Ex 1)

1) $p = P(S \cup C)$

$= P(S) + P(C) - P(S \cap C)$

$= P(S) + P(C) - P(S)P(C)$

$= 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}03 \times 0{,}02$

$= 0{,}0494$

2) $X_i \sim \mathcal{B}(p)$

$E(X_i) = p$

$V(X_i) = p(1-p)$

3) $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$

$n = 25$

$Y = \sum_{i=1}^{25} X_i$

4) $P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)$

$= \binom{25}{0}(1-p)^{25} + \binom{25}{1} p (1-p)^{24}$

$+ \binom{25}{2} p^2 (1-p)^{23}$

$= (1-p)^{25} + 25p(1-p)^{24} + \frac{25 \times 24}{2} p^2 (1-p)^{23}$

$= 0{,}8762$.

$$P(X+Y=k) = \sum_{\ell=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^\ell}{\ell!} e^{-\mu}\frac{\mu^{k-\ell}}{(k-\ell)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \lambda^\ell \mu^{k-\ell}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda+\mu)^k$$

D'où $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Ex 3) $V(X+Y) = E\left[(X+Y)^2\right] - \left(E(X+Y)\right)^2$

$$= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY)$$

$$- \left(E(X)\right)^2 - \left(E(Y)\right)^2 - 2E(X)E(Y)$$

$$= V(X) + V(Y) + 2\left[\underbrace{E(XY) - E(X)E(Y)}_{Cov(X,Y)}\right]$$

L2 Info / L2 Math $\boxed{\text{TD 1}}$ 2016-17. 2017-18. ①

<u>Ex 1</u> 1)

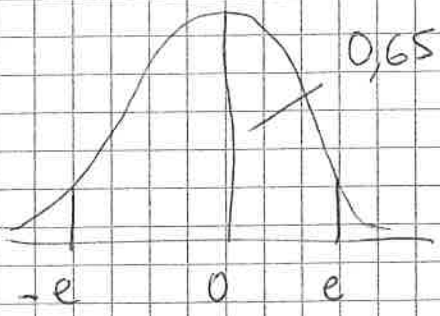
$P(X > 0{,}93) = 1 - P(X < 0{,}93)$
$= 1 - 0{,}8238$
$= 0{,}1762$

$a = P(X < 0{,}93)$
$= 0{,}8238$

$b = P(X < -0{,}74) = P(X > 0{,}74) = 1 - P(X < 0{,}74)$
$= 1 - 0{,}7703$
$= 0{,}2297$

$c = P(-1{,}4 < X < 0{,}2) = P(X < 0{,}2) - P(X < -1{,}4)$
$= P(X < 0{,}2) - (1 - P(X < 1{,}4))$
$= 0{,}5793 - 1 + 0{,}9192$
$= 0{,}4985$

$P(X < d) = 0{,}25 \iff P(X > -d) = 0{,}25$
$\iff P(X < -d) = 0{,}75$
$d = -0{,}675$



$P(X < e) = 0{,}65 + \dfrac{0{,}35}{2}$

$= 0{,}825$

$e = 0{,}935$

2) $Y \sim \mathcal{N}(4, 16)$ $\quad g = P(Y > 0) = P\left(\dfrac{Y-4}{4} > -1\right) = P(Z > -1)$
$= P(Z < 1)$ où
$= 0{,}8413$ $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$P(0 < Y < h) = P(Y < h) - P(Y < 0)$
$P(Y < h) = P\left(\dfrac{Y-4}{4} < \dfrac{h-4}{4}\right) = P\left(Z < \dfrac{h-4}{4}\right)$
$\quad \overset{\shortparallel}{0{,}5} + P(Y<0) = 0{,}5 + 1 - 0{,}8413 = 0{,}6587$ D'où $\dfrac{h-4}{4} = 0{,}41$

D'où $h = 4 \times 0{,}41 + 4 = 5{,}64$

3) $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{cases} P(Z<2) = 0{,}6915 \\ P(Z<3) = 0{,}8413. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P\left(X < \frac{2-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}6915 \\ P\left(X < \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8413 \end{cases}$$

avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{cases} \frac{3-\mu}{\sigma} = 1 \\ \frac{2-\mu}{\sigma} = 0{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu + \sigma = 3 \\ \mu + 0{,}5\sigma = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}5\sigma = 1 \\ \mu + \sigma = 3 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} \sigma = 2 \\ \mu = 1 \end{cases}}$$

Ex 5 $\frac{X+14}{8} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$P(X<-30) = P\left(\frac{X+14}{8} < -2\right)$$

$= P(Z<-2)$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$= 1 - P(Z<2)$

$= 1 - 0{,}9772 = 0.0228$

Ex 6

~~Solution de l'exercice 3.7~~. On veut grouper les enfants selon leur poids de manière à avoir le même nombre d'enfants dans chaque groupe. Soit P la variable aléatoire représentant le poids d'un enfant. $P \sim \mathcal{N}(32.3, 1.867^2)$. On veut

