FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Trabajo Practico I

Entrega I

1/10/2021
Segundo cuatrimestre de 2021
[75.29] Teoria de Algoritmos I

Alumno:	Pata Fraile de Manterola, Martin
Número de padrón:	106226
Email:	mpata@fi.uba.ar

Índice

1. Parte 1: Karatsuba!

Dada los siguientes números:

a35**b**411**c**
2**d**98**ef**55

con:

a: dígito del padrón correspondiente a la unidad
b: dígito del padrón correspondiente a la centena
c: los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 7
d: dígito del padrón correspondiente a la decena
e: dígito del padrón correspondiente a la unidad de mil
f: los dos dígitos del padrón de la derecha mod 9

Con padrón **106226**

$a = 6$
$b = 2$
$c = 10\,\%7 = 3$
$d = 2$
$e = 6$
$f = 26\,\%9 = 8$

Completando en los numeros dados:

635**2**411**3**
2**2**98**68**55

Se pide:

1. Resuelva la multiplicación paso a paso utilizando el algoritmo de Karatsuba.
2. Cuente la cantidad de sumas y multiplicaciones que realiza y relaciónelo con la complejidad temporal del método.
3. Comparar lo obtenido con el método de multiplicación tradicional. ¿Observa alguna mejora? Analice.
4. ¿Por qué se puede considerar al algoritmo de Karatsuba como de "división y conquista"?

1.1. Resuelva la multiplicación paso a paso utilizando el algoritmo de Karatsuba.

Se va a tener que multiplicar $63524113 * 22986855$ y se pide utilizar el algoritmo de Karatsuba para resolverla. Para ello se utilizara el próximo pseudocódigo:

```
Karatsuba(x,y)
    x = x1 * 10^{n/2} + x0
    y = y1 * 10^{n/2} + y0

    Calcular x1 + x0
    Calcular y1 + y0

    P = Karatsuba (x1 + x0 , y1 + y0 )

    x1y1 = Karatsuba (x1 , y1 )
    x0y0 = Karatsuba (x0 , y0 )

    Retornar x1y1 * 10^n + (P - x1y1 - x0y0) * 10^{n/2} + x0y0
```

Donde n es la cantidad de cifras de x e y, entonces $n = 8$ en el primer llamado del algoritmo.

1.1.1. Karatsuba(63524113,22986855) - Nivel 0

Se va a tomar a $x = 63524113 = x_1 * 10^{8/2} + x_0$ e $y = 22986855 = y_1 * 10^{8/2} + y_0$ entonces:

$$x_1 = 6352 \wedge x_0 = 4113 \tag{1}$$

$$y_1 = 2298 \wedge y_0 = 6855 \tag{2}$$

Ahora calculamos $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$

$$x_1 + x_0 = 6352 + 4113 = 10465 \tag{s1}$$

$$y_1 + y_0 = 2298 + 6855 = 9153 \tag{s2}$$

Seguimos con calcular P:

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = Karatsuba(10465, 9153)\ con\ s1, s2 \tag{3}$$

por lo tanto tenemos que resolver la primera llamada recursiva del algoritmo, la cual se hace en 1.1.2 con el retorno de la funcion r2= 95786145. Entonces

$$P = 95786145 \tag{4}$$

Continuamos con encontrar el resultado de $x_1y_1 = Karatsuba(6352, 2298)$ y $x_0y_0 = Karatsuba(4113, 6855)$, calculados en 1.1.12 y 1.1.19, remplazando las llamadas con los retornos r12 y r19 obtenemos:

$$x_1y_1 = Karatsuba(6352, 2298) = 14596896 \tag{5}$$

$$x_0y_0 = Karatsuba(4113, 6855) = 28194615 \tag{6}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{7}$$

