

# Comparação do desempenho de modelos propostos para o ajuste de dados de esportes coletivos

Mariana de Castro Pasqualini

2022-05-16

## 1. Introdução

Modelos estatísticos podem ser aplicados em diferentes áreas do conhecimento. Uma delas, que tem crescido nos últimos anos, é a análise de dados de competições e eventos esportivos. O número de gols marcados, por exemplo, pode ser tratado como dados de contagem e representados por modelos discretos. Estes modelos são vastamente representados na literatura desde a década de 80, como em Pollard (1985) que utiliza a distribuição Binomial Negativa, enquanto Baxter (1988) apresentam as diferenças entre a Binomial Negativa e Poisson para modelar o placar de partidas de futebol. Tais modelos desconsideram uma estrutura de correlação entre os gols de cada oponente. Karlis (2003) sugere a distribuição Poisson bivariada, que permite uma correlação entre o número de gols marcados pelo mandante e visitante e, ainda, há uma proposta de um modelo bayesiano hierárquico com efeitos aleatórios como definido por Baio (2010). Neste trabalho, são implementados, ajustados e comparados modelos baseados na distribuição Poisson para dados do Campeonato Brasileiro de 2019, 2020 e 2021, obtido em Gomide (2022) utilizando o software Stan Development Team (2022) e RStan para inferência bayesiana.

## 2. Modelos

Para o problema de contagem do número de gols em uma partida, o modelo mais comum é baseado na distribuição de Poisson. Essa distribuição é discreta, representando o número de eventos ocorridos em um intervalo de tempo. Uma das limitações dela é que sua média  $\lambda$  e variância são iguais, portanto se há uma superdispersão nos dados, o modelo pode não ser tão apropriado. Todos os modelos que serão apresentados aqui são baseados nessa distribuição e ajustados aos dados do Campeonato Brasileiro, popularmente conhecido como Brasileirão, do ano de 2019.

### Modelo 1

Baio (2010) sugere um modelo bayesiano hierárquico para os gols marcados em uma determinada partida. No modelo proposto, o número de gols realizados segue uma distribuição Poisson condicionalmente independentes, em que a correlação é incluída por meio dos hiperparâmetros. A distribuição Poisson é vastamente utilizada para problemas de contagem e amplamente aplicada à análises esportivas como sugerem M. Dixon e S. Coles (2007) e D. Karlis e I. Ntzoufras (2003), dentre outros autores.

O vetor  $\mathbf{y} = (y_{g1}, y_{g2})$  como um vetor de contagens, podemos tomar

$$y_{gj} | \theta_{gj} \sim \text{Poisson}(\theta_{gj})$$

o vetor tendo uma distribuição Poisson condicional aos parâmetros  $\theta = (\theta_{g1}, \theta_{g2})$ , que representam a taxa de pontuação no  $g$ -ésimo jogo para o mandante, representado por  $j = 1$  e o visitante  $j = 2$ .

Assumindo um modelo log-linear de efeitos aleatórios, tem-se

$$\log \theta_{g1} = \text{home} + \text{att}_{h(g)} + \text{def}_{a(g)}$$

$$\log \theta_{g2} = att_{a(g)} + def_{h(g)}$$

em que o parâmetro *home* é um efeito fixo representando a vantagem de ter um jogo em casa e a taxa de pontuação considera o *ataque* e a *defesa* dos dois times que estão jogando. Os índices representam o time que da casa  $h(g)$  e o time visitante  $a(g)$  no  $g$ -ésimo jogo.

## Priori

Considerando que o modelo proposto segue a abordagem bayesiana, os efeitos aleatórios são objetos aleatórios de interesse e é apropriado definir uma distribuição à priori para cada um deles. As prioris sugeridas pelos autores são:

$$home \sim Normal(0, 0.0001)$$

$$att_t \sim Normal(\mu_{att}, \tau_{att})$$

$$def_t \sim Normal(\mu_{def}, \tau_{def})$$

Sendo  $t$  cada um dos times do campeonato. A Normal é definida pela média e precisão. O modelo original foi implementado no WinBUGS, que utiliza a mesma parametrização apresentada no artigo. Como priori para  $\mu$  é definida uma  $Normal(0, 0.0001)$  tanto para o ataque quanto defesa, e  $Gamma(0.1, 0.1)$  para os  $\tau$  de ataque e defesa.

Nesse trabalho, o modelo foi implementado no Stan e uma adaptação foi necessária, considerando que a parametrização do software é diferente. A distribuição Normal é definida pela média e desvio padrão, então passamos a ter as prioris para os parâmetros:

$$att_t \sim Normal(\mu_{att}, \sigma_{att})$$

$$def_t \sim Normal(\mu_{def}, \sigma_{def})$$

Além disso, é necessário definir também as distribuições a priori dos hiperparâmetros. Para as médias, como não há conhecimento de informações que podem ser agregadas à priori, a escolha são prioris pouco informativas:

- $\mu_{att} \sim Normal(0, 10)$
- $\mu_{def} \sim Normal(0, 10)$

Conforme demonstrado por Gelman (2008) e comentado em Almeida Inácio (n.d.), a priori não-informativa recomendada para o desvio padrão é uma Cauchy, portanto:

$$\sigma_{att} \sim Cauchy(0, 2.5)$$

$$\sigma_{def} \sim Cauchy(0, 2.5)$$

Para garantir a identificabilidade do modelo, os autores sugerem a seguinte restrição nos parâmetros específicos de cada time:

$$\sum_{t=1}^T att_t = 0$$

$$\sum_{t=1}^T def_t = 0$$

Ainda é proposto a restrição em que um dos times é definido como ataque e defesa iguais a 0, o que implica interpretar os parâmetros para os outros times utilizando como referência o time de base. A proposta foi implementada neste trabalho, então, a restrição de identificabilidade é:

$$att_T = 0$$

$$def_T = 0$$

Tal restrição foi fundamental para que as cadeias de Markov convergissem, além de ser um método mais rápido para a execução do código.

### Simulação

Para checar a implementação dos modelos e estimação correta dos parâmetros, foi feita uma simulação com 1000 réplicas de tamanho 380, que é o número de jogos de um campeonato com 20 times. Os parâmetros do modelo usados para simulação são definidos como:

- $home = 0.13$
- $\mu_{att} = 0.05$
- $\mu_{def} = 0.08$
- $\sigma_{att} = 0.56$
- $\sigma_{def} = 0.52$

