Université d'Evry-Val d'Essonne — 2018-2019

L2 Informatique
DL2 Biologie Informatique
Statistique

Feuille de TD 1 : Rappels sur les lois usuelles

Exercice 1
Une entreprise fabrique en très grande série un article. Un contrôle de qualité a montré que chaque article pouvait présenter deux types de défauts : un défaut de soudure avec une probabilité de 0.03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité de 0.02. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Calculer la probabilité p qu'un article fabriqué par l'entreprise soit défectueux.
2. Soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si un article i est défectueux et 0 sinon. Déterminer la loi des variables aléatoires X_i pour tout $i = 1, \cdots, n$. Donner l'espérance et la variance de X_i.

Un petit commerçant passse une commande de 25 articles ï¿½ l'entreprise. Soit Y le nombre d'articles défectueux parmi 25 articles commandés.

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et exprimer Y en fonction des X_i.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 2 articles défectueux dans sa commande.
5. Il veut que sur sa commande, la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 0.5. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

Exercice 2
Soit X et Y deux v.a. indï¿½pendantes de loi de Poisson de paramï¿½tres respectifs λ et μ. Montrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramï¿½tre $\lambda + \mu$.

Exercice 3
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes qui admettent un moment d'ordre 2. Montrer que
$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y).$$

Exercice 4

1. Soit X une v.a. gaussienne centrï¿½e rï¿½duite. Donner

$$a = \mathbb{P}(X < 0,93), \qquad b = \mathbb{P}(X < -0,74), \qquad c = \mathbb{P}(-1,4 < X < 0,2).$$

   Donner d et e tels que

$$\mathbb{P}(X < d) = 0,25, \qquad \mathbb{P}(|X| < e) = 0,65.$$

2. Y est une v.a. gaussienne d'espï¿½rance 4 et de variance 16. Donner g et h tels que

$$g = \mathbb{P}(Y > 0), \qquad \mathbb{P}(0 < Y < h) = 0,5.$$

3. Z est une variable gaussienne d'espï¿½rance μ et de variance σ^2. Trouver μ et σ^2 pour que l'on ait simultanï¿½ment

$$\mathbb{P}(Z < 2) = 0,6915 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z < 3) = 0,8413.$$

Exercice 5
Soit X le temps (en mn) d'arrivï¿½e d'un usager du TGV par rapport ï¿½ l'heure de dï¿½part du train (par exemple $X = -1$ correspond ï¿½ une arrivï¿½e 1 mn avant le dï¿½part du train). On suppose que X suit une loi gaussienne d'espérance -14 et d'écart-type 8. Les portes du train s'ouvre 1/2 heure avant le dï¿½part du train. Quelle est la probabilitï¿½ qu'un usager arrive avant l'ouverture des portes ?

Exercice 6
L'organisateur d'un championnat inter-club de judo sait que le poids des enfants peut être modélisé par une variable aléatoire de loi gaussienne d'espérance 32,3 kg et d'écart type 1 867 g. Il veut constituer 6 catégories de poids et souhaite que les effectifs de chaque catégorie soient aussi proches que possible les uns des autres. Evidemment, il doit déterminer les limites des catégories qui figureront sur le programme bien avant de savoir quels seront les enfants qui viendront à son championnat. Déterminez au mieux ces limites.

Exercice 7
Soit X une variable aléatoire d'espérance m_1 et de variance σ_1^2 et Y une variable aléatoire d'espérance m_2 et de variance σ_2^2. X et Y sont indépendantes. On note $Z = X + Y$.

1. Calculer l'espérance de Z. Justifier.
2. Calculer la variance de Z. Justifier.

On suppose de plus que X et Y suivent une loi gaussienne.

3. Quelle est la loi de Z ? Justifier.

4. Quelle est la loi de $2X + 5Y$. Justifier.

Exercice 8

Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi gaussienne d'espérance m et de variance σ^2. Quelle est la loi de $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$?

Exercice 9

Une embouteilleuse automatique remplit des bouteilles de vin sensées avoir une contenance de 1 litre. En fait la contenance d'une bouteille n'est jamais de 1 litre exactement mais peut-être considérée comme une variable aléatoire de loi gaussienne d'espérance m et d'écart-type 1,5 centilitre. La contenance moyenne m est un paramètre réglable sur la machine. L'écart-type est fixé et ne peut pas être modifié à moins de changer de machine.

1. Sur quelle contenance moyenne m faut-il régler l'embouteilleuse pour qu'au moins 95% des bouteilles contiennent 99 centilitres ou plus ?
2. On vend le vin en caisse de 6 bouteilles. On s'intéresse à présent à la contenance globale des 6 bouteilles d'une caisse. Le réglage de la machine est identique pour chaque bouteille de la caisse. Les contenances de chacune des bouteilles sont donc supposées être des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On souhaite que la probabilité que la caisse ait une contenance de $5,95$ litres ou plus soit supérieure à 99%. Sur quelle contenance moyenne m faut-il régler l'embouteilleuse ?