Remplazando con $n = 8$, 4, 5 y 6:

$$retorno = 14596896 * 10^8 + (95786145 - 14596896 - 28194615) * 10^4 + 28194615 \tag{8}$$

$$\boxed{retorno = 1460219574534615} \tag{r1}$$

1.1.2. Karatsuba (10465,9153) - Nivel 1 - Llamado de Karatsuba(63524113,22986855)

Para resolver $Karatsuba(10465, 9153)$ primero tenemos que sacar las incógnitas

Por lo tanto $x = 10465 = x_1 * 10^2 + x_0$ e $y = 9153 = y_1 * 10^2 + y_0$, resolviendo sacamos:

$$x_1 = 104 \wedge x_0 = 65 \tag{9}$$

$$y_1 = 91 \wedge y_0 = 53 \tag{10}$$

Ahora calculamos $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$ con las ecuaciones 9 y 10

$$x_1 + x_0 = 104 + 65 = 169 \tag{s3}$$

$$y_1 + y_0 = 91 + 53 = 144 \tag{s4}$$

Continuando con el algoritmo tendremos que resolver para P

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = Karatsuba(169, 144)\ con\ s3, s4 \tag{11}$$

que se resuelve en 1.1.3 con retorno r3 = 24336, entonces:

$$P = 24336 \tag{12}$$

Continuamos con encontrar el resultado de $x_1y_1 = Karatsuba(104, 91)$ y $x_0y_0 = Karatsuba(65, 53)$, calculados en 1.1.7 y 1.1.10, remplazando las llamadas con los retornos r7 y r10 obtenemos:

$$x_1y_1 = Karatsuba(104, 91) = 9464 \tag{13}$$

$$x_0y_0 = Karatsuba(65, 95) = 3445 \tag{14}$$

Entonces calculando el retorno $x_1y_1 * 10^4 + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^2 + x_0y_0$ con 12, 13 y 14

$$\boxed{retorno = 9464 * 10^4 + (24336 - 9464 - 3445) * 10^2 + 3445 = 95786145} \tag{r2}$$

1.1.3. Karatsuba(169, 144) - Nivel 2 - Llamado de Karatsuba (10465, 9153)

Resolviendo $Karatsuba(169, 144)$ vemos que $x = 169 = x_1 * 10^2 + x_0$ e $y = 144 = y_1 * 10^2 + y_0$:

$$x_1 = 1 \wedge x_0 = 69 \tag{15}$$

$$y_1 = 1 \wedge y_0 = 44 \tag{16}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 1 + 69 = 70 \tag{s5}$$

$$y_1 + y_0 = 1 + 44 = 45 \tag{s6}$$

Continuando con el algoritmo tendremos que resolver P

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = Karatsuba(70, 45)\ con\ s5, s6 \tag{17}$$

Con lo resuelto en 1.1.4 sabemos que el retorno r4 es 3150 por lo tanto:

$$P = 3150 \tag{18}$$

La multiplicación $x_1 * y_1$ es un caso base por lo tanto:

$$x_1 * y_1 = Karatsuba(1, 1) = 1 * 1 = 1 \tag{m1}$$

Pero para $x_0 * y_0$ tenemos que aplicar el algoritmo de Karatsuba, que con lo resuelto en 1.1.5 con retorno r5=3036 tenemos:

$$x_0y_0 = Karatsuba(69, 44) = 3036 \tag{19}$$

Entonces calculando el retorno $x_1y_1 * 10^4 + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^2 + x_0y_0$ con 18, m1 y 19

$$\boxed{retorno = 1 * 10^4 + (3150 - 1 - 3036) * 10^2 + 3036 = 24336} \tag{r3}$$

1.1.4. Karatsuba(70,45) - Nivel 3 - Llamado de Karatsuba(169, 144)

Resolviendo $Karatsuba(70, 45)$ vemos que $x = 70 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 45 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 7 \wedge x_0 = 0 \tag{20}$$

$$y_1 = 4 \wedge y_0 = 5 \tag{21}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 7 + 0 = 7 \tag{s7}$$

$$y_1 + y_0 = 4 + 5 = 9 \tag{s8}$$

Aca podemos ver que llegamos a un caso base al ser x_0, x_1, y_0 e y_1 numeros de una cifra, asi que podemos multiplicar los numeros directamente