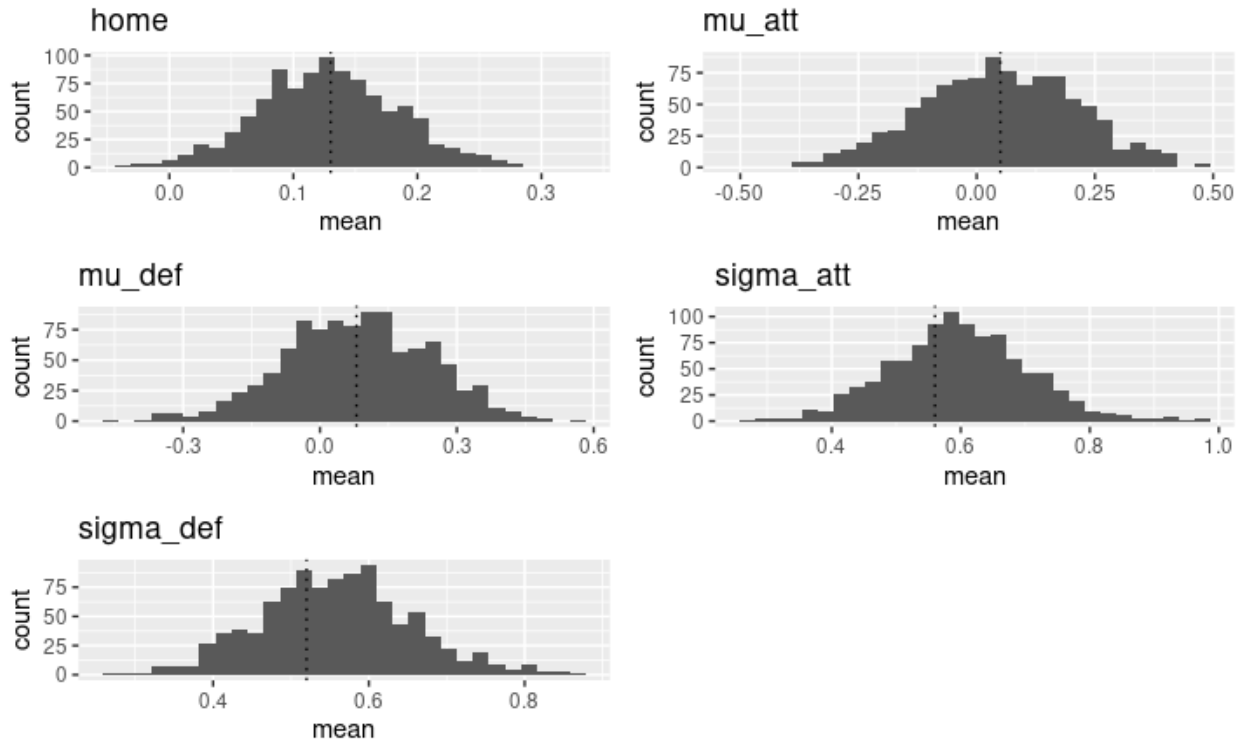
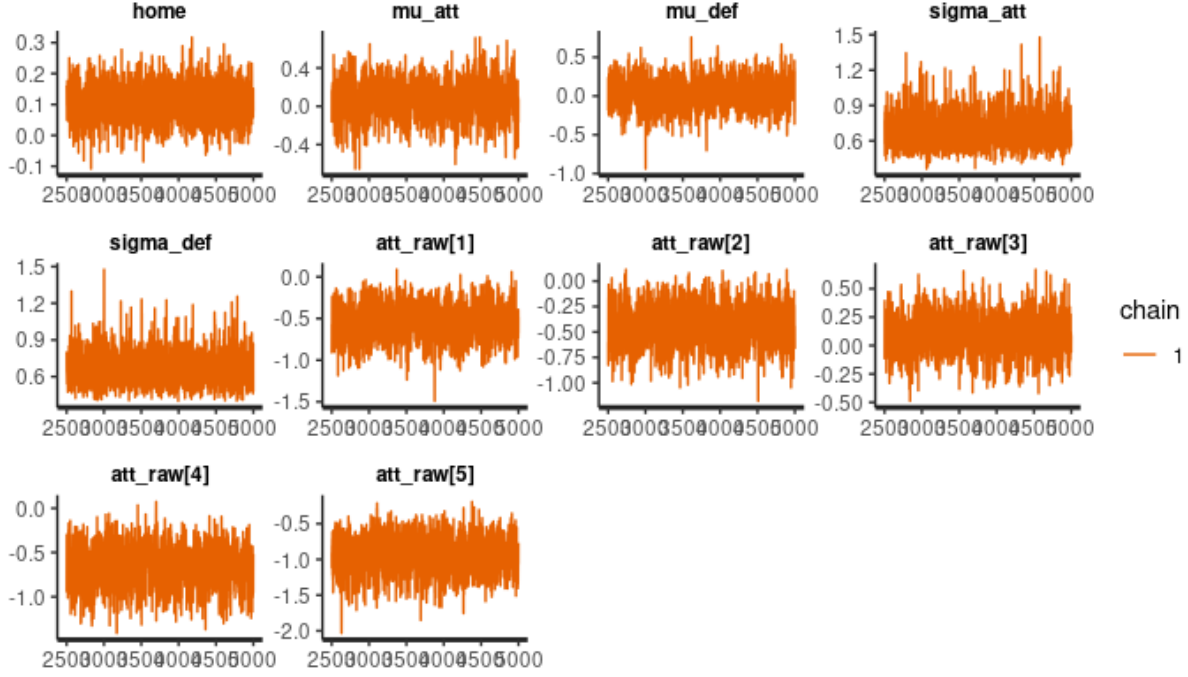


Figure 1: Simulação - Modelo 1

Observa-se que as distribuições da média da distribuição a posteriori dos parâmetros estão centradas em torno dos valores reais.

**Diagnóstico de convergência da simulação** As simulações foram realizadas com apenas 01 cadeia e 5000 interações. O gráfico traceplot mostra que a cadeia converge e consegue caminhar pelo espaço paramétrico.



Outra estatística útil é o  $\hat{R}$ , que próximo de 1 é condição para convergência. Todos os parâmetros apresentaram  $\hat{R}$  próximo de 1, sendo o menor  $\hat{R} = 0.9995999$  e maior  $\hat{R} = 1.002963$ .

## Ajuste

Para verificar o comportamento do modelo com um conjunto de dados reais, assim como no artigo original o modelo é ajustado para dados do campeonato italiano, aqui ele será testado com dados do Campeonato Brasileiro do ano de 2019.

O dados foram disponibilizados por Gomide (2022) no Github, com o seguinte formato:

home_team	away_team	home_score	away_score	home_team_index	away_team_index
282	314	2	1	10	16
315	285	2	0	17	13
262	283	3	1	1	11
276	263	2	0	8	2
293	267	4	1	15	6
265	264	3	2	4	3

As colunas *home\_team\_index* e *away\_team\_index* foram criadas atribuindo um valor inteiro ordinal para cada time, seguindo a notação do modelo.

Comparando a pontuação **acumulada** ao longo do campeonato observada e a pontuação estimada pelo modelo, tem-se o seguinte comportamento para cada time:

Santos foi time com maior pontuação atribuída pelo modelo, estimando exatamente a pontuação obtida pelo time no campeonato e, assim, sendo o campeão segundo o modelo. Porém, o campeão de 2019 foi o Flamengo e o vice-campeão o Santos.

