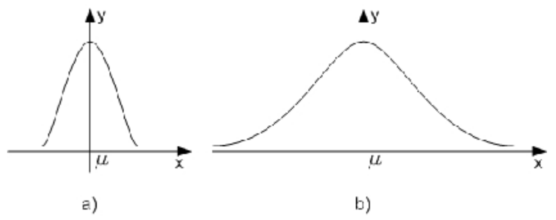

106

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

- Odată cu modificarea valorii abaterii medii pătratice $\sigma$, forma curbei se modifică.
- Pentru $\sigma$ mic se obține o curbă ascuțită, iar pentru valori mai mari ale lui $\sigma$ o curbă aplatisată.



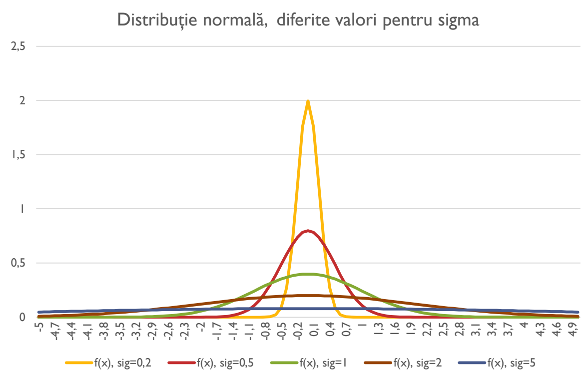

*Densitatea repartiției : a) c dispersie relativ mică; b) cu dispersie relativ mare.*

107

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*



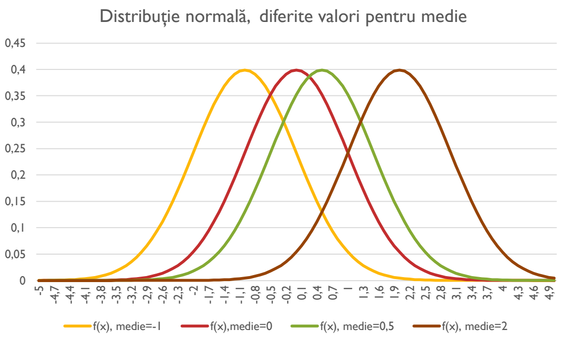

108

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Distribuţii continue*

*Distribuţia normală (gaussiană)*

- Dacă $\sigma$ se menţine constant şi se variază media aritmetică $\mu$, nu se obţine schimbarea formei curbei, ci doar translaţia acesteia pe axa *Ox*.



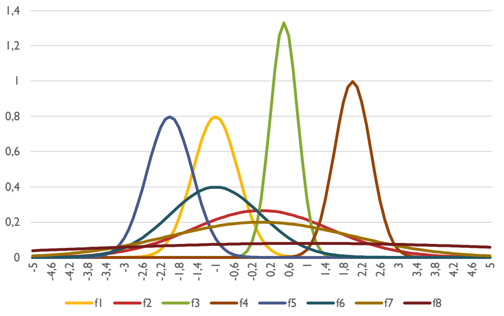

109

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Distribuţii continue*

*Distribuţia normală (gaussiană)*

Se observă că graficul densităţii de probabilitate $f_x$ poate ocupa diferite poziţii în raport cu sistemul de axe ortogonal, în funcţie de valorile $\mu$ şi $\sigma$.




110

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

Dacă variabilei *x* i se substituie variabila normată *u*:

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

se obține *legea normală centrată redusă*:

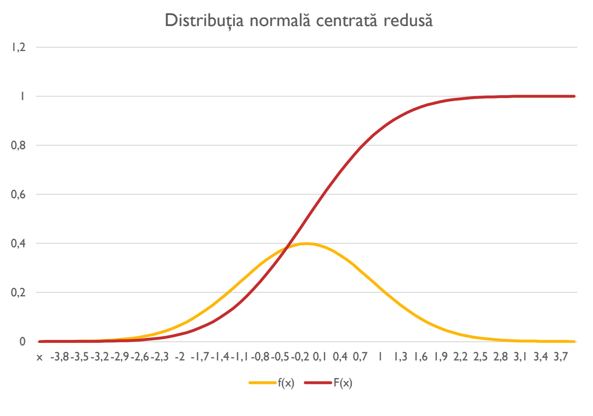
$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$$

111

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue.*

*Distribuția normală (gaussiană)*




112

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

Transformarea unei legi normale oarecare

$X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$

în lege normală centrată redusă

$U \sim N(0, 1)$

permite cunoașterea probabilităților asociate legii normale, prin utilizarea tabelelor de probabilități.