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) \tag{22}$$

Remplazando con s7 y s8

$$P = Karatsuba(7, 9) = 7 * 9 = 63 \tag{m2}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$ con lo obtenido en las ecuaciones 20 y 21. Al ser casos base mutiplicamos directamente:

$$x_1y_1 = Karatsuba(7, 4) = 7 * 4 = 28 \tag{m3}$$

$$x_0 * y_0 = Karatsuba(0, 5) = 0 * 5 = 0 \tag{m4}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{23}$$

Remplazando con $n = 2$ m2, m3 y m4

$$\boxed{retorno = 28 * 10^2 + (63 - 28 - 0) * 10^1 + 0 = 3150} \tag{r4}$$

1.1.5. Karatsuba(69,44) - Nivel 3 - Llamado de Karatsuba(169, 144)

$Karatsuba(69, 44)$ vemos que $x = 69 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 44 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 6 \wedge x_0 = 9 \tag{24}$$

$$y_1 = 4 \wedge y_0 = 4 \tag{25}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 6 + 9 = 15 \tag{s9}$$

$$y_1 + y_0 = 4 + 4 = 8 \tag{s10}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s9 y s10. Entonces $P = Karatsuba(15, 08)$ se calcula en 1.1.6 con retorno r6, por lo tanto:

$$P = Karatsuba(15, 08) = 120 \tag{26}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$ con lo obtenido en las ecuaciones 24 y 25. Al ser casos base mutiplicamos directamente:

$$x_1y_1 = Karatsuba(6, 4) = 6 * 4 = 24 \tag{m5}$$

$$x_0y_0 = Karatsuba(9, 4) = 9 * 4 = 36 \tag{m6}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{27}$$

Remplazando con $n = 2$ m5, m6 y 26

$$\boxed{retorno = 24 * 10^2 + (120 - 24 - 36) * 10^1 + 36 = 3036} \tag{r5}$$

1.1.6. Karatsuba (15, 08) - Nivel 4 - Llamado de Karatsuba(69,44)

$Karatsuba(15, 08)$ es un caso base, vemos que $x = 15 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 8 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 1 \land x_0 = 5 \tag{28}$$

$$y_1 = 0 \land y_0 = 8 \tag{29}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 1 + 5 = 6 \tag{s11}$$
$$y_1 + y_0 = 0 + 8 = 8 \tag{s12}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s11 y s12 y al ser numeros de una cifra calculamos la multiplicación directamente

$$P = Karatsuba(6, 8) = 6 * 8 = 48 \tag{m7}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$ con lo obtenido en las ecuaciones 28 y 29. Al ser casos base mutiplicamos directamente:

$$x_1y_1 = Karatsuba(1, 0) = 1 * 0 = 0 \tag{m8}$$
$$x_0y_0 = Karatsuba(5, 8) = 5 * 8 = 40 \tag{m9}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{30}$$

Remplazando con $n = 2$ m7, m8 y m9

$$\boxed{retorno = 0 * 10^2 + (48 - 0 - 40) * 10^1 + 40 = 120} \tag{r6}$$

1.1.7. Karatsuba(104, 91) - Nivel 2 - Llamado de Karatsuba (10465, 9153)

Resolviendo $Karatsuba(104, 91)$ vemos que $x = 104 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 91 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 10 \land x_0 = 4 \tag{31}$$

$$y_1 = 9 \land y_0 = 1 \tag{32}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 10 + 4 = 14 \tag{s13}$$
$$y_1 + y_0 = 9 + 1 = 10 \tag{s14}$$

Continuando con el algoritmo tendremos que resolver P

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = Karatsuba(14, 10)\ con\ s13, s14 \tag{33}$$

Con lo resuelto en 1.1.8 sabemos que el retorno r8=140 por lo tanto:

$$P = 140 \tag{34}$$

La multiplicación $x_1 * y_1$ la hacemos Karatsuba resuelta en 1.1.9 con r9=90:

$$x_1y_1 = Karatsuba(10, 9) = 90 \tag{35}$$

Pero para $x_0 * y_0$ es un caso base al ser dos numeros de 1 cifra, entonces multiplicamos directamente para resolver:

$$x_1y_1 = Karatsuba(4, 1) = 4 * 1 = 4 \tag{m10}$$

Entonces calculando el retorno $x_1y_1 * 10^2 + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10 + x_0y_0$ con 34, 35 y m10

