

Ex 1)

$$\begin{aligned}
 1) \quad P &= P(S \cup C) \\
 &= P(S) + P(C) - P(S \cap C) \\
 &= P(S) + P(C) - P(S)P(C) \\
 &= 0,03 + 0,02 - 0,03 \times 0,02 \\
 &= 0,0494
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad X_i &\sim B(p) \\
 E(X_i) &= p \\
 V(X_i) &= p(1-p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad Y &\sim B(n, p) \\
 n &= 25 \\
 Y &= \sum_{i=1}^{25} X_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad P(Y \leq 2) &= P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) \\
 &= \binom{25}{0} (1-p)^{25} + \binom{25}{1} p(1-p)^{24} \\
 &\quad + \binom{25}{2} p^2 (1-p)^{23} \\
 &= (1-p)^{25} + 25 p(1-p)^{24} + \frac{25 \times 24}{2} p^2 (1-p)^{23} \\
 &= 0,8762
 \end{aligned}$$

$$P(X+Y=k) = \sum_{l=0}^k e^{-d} \frac{d^l}{l!} e^{-p} \frac{p^{k-l}}{(k-l)!} \quad (2)$$

$$= \frac{e^{-(d+p)}}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} d^l p^{k-l}$$

$$= \frac{e^{-(d+p)}}{k!} (d+p)^k$$

D'où $X+Y \sim P(d+p)$

$$\begin{aligned} \text{Ex 3)} \quad V(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - (E(X+Y))^2 \\ &= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) \\ &\quad - (E(X))^2 - (E(Y))^2 - 2E(X)E(Y) \\ &= V(X) + V(Y) + 2 \underbrace{[E(XY) - E(X)E(Y)]}_{\text{Cov}(X, Y)} \end{aligned}$$

Ex 4 1)

$$\begin{aligned}
 P(X > 0,93) &= 1 - P(X < 0,93) \\
 &= 1 - 0,8238 \\
 &= 0,1762
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= P(X < 0,93) \\
 &= 0,8238
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= P(X < -0,74) = P(X > 0,74) = 1 - P(X < 0,74) \\
 &= 1 - 0,7703 \\
 &= 0,2297
 \end{aligned}$$

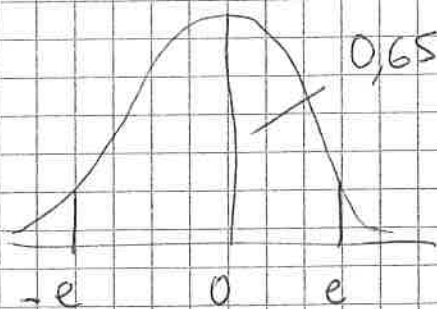
$$\begin{aligned}
 c &= P(-1,4 < X < 0,2) = P(X < 0,2) - P(X < -1,4) \\
 &= P(X < 0,2) - (1 - P(X < 1,4)) \\
 &= 0,5793 - 1 + 0,9192 \\
 &= 0,4985
 \end{aligned}$$

$$P(X < d) = 0,25$$

$$\Rightarrow P(X > -d) = 0,25$$

$$\Rightarrow P(X < -d) = 0,75$$

$$d = -0,675$$



$$\begin{aligned}
 P(X < e) &= 0,65 + \frac{0,35}{2} \\
 &= 0,825
 \end{aligned}$$

$$e = 0,935$$

$$2) Y \sim N(4, 16)$$

$$\begin{aligned}
 q &= P(Y > 0) = P\left(\frac{Y-4}{4} > -1\right) = P(Z > -1) \\
 &= P(Z < 1) \quad \text{ou} \\
 &= 0,8413 \quad Z \sim N(0,1)
 \end{aligned}$$

$$P(0 < Y < h) = P(Y < h) - P(Y < 0)$$

$$P(Y < h) = P\left(\frac{Y-4}{4} < \frac{h-4}{4}\right) = P\left(Z < \frac{h-4}{4}\right)$$

$$0,5 + P(Y < 0) = 0,5 + 1 - 0,8413 = 0,6587 \quad \text{Donc } \frac{h-4}{4} = 0,41$$

$$\text{Donc } h = 4 \times 0,41 + 4 = 5,64$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(Z < 2) = 0,6915 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(Z < 3) = 0,8413 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P\left(X < \frac{2-\mu}{\sigma}\right) = 0,6915 \\ P\left(X < \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0,8413 \end{array} \right.$$

avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3-\mu}{\sigma} = 1 \\ \frac{2-\mu}{\sigma} = 0,5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu + \sigma = 3 \\ \mu + 0,5\sigma = 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,5\sigma = 1 \\ \mu + \sigma = 3 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 2 \\ \mu = 1 \end{array} \right.}$$