113

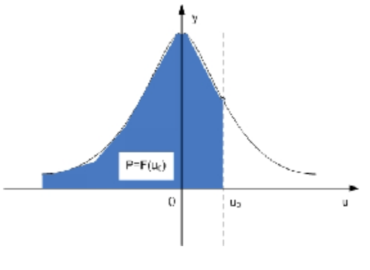
# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

Pentru $u_0>0$, proporția $P$ a indivizilor situați la stânga valorii $u_0$ este dată de valoarea funcției de distribuție cumulativă $F(u_0)$, furnizată de tabelele de probabilități:

$$P(u < u_0) = F(u_0), \qquad u_0 > 0$$




114

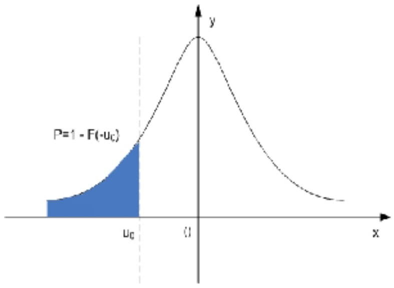
# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Distribuţii continue*

*Distribuţia normală (gaussiană)*

Pentru $u_0<0$, această proporţie este dată de valoarea complementară:

$$P(u < u_0) = 1 - F(|u_0|) = 1 - F(-u_0)$$




115

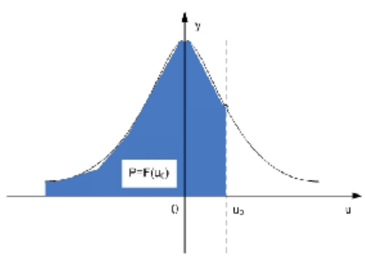
# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

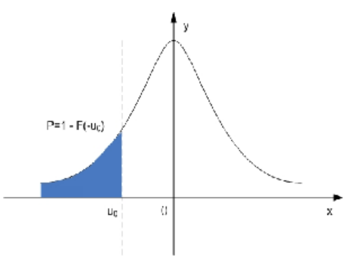
*Distribuţii continue*

*Distribuţia normală (gaussiană)*

În consecinţă, proporţia indivizilor situaţi în intervalul $[-u_0, u_0]$, $u_0>0$, are valoarea:

$$P(-u_0 < u < u_0) = F(u_0) - (1 - F(u_0)) = 2\ \ (u_0) - 1$$




116

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

## *Distribuţii continue*

## *Distribuţia normală (gaussiană)*

*Tabelul de probabilităţi asociate legii normale reduse (extras)*

| $u_0$ | $P=F(u_0)$ | $u_0$ | $P=F(u_0)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,500 | 1,22 | 0,889 |
| 0,01 | 0,504 | 1,96 | 0,975 |
| 0,10 | 0,54 | 2,58 | 0,995 |
| 0,12 | 0,548 | 2,75 | 0,997 |
| 1,00 | 0,841 | 3,09 | 0,999 |

- Pentru $u=1,96$, $P=97,5\%$;
- Pentru $u=2,58$, $P=99,5\%$;
- Pentru $u=3,09$, $P=99,9\%$.

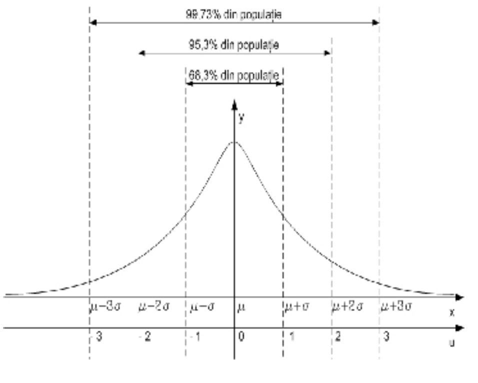
117

# I. Noţiuni de teoria probabilităţilor aplicate în calculul fiabilităţii şi analiza riscului

*Distribuţii continue*

*Distribuţia normală (gaussiană)*

În majoritatea cazurilor se poate utiliza următoarea aproximaţie:




118

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

*Aplicația 1:*

O distribuție normală are drept medie $\mu$ = 25,05 mm, iar $\sigma$ = 0,025 mm.

Să se determine proporția indivizilor a căror valoare este inferioară lui $x_1$ = 25,09 mm, exprimată procentual.

119


# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

*Aplicația 1:*

O distribuție normală are drept medie $\mu$ = 25,05 mm, iar $\sigma$ = 0,025 mm.
Să se determine proporția indivizilor a căror valoare este inferioară lui $x_1$ = 25,09 mm, exprimată procentual.


*Indicații:*

Se calculează:

- $u_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$
- $P(x < x_1)[\%] = [P(u < u_1)] \cdot 100[\%]$

*Răspuns:* 94,52%.

120

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

*Aplicația 2:*

O distribuție normală are drept medie $\mu$ = 12,02 mm, iar $\sigma$ = 0,06 mm.
Să se determine proporția indivizilor cuprinși în intervalul 12 $\pm$ 0,15 mm.

121

## I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

*Aplicația 2:*

O distribuție normală are drept medie $\mu$ = 12,02 mm, iar $\sigma$ = 0,06 mm.
Să se determine proporția indivizilor cuprinși în intervalul 12 $\pm$ 0,15 mm.