## Diagnóstico de convergência do ajuste

## Campeonato Brasileiro 2019

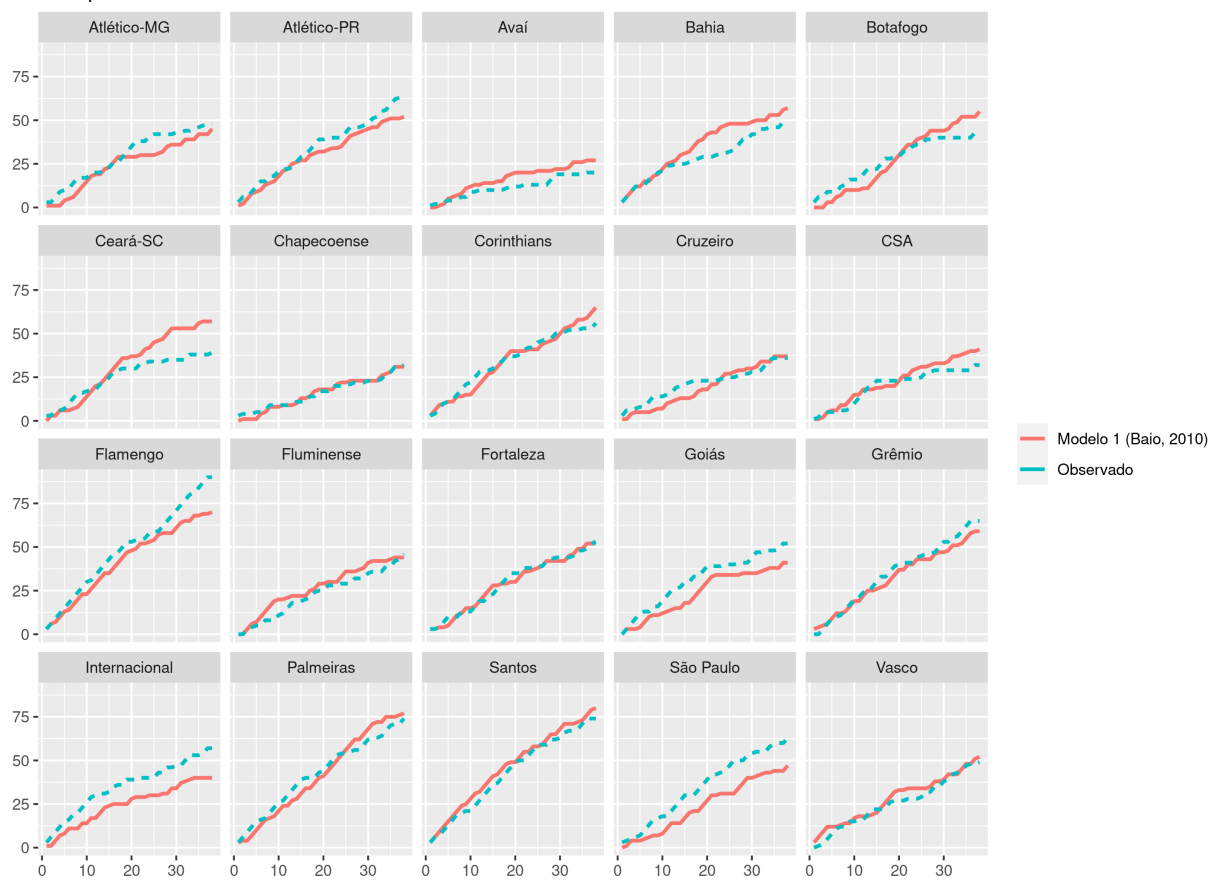


Figure 2: Pontuação acumulada - Modelo 1

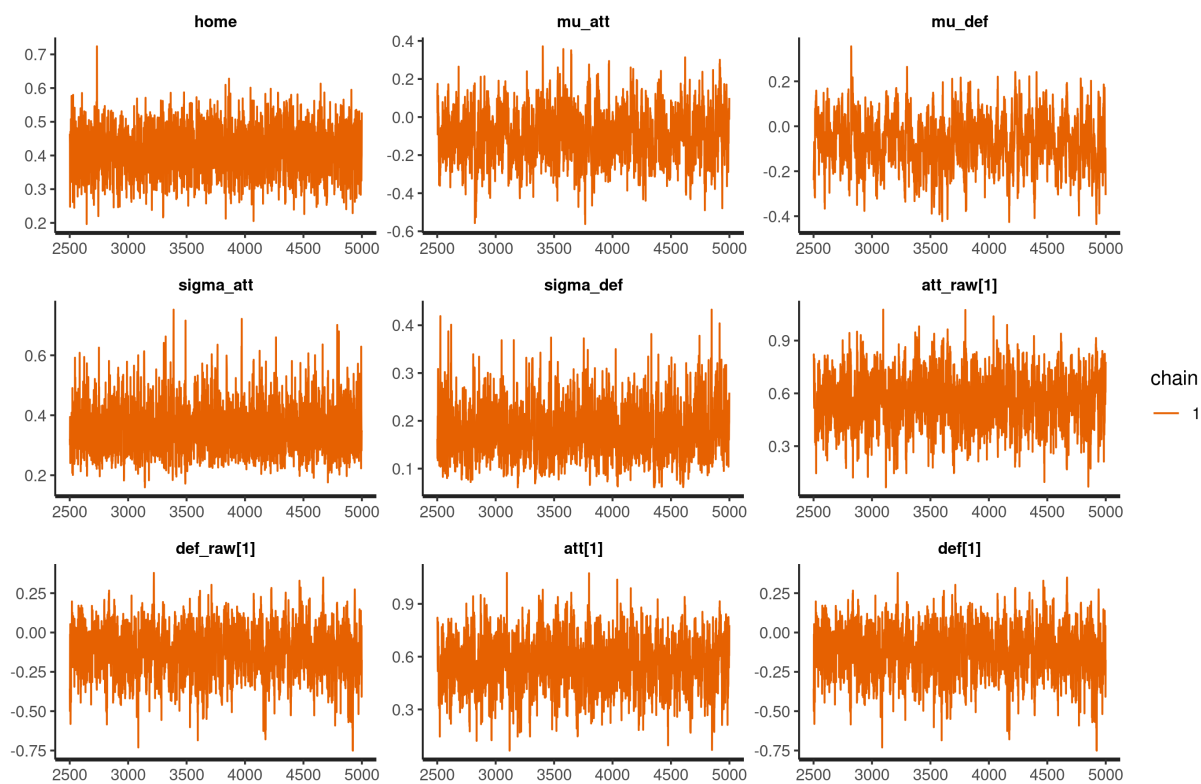


Figure 3: Convergência - Modelo 1

Table 1: Efeito de ataque de cada time, estimado pelo Modelo 1

Time	Média	Mediana	Desvio-padrão	5%	95%
Flamengo	0.553	0.553	0.152	0.295	0.806
Botafogo	-0.328	-0.326	0.185	-0.634	-0.019
Corinthians	-0.099	-0.096	0.170	-0.379	0.175
Bahia	-0.052	-0.050	0.174	-0.342	0.220
Fluminense	-0.173	-0.166	0.180	-0.474	0.117
Vasco	-0.151	-0.151	0.175	-0.448	0.127
Palmeiras	0.227	0.229	0.162	-0.045	0.484
São Paulo	-0.160	-0.162	0.185	-0.465	0.134
Santos	0.212	0.211	0.162	-0.062	0.486
Atlético-MG	-0.032	-0.029	0.175	-0.318	0.256
Cruzeiro	-0.428	-0.423	0.200	-0.761	-0.105
Grêmio	0.276	0.273	0.158	0.019	0.528
Internacional	-0.056	-0.056	0.171	-0.336	0.218
Goiás	-0.010	-0.004	0.170	-0.294	0.256
Atlético-PR	0.068	0.069	0.165	-0.211	0.336
Avaí	-0.678	-0.673	0.212	-1.026	-0.331
Chapecoense	-0.326	-0.327	0.188	-0.630	-0.021
CSA	-0.504	-0.498	0.199	-0.835	-0.187
Ceará-SC	-0.219	-0.221	0.179	-0.505	0.087
Fortaleza	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Table 2: Efeito de defesa de cada time, estimado pelo Modelo 1

