UEVE

Tutorial Exam 0025-05-20

Personal Data

Family Name:
Given Name:
Signature: checked

Registration Number

0	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	0
1	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	1
2	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	2
3	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	3
4	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	4
5	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	5
6	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	6
7	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	7
8	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	8
9	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	9

In this section **no** changes or modifications must be made!

Type	Exam ID
105	25052000001

Please mark the boxes carefully: ☒ Not marked: ☐ or ■

This document is scanned automatically. Please keep clean and do not bend or fold. For filling in the document please use a **blue or black pen**.

Only clearly marked and positionally accurate crosses will be processed!

Answers 1 - 4

	a	b	c	d	e
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3					
4					
	a	b	c	d	e

UEVE

Tutorial Exam 0025-05-20

Personal Data

Family Name:
Given Name:
Signature:
checked

Registration Number

0	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	0
1	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	1
2	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	2
3	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	3
4	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	4
5	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	5
6	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	6
7	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	7
8	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	8
9	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	9

In this section **no** changes or modifications must be made!

Type	Exam ID
405	25052000001

Please mark the boxes carefully: ☒ Not marked: ☐ or ■

This document is scanned automatically. Please keep clean and do not bend or fold. For filling in the document please use a **blue or black pen**.

Only clearly marked and positionally accurate crosses will be processed!

Answers 1 - 4

	a	b	c	d	e
1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3					
4					
	a	b	c	d	e

UEVE

Tutorial Exam 0025-05-20

In this section **no** changes or modifications must be made!	
Type	Exam ID
999	25052000001

3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

4 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

In the following please fill in your answers.

3

4

1. Un constructeur pose des rails bout à bout. Chacun de ces rails doit mesurer théoriquement 1 m. En réalité, leurs longueurs sont des variables aléatoires de mêmes lois d'espérance $\mu = 1$m et d'écart-type $\sigma = 1/193$m et sont indépendantes les unes des autres. On pose 86 rails. Calculer une approximation de la probabilité que la longueur effective de la voie dépasse 86.006 mètres en utilisant Φ la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite.

   (a) 0.45
   (b) -0.10
   (c) 0.08
   (d) 0.30
   (e) 1.01

2. Une compagnie aérienne fournit des réservations sur le vol d'un appareil de 500 places. La probabilité qu'un passager ayant effectué la réservation pour ce vol ne se présente pas à l'embarquement est de 0.16 et les comportements des différents passagers sont supposés être indépendants. Si la compagnie aérienne accorde 580 réservations sur ce vol, calculer une approximation de la probabilité pour que certains passagers se retrouvent sans place.

   (a) $2\Phi\left(\frac{-12.8}{\sqrt{78}}\right)$
   (b) $\Phi\left(\frac{-172.8}{\sqrt{78}}\right)$
   (c) $\Phi\left(\frac{-12.8}{\sqrt{78}}\right)$
   (d) $1-\Phi\left(\frac{12.8}{\sqrt{78}}\right)$
   (e) $\Phi\left(\left|\frac{-12.8}{\sqrt{78}}\right|\right)$

3. On note X la durée de survie en mn d'une colonie de bactéries B en milieu acide (temps au bout duquel on ne peut plus déceler aucune bactérie dansla boîte de culture) et on considère que X est une variable aléatoire qui admet la densité suivante:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} axe^{-x^2/\theta} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.

   (a) Calculer la valeur de a (en fonction de θ) pour que f soit bien une densité de probabilité (pour l'intégration, on pourra faire un changement de variable en posant $u = x^2$).

   On admet qu'en prenant cette valeur pour a,

$$E(X) = \sqrt{\pi\theta}/2, \quad E(X^2) = \theta \quad \text{et} \quad V(X^2) = \theta^2$$

   Les résultats observés sur $n = 50$ boites de culture sont les suivants :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2870 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 179412$$

   On suppose que $x_1, ..., x_n$ sont les réalisations d'un n-échantillon $X_1, ..., X_n$ de même loi que X. Soit

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

   (a) Calculer $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n]$.
   (b) Montrer que $\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)$.

(c) En déduire l'expression de $\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$.

(d) Vers quoi converge $\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$ quand n tend vers l'infini?

2. On considère une expérience aléatoire qui consiste à compter le nombres de “piles” en n lancers d'un jeton. On note $X_i = 1$, si le résultat obtenu au ième lancer est “pile” et 0 sinon. On considère que les lancers sont indépendants et effectués dans les mêmes conditions et on note $p = \mathbb{P}(\text{"}pile\text{"})$.

   - La valeur de p est-elle à priori connue?
   - Donner la loi de X_i.
   - Donner la loi de S_n le nombre de “piles” obtenus en n lancers.
   - Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev dans ce contexte.
   - En utilisant que $p(1-p) \leq 1/4$, en déduire un intervalle $[A_n, B_n]$ tel que

$$\mathbb{P}[p \in [A_n, B_n]] \geq 95\%$$

   - Sur $n = 100$ lancers on a observé 59 “piles”. Donner l'intervalle correspondant.