$$\boxed{retorno = 90 * 10^2 + (140 - 90 - 4) * 10 + 4 = 9464} \tag{r7}$$

1.1.8. Karatsuba (14, 10) - Nivel 3 - Llamado de Karatsuba(104,91)

$Karatsuba(14, 10)$ es un caso base, vemos que $x = 14 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 10 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 1 \wedge x_0 = 4 \tag{36}$$

$$y_1 = 1 \wedge y_0 = 0 \tag{37}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 1 + 4 = 5 \tag{s15}$$

$$y_1 + y_0 = 1 + 0 = 1 \tag{s16}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s15 y s16 y al ser números de una cifra calculamos la multiplicacion directamente

$$P = Karatsuba(5, 1) = 5 * 1 = 5 \tag{m11}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$:

$$x_1y_1 = Karatsuba(1, 1) = 1 * 1 = 1 \tag{m12}$$

$$x_0y_0 = Karatsuba(4, 0) = 4 * 0 = 0 \tag{m13}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{38}$$

Remplazando con $n = 2$ m11, m12 y m13

$$\boxed{retorno = 1 * 10^2 + (5 - 1 - 0) * 10^1 + 0 = 140} \tag{r8}$$

1.1.9. Karatsuba (10, 09) - Nivel 3 - Llamado de Karatsuba(104,91)

$Karatsuba(10, 09)$ es un caso base, vemos que $x = 10 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 9 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 1 \wedge x_0 = 0 \tag{39}$$

$$y_1 = 0 \wedge y_0 = 9 \tag{40}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 1 + 0 = 1 \tag{s17}$$

$$y_1 + y_0 = 0 + 9 = 9 \tag{s18}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s17 y s18 y al ser numeros de una cifra calculamos la multiplicacion directamente

$$P = Karatsuba(1, 9) = 1 * 9 = 9 \tag{m14}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base mutiplicamos directamente:

$$x_1 y_1 = Karatsuba(1, 0) = 1 * 0 = 0 \tag{m15}$$

$$x_0 y_0 = Karatsuba(0, 9) = 0 * 9 = 0 \tag{m16}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1 y_1 * 10^n + (P - x_1 y_1 - x_0 y_0) * 10^{n/2} + x_0 y_0 \tag{41}$$

Remplazando con $n = 2$ m14, m15 y m16

$$\boxed{retorno = 0 * 10^2 + (9 - 0 - 0) * 10^1 + 0 = 90} \tag{r9}$$

1.1.10. Karatsuba(65,53) - Nivel 2 - Llamado de Karatsuba(10465, 9153)

Resolviendo $Karatsuba(65, 53)$ vemos que $x = 65 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 53 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 6 \wedge x_0 = 5 \tag{42}$$

$$y_1 = 5 \wedge y_0 = 3 \tag{43}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 6 + 5 = 11 \tag{s19}$$

$$y_1 + y_0 = 5 + 3 = 8 \tag{s20}$$

Continuando con el algoritmo tendremos que resolver P

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = Karatsuba(11, 8) \ con \ s19, s20 \tag{44}$$

Con lo resuelto en 1.1.11 sabemos que el retorno r11=88 por lo tanto:

$$P = 88 \tag{45}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base mutiplicamos directamente:

$$x_1 y_1 = Karatsuba(6, 5) = 6 * 5 = 30 \tag{m17}$$

$$x_0 y_0 = Karatsuba(5, 3) = 5 * 3 = 15 \tag{m18}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1 y_1 * 10^n + (P - x_1 y_1 - x_0 y_0) * 10^{n/2} + x_0 y_0 \tag{46}$$