	Time	Média	Mediana	Desvio-padrão	5%	95%
21	Flamengo	-0.119	-0.116	0.156	-0.384	0.133
22	Botafogo	-0.044	-0.041	0.150	-0.292	0.201
23	Corinthians	-0.180	-0.175	0.158	-0.449	0.068
24	Bahia	-0.066	-0.063	0.152	-0.318	0.177
25	Fluminense	-0.032	-0.032	0.148	-0.275	0.209
26	Vasco	-0.043	-0.047	0.152	-0.292	0.206
27	Palmeiras	-0.194	-0.187	0.162	-0.468	0.054
28	São Paulo	-0.232	-0.220	0.168	-0.524	0.026
29	Santos	-0.182	-0.170	0.161	-0.462	0.060
30	Atlético-MG	0.008	0.011	0.151	-0.234	0.253
31	Cruzeiro	-0.036	-0.040	0.151	-0.281	0.208
32	Grêmio	-0.103	-0.099	0.152	-0.366	0.145
33	Internacional	-0.110	-0.105	0.155	-0.386	0.133
34	Goiás	0.175	0.176	0.157	-0.082	0.432
35	Atlético-PR	-0.201	-0.194	0.161	-0.484	0.054
36	Avaí	0.143	0.144	0.154	-0.108	0.398
37	Chapecoense	0.036	0.040	0.151	-0.212	0.287
38	CSA	0.102	0.096	0.153	-0.147	0.357
39	Ceará-SC	-0.091	-0.089	0.155	-0.353	0.152
40	Fortaleza	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Time	Pontuação observada	Pontuação estimada (Modelo 1)
Atlético-MG	48	45
Atlético-PR	64	52
Avaí	20	27
Bahia	49	57
Botafogo	43	55
Ceará-SC	39	57
Chapecoense	32	31
Corinthians	56	65
Cruzeiro	36	37
CSA	32	41
Flamengo	90	70
Fluminense	46	44
Fortaleza	53	52
Goiás	52	41
Grêmio	65	59
Internacional	57	40
Palmeiras	74	77
Santos	74	80
São Paulo	63	47
Vasco	49	52

## Modelo 2

Conforme dito anteriormente, a distribuição Poisson é um dos modelos mais utilizados na literatura para análises do número de gols marcados em uma partida de futebol. As variáveis-resposta são usualmente modeladas como duas Poisson independentes, considerando que o número de gols de um time não afeta o número de gols do outro time. Tal suposição não é muito razoável, considerando, por exemplo, que a força de defesa de um time interfere nas oportunidades para a marcação de gols do oponente. A partir disso, Karlis (2003) sugerem a modelagem do número de gols a partir de uma Poisson bivariada, que permite a inclusão de uma covariância positiva que faz o papel da dependência entre as duas variáveis Poisson que, marginalmente, são independentes.

Sendo  $X = X_1 + X_3$  e  $Y = X_2 + X_3$ , duas variáveis aleatórias com  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ , então  $X$  e  $Y$  seguem conjuntamente uma Poisson bivariada  $\mathbf{BP}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

Conforme mencionado anteriormente, tem-se duas Poisson independentes marginalmente com  $E(X) = \lambda_1 + \lambda_3$  e  $Y = \lambda_2 + \lambda_3$ . Além disso,  $\text{cov}(X, Y) = \lambda_3$ . Se  $\lambda_3 = 0$ , então temos simplesmente duas Poisson independentes. Os autores sugerem que o parâmetro  $\lambda_3$  representam as condições de jogo comuns aos dois times da partida, como ritmo do jogo e condições climáticas.

Contudo, tal modelagem tem uma limitação: levando em conta que a covariância entre  $X$  e  $Y$  também é o parâmetro da Poisson e o espaço paramétrico está definido em  $(0, +\infty)$ , a covariância também está limitada em  $(0, +\infty)$ . Isso significa que à medida que o número de gols de um dos times aumenta, o do outro time não tende a seguir a relação inversa e, por isso, a interpretação de condições favoráveis aos dois times simultaneamente. Porém, é razoável pensar que essa relação pode ser negativa, com o aumento do comportamento ofensivo de um time e a outra equipe sem muitas oportunidades de marcar gols.

Definindo diretamente o modelo aplicado à futebol, temos que para cada jogo  $i$

$$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_{1i})$$

$$Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_{2i})$$



e usando a função de ligação log para os preditores lineares, tem-se:

$$\log(\lambda_{1i}) = \mu + home + att_{h_i} + def_{g_i}$$

$$\log(\lambda_{2i}) = \mu + att_{g_i} + def_{h_i}$$

Para a inclusão da covariância como  $\lambda_3$ , Karlis (2003) apresenta o preditor linear que permite combinar diferentes modelos:

$$\log(\lambda_{3i}) = \alpha^{con} + \gamma_1 \alpha_{h_i}^{home} + \gamma_2 \alpha_{g_i}^{away}$$

No qual  $\gamma_j$  é uma variável *dummy*, indicando quais parâmetros serão incluídos no modelo de interesse. Para o modelo 2,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ , ou seja, tem-se apenas uma covariância constante.

No artigo original, ataque e defesa são tratados como efeitos fixos, portanto o número de parâmetros é o número de times multiplicado por dois mais 1, para o parâmetro que representa a covariância. Para os dados utilizados por Karlis do Campeonato Italiano de 1991-1992, são 37 parâmetros, enquanto para o Campeonato Brasileiro de 2019 seriam 41 parâmetros. Por isso, na adaptação do modelo, ataque e defesa foram abordados como efeitos aleatórios.

A restrição de identificabilidade dos efeitos de ataque e defesa é a mesma do modelo 1, com o efeito do último time definido como:

$$att_T = 0$$

$$def_T = 0$$

## Priori

A escolha das distribuições a priori deste modelo segue o mesmo princípio do modelo 1: prioris pouco informativas.

$$home \sim Normal(0, 10)$$

$$\sigma_{att} \sim Cauchy(0, 2.5)$$

$$\sigma_{def} \sim Cauchy(0, 2.5)$$

$$\mu \sim Normal(0, 10)$$

$$\alpha \sim Normal(0, 1)$$

$$\alpha^{home} \sim Normal(0, 1)$$

$$\alpha^{away} \sim Normal(0, 1)$$

## Simulação

Com o objetivo de verificar a estimação certa dos parâmetros, também foi feita uma simulação com 1000 réplicas de tamanho 380, representando o número de jogos de um campeonato com 20 times. Neste modelo, os parâmetros para simulação são definidos como:

- $home = 0.13$
- $\mu = 0.21$
- $\alpha = 0.20$
- $\sigma_{att} = 0.92$
- $\sigma_{def} = 0.80$

A partir dos resultados dos histogramas obtidos na simulação, tem-se que o modelo estima corretamente os parâmetros.