*Indicații:*
Se calculează:

- $u_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$
- $u_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma}$
- $P(x_1 < x < x_2)[\%] = P(u_1 < u < u_2)[\%] = [P(u < u_2) - P(u < u_1)] \cdot 100[\%]$

*Răspuns*: 98,27%.

122

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

*Aplicația 3*

Se consideră un eșantion de 200 de arbori, având cota nominală și abaterile de 6 $4^{0,05}_{0,02}$, corespunzătoare clasei de toleranță **n7**.
După măsurare și prelucrarea rezultatelor, s-au obținut media $\mu$ = 64,038 mm și abaterea medie pătratică $\sigma$ = 0,008 mm.
Să se calculeze procentul de piese conforme și procentul de rebuturi, pentru cazul în care prelucrarea se continuă cu același proces tehnologic și cu același reglaj al mașinii.

123

# I. Noțiuni de teoria probabilităților aplicate în calculul fiabilității și analiza riscului

*Distribuții continue*

*Distribuția normală (gaussiană)*

*Indicații:*

Se calculează:

- $u_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{(N+ei)-\mu}{\sigma}$
- $u_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma} = \frac{(N+es)-\mu}{\sigma}$
- $P_c[\%] = [P(u < u_2) - P(u < u_1)] \cdot 100[\%]$
- $P_{rn}[\%] = [P(u < u_1)] \cdot 100[\%]$
- $P_{rr}[\%] = [P(u > u_2)] \cdot 100[\%] = [1 - P(u < u_2)] \cdot 100[\%]$
- $P_r[\%] = P_{rn}[\%] + P_{rr}[\%] = 100[\%] - P_c[\%]$

*Răspunsuri*: *Pc* = 92,1%; *Prn* = 1,22%; *Prr* = 6,68%; *Pr* = 7,9%.

124

# II. Funcția de fiabilitate

## *Funcția de defectare*

De mare importanță în studiul fiabilității sistemelor este **durata de viață** a acestora, analizată prin prisma timpului de funcționare neîntreruptă până la defectare.

Probabilitatea ca produsul să se defecteze înainte de momentul *t* poartă numele de **funcție de defectare** *F(t)*.

125

# II. Funcția de fiabilitate

## *Funcția de defectare*

Se constată că *F(t)* este o funcție de distribuție cumulativă:

$$F(t) = P(\tau<t),$$

unde $\tau$ reprezintă durata de viață a produsului.

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt$$

*f(t)*: densitatea de probabilitate a defectării (densitatea de defectare)

126

# II. Funcția de fiabilitate

*Funcția de fiabilitate*

Probabilitatea ca produsul să funcționeze fără să se defecteze până la momentul *t* poartă numele de **funcție de fiabilitate** (funcție de siguranță, funcție de supraviețuire) *R(t)*:

$$R(t) = 1 - F(t) = P(\tau \geq t)$$

127

# II. Funcția de fiabilitate

*Funcția de fiabilitate*

Se constată că *R(t)* este o funcție monoton descrescătoare, cu:

$$R(0) = 1$$

$$\lim_{t \to \infty} R(t) = 0$$

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt$$

128

# II. Funcția de fiabilitate

*Durata medie de funcționare*

Fiabilitatea unui produs este caracterizată în general de **durata medie de funcționare** $T_0$ a acestuia:

$$T_0 = E[\tau]$$

$$= \int_0^\infty t \cdot f(t)dt = -t \cdot R(t)|_0^\infty + \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty R(t)dt$$

129

# II. Funcția de fiabilitate

*Durata medie de funcționare*

$T_0$ se mai numește **MTTF (Mean Time To Failure)**:

$$MTTF = T_0$$

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt$$

130

## II. Funcția de fiabilitate

*Durata medie de funcționare*

Dispersia duratei de viață a unui produs:

$$D = Var[\tau] = 2\int_{0}^{\infty} t \cdot R(t)dt - T_0^2$$

131

## II. Funcția de fiabilitate

*Durata medie de funcționare*

Aceste valori pot fi deduse experimental dacă se determină duratele de viață $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_N$ pentru $N$ produse:

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tau_i}{n}$$

$$\lim_{N \to \infty} \bar{\tau} = T_0$$

$$\overline{D_\tau} = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\tau_i - \bar{\tau})^2}{N-1}$$

132

## II. Funcția de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

$R(t, t_l)$ - probabilitatea ca un produs să nu se defecteze în intervalul $(t, t_l)$, știind că a funcționat fără defect până în momentul $t$.

133

## II. Funcția de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

- $B$ - evenimentul ca produsul să nu se defecteze în intervalul $(0, t)$;
- $A$ - evenimentul ca produsul să funcționeze în intervalul $(t, t_l)$:

$$R(t, t_1) = R(A/B) = \frac{R(A \cap B)}{R(B)}$$

- $A \cap B$: evenimentul ca produsul să funcționeze fără defect în intervalul $(0, t_l)$.