Remplazando con $n = 2$ m17, m18 y 45

$$\boxed{retorno = 30 * 10^2 + (88 - 30 - 15) * 10^1 + 15 = 3445} \tag{r10}$$

1.1.11. Karatsuba (11, 08) - Nivel 3 - Llamado de Karatsuba(65,53)

$Karatsuba(11, 08)$ es un caso base, vemos que $x = 11 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 8 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 1 \land x_0 = 1 \tag{47}$$
$$y_1 = 0 \land y_0 = 8 \tag{48}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 1 + 1 = 2 \tag{s21}$$
$$y_1 + y_0 = 0 + 8 = 8 \tag{s22}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s21 y s22 y al ser numeros de una cifra calculamos la multiplicación directamente

$$P = Karatsuba(2, 8) = 2 * 8 = 16 \tag{m19}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base multiplicamos directamente:

$$x_1y_1 = Karatsuba(1, 0) = 1 * 0 = 0 \tag{m20}$$
$$x_0y_0 = Karatsuba(1, 8) = 1 * 8 = 8 \tag{m21}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{49}$$

Remplazando con $n = 2$ m19, m20 y m21

$$\boxed{retorno = 0 * 10^2 + (16 - 0 - 8) * 10^1 + 8 = 88} \tag{r11}$$

1.1.12. Karatsuba (6352,2298) - Nivel 1 - Llamado de Karatsuba(63524113,22986855)

Para resolver $Karatsuba(6352, 2298)$ primero tenemos que sacar las incógnitas

Por lo tanto $x = 6352 = x_1 * 10^2 + x_0$ e $y = 2298 = y_1 * 10^2 + y_0$, resolviendo sacamos:

$$x_1 = 63 \land x_0 = 52 \tag{50}$$
$$y_1 = 22 \land y_0 = 98 \tag{51}$$

Ahora calculamos $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 63 + 52 = 115 \tag{s23}$$
$$y_1 + y_0 = 22 + 98 = 120 \tag{s24}$$

Continuando con el algoritmo tendremos que resolver para P

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = Karatsuba(115, 120) \ con \ s23, s24 \tag{52}$$

que se resuelve en 1.1.13 con retorno r13 = 13800, entonces:

$$P = 13800 \tag{53}$$

Continuamos con calcular x_1y_1 y x_0y_0 con Karatsuba, calculados en 1.1.16 y 1.1.17, remplazando las llamadas con los retornos r16 y r17 obtenemos:

$$x_1y_1 = Karatsuba(63, 22) = 1386 \tag{54}$$
$$x_0y_0 = Karatsuba(52, 98) = 5096 \tag{55}$$

Entonces calculando el retorno $x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0$ con $n = 4$ y lo obtenido en 53, 54 y 55

$$\boxed{retorno = 1386 * 10^4 + (13800 - 1386 - 5096) * 10^2 + 5096 = 14596896} \tag{r12}$$

1.1.13. Karatsuba(115,120) - Nivel 2 - Llamado de Karatsuba (6352,2298)

Resolviendo $Karatsuba(115, 120)$ vemos que $x = 115 = x_1 * 10^2 + x_0$ e $y = 120 = y_1 * 10^2 + y_0$:

$$x_1 = 1 \wedge x_0 = 15 \tag{56}$$
$$y_1 = 1 \wedge y_0 = 20 \tag{57}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 1 + 15 = 16 \tag{s25}$$
$$y_1 + y_0 = 1 + 20 = 21 \tag{s26}$$

Continuando con el algoritmo tendremos que resolver P

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = Karatsuba(16, 21)\ con\ s25, s26 \tag{58}$$

Con lo resuelto en 1.1.14 sabemos que el retorno r14=336 por lo tanto:

$$P = 336 \tag{59}$$

La multiplicación $x_0 * y_0$ la hacemos con Karatsuba resuelta en 1.1.15 con r15=90:

$$x_0y_0 = Karatsuba(15, 20) = 300 \tag{60}$$

Pero para $x_1 * y_1$ es un caso base al ser dos numeros de 1 cifra, entonces multiplicamos directamente para resolver:

$$x_1y_1 = Karatsuba(1, 1) = 1 * 1 = 1 \tag{m22}$$

Entonces calculando el retorno $x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0$ con $n = 4$, 59, 60 y m22

