Université d'Evry-Val d'Essonne 2018-2019
L2 Informatique
DL2 Biologie Informatique
Cours de Statistique

# Feuille de TD 2 : Inégalités et Théorèmes limites

**Exercice 1**
Dans une population $\mathcal{P}$, la taille moyenne est de 1,65 $m$ avec un écart-type de 0,05 $m$. Majorer la probabilité que la taille d'un individu tiré au hasard dans la population $\mathcal{P}$ soit supérieure ou égale à 1,80 $m$.

**Exercice 2**
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi d'espérance $m$ et de variance $\sigma^2$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la v.a.

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - nm}{\sqrt{n}\sigma}.$$

Comparer, pour $n$ grand et pour $t = 1, 2, 3$, les renseignements numériques fournis sur $\mathbb{P}(|Z_n| \geq t)$ par le théorème limite central et par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

**Exercice 3**
Chaque jour, une machine produit de 0 à 9 pièces défectueuses. On suppose que les probabilités d'avoir 0, 1, ..., 9 pièces défectueuses sont régies par la loi de probabilité suivante :

$$\forall k \in \{0, 1 \ldots, 9\} \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{10-k}{55}$$

1. Vérifier que cela définit bien une loi de probabilité.
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$
3. On représente par $X_i$ le nombre de pièces défectueuses du $i^{\text{ème}}$ jour, $i$ variant de 1 à $n$. On suppose que les $X_i$ sont indépendantes. Que représente $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ? Donner son espérance et sa variance.
4. En effectuant une approximation par une loi gaussienne, calculer la probabilité que l'usine produise au plus 50 pièces défectueuses sur 30 jours.

**Exercice 4**
Un constructeur pose des rails bout à bout. Chacun de ces rails doit mesurer théoriquement 1 mètre. En réalité, leurs longueurs sont des variables aléatoires de mêmes lois d'espérance 1 mètre et d'écart-type $1/170$ mètre et sont indépendantes les unes des autres. On pose 100 rails. Calculer une approximation de la probabilité que la longueur effective de la voie dépasse 100,15 mètres.

**Exercice 5**
Une compagnie aérienne fournit des réservations sur le vol d'un appareil de 500 places. La probabilité qu'un passager ayant effectué la réservation pour ce vol ne se présente pas à l'embarquement est de 10% et les comportements des différents passagers sont supposés être indépendants. Si la compagnie aérienne accorde 550 réservations sur ce vol, calculer une approximation de la probabilité pour que certains passagers se retrouvent sans place.

**Exercice 6**
Un cinéma comporte deux salles contenant chacune $N$ places. $n$ personnes se présentent à l'entrée de ce cinéma. On admet que les choix des spectateurs sont indépendants les uns des autres et qu'un spectateur quelconque a une chance sur deux de choisir la première salle.
Notons $S_n$ le nombre de spectateurs choisissant la salle 1.

**a)** Quelle est la loi de $S_n$ ?

**b)** Donner une approximation de la probabilité $p$ qu'au moins un spectateur ne puisse pas voir le film qu'il a choisi en fonction de $n$, $N$ et $\Phi$ la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite.

**c)** En utilisant cette approximation, indiquer comment le constructeur aurait dû choisir $N$ si on sait que $n = 1000$ et si on veut que $p$ soit inférieure à 0.01 ?