TD5

L2 Math
2014-15
15-16
16-17
17-18

ex 1 X poids d'une boîte de conserve (en kg)

$X \sim \mathcal{N}(\mu; 0,04)$

X_i poids de la boîte i

$X_1 \dots X_n$ iid $\quad n = 10$.

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \bar{x} = 1,13$

H_0 : " $\mu = 1$ " contre H_1 : " $\mu = 1,25$ ".

1) .

2)

3)

4) $\underbrace{P_{H_0}(\text{décider } H_1)}_{\text{risque de 1ère espèce}} \leq \alpha$ ← niveau

5) Statistique de test.

$\bar{X}_n \qquad \bar{X}_n \underset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(1, \frac{0,04}{n}) \qquad \bar{X}_n \underset{H_1}{\sim} \mathcal{N}(1,25; \frac{0,04}{n})$

ou $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - 1}{\sqrt{0,04}} = T_n$ si on centre et on normalise.

$T_n \underset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

6) $ZR_\alpha = \{ \bar{X}_n > s_\alpha \}$

ou $ZR_\alpha = \{ \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - 1}{0,2} > u_\alpha \}$

$T_n \underset{H_1}{\sim} \mathcal{N}(\underbrace{\sqrt{n} \frac{0,25}{0,2}}_{3,95 = \mu_1 > 0}, 1)$

* s_α tq $P_{H_0}(\overline{X}_n > s_\alpha) = \alpha$.

ie $P\left(\mathcal{N}\left(1, \frac{0{,}04}{10}\right) > s_\alpha\right) = \alpha$

on centre et on réduit.

$$P\left(Z > \sqrt{10}\,\frac{s_\alpha - 1}{0{,}2}\right) = \alpha.$$

$\sqrt{10}\,\frac{s_\alpha - 1}{0{,}2}$ quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

* u_α quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

7) $\alpha = 1\%$ $u_\alpha = 2{,}325$.
$\alpha = 5\%$ $u_\alpha = 1{,}645$
$\alpha = 10\%$ $u_\alpha = 1{,}285$

On observe $t_n = \sqrt{10}\,\frac{1{,}13 - 1}{0{,}2} = 2{,}05548$.

significatif au niveau 5%,
non ______ 1%.

8) $P_{H_0}(T_n > 2{,}05548) = P(Z > 2{,}05) = 1 - 0{,}9798$
$= 0{,}0202$ 2,02 %

9) P_{H_1} (décider H_1) . ②

$\alpha = 1\%$ $\quad \Pi_\alpha = P_{H_1}(T_n > 2,325)$

$= P_{H_1}\left(T_n - \sqrt{n}\,\frac{0,25}{0,2} > 2,325 - \sqrt{10}\,\frac{0,25}{0,2}\right)$

$= P\left(Z > 2,325 - \sqrt{10}\,\frac{0,25}{0,2}\right)$

$= P(Z > -1,627847)$

$\simeq P(Z < 1,63)$

$= 0,9484$

$\alpha = 5\%$ $\quad \Pi_\alpha = P_{H_1}(T_n > 1,645)$

$= P\left(Z > 1,645 - \sqrt{10}\,\frac{0,25}{0,2}\right)$

$= P(Z > -2,31)$

$= 0,9896$.

$\alpha = 10\%$ $\quad \Pi_\alpha = P_{H_1}(T_n > 1,285)$

$= P\left(Z > 1,285 - \sqrt{10}\,\frac{0,25}{0,2}\right)$

$= P(Z > -2,67)$

$= 0,9962$

Plus α est gd, plus le test est puissant.

11) Même statistique de test
Même zone de rejet.
Même seuil
Même conclusion

12) Fonction de puissance

$$\left]1,\infty\right[\longrightarrow [0,1]$$
$$\mu \longmapsto \pi(\mu) = P_\mu(T_n > u_\alpha)$$

avec $ZR_\alpha = \{T_n > u_\alpha\}$.

$\alpha = 5\%$, $\pi(\mu) = P_\mu(T_n > 1{,}645)$

$\pi(1{,}15) = P_{\mu=1{,}15}(T_n > 1{,}645)$ où $T_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}_n - 1}{0{,}2}$

$= P_{\mu=1{,}15}\left(T_n - \sqrt{n}\,\dfrac{0{,}15}{0{,}2} > 1{,}645 - \sqrt{n}\,\dfrac{0{,}15}{0{,}2}\right)$

$E_\mu(T_n) = \sqrt{n}\,\dfrac{\mu - 1}{0{,}2}$

$V_\mu(T_n) = 1$.