134

## II. Funcția de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

Rezultă:

$$R(t, t_1) = \frac{R(t_1)}{R(t)}$$

135

## II. Funcția de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

Probabilitatea ca produsul să se defecteze în intervalul *(t, t$_1$)*:

$$F(t, t_1) = 1 - R(t, t_1) = \frac{R(t) - R(t_1)}{R(t)}$$

136

## II. Funcția de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

Dacă $t_l = t + \Delta t$:

$$F(t, t + \Delta t) = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)}$$

$$= \frac{-R'(t) \cdot \Delta t}{R(t)} + 0(\Delta t)$$

*0(Δt)*: rest proporțional cu *Δt*

137

## II. Funcția de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

Se introduce notația:

$$\lambda(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)}$$

Când Δ*t* e mic:

$$F(t, t + \Delta t) \square\ \lambda(t)dt$$

138

## II. Funcția de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

*λ(t)*: probabilitatea ca produsul să funcționeze fără defecțiune până la momentul *t* și să se defecteze în cursul unității de timp imediat următoare (dacă unitatea este mică)

139

## II. Funcția de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

*λ(t)*: densitatea de repartiție a probabilității de defectare la momentul *t*, condiționată de faptul că elementul a funcționat fără defect până în acest moment.

140

## II. Funcţia de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

***$\lambda(t)$*: rata de defectare a produsului**
(rata defectării instantanee, funcţie de hazard)

$$\lambda(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)}$$

141

## II. Funcţia de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

Se reaminteşte că:

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

142

## II. Funcția de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

Rezultă:

$$\lambda = -[\ln R(t)]'$$

$$\ln R(t) = -\int_0^t \lambda(t)dt$$

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

143

## II. Funcția de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

$$f(t) = F'(t) = -R'(t)$$

144

## II. Funcția de fiabilitate

### *Rata de defectare a unui produs*

Rezultă:

$$\lambda = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$\lambda = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

145

## II. Funcția de fiabilitate

### *Determinarea experimentală a ratei defectării*

Fie *N* elemente și *n(t)* numărul de elemente care nu s-au defectat până la momentul *t*:

$$\lambda(t) \square \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R(t)}$$

146

## II. Funcția de fiabilitate

*Determinarea experimentală a ratei defectării*

$$\lambda(t) = \frac{\frac{n(t)}{N} - \frac{n(t+\Delta t)}{N}}{\frac{n(t)}{N} \cdot \Delta t}$$

$$\lambda(t) = \frac{\Delta n(t)}{n(t) \cdot \Delta t}$$

$\Delta n(t)$: numărul de defecțiuni în intervalul $(t, t+\Delta t)$.

147

## II. Funcția de fiabilitate

*Determinarea experimentală a ratei defectării*

Din punct de vedere statistic, rata de defectare este egală cu raportul dintre numărul de defecte care se produc în unitatea de timp și numărul elementelor care mai funcționează până în acel moment.

148

## II. Funcția de fiabilitate

### *Exprimarea funcției de fiabilitate cu ajutorul transformatei Laplace*

**Transformata Laplace** *F(s)* a unei funcții *f(t)*:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

149

## II. Funcția de fiabilitate

### *Exprimarea funcției de fiabilitate cu ajutorul transformatei Laplace*

Dacă se utilizează transformata Laplace, se poate scrie:

$$MTTF = \lim_{s \to 0} R(s)$$

unde

$$R(s) = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \cdot e^{-st} dt$$

150

# II. Funcţia de fiabilitate

## *Rata defectării*

<u>*Aplicaţia I*</u>:

Pentru un dispozitiv electronic s-a determinat experimental că densitatea de probabilitate a defectării are expresia: $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \lambda = ct.$

Să se determine expresiile *R(t)*, *F(t)* , *λ(t)*, *MTTF*.

151

# II. Funcţia de fiabilitate

## *Rata defectării*

<u>*Aplicaţia I*</u>:

Pentru un dispozitiv electronic s-a determinat experimental că densitatea de probabilitate a defectării are expresia: $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \lambda = ct.$

Să se determine expresiile *R(t)*, *F(t)* , *λ(t)*, *MTTF*.

*Răspunsuri:*

- $F(t) = \int_0^\infty f(t)dt = 1 - e^{-\lambda t}$
- $R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$
- $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda$
- $MTTF = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{1}{\lambda}$

152

# II. Funcția de fiabilitate

## *Exprimarea funcției de fiabilitate cu ajutorul transformatei Laplace*

*Aplicația 2*:

Rezolvați aplicația anterioară folosind transformata Laplace.

153

# II. Funcția de fiabilitate

## *Exprimarea funcției de fiabilitate cu ajutorul transformatei Laplace*

*Aplicația 2*:
Rezolvați aplicația anterioară folosind transformata Laplace.

*Răspunsuri:*

$R(t) = e^{-\lambda t}$ și se calculează:

- $R(s) = \int_0^{\infty} R(t) \cdot e^{-st} dt;\ R(s) = \frac{1}{\lambda+s}$
- $MTTF = \lim_{s \to 0} R(s)\ ; MTTF = \frac{1}{\lambda}$

154

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

Fie un sistem compus din $N$ componente independente, fiecare caracterizat prin probabilitatea $R_i$ de funcționare și probabilitatea $F_i = 1 - R_i$ de defectare.