Ex 5 $\frac{X+14}{8} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$P(X < -30) = P\left(\frac{X+14}{8} < -2\right)$$

$$= P(Z < -2) \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= 1 - P(Z < 2)$$

$$= 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Ex 6

~~Solution de l'exercice 3.7.~~ On veut grouper les enfants selon leur poids de manière à avoir le même nombre d'enfants dans chaque groupe. Soit P la variable aléatoire représentant le poids d'un enfant. $P \sim \mathcal{N}(32.3, 1.867^2)$. On veut

Poids	$P < p_1$	$p_1 < P < p_2$	$p_2 < P < p_3$	$p_3 < P < p_4$	$p_4 < P < p_5$	$p_5 < P$
Probabilité	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

On veut séparer en 6 catégories avec les mêmes effectifs donc dans chaque catégorie, on met un sixième de l'effectif global. On obtient facilement le tableau suivant à partir du tableau précédent :

Poids	$P < p_1$	$P < p_2$	$P < p_3$	$P < p_4$	$P < p_5$
Probabilité	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6

Ce qu'on cherche, ce sont p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 . On pose $Z = \frac{P-32.3}{1.867}$ et on a $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
Puis, par le calcul,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(P < p_1) = 0.16666 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_1 - 32.3}{1.867}\right) = 0.16666 \\ &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{32.3 - p_1}{1.867}\right) = 0.83333 \\ &\iff \frac{32.3 - p_1}{1.867} = 0.97 \iff p_1 = 30.49 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(P < p_2) = 0.33333 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_2 - 32.3}{1.867}\right) = 0.33333 \\ &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{32.3 - p_2}{1.867}\right) = 0.66666 \\ &\iff \frac{32.3 - p_2}{1.867} = 0.43 \iff p_2 = 31.5 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(P < p_3) = 0.5 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_3 - 32.3}{1.867}\right) = 0.5 \\ &\iff \frac{32.3 - p_3}{1.867} = 0 \iff p_3 = 32.3 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(P < p_4) = 0.66666 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_4 - 32.3}{1.867}\right) = 0.66666 \\ &\iff \frac{-32.3 + p_4}{1.867} = 0.43 \iff p_4 = 33.1 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(P < p_5) = 0.83333 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_5 - 32.3}{1.867}\right) = 0.83333 \\ &\iff \frac{-32.3 + p_5}{1.867} = 0.97 \iff p_5 = 34.11 \text{ kg} \end{aligned}$$

Ex 7.

(Question de cours).

1) Soit X : $E(X) = m_1$, $V(X) = \sigma_1^2$

et Y : $E(Y) = m_2$, $V(Y) = \sigma_2^2$

avec $X \perp Y$.

$\therefore E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = m_1 + m_2$

2) \uparrow car l'espérance est linéaire

$$V(Z) = V(X+Y)$$

$$= V(X) + V(Y) \text{ car } X \perp Y$$

$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

$$X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2), X \perp Y$$

3) $Z \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ car une somme de v.a. gaussiennes \perp suit une loi gaussienne.

4) $E(2X+5Y) = 2m_1 + 5m_2$ par linéarité

$$V(2X+5Y) = 4V(X) + 25V(Y)$$

$$= 4\sigma_1^2 + 25\sigma_2^2$$

$$\text{car } V(aX+b) = a^2V(X)$$

$$\text{et } V(X+Y) = V(X) + V(Y) \text{ si } X \perp Y.$$

$$P(X \geq 99) = P\left(\frac{X - \mu}{1,5} \geq \frac{99 - \mu}{1,5}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{99 - \mu}{1,5}\right) \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

On cherche donc μ tq

$$P\left(Z \geq \frac{99 - \mu}{1,5}\right) \geq 0,95$$

cad $1 - P\left(Z \leq \frac{99 - \mu}{1,5}\right) \geq 0,95$

cad $P\left(Z \leq \frac{99 - \mu}{1,5}\right) \leq 0,05$

On cherche donc μ tq

$$P\left(Z \geq \frac{\mu - 99}{1,5}\right) \leq 0,05$$

(par symétrie)