$$\boxed{retorno = 1 * 10^4 + (336 - 1 - 300) * 10^2 + 300 = 13800} \tag{r13}$$

1.1.14. Karatsuba (16,21) - Nivel 3 - Llamado de Karatsuba(115,120)

$Karatsuba(16, 21)$ es un caso base, vemos que $x = 16 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 21 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 1 \wedge x_0 = 6 \tag{61}$$
$$y_1 = 2 \wedge y_0 = 1 \tag{62}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 1 + 6 = 7 \tag{s27}$$
$$y_1 + y_0 = 2 + 1 = 3 \tag{s28}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s27 y s28 y al ser numeros de una cifra calculamos la multiplicación directamente

$$P = Karatsuba(7, 3) = 7 * 3 = 21 \tag{m23}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base multiplicamos directamente:

$$x_1y_1 = Karatsuba(1, 2) = 1 * 2 = 2 \tag{m24}$$
$$x_0y_0 = Karatsuba(6, 1) = 6 * 1 = 6 \tag{m25}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{63}$$

Remplazando con $n = 2$ m23, m24 y m25

$$\boxed{retorno = 2 * 10^2 + (21 - 2 - 6) * 10^1 + 6 = 366} \tag{r14}$$

1.1.15. Karatsuba (15,20) - Nivel 3 - Llamado de Karatsuba(115,120)

$Karatsuba(15, 20)$ es un caso base, vemos que $x = 15 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 20 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 1 \wedge x_0 = 5 \tag{64}$$

$$y_1 = 2 \wedge y_0 = 0 \tag{65}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 1 + 5 = 6 \tag{s29}$$

$$y_1 + y_0 = 2 + 0 = 2 \tag{s30}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s29 y s30 y al ser números de una cifra calculamos la multiplicación directamente

$$P = Karatsuba(6, 2) = 6 * 2 = 12 \tag{m26}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base multiplicamos directamente:

$$x_1 y_1 = Karatsuba(1, 2) = 1 * 2 = 2 \tag{m27}$$

$$x_0 y_0 = Karatsuba(5, 0) = 5 * 0 = 0 \tag{m28}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1 y_1 * 10^n + (P - x_1 y_1 - x_0 y_0) * 10^{n/2} + x_0 y_0 \tag{66}$$

Remplazando con $n = 2$ m26, m27 y m28

$$\boxed{retorno = 2 * 10^2 + (12 - 2 - 0) * 10^1 + 0 = 300} \tag{r15}$$

1.1.16. Karatsuba (63,22) - Nivel 2 - Llamado de Karatsuba(6352,2298)

$Karatsuba(63, 22)$ es un caso base, vemos que $x = 63 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 22 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 6 \wedge x_0 = 3 \tag{67}$$

$$y_1 = 2 \wedge y_0 = 2 \tag{68}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 6 + 3 = 9 \tag{s31}$$

$$y_1 + y_0 = 2 + 2 = 4 \tag{s32}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s31 y s32 y al ser numeros de una cifra calculamos la multiplicación directamente

$$P = Karatsuba(9, 4) = 9 * 4 = 36 \tag{m29}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base multiplicamos directamente:

$$x_1 y_1 = Karatsuba(6, 2) = 6 * 2 = 12 \tag{m30}$$

$$x_0 y_0 = Karatsuba(3, 2) = 3 * 2 = 6 \tag{m31}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1 y_1 * 10^n + (P - x_1 y_1 - x_0 y_0) * 10^{n/2} + x_0 y_0 \tag{69}$$

Remplazando con $n = 2$ m29, m30 y m31

$$\boxed{retorno = 12 * 10^2 + (36 - 12 - 6) * 10^1 + 6 = 1386} \tag{r16}$$

1.1.17. Karatsuba(52,98) - Nivel 2 - Llamado de Karatsuba(6352,2298)

Resolviendo la primeras incógnitas $x = 63 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 52 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 5 \wedge x_0 = 2 \tag{70}$$
$$y_1 = 9 \wedge y_0 = 8 \tag{71}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 5 + 2 = 7 \tag{s33}$$
$$y_1 + y_0 = 9 + 8 = 17 \tag{s34}$$

Continuando con el algoritmo tendremos que resolver P

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = Karatsuba(07, 17)\ con\ s33, s34 \tag{72}$$