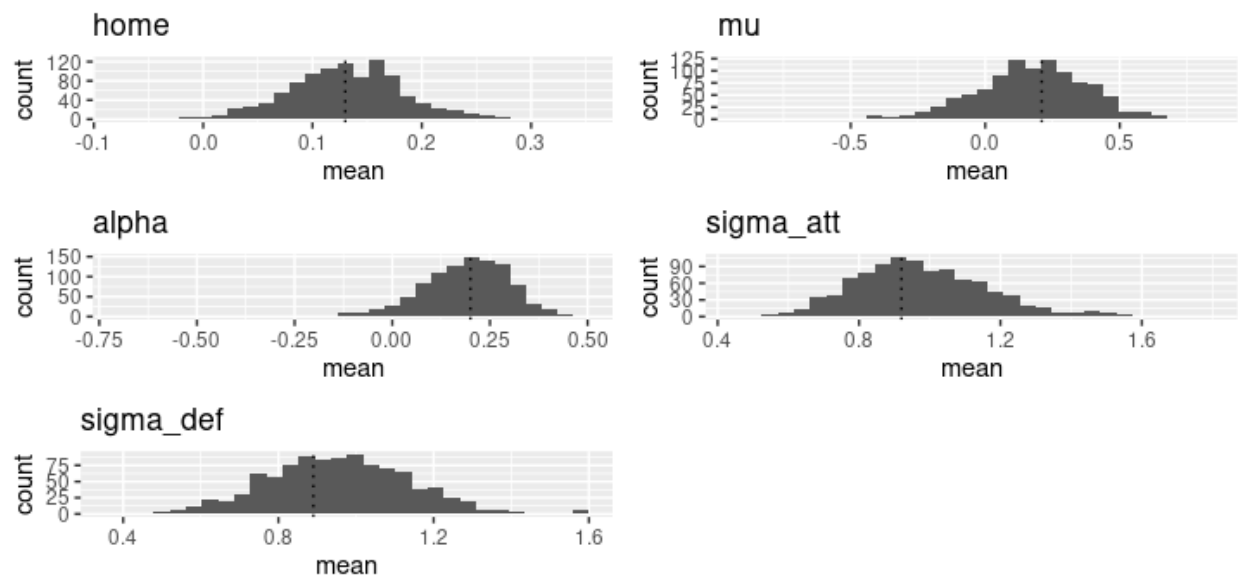
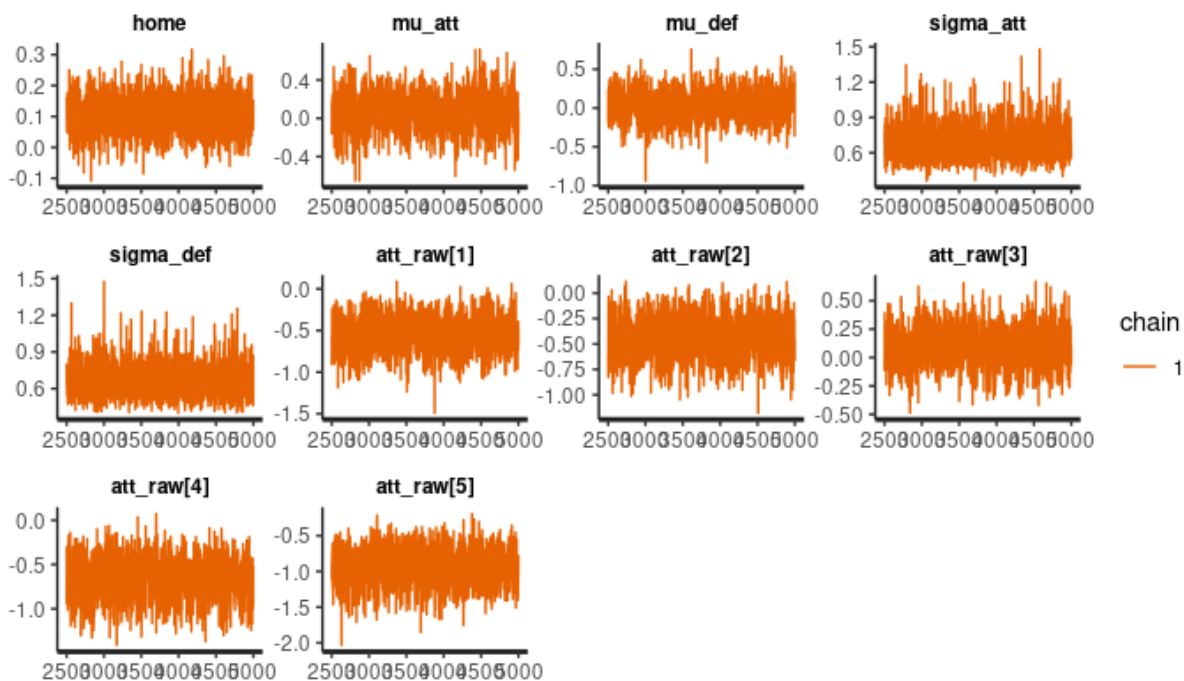


Figure 4: Simulação - Modelo 2

### Diagnóstico de convergência da simulação

As simulações foram realizadas com apenas 01 cadeia e 5000 interações. O gráfico traceplot mostra que a cadeia converge e consegue iterar por todo espaço paramétrico.



A estatística  $\hat{R}$  para os parâmetros se mostrou próxima de 1, sendo o menor  $\hat{R} = 0.9995999$  e maior  $\hat{R} = 1.002963$ .

## Ajuste

Assim como o primeiro modelo, o modelo 2 foi ajustado para o Campeonato Brasileiro de 2019. Neste modelo,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ .