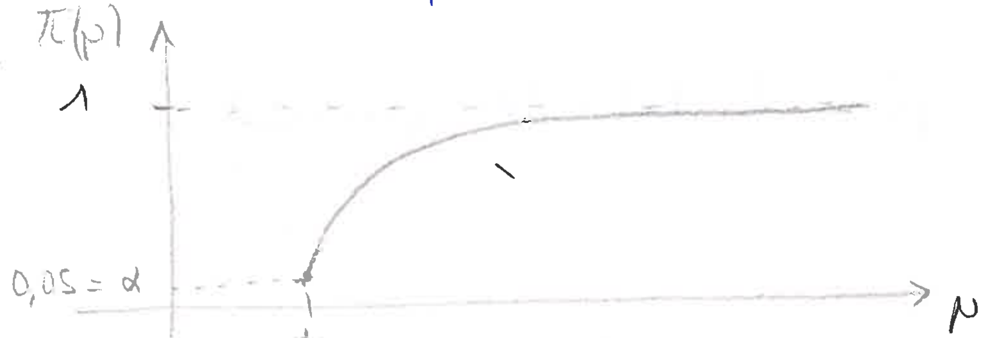
$T_n \underset{\mu}{\sim} \mathcal{N}\left(\sqrt{n}\,\dfrac{\mu-1}{0{,}2}, 1\right)$