Poids	$P < p_1$	$p_1 < P < p_2$	$p_2 < P < p_3$	$p_3 < P < p_4$	$p_4 < P < p_5$	$p_5 < P$
Probabilité	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

On veut séparer en 6 catégories avec les mêmes effectifs donc dans chaque catégorie, on met un sixième de l'effectif global. On obtient facilement le tableau suivant à partir du tableau précédent :

Poids	$P < p_1$	$P < p_2$	$P < p_3$	$P < p_4$	$P < p_5$
Probabilité	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6

Ce qu'on cherche, ce sont p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. On pose $Z = \frac{P-32.3}{1.867}$ et on a $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Puis, par le calcul,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P < p_1) = 0.16666 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_1 - 32.3}{1.867}\right) = 0.16666\\ &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{32.3 - p_1}{1.867}\right) = 0.83333\\ &\iff \frac{32.3 - p_1}{1.867} = 0.97 \iff p_1 = 30.49kg\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P < p_2) = 0.33333 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_2 - 32.3}{1.867}\right) = 0.33333\\ &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{32.3 - p_2}{1.867}\right) = 0.66666\\ &\iff \frac{32.3 - p_2}{1.867} = 0.43 \iff p_2 = 31.5kg\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P < p_3) = 0.5 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_3 - 32.3}{1.867}\right) = 0.5\\ &\iff \frac{32.3 - p_3}{1.867} = 0 \iff p_3 = 32.3kg\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P < p_4) = 0.66666 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_4 - 32.3}{1.867}\right) = 0.66666\\ &\iff \frac{-32.3 + p_4}{1.867} = 0.43 \iff p_4 = 33.1kg\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P < p_5) = 0.83333 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_5 - 32.3}{1.867}\right) = 0.83333\\ &\iff \frac{-32.3 + p_5}{1.867} = 0.97 \iff p_5 = 34.11kg\end{aligned}$$

(extrait de DS du 11/03/2016) L2 Math ④

DL2 Math-Eco

L2 Info

DL2 Bio-info

Ex 7

(Question de cours).

1) St X : $E(X) = m_1$, $V(X) = \sigma_1^2$

et Y : $E(Y) = m_2$, $V(Y) = \sigma_2^2$

avec $X \perp\!\!\!\perp Y$.

$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = m_1 + m_2$

2) car l'espérance est linéaire

$V(Z) = V(X+Y)$

$= V(X) + V(Y)$ car $X \perp\!\!\!\perp Y$

$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

$X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

3) $Z \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ car une somme de v.a. gaussiennes $\perp\!\!\!\perp$ suit une loi gaussienne.

4) $E(2X+5Y) = 2m_1 + 5m_2$ par linéarité

$V(2X+5Y) = 4V(X) + 25V(Y)$

$= 4\sigma_1^2 + 25\sigma_2^2$

car $V(aX+b) = a^2 V(X)$

et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ si $X \perp\!\!\!\perp Y$.

$$P(X \geq 99) = P\left(\frac{X-m}{1{,}5} \geq \frac{99-m}{1{,}5}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{99-m}{1{,}5}\right) \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

On cherche donc m tq

$$P\left(Z \geq \frac{99-m}{1{,}5}\right) \geq 0{,}95$$

cad $$1 - P\left(Z \leq \frac{99-m}{1{,}5}\right) \geq 0{,}95$$

cad $$P\left(Z \leq \frac{99-m}{1{,}5}\right) \leq 0{,}05$$

On cherche donc m tq

$$P\left(Z \geq \frac{m-99}{1{,}5}\right) \leq 0{,}05$$

(par symétrie)

cad $$P\left(Z \leq \frac{m-99}{1{,}5}\right) \geq 0{,}95$$

On trouve ds la table

$$\frac{m-99}{1{,}5} = 1{,}65$$

On cherche donc m tq

$$P\left(Z \geq \frac{595-6m}{\sqrt{6}\times 1{,}5}\right) \geq 0{,}99 . \quad \text{où}$$

$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

c.a.d m tq

$$P\left(Z \leq \frac{6m-595}{\sqrt{6}\times 1{,}5}\right) \geq 0{,}99 .$$

On lit dans la table $\dfrac{6m-595}{\sqrt{6}\times 1{,}5} = 2{,}33$

et on en déduit $m = \frac{1}{6}\, 595 + 2{,}33 \times \sqrt{6} \times 1{,}5$
$= 100{,}5935$.

Ex 8

Calculer la fc génératrice des moments d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\phi_Z(s) = E(e^{sZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-s)^2 + \frac{s^2}{2}} dx$$

$$= e^{s^2/2}.$$

$$\boxed{E(e^{sZ}) = e^{s^2/2}}$$

Calculer la fc génératrice des moments d'une loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

$$\phi_T(s) = E(e^{sT}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} dx$$

$y = \frac{x-m}{\sigma}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(\sigma y+m)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy.$$

$$= e^{sm} E(e^{s\sigma Z}) = e^{sm + \frac{s^2\sigma^2}{2}}$$

Densité de $X+Y$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}(x-m_1-m_2)^2\right)$$