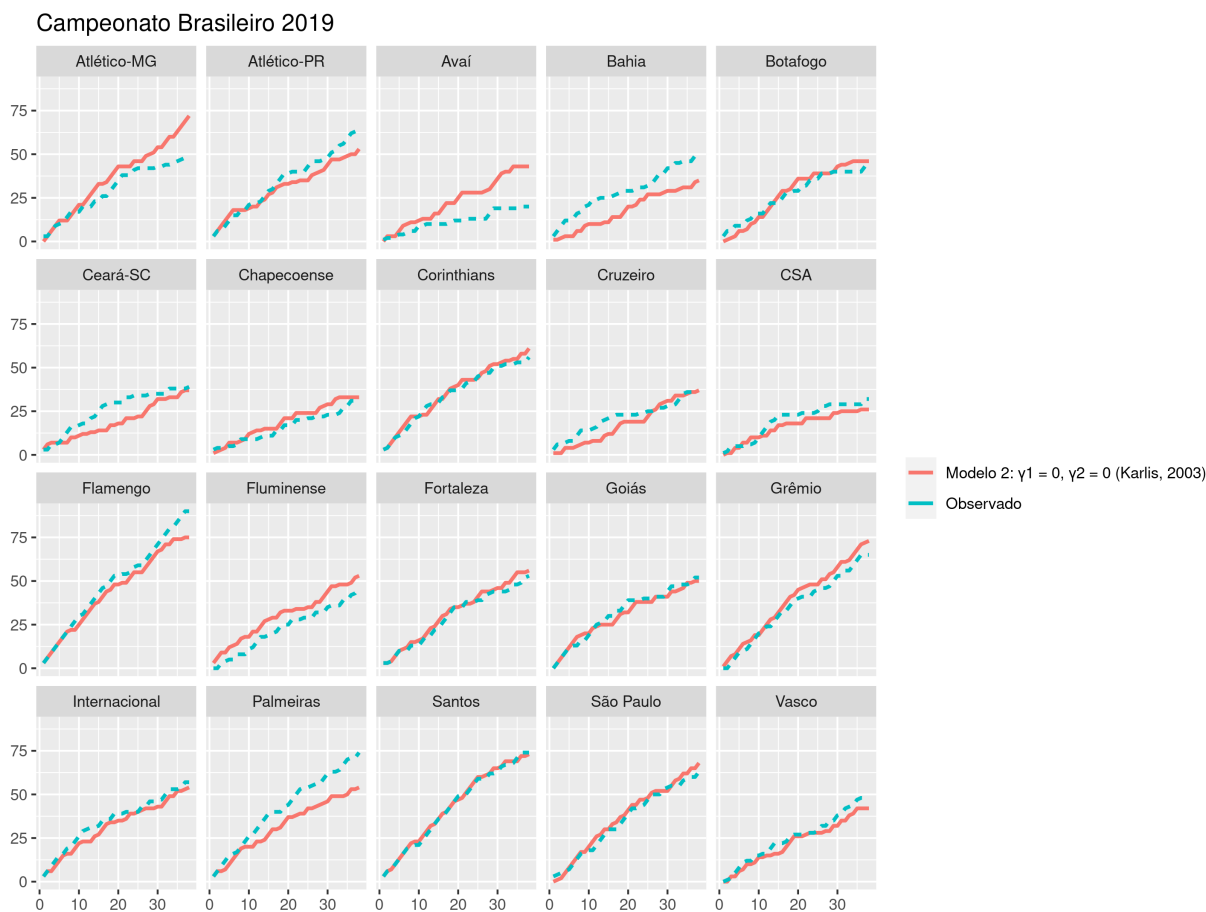


Figure 5: Pontuação acumulada - Modelo 2

O modelo 2 tem o Flamengo como maior pontuador ao longo do campeonato, acertando o vencedor. O segundo lugar ficou entre o Santos e Grêmio, segundo e quarto colocado respectivamente.

Além dos campeões, os quatro últimos times são rebaixados para a segunda divisão. Nesse modelo, há um empate na pontuação final dos times Cruzeiro e Ceará e, seguindo pelo critério do maior saldo de gols, o Cruzeiro seria rebaixado juntamente com Bahia, Chapecoense e CSA. Os times rebaixados no ano foram Cruzeiro, CSA, Chapecoense e Avaí, ou seja, o modelo 2 errou apenas uma das equipes.

## Modelo 3

O modelo três é uma extensão do modelo 2, no qual  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$ . Apenas o efeito fixo e o efeito que depende da equipe mandante são considerados no parâmetro de correlação  $\lambda_3$ . Não foi feita uma simulação para o modelo por limitações de memória no computador.

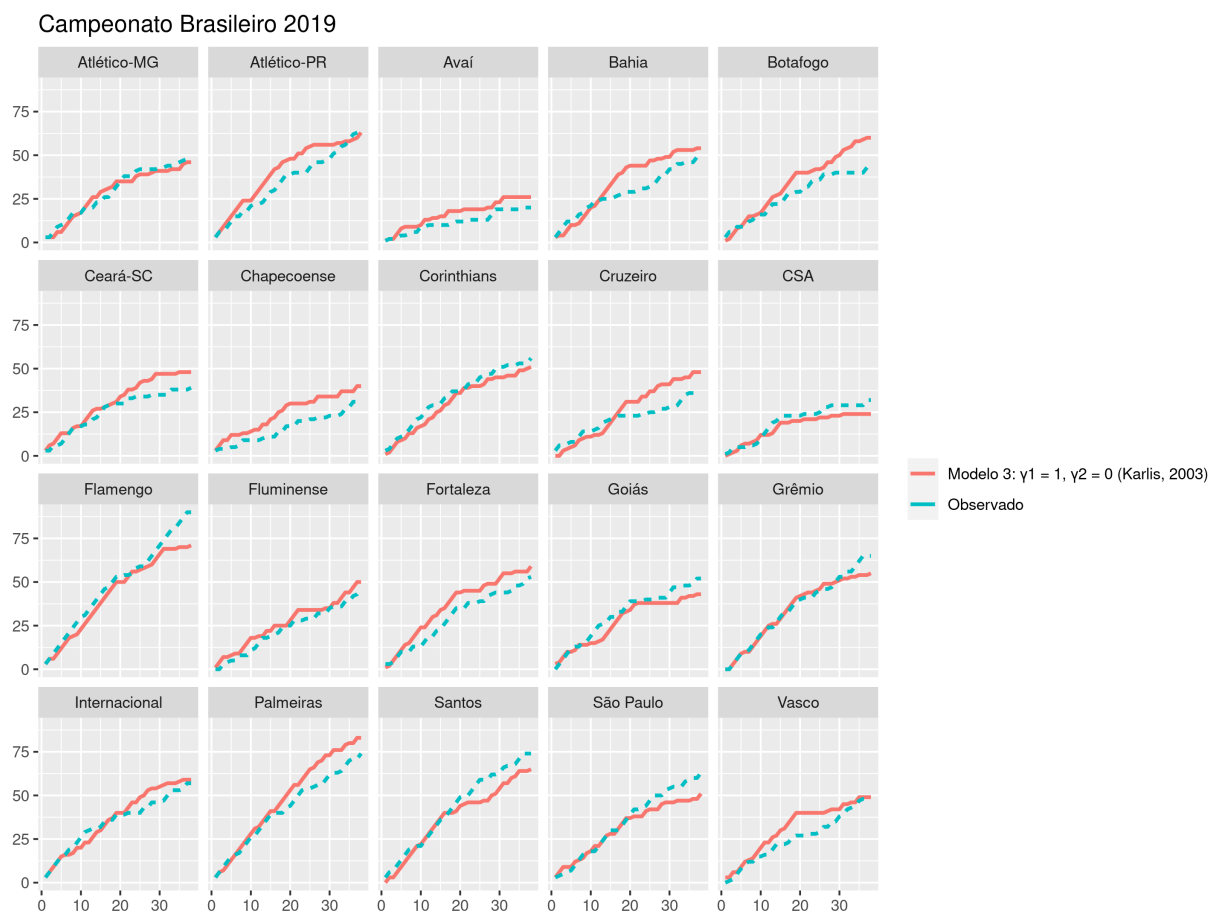


Figure 6: Pontuação acumulada - Modelo 3

Time	Pontuação observada	Pontuação estimada (Modelo 2)
Atlético-MG	48	58
Atlético-PR	64	60
Avaí	20	25
Bahia	49	53
Botafogo	43	45
Ceará-SC	39	44
Chapecoense	32	49
Corinthians	56	62
Cruzeiro	36	45
CSA	32	41
Flamengo	90	72
Fluminense	46	49
Fortaleza	53	45
Goiás	52	33
Grêmio	65	51
Internacional	57	62
Palmeiras	74	76
Santos	74	77
São Paulo	63	48
Vasco	49	40

## Modelo 4

O modelo quatro é uma extensão do segundo modelo, no qual  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$ . Nesse caso, a correlação entre os gols do mandante e visitante depende do efeito fixo e dos efeitos de cada time. É a variação mais completa do modelo 2. Contudo, talvez ela fizesse mais sentido se suportasse uma covariância negativa, representando as condições reais para os dois times em campo. Também não foi realizada uma simulação pela mesma razão do modelo 3.

## Modelo 5

O modelo quatro é uma extensão do segundo modelo, que leva em consideração apenas o efeito fixo  $\alpha$  e o efeito dependente do time visitante, sendo  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$ . Também não foi realizada uma simulação por limitações computacionais.

## Modelo 6

O sexto modelo é uma extensão do modelo 1, incluindo uma mistura de 3 componentes, indicando 3 categorias das habilidades do time. A partir disso, o efeito de ataque e defesa são definidos em função do grupo que a equipe pertence.