$= P\left(Z > 1{,}645 - \sqrt{10}\,\dfrac{0{,}15}{0{,}2}\right)$

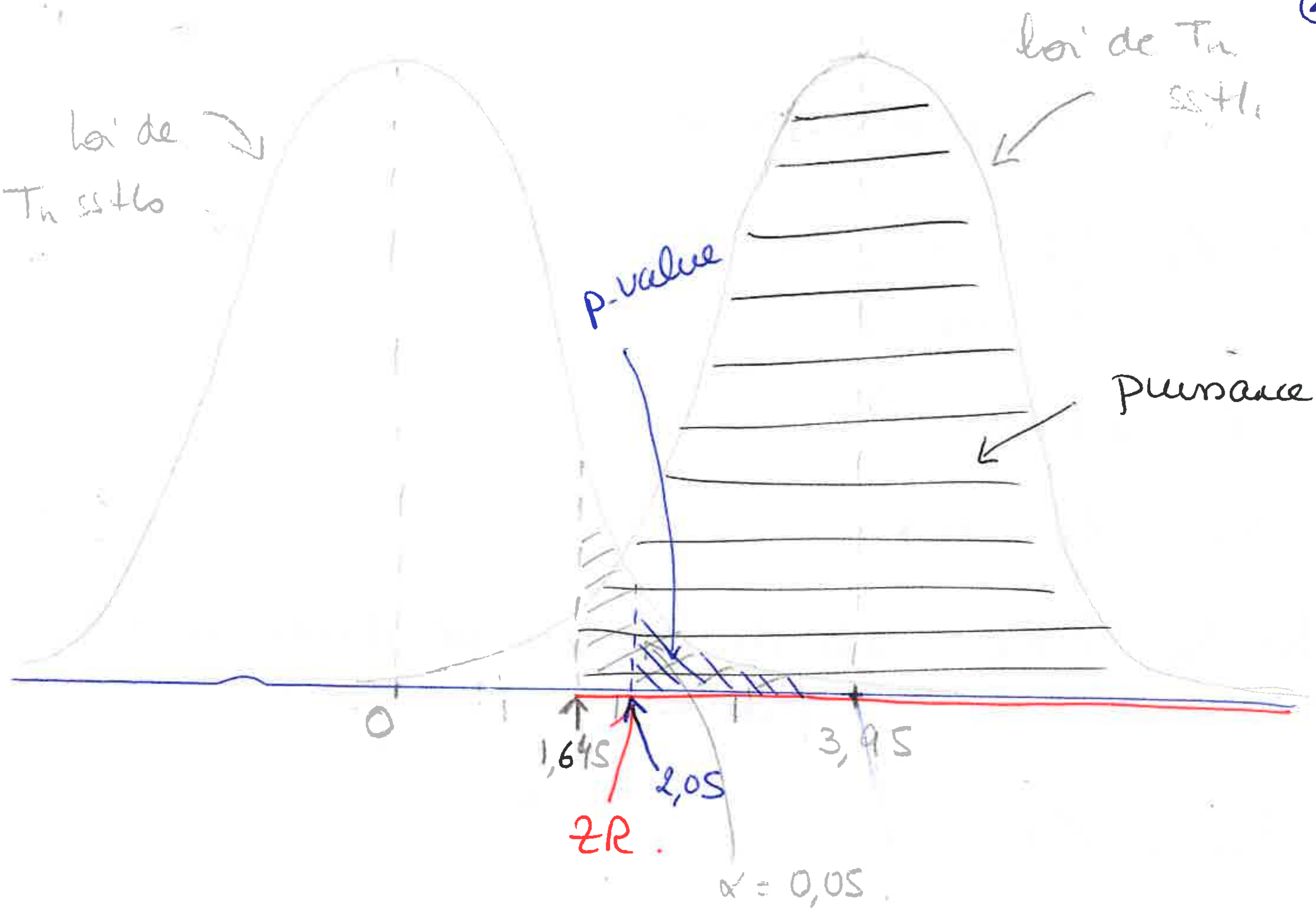
$= P(Z > -0{,}73)$

$= 0{,}7673$

La puissance ↓ qd on se rapproche de H_0.



10)



13) $T_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\bar{X}_n - 1}{0,2}$ $\qquad T_n \underset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

$\alpha = 5\%$

$ZR = \{T_n > 1,645\}$

$\pi(1,15) = P_{\mu=1,15}(T_n > 1,645)$

avec $T_n \underset{\mu}{\sim} \mathcal{N}\left(\sqrt{n}\,\dfrac{\mu-1}{0,2}\,;\,1\right)$

$\pi(1,15) = P_{\mu=1,15}\left(T_n - \sqrt{n}\,\dfrac{0,15}{0,2} > 1,645 - \sqrt{n}\,\dfrac{0,15}{0,2}\right)$

$= P\left(Z > 1,645 - \sqrt{100}\,\dfrac{0,15}{0,2}\right)$

$= P(Z > -5,855) = 1.$

Plus n est gd, plus le test est puissant

Ex 2 $n = 60$.

$p = P($ je perds le jeu $)$.

1) St $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si je perds le jeu } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$X_i \sim \mathcal{B}(p)$.

$X_1 \dots X_n$ iid.

St $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = nb de parties perdues sur n parties.

$S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

$\hat{p} = \frac{S_n}{n}$. $\hat{p}_{obs} = \frac{38}{60} \simeq 0{,}63$.

2) H_0 : "$p = 0{,}5$" contre H_1 : "$p = 0{,}6$".

(a). $\sqrt{n} \frac{\hat{p} - 0{,}5}{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}} = 2\sqrt{n}(\hat{p} - \frac{1}{2}) = T_n$

(b). $ZR_\alpha = \{ T_n > u_\alpha \}$.

car $\hat{p}$ ~~est~~ a tendance à être + grd ss H_1 que ss H_0.

dc T_n ________________.

$T_n \underset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ approx si n grd.

$T_n \underset{H_1}{\sim} \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ avec $\mu_1 > 0$

$\sigma_1^2 = V_{0,6}(T_n) = V_{0,6}\left(2\sqrt{n}\left(\hat{p}-\frac{1}{2}\right)\right)$ (5)

$E_{0,6}(T_n) = E_{0,6}\left(2\sqrt{n}\left(\hat{p}-\frac{1}{2}\right)\right)$ $= 4n\, V_{0,6}(\hat{p})$

$= 2\sqrt{n}\left(E_{0,6}(\hat{p}) - \frac{1}{2}\right)$ $= 4n\, \frac{0,6\times 0,4}{n}$

$= 2\sqrt{n}\,(0,6-0,5)$ $= 4\times 0,24 = 0,96.$

$= 2\sqrt{n}\times 0,1 = \mu_1 > 0.$

$\mathcal{R}_\alpha$ avec u_α tq $\lim_{n\to\infty} P_{H_0}(T_n > u_\alpha) = \alpha.$

i.e. $P(Z > u_\alpha) = \alpha.$

u_α quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

(c) $P_{H_0}(T_n > u_\alpha) =$ risque de 1ère espèce

$P_{p=0,6}(T_n \leq u_\alpha) =$ risque de 2ème espèce

risque de 1ère espèce $= P_{H_0}\left(2\sqrt{n}\left(\hat{p}-\frac{1}{2}\right) > u_\alpha\right)$