Se dorește să se calculeze probabilitatea de a funcționa corespunzător a întregului sistem.

155

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *A. STRUCTURI STATICE*

Structurile statice (rețelele statice) sunt acele structuri pentru care fiabilitatea, respectiv probabilitatea de defectare nu variază în timp.

Structurile statice de bază sunt:

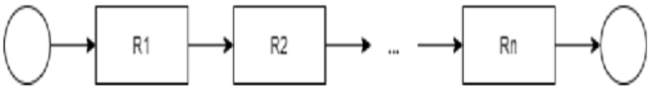
- structurile serie;
- structurile paralele;
- structurile „$k$” din „$n$”.

156

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

- ***A. STRUCTURI STATICE***
- *A1. Structuri statice serie*




157

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

***A. STRUCTURI STATICE***

*A1. Structuri statice serie*

Structurile statice serie sunt structurile pentru care fiabilitatea $R_s$ a întregului sistem se calculează cu formula:

$$R_s = P(x_1) \cdot P(x_2) \dots \cdot P(x_n)$$
$$R_s = R_1 \cdot R_2 \dots \cdot R_n$$
$$R_s = \prod_{i=1}^{k} R_i$$

- $P(x_i)$: probabilitatea ca elementul „*i*” să funcționeze;
- $R_i$: fiabilitatea elementului „*i*”.

158

# II. Funcţia de fiabilitate

## Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### A. STRUCTURI STATICE

*A1. Structuri statice serie*

*Exemplu*

Un echipament dispune de patru motoare identice independente. Este necesar ca toate să funcţioneze pentru ca echipamentul să poată funcţiona. Dacă fiabilitatea fiecărui motor este egală cu 0,98, calculaţi probabilitatea ca echipamentul să funcţioneze.

159

# II. Funcţia de fiabilitate

## Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### A. STRUCTURI STATICE

*A1. Structuri statice serie*

*Exemplu*

Un echipament dispune de patru motoare identice independente. Este necesar ca toate să funcţioneze pentru ca echipamentul să poată funcţiona. Dacă fiabilitatea fiecărui motor este egală cu 0,98, calculaţi probabilitatea ca echipamentul să funcţioneze.

*Răspuns:*

$R_s = R_1 * R_2 * R_3 * R_4$

$R_s = 92{,}23\%$

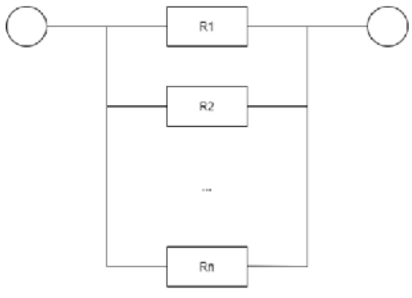
160

# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***A. STRUCTURI STATICE***

*A2. Structuri statice în paralel*




161

# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***A. STRUCTURI STATICE***

*A2. Structuri statice în paralel*

În cazul structurilor statice în paralel:

$$\overline{R_p} = P(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots \overline{x_n})$$

162

# II. Funcţia de fiabilitate

## Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *A. STRUCTURI STATICE*

*A2. Structuri statice în paralel*

Dacă unităţile cedează independent, se poate scrie:

$$\overline{R_p} = P(\overline{x_1}) \cdot P(\overline{x_2}) \dots \cdot P(\overline{x_n})$$

$$\overline{R_p} = F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_n$$

$$\overline{R_p} = \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i)$$

$$R_p = 1 - (1 - R_1) \cdot (1 - R_2) \dots \cdot (1 - R_n)$$

163

# II. Funcţia de fiabilitate

## Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *A. STRUCTURI STATICE*

*A2. Structuri statice în paralel*

Dacă unităţile sunt identice:

$$R_p = 1 - (1 - R)^n$$

$$n = \frac{\ln(1 - R_p)}{\ln(1 - R)}$$

164

# II. Funcţia de fiabilitate

**Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***A. STRUCTURI STATICE***

*A2. Structuri statice în paralel*

*Exemplul 1*

Un sistem dispune de două generatoare active, identice şi independente. Cel puţin unul dintre ele trebuie să funcţioneze pentru ca sistemul să funcţioneze. Calculaţi probabilitatea de funcţionare a sistemului ştiind că probabilitatea de defectare a unui generator este de 0,02.

165

# II. Funcţia de fiabilitate

**Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***A. STRUCTURI STATICE***

*A2. Structuri statice în paralel*

*Exemplul 1*

Un sistem dispune de două generatoare active, identice şi independente. Cel puţin unul dintre ele trebuie să funcţioneze pentru ca sistemul să funcţioneze. Calculaţi probabilitatea de funcţionare a sistemului ştiind că probabilitatea de defectare a unui generator este de 0,02.