Con lo resuelto en 1.1.18 sabemos que el retorno r18=119 por lo tanto:

$$P = 119 \tag{73}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base multiplicamos directamente:

$$x_1y_1 = Karatsuba(5, 9) = 5 * 9 = 45 \tag{m32}$$
$$x_0y_0 = Karatsuba(2, 8) = 2 * 8 = 16 \tag{m33}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{74}$$

Remplazando con $n = 2$, 73, m32 y m33

$$\boxed{retorno = 45 * 10^2 + (119 - 45 - 16) * 10^1 + 16 = 5096} \tag{r17}$$

1.1.18. Karatsuba (07,17) - Nivel 2 - Llamado de Karatsuba(6352,2298)

$Karatsuba(07, 17)$ es un caso base, vemos que $x = 7 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 17 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 0 \wedge x_0 = 7 \tag{75}$$
$$y_1 = 1 \wedge y_0 = 7 \tag{76}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 0 + 7 = 7 \tag{s35}$$
$$y_1 + y_0 = 1 + 7 = 8 \tag{s36}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s35 y s36 y al ser números de una cifra calculamos la multiplicación directamente

$$P = Karatsuba(7, 8) = 7 * 8 = 56 \tag{m34}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base multiplicamos directamente:

$$x_1y_1 = Karatsuba(0, 1) = 0 * 1 = 0 \tag{m35}$$
$$x_0y_0 = Karatsuba(4, 7) = 7 * 7 = 49 \tag{m36}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{77}$$

Remplazando con $n = 2$, m34, m35 y m36

$$\boxed{retorno = 0 * 10^2 + (56 - 0 - 49) * 10^1 + 49 = 119} \tag{r18}$$

1.1.19. Karatsuba (4113,6855) - Nivel 1 - Llamado de Karatsuba(63524113,22986855)

Para resolver $Karatsuba(4113, 6855)$ primero tenemos que sacar las incógnitas

Por lo tanto $x = 4113 = x_1 * 10^2 + x_0$ e $y = 6855 = y_1 * 10^2 + y_0$, resolviendo sacamos:

$$x_1 = 41 \wedge x_0 = 13 \tag{78}$$

$$y_1 = 68 \wedge y_0 = 55 \tag{79}$$

Ahora calculamos $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 41 + 13 = 54 \tag{s37}$$
$$y_1 + y_0 = 68 + 55 = 123 \tag{s38}$$

Continuando con el algoritmo tendremos que resolver para P

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = Karatsuba(54, 123)\ con\ s37, s38 \tag{80}$$

que se resuelve en 1.1.20 con retorno r20 = 6642, entonces:

$$P = 6642 \tag{81}$$

Continuamos con encontrar el resultado de $x_1y_1 = Karatsuba(41, 68)$ y $x_0y_0 = Karatsuba(13, 55)$, calculados en 1.1.23 y 1.1.25, remplazando las llamadas con los retornos r23 y r25 obtenemos:

$$x_1y_1 = Karatsuba(41, 68) = 2788 \tag{82}$$
$$x_0y_0 = Karatsuba(13, 55) = 715 \tag{83}$$

Entonces calculando el retorno $x_1y_1 * 10^4 + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^2 + x_0y_0$ con 81, 82 y 83

$$\boxed{retorno = 2788 * 10^4 + (6642 - 2788 - 715) * 10^2 + 715 = 28194615} \tag{r19}$$

1.1.20. Karatsuba(54,123) - Nivel 2 - Llamado de Karatsuba(4113,6855)

Resolviendo la primeras incógnitas $x = 54 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 123 = y_1 * 10 + y_0$ resolvemos que:

$$x_1 = 5 \wedge x_0 = 4 \tag{84}$$
$$y_1 = 12 \wedge y_0 = 3 \tag{85}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 5 + 4 = 9 \tag{s39}$$
$$y_1 + y_0 = 12 + 3 = 15 \tag{s40}$$

Continuando con el algoritmo tendremos que resolver P

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = Karatsuba(09, 15)\ con\ s39, s40 \tag{86}$$

que se resuelve en 1.1.21 con retorno r21 = 135, entonces:

$$P = 135 \tag{87}$$

Calculamos x_1y_1 con Karatsuba, resuelto en 1.1.22

$$x_1y_1 = Karatsuba(05, 12) = 60 \tag{88}$$

Ahora calculamos $x_0 * y_0$, al ser un caso base multiplicamos directamente:

$$x_0y_0 = Karatsuba(4, 3) = 4 * 3 = 12 \tag{m37}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{89}$$