$= P_{H_0}\left(\hat{p} > \frac{u_\alpha}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\right)$

$= P_{H_0}\left(S_n > \frac{u_\alpha\sqrt{n}}{2} + \frac{n}{2}\right)$

$S_n \underset{H_0}{\sim} \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right).$

risque de 2ème espèce $= P_{H_1}(T_n < u_\alpha)$

$= P_{H_1}\left(S_n < \frac{u_\alpha\sqrt{n}}{2} + \frac{n}{2}\right)$

où $S_n \underset{H_1}{\sim} \mathcal{B}(n; 0,6)$

Dur à calculer ...

d) $\alpha = 0{,}05$.

$P(Z > u_\alpha) = 0{,}05 \qquad u_\alpha = 1{,}645$.

$ZR_{0,05} = \{T_n > 1{,}645\}$.

$\pi = P_{H_1}(T_n > 1{,}645)$

$= P_{p=0,6}\left(2\sqrt{n}\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right) > 1{,}645\right)$

$= P_{p=0,6}\left(\hat{p} > \frac{1{,}645}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\right)$

Sous H_1 : $\sqrt{n}\,\dfrac{\hat{p}-0{,}6}{\sqrt{0{,}6 \times 0{,}4}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ approx n gd.

$\pi \approx P_{p=0,6}\left(\sqrt{n}\,\dfrac{\hat{p}-0{,}6}{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4}} > \left(\dfrac{1{,}645}{2\sqrt{n}} + 0{,}5 - 0{,}6\right) \times \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}6\times0{,}4}}\right)$

$\approx P\left(Z > \left(\dfrac{1{,}645}{2\sqrt{60}} - 0{,}1\right)\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4}}\right)$

$= P(Z > 0{,}1) = 1 - 0{,}5398$

$= 0{,}4602$

e) $\alpha = 0{,}03 \qquad u_\alpha$ tq $P(Z < u_\alpha) = 0{,}97$

$u_\alpha = 1{,}885$.

$\alpha = 0{,}05 \qquad u_\alpha = 1{,}645$

$\alpha = 0{,}01 \qquad u_\alpha$ tq $P(Z \leq u_\alpha) = 0{,}99$

$u_\alpha = 2{,}325$.

$t_n = \sqrt{60} \times 2 \times \left(\frac{38}{60} - \frac{1}{2}\right)$

$= 2,0656.$

Test significatif au niveau 3%, 5% mais pas au niveau 1%.

f) p-value asymptotique

p-value $= P_{H_0}(T_n > 2,07)$

$\approx P(Z > 2,07) = 1 - 0,9808 = 0,0192.$

1,92 %

Ex 3

X_i durée de sommeil en 1 nuit d'un enfant

$i = 1, \ldots, 40$

$\bar{x} = 9,5$ h

$V(X_i) = 1.$

H_0 : "$\mu = 10$" contre H_1 : "$\mu \neq 10$".

Stat de test $T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - 10}{1}$

$= \sqrt{n}(\bar{X}_n - 10).$

Test d'ajustement de l'espérance d'1 n-éch de loi qq. → test asymptotique

sous H_0 : $T_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ approx si n est grd

Sss H_1 $E(T_n) = \sqrt{n}(\mu - 10)$

$V(T_n) = 1$

$T_n \sim \mathcal{N}(\mu_1, 1)$ où $\mu_1 \neq 0$.
approx si n gd.

$\alpha = 5\%$ $\mathcal{R}_\alpha = \{ |T_n| > s_\alpha \}$.

s_α tq $\lim_{n \to \infty} P_{H_0}(|T_n| > s_\alpha) = \alpha$

càd s_α tq $P(|Z| > s_\alpha) = \alpha$.

ie $P(Z \leq s_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

$s_\alpha = 1,96$.

$t_n = \sqrt{40}(9,5 - 10) = -3,16$.

Le test est significatif au niveau asympt 5%

p value asympt $P_{H_0}(|T_n| > 3,16)$

$\simeq P(|Z| > 3,16)$

$= 2(1 - 0,9992)$

$= 2(0,0008) = 0,00016$

0,016%

Ex4 X_i nb d'agression pour un jour i
$X_1 \dots X_n$ iid
$X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$

1) $\hat{\lambda} = \bar{X}_n$ car $E(X_i) = \lambda$.

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

estimation $\hat{\lambda}_{obs} = 2,2$.