*Răspuns:*

$R_p = 1 - (1-R)^2$

$R_p = 99{,}96\%$

166

# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***A. STRUCTURI STATICE***

*A2. Structuri statice în paralel*

*Exemplul 2*

Pentru un subansamblu din cadrul unui sistem, testele de fiabilitate au indicat o valoare de 0,64. Din considerente de proiectare, fiabilitatea dorită a sistemului trebuie să fie de 0,97. Se optează pentru soluția redundanței paralele (montarea în paralel a unui număr de subansambluri identice). Calculați numărul necesar de astfel de subansambluri.

167

# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***A. STRUCTURI STATICE***

*A2. Structuri statice în paralel*

*Exemplul 2*

Pentru un subansamblu din cadrul unui sistem, testele de fiabilitate au indicat o valoare de 0,64. Din considerente de proiectare, fiabilitatea dorită a sistemului trebuie să fie de 0,97. Se optează pentru soluția redundanței paralele (montarea în paralel a unui număr de subansambluri identice). Calculați numărul necesar de astfel de subansambluri.

*Răspuns:*

n = $\frac{\ln(1-R_p)}{\ln(1-R)}$, rotunjit la valoarea întreagă superioară

n = 4

168

# II. Funcţia de fiabilitate

**Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***A. STRUCTURI STATICE***

*A2. Structuri statice în paralel*

*Exemplul 3*

Un sistem tehnic este prevăzut cu două motoare independente şi identice, dintre care cel puţin unul trebuie să funcţioneze.

Fiecare motor este compus din subansamblurile $S_1$, $S_2$ şi $S_3$, independente, care trebuie să funcţioneze toate trei pentru ca motorul să funcţioneze. Probabilităţile de funcţionare ale celor trei subansambluri din componenţa unui motor sunt egale cu 0,85, 0,8 şi 0,9.

Care este probabilitatea de funcţionare a întregului sistem tehnic ?

169


# II. Funcţia de fiabilitate

**Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***A. STRUCTURI STATICE***

*A2. Structuri statice în paralel*

*Exemplul 3*

Un sistem tehnic este prevăzut cu două motoare independente şi identice, dintre care cel puţin unul trebuie să funcţioneze.

Fiecare motor este compus din subansamblurile $S_1$, $S_2$ şi $S_3$, independente, care trebuie să funcţioneze toate trei pentru ca motorul să funcţioneze. Probabilităţile de funcţionare ale celor trei subansambluri din componenţa unui motor sunt egale cu 0,85, 0,8 şi 0,9.

Care este probabilitatea de funcţionare a întregului sistem tehnic ?


Răspuns:

$R_s = R_1 \times R_2 \times R_3$

$R_s = 0{,}612$

$R_p = 1 - (1 - R_s)^2$

$R_p = 84{,}95\%$

170

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *A. STRUCTURI STATICE*

*A3. Structuri statice „k” din „n”*

În acest caz, în sistem sunt conectate *n* structuri identice în paralel, din care cel puțin *k* trebuie să funcționeze simultan pentru ca sistemul să poată funcționa.

171


# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *A. STRUCTURI STATICE*

*A3. Structuri statice „k” din „n”*


Probabilitatea să funcționeze *k* dintre cele *n* structuri:

$$P_k = C_n^k \cdot R^k \cdot (1 - R)^{n-k}$$

172

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *A. STRUCTURI STATICE*

*A3. Structuri statice „k" din „n"*

Probabilitatea să funcționeze cel puțin *k* din cele *n* structuri:

$$R_{k/n} = \sum_{i=k}^{n} P_i$$

$$R_{k/n} = \sum_{i=k}^{n} C_n^i \cdot R^i \cdot (1-R)^{n-i}$$

173

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *A. STRUCTURI STATICE*

*A3. Structuri statice „k" din „n"*

Reamintire:

$$C_n^i = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$$

174

# II. Funcţia de fiabilitate

**Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***A. STRUCTURI STATICE***

*A3. Structuri statice „k" din „n"*

*Exemplu*

Un sistem este constituit din trei subansambluri active, independente şi identice. Pentru funcţionarea corectă a sistemului, cel puţin două din aceste subansambluri trebuie să funcţioneze.

Dacă fiabilitatea unui subansamblu este de 0,9, să se calculeze probabilitatea de funcţionare corectă a sistemului.

175


# II. Funcţia de fiabilitate

**Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***A. STRUCTURI STATICE***

*A3. Structuri statice „k" din „n"*

*Exemplu*

Un sistem este constituit din trei subansambluri active, independente şi identice. Pentru funcţionarea corectă a sistemului, cel puţin două din aceste subansambluri trebuie să funcţioneze.

Dacă fiabilitatea unui subansamblu este de 0,9, să se calculeze probabilitatea de funcţionare corectă a sistemului.