Neste modelo, o ataque e defesa seguem uma distribuição t com 4 graus de liberdade, **ponderados** pela probabilidade do time pertencer a um dos três grupos: (1) final da tabela, (2) meio da tabela e (3) topo da tabela (Baio (2010)).

$$att_t = \sum_{k=1}^3 \pi_{kt}^{att} \times t(\mu_k^{att}, \tau_k^{att}, \nu)$$

$$def_t = \sum_{k=1}^3 \pi_{kt}^{def} \times t(\mu_k^{def}, \tau_k^{def}, \nu)$$

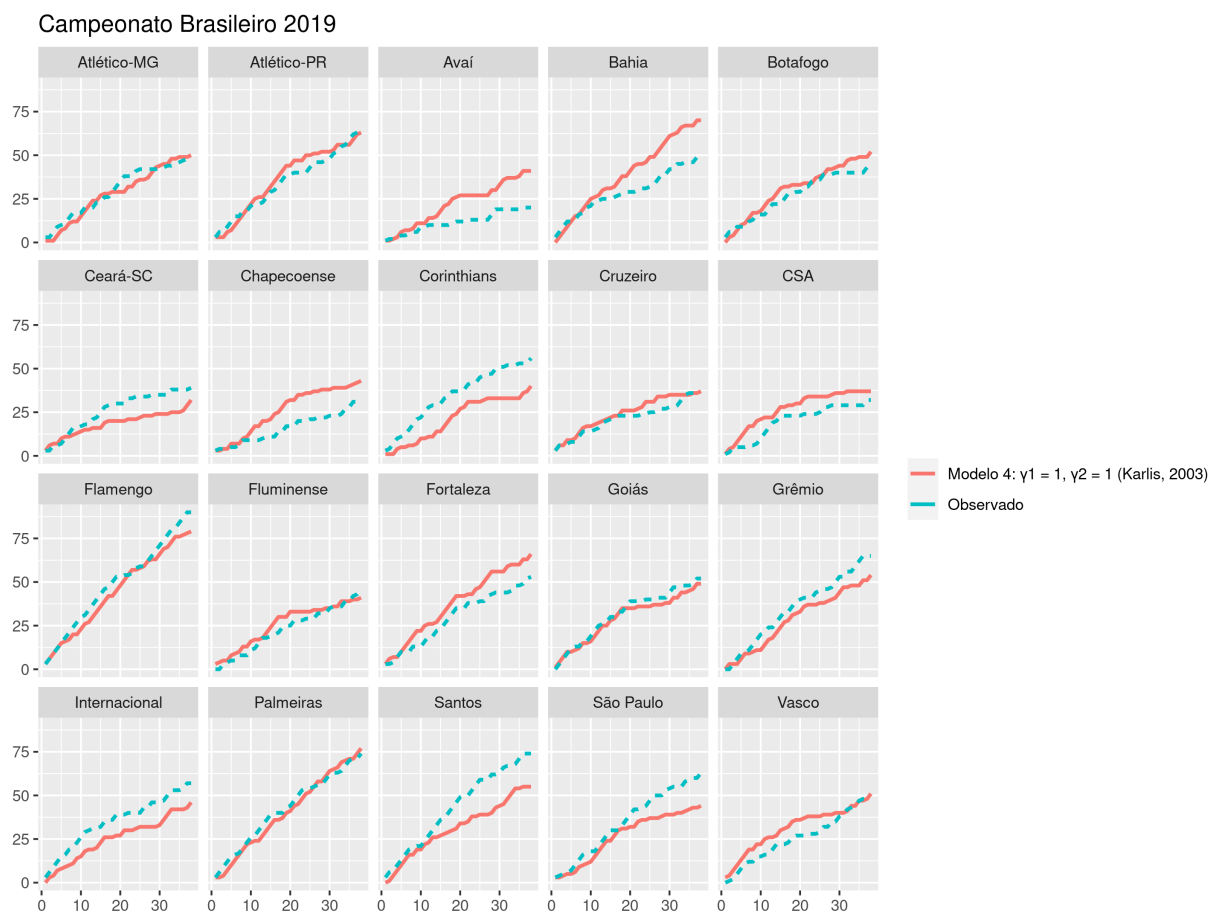


Figure 7: Pontuação acumulada - Modelo 4



Figure 8: Pontuação acumulada - Modelo 5

## Priori

Novamente, define-se distribuições a priori para os parâmetros e hiperparâmetros do modelo. A probabilidade de pertencer ao grupo 1, 2 ou 3 é igual para todos os times, então define-se

- $\pi_{att} \sim \text{Dirichlet}([1, 1, 1])$
- $\pi_{def} \sim \text{Dirichlet}([1, 1, 1])$

Como é uma extensão do modelo 1, o efeito fixo de jogar em casa se mantém com a mesma priori  $home \sim \text{Normal}(0, 10)$ . Independentemente do grupo que o ataque e a defesa pertencem,  $\sigma_{att} \sim \text{Cauchy}(0, 2.5)$  e  $\sigma_{def} \sim \text{Cauchy}(0, 2.5)$ . As médias dos grupos que vão variar de acordo com qual *cluster* o efeito vêm:

Grupo 1

- $\mu_1^{att} \sim \text{truncNormal}(0, 10, -3, 0)$
- $\mu_1^{def} \sim \text{truncNormal}(0, 10, 0, 3)$

Grupo 2

- $\mu_2^{att} \sim \text{truncNormal}(0, 0.01)$
- $\mu_2^{def} \sim \text{truncNormal}(0, 0.01)$

Grupo 3

- $\mu_3^{att} \sim \text{truncNormal}(0, 10, 0, 3)$
- $\mu_3^{def} \sim \text{truncNormal}(0, 10, -3, 0)$