2) $H_0 : \lambda = 1,3$ contre $H_1 : \lambda > 1,3$

3) $T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - 1,3}{\sqrt{1,3}}$.

$\bar{X}_n$ a tendance à être + gd ss H_1 que ss H_0.
Dc T_n a tendance à être + gd ss H_1 que ss H_0. D'où

$ZR = \{ T_n > s_\alpha \}$.

$T_n \underset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ approx n gd.

Sous H_1 : $T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - 1,3}{\sqrt{1,3}}$

$$= \underbrace{\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1) \text{ approx}} \underbrace{\sqrt{\frac{\lambda}{1,3}}}_{>1} + \underbrace{\sqrt{n} \frac{\lambda - 1,3}{\sqrt{1,3}}}_{>0}.$$

D'où

T_n a tendance à être + gd ss H_1 que ss H_0.

4) $ZR = \{T_n > s_\alpha\}$ où s_α tq

$\lim_{n \to \infty} P_{H_0}(T_n > s_\alpha) = \alpha$

i.e. s_α tq $P(Z > s_\alpha) = \alpha$.

$\alpha = 0{,}01$ $\quad s_\alpha = 2{,}325$.

$\alpha = 0{,}03$ $\quad s_\alpha = 1{,}885$.

$\alpha = 0{,}05$ $\quad s_\alpha = 1{,}645$

$$t_n = \sqrt{30} \times \frac{2{,}2 - 1{,}3}{\sqrt{1{,}3}} = 4{,}32.$$

Significatif.

5) p value asympt $P(Z > 4{,}32) \approx 0$.

0,0000%

oui !

Ex6

p proportion de pers favorable à l'homme politique

1) H_0 : "$p = 0{,}52$" contre H_1: "$p \neq 0{,}52$"

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\hat{p} - 0{,}52}{\sqrt{0{,}52 \times 0{,}48}}$$

Ex 5

X_i durée (en jours) séparant 2 crises de récurrence rhumatismale pour une pers i si traitement avec adjuvant

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ μ, σ^2 inconnus

H_0 "$\mu = 560$" H_1 "$\mu \neq 560$".

$T_n = \sqrt{n} \dfrac{\bar{X}_n - 560}{S_n}$ où $S_n^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$

$ZR_\alpha = \{ |T_n| > t_\alpha \}$

où t_α tq $P(|St(n-1)| > t_\alpha) = \alpha$

t_α tq $P(St(n-1) < t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$\alpha = 5\%$ $P(St(9) < t) = 0,975$

$t = 2,262$ $ZR_{5\%} = \{ |T_n| > 2,262 \}$

$T_{n,obs} = 2,205$ test non significatif à 5%.

car $\bar{x}_{10} = 618,7$ $\sum x_i^2 = 3\,898\,769$

$s_n^2 = 389\,876,9 - 61,87^2 = 7087,21$

$T_{n,obs} = \sqrt{10} \dfrac{618,7 - 560}{\sqrt{7087,21}} = 2,204959$

5,49%

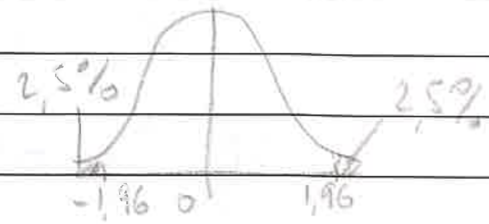
p.value $= 2\, P(St(9) > 2,204959) = 0,0549$

$\mathcal{R}_\alpha = \{ |T_n| > s_\alpha \}$.

s_α tq $P(|Z| > s_\alpha) = \alpha$.

$P(Z \le s_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

$\alpha = 5\%$, $s_\alpha = 1,96$.



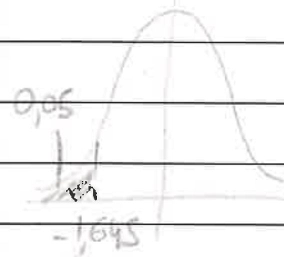
$t_n = -0,76$.

Le test n'est pas significatif.

2) H_0 : "$p = 0,52$" contre H_1 : "$p < 0,52$"

$\mathcal{R}_\alpha = \{ T_n < u_\alpha \}$

u_α tq $P(Z < u_\alpha) = \alpha$.



$\alpha = 5\%$ $u_\alpha = -1,645$.

non significatif.

Test asympt d'adéquation / d'un ajustement.

proba.