*Răspuns:*

$$R_{2/3} = \sum_{i=2}^{3} C_3^i \cdot R^i \cdot (1-R)^{3-i}$$

$R_{2/3}$ = 97,20%

176

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt = \widetilde{R(0)}$$

unde

$$\widetilde{R(s)} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot R(t)dt = L[R(t)]$$

(transformata Laplace a lui *R*(*t*))

177

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

$$MTTF = \int_0^\infty t \cdot f(t)dt \cdot = \frac{-d\widetilde{f(s)}}{ds}|_{s=0}$$

$$\widetilde{f(s)} = L[f(t)]$$

$$\frac{-d\widetilde{f(s)}}{ds} = L[t \cdot f(t)]$$

178

# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***B. STRUCTURI DINAMICE***

*B1. Sisteme serie*

$$P = \prod_{i=1}^{n} r_i$$

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

179

# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***B. STRUCTURI DINAMICE***

*B1. Sisteme serie*

Pentru *k* unități identice:

$$R_s(t) = [R(t)]^k$$

180

## II. Funcția de fiabilitate

### Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

***B. STRUCTURI DINAMICE***

*B1. Sisteme serie*

Dacă $R_i(t) = e^{-\lambda_i \cdot t}$ și se notează $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ rezultă:

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{1}{\lambda}$$

181

## II. Funcția de fiabilitate

### Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

***B. STRUCTURI DINAMICE***

*B1. Sisteme serie*

$$R(t) < R_i(t), \forall i$$

Se constată că fiabilitatea sistemului scade.

182

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

*B1. Sisteme serie*

Sistemul cedează la momentul $t = min(t_1, t_2 ... t_n)$, unde $t_i$ reprezintă momentul defectării componentei „*i*".

183

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

*B1. Sisteme serie*

*Exemplu*

Se consideră un autovehicul cu patru anvelope identice și independente. Rata de defectare a unei anvelope este de 0,0001 defectări/oră. Durata de viață a anvelopelor este distribuită exponențial.

a) Calculați fiabilitatea sistemului de anvelope al autovehiculului după 12 ore de funcționare.
b) Care este valoarea MTTF ?

184

# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***B. STRUCTURI DINAMICE***

*B1. Sisteme serie*

*Exemplu*

Se consideră un autovehicul cu patru anvelope identice și independente. Rata de defectare a unei anvelope este de 0,0001 defectări/oră. Durata de viață a anvelopelor este distribuită exponențial.

a) Calculați fiabilitatea sistemului de anvelope al autovehiculului după 12 ore de funcționare.
b) Care este valoarea MTTF ?

Răspunsuri: a) 99,5212%; b) 10.000 ore.

185

# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***B. STRUCTURI DINAMICE***

*B1. Sisteme paralele*

$$P = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - r_i)$$

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - R_i(t)]$$

186

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### B. STRUCTURI DINAMICE

*B1. Sisteme paralele*

Dacă $R_i(t) = e^{-\lambda_i \cdot t}$:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_i \cdot t})$$

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt$$

187

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### B. STRUCTURI DINAMICE

*B1. Sisteme paralele*

Exemplu pentru două unități conectate în paralel:

$$R(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_1 \cdot t}\right) \cdot \left(1 - e^{-\lambda_2 \cdot t}\right)$$

$$R(t) = 1 - [1 - e^{-\lambda_1 \cdot t} - e^{-\lambda_2 \cdot t} + e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot t}]$$

$$R(t) = e^{-\lambda_1 \cdot t} + e^{-\lambda_2 \cdot t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot t}$$

$$MTTF = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

188

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

*B1. Sisteme paralele*

Sistemul cedează când toate elementele sale cedează, la momentul $t = max(t_1, t_2 \ldots t_n)$, unde $t_i$ reprezintă momentul defectării componentei „*i*”.

189

# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***B. STRUCTURI DINAMICE***

*B1. Sisteme paralele*

Pentru *k* unități identice:

$$R_p(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^k$$

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt$$

$$MTTF = \int_0^\infty \left[1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^k\right]dt$$

$$MTTF = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$$

190

# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***B. STRUCTURI DINAMICE***

*B1. Sisteme paralele*

*Exemplu*

Un calculator are două unități CPU identice și independente care funcționează în paralel. Rata de defectare a unei unități CPU este de 0,005 defectări/oră.

- a) Calculați MTTF pentru sistemul de calcul.
- b) Calculați fiabilitatea sistemului de calcul după 800 de ore de funcționare.

191


# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***B. STRUCTURI DINAMICE***

*B1. Sisteme paralele*

*Exemplu*

Un calculator are două unități CPU identice și independente care funcționează în paralel. Rata de defectare a unei unități CPU este de 0,005 defectări/oră.

- a) Calculați MTTF pentru sistemul de calcul.
- b) Calculați fiabilitatea sistemului de calcul după 800 de ore de funcționare.


Răspunsuri: a) 300 ore; b) 3,6296%.

192

# II. Funcţia de fiabilitate

## Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### B. STRUCTURI DINAMICE

*B1. Sisteme „k" din „n"*

Într-un astfel de sistem sunt conectate *n* structuri identice în paralel, din care cel puţin *k* trebuie să funcţioneze simultan pentru ca sistemul să poată funcţiona.