→ cad $P\left(Z \leq \frac{\mu - 99}{1,5}\right) \geq 0,95$

On trouve ds la table

$$\frac{\mu - 99}{1,5} = 1,65$$

On cherche donc un t_q

$$P\left(z \geq \frac{595 - 6\mu}{\sqrt{6} \times 1,5}\right) \geq 0,99. \quad \text{ou}$$

$$z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

ad un t_q

$$P\left(z \leq \frac{6\mu - 595}{\sqrt{6} \times 1,5}\right) \geq 0,99.$$

On lit dans la table $\frac{6\mu - 595}{\sqrt{6} \times 1,5} = 2,33$

et on en déduit $\mu = \frac{1}{6} 595 + 2,33 \times \sqrt{6} \times 1,5$
 $= 100,5935$

Ex 8

Calculer la f.c.g. génératrice des moments
d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\begin{aligned}\phi_{\frac{1}{2}}(t) E(e^{\Delta z}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Delta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\Delta)^2 + \frac{\Delta^2}{2}} dx \\ &= e^{\Delta^2/2}\end{aligned}$$

$$E(e^{\Delta t}) = e^{\Delta^2/2}$$

Calculer la f.c.g. génératrice des moments
d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\begin{aligned}\phi_{\frac{1}{2}}(t) E(e^{\Delta x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Delta x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\ | = \frac{x-\mu}{\sigma} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Delta(\sigma y + \mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \\ &= e^{\Delta\mu} E(e^{\Delta\sigma z}) = e^{\Delta\mu + \frac{\Delta^2\sigma^2}{2}}\end{aligned}$$

Densité de $X+Y$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} (x - \mu_1 - \mu_2)^2\right)$$

Feuille de TD 1 : Correction de l'exercice 6

On veut grouper les enfants selon leur poids de manière à avoir le même nombre attendu d'enfants dans chaque groupe. Soit P la variable aléatoire représentant le poids d'un enfant. $P \sim \mathcal{N}(32.3, 1.867^2)$. On veut séparer en 6 catégories avec les mêmes effectifs attendus donc on veut la répartition suivante :

Poids	$P < p_1$	$p_1 < P < p_2$	$p_2 < P < p_3$	$p_3 < P < p_4$	$p_4 < P < p_5$	$p_5 < P$
Probabilité	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

On obtient facilement le tableau suivant à partir du tableau précédent :

Poids	$P < p_1$	$P < p_2$	$P < p_3$	$P < p_4$	$P < p_5$
Probabilité	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6

Ce qu'on cherche, ce sont p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 . On pose $Z = \frac{P-32.3}{1.867}$ et on a $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Puis, par le calcul,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(P < p_1) = 0.16666 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_1 - 32.3}{1.867}\right) = 0.16666 \\
&\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{32.3 - p_1}{1.867}\right) = 0.83333 \\
&\iff \frac{32.3 - p_1}{1.867} = 0.97 \iff p_1 = 30.49kg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(P < p_2) = 0.33333 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_2 - 32.3}{1.867}\right) = 0.33333 \\
&\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{32.3 - p_2}{1.867}\right) = 0.66666 \\
&\iff \frac{32.3 - p_2}{1.867} = 0.43 \iff p_2 = 31.5kg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P < p_3) = 0.5 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_3 - 32.3}{1.867}\right) = 0.5 \\ &\iff \frac{32.3 - p_3}{1.867} = 0 \iff p_3 = 32.3kg\end{aligned}$$

Ce dernier calcul n'était pas nécessaire puisque par symétrie de la courbe de densité par rapport à la droite $x = 32.3$ (32.3 est l'espérance de P), on sait directement que $\mathbb{P}(P < 32.3) = 0.5$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P < p_4) = 0.66666 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_4 - 32.3}{1.867}\right) = 0.66666 \\ &\iff \frac{p_4 - 32.3}{1.867} = 0.43 \iff p_4 = 33.1kg\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P < p_5) = 0.83333 &\iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{p_5 - 32.3}{1.867}\right) = 0.83333 \\ &\iff \frac{p_5 - 32.3}{1.867} = 0.97 \iff p_5 = 34.11kg\end{aligned}$$

Ces deux derniers calculs n'étaient pas nécessaires puisque par symétrie de la courbe de densité par rapport à la droite $x = 32.3$, on a :

- p_4 symétrique de p_2 par rapport à cette droite,
- p_5 symétrique de p_1 par rapport à cette droite.