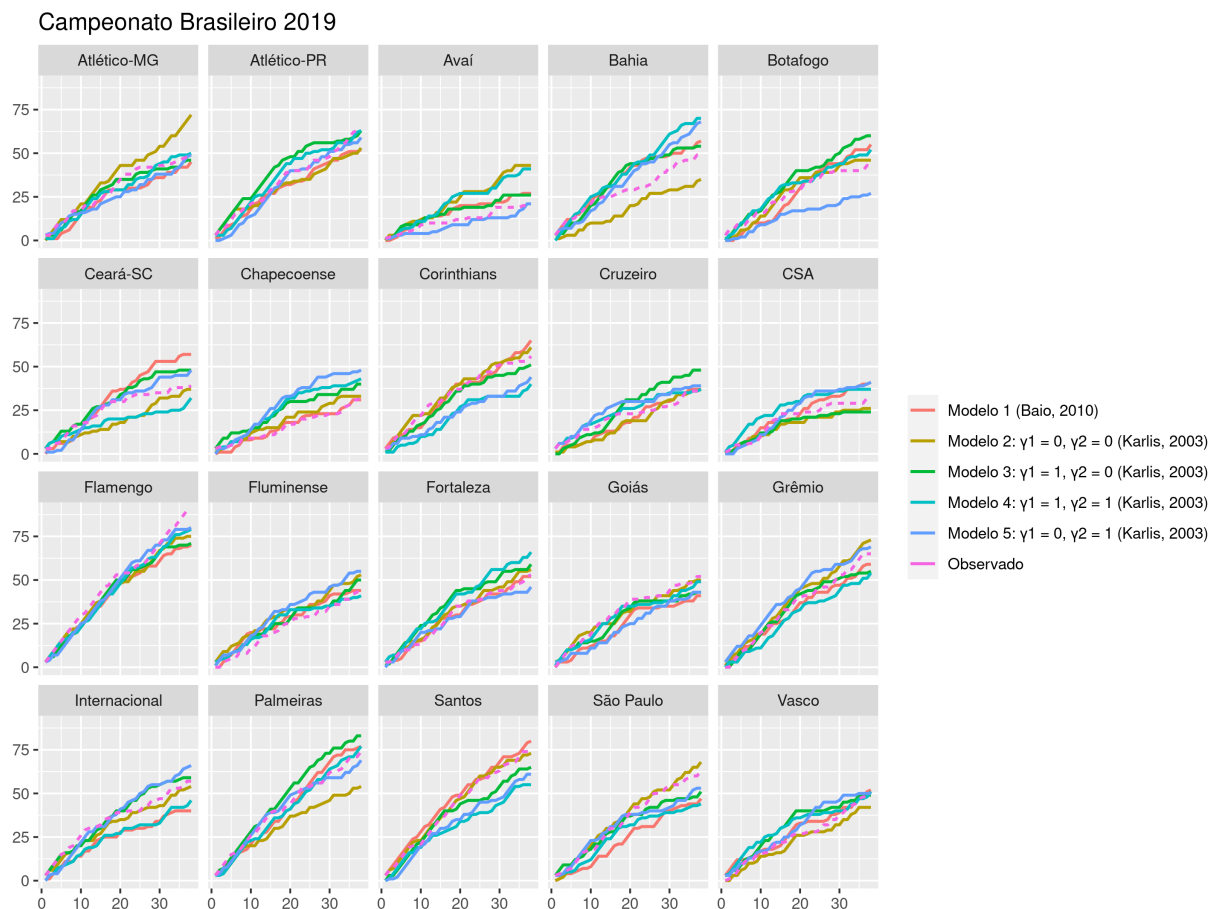
Um time que performa mal no campeonato possivelmente apresenta uma tendência de pontuar pouco e uma propensão a conceder gols ao adversário. Esta é a motivação de usar a distribuição Normal truncada como priori para os efeitos das médias de ataque e defesa.

## 3. Comparação dos modelos

Time	Real	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Atlético-MG	48	40	58	67	48	49	63
Atlético-PR	64	71	60	53	39	59	56
<b>Avaí</b>	<b>20</b>	<b>39</b>	<b>25</b>	<b>26</b>	<b>43</b>	<b>21</b>	<b>30</b>
Bahia	49	36	53	58	64	68	53
Botafogo	43	55	45	43	48	27	41
Ceará-SC	39	28	44	64	34	48	24
<b>Chapecoense</b>	<b>32</b>	<b>45</b>	<b>49</b>	<b>34</b>	<b>36</b>	<b>48</b>	<b>32</b>
Corinthians	56	39	62	57	49	44	50
<b>Cruzeiro</b>	<b>36</b>	<b>42</b>	<b>45</b>	<b>38</b>	<b>41</b>	<b>39</b>	<b>46</b>
<b>CSA</b>	<b>32</b>	<b>30</b>	<b>41</b>	<b>29</b>	<b>30</b>	<b>41</b>	<b>46</b>
<b>Flamengo</b>	<b>90</b>	<b>76</b>	<b>72</b>	<b>85</b>	<b>70</b>	<b>80</b>	<b>72</b>
Fluminense	46	45	49	42	67	55	41
Fortaleza	53	61	45	49	54	46	63
Goiás	52	57	33	53	54	43	39
<b>Grêmio</b>	<b>65</b>	<b>61</b>	<b>51</b>	<b>59</b>	<b>69</b>	<b>69</b>	<b>77</b>
Internacional	57	48	62	52	58	66	45
<b>Palmeiras</b>	<b>74</b>	<b>66</b>	<b>76</b>	<b>75</b>	<b>71</b>	<b>69</b>	<b>52</b>
<b>Santos</b>	<b>74</b>	<b>78</b>	<b>77</b>	<b>68</b>	<b>71</b>	<b>61</b>	<b>78</b>
São Paulo	63	73	48	58	40	53	73
Vasco	49	54	40	36	42	50	55
		99.7	98.6	79.6	149.1	95.9	125.4



Medidas de qualidade relativa dos modelos são fundamentais para seleção de modelos e avaliação da acurácia preditiva dos modelos.



Como o cálculo do LOO-CV é feito baseado na log-verossimilhança de cada observação, algumas delas podem ser muito influentes. Isso é especialmente sensível quando temos distribuições com caudas longas. Para isso, é calculado o PSIS.

## 4. Outros modelos

Um possível problema com modelos hierárquicos é um efeito de encolhimento, no qual observações extremas são arrastadas para a média global. Esse efeito faz com que equipes com um desempenho muito bom, que estão no topo da tabela, têm estimativas conservadoras e os times que estão nas últimas colocações são superestimados. O encolhimento é um possível problema do modelo 1 e Baio (2010) recomenda um modelo de mistura com três componentes para contornar esse efeito.

Uma outra possibilidade de mistura é um modelo inflado de zeros.

#5. Conclusão

## Exemplo Tabela

### R Markdown

```
## Warning: `data_frame()` was deprecated in tibble 1.1.0.
## Please use `tibble()` instead.
```

```
## This warning is displayed once every 8 hours.
## Call `lifecycle::last_lifecycle_warnings()` to see where this warning was generated.
```

Table 3: Simulation parameters

parameter	value
$\lambda_1$ (old normal)	300
$N$ (total days)	400
$d_2$ (time to new normal)	12

## 6. Referências

## 7. Apêndice

- Traceplot para diagnóstico das cadeias
- Almeida Inácio, Marco Henrique de. n.d. “Introdução Ao Stan Como Ferramenta de Inferência Bayesiana.” <https://marcoinacio.com/stan>.
- Baio, Marta, Gianluca e Blangiardo. 2010. “Bayesian Hierarchical Model for the Prediction of Football Results.” *Journal of Applied Statistics* 37 (2): 253–64. <https://doi.org/10.1080/02664760802684177>.
- Baxter, Richard, Mike e Stevenson. 1988. “Discriminating Between the Poisson and Negative Binomial Distributions:an Application to Goal Scoring in Association Football.” *Journal of Applied Statistics* 15 (3): 347–54. <https://doi.org/10.1080/02664768800000045>.
- Gelman, Aleks e Pittau, Andrew e Jakulin. 2008. “A Weakly Informative Default Prior Distribution for Logistic and Other Regression Models.” *The Annals of Applied Statistics* 2 (4). <https://doi.org/10.1214/08-AOAS191>.
- Gomide, Arnaldo, Henrique e Gualberto. 2022. *CaRtola: Extração de Dados Da API Do CartolaFC, Análise Exploratória Dos Dados e Modelos Preditivos Em r e Python*. <https://github.com/henriquegomide/caRtola>.
- Karlis, Ioannis, Dimitris e Ntzoufras. 2003. “Analysis of Sports Data by Using Bivariate Poisson Models.” *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)* 52 (3): 381–93. <https://doi.org/10.1111/1467-9884.00366>.
- Pollard, Richard. 1985. “69.9 Goal-Scoring and the Negative Binomial Distribution.” *The Mathematical Gazette* 69 (447): 45–47. <https://doi.org/10.2307/3616453>.
- Stan Development Team. 2022. “Stan Modeling Language Users Guide and Reference Manual, Version 2.21.0.” <http://mc-stan.org/>.