În acest caz, pentru funcţii de fiabilitate exponenţiale:

$$R_{k/n}(t) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i \cdot e^{-i\lambda t} \cdot (1 - e^{-\lambda t})^{n-i}$$

193

# II. Funcţia de fiabilitate

## Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### B. STRUCTURI DINAMICE

*B1. Sisteme „k" din „n"*

$$MTTF = \int_0^{\infty} \left[ \sum_{i=k}^{n} C_n^i \cdot e^{-i\lambda t} \cdot (1 - e^{-\lambda t})^{n-i} \right] dt$$

$$MTTF = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$$

194

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

*B1. Sisteme „k" din „n"*

*Exemplu*

O aeronavă are patru motoare active identice și independente, dintre care cel puțin trei trebuie să funcționeze normal pentru ca aeronava să poată zbura.

a) Calculați probabilitatea de succes a unui zbor de 11 ore, dacă rata de defectare a fiecărui motor este de 0,0006 defectări/oră.

b) Care este valoarea MTTF ?

195

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

*B1. Sisteme „k" din „n"*

*Exemplu*

O aeronavă are patru motoare active identice și independente, dintre care cel puțin trei trebuie să funcționeze normal pentru ca aeronava să poată zbura.

a) Calculați probabilitatea de succes a unui zbor de 11 ore, dacă rata de defectare a fiecărui motor este de 0,0006 defectări/oră.

b) Care este valoarea MTTF ?

Răspunsuri: a) 99,9743%; b) 3055,56 ore.

196

# II. Funcţia de fiabilitate

## Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

*B4. Structuri standby*

Structura standby reprezintă o formă de redundanţă în care doar o unitate operează, iar alte *k* unităţi sunt în modul standby.

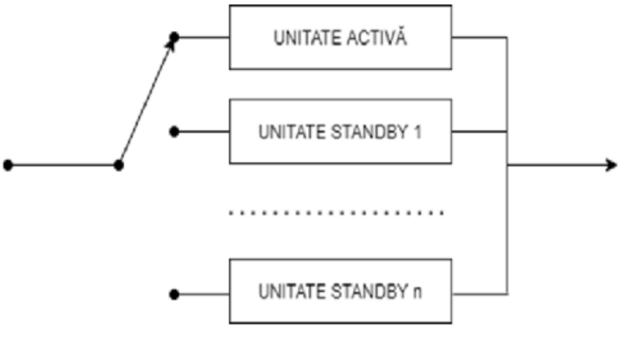
197

# II. Funcţia de fiabilitate

## Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

*B4. Structuri standby*




198

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

*B4. Structuri standby*

- Atunci când unitatea activă se defectează, este înlocuită imediat cu una dintre unitățile aflate în modul standby.
- Structura standby se defectează doar când se defectează unitatea activă și toate unitățile standby.

199

# II. Funcția de fiabilitate

## Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

*B4. Structuri standby*

Pentru *(k+1)* unități independente și identice cu funcția de fiabilitate exponențială:

$$R(t) = e^{-\lambda t},$$

fiabilitatea structurii standby este dată de expresia:

$$R_{sb}(t) = e^{-\lambda t} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

200

# II. Funcţia de fiabilitate

## Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

*B4. Structuri standby*

Expresia anterioară a fost determinată în condiţiile a două ipoteze simplificatoare:

- mecanismul de comutare nu se defectează niciodată;
- unităţile aflate în standby îşi păstrează caracteristicile nemodificate în timp (nu se defectează la rândul lor).

201

# II. Funcţia de fiabilitate

## Aplicaţiile funcţiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple

### *B. STRUCTURI DINAMICE*

*B4. Structuri standby*

$$MTTF_{sb} = \int_0^{\infty} R_{sb}(t)dt$$

$$MTTF_{sb} = \int_0^{\infty} \left[ e^{-\lambda t} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right] dt$$

$$MTTF = \frac{k+1}{\lambda}$$

202

# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***B. STRUCTURI DINAMICE***

*B4. Structuri standby*

<u>*Exemplu*</u>

Un sistem conține două pompe independente și identice care operează într-o structură de tip standby.

Calculați fiabilitatea structurii standby pentru o funcționare de 10 ore, dacă rata de defectare a pompei este de 0,004 defectări/oră, iar mecanismul de comutare este perfect.

Calculați MTTF.

*Atenție !* k=1.

Relațiile sunt valabile pentru *(k+1)* unități independente și identice, din care una funcționează și *k* sunt în standby.

203

# II. Funcția de fiabilitate

**Aplicațiile funcțiilor de fiabilitate în cazul structurilor simple**

***B. STRUCTURI DINAMICE***

*B4. Structuri standby*

<u>*Exemplu*</u>

Un sistem conține două pompe independente și identice care operează într-o structură de tip standby.

Calculați fiabilitatea structurii standby pentru o funcționare de 10 ore, dacă rata de defectare a pompei este de 0,004 defectări/oră, iar mecanismul de comutare este perfect.

Calculați MTTF.

*Răspunsuri:* $R_{sb}(t)$ = 99,92%; MTTF = 500 ore.

204