Remplazando con $n = 2$, 87, 88 y m37

$$\boxed{retorno = 60 * 10^2 + (135 - 60 - 12) * 10^1 + 12 = 6642} \tag{r20}$$

1.1.21. Karatsuba(09,15) - Nivel 3 - Llamado de Karatsuba(54,123)

$Karatsuba(09, 15)$ es un caso base, vemos que $x = 9 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 15 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 0 \wedge x_0 = 9 \tag{90}$$

$$y_1 = 1 \wedge y_0 = 5 \tag{91}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 0 + 9 = 9 \tag{s41}$$
$$y_1 + y_0 = 1 + 5 = 6 \tag{s42}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s41 y s42 y al ser números de una cifra calculamos la multiplicación directamente

$$P = Karatsuba(9, 6) = 9 * 6 = 54 \tag{m38}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base multiplicamos directamente:

$$x_1y_1 = Karatsuba(0, 1) = 0 * 1 = 0 \tag{m39}$$
$$x_0y_0 = Karatsuba(9, 5) = 9 * 5 = 45 \tag{m40}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{92}$$

Remplazando con $n = 2$, m38, m39 y m40

$$\boxed{retorno = 0 * 10^2 + (54 - 0 - 45) * 10^1 + 45 = 135} \tag{r21}$$

1.1.22. Karatsuba(05,12) - Nivel 3 - Llamado de Karatsuba(54,123)

$Karatsuba(05, 12)$ es un caso base, vemos que $x = 5 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 12 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 0 \wedge x_0 = 5 \tag{93}$$

$$y_1 = 1 \wedge y_0 = 2 \tag{94}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 0 + 5 = 5 \tag{s43}$$
$$y_1 + y_0 = 1 + 2 = 3 \tag{s44}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s43 y s44 y al ser números de una cifra calculamos la multiplicación directamente

$$P = Karatsuba(5, 3) = 5 * 3 = 15 \tag{m41}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base multiplicamos directamente:

$$x_1 y_1 = Karatsuba(0, 1) = 0 * 1 = 0 \tag{m42}$$
$$x_0 y_0 = Karatsuba(5, 2) = 5 * 2 = 10 \tag{m43}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1 y_1 * 10^n + (P - x_1 y_1 - x_0 y_0) * 10^{n/2} + x_0 y_0 \tag{95}$$

Remplazando con $n = 2$, m41, m42 y m43

$$\boxed{retorno = 0 * 10^2 + (15 - 0 - 10) * 10^1 + 10 = 60} \tag{r22}$$

1.1.23. Karatsuba(41,68) - Nivel 2 - Llamado de Karatsuba(4113,6855)

Resolviendo la primeras incógnitas $x = 41 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 68 = y_1 * 10 + y_0$ resolvemos que:

$$x_1 = 4 \wedge x_0 = 1 \tag{96}$$
$$y_1 = 6 \wedge y_0 = 8 \tag{97}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 4 + 1 = 5 \tag{s45}$$
$$y_1 + y_0 = 6 + 8 = 14 \tag{s46}$$

Continuando con el algoritmo tendremos que resolver P

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = Karatsuba(05, 14) \ con \ s45, s46 \tag{98}$$

que se resuelve en 1.1.24 con retorno r24 = 70, entonces:

$$P = 70 \tag{99}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base multiplicamos directamente:

$$x_1 y_1 = Karatsuba(4, 6) = 4 * 6 = 24 \tag{m44}$$
$$x_0 y_0 = Karatsuba(1, 8) = 1 * 8 = 8 \tag{m45}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1 y_1 * 10^n + (P - x_1 y_1 - x_0 y_0) * 10^{n/2} + x_0 y_0 \tag{100}$$

Remplazando con $n = 2$, 99, m44 y m45

$$\boxed{retorno = 24 * 10^2 + (70 - 24 - 8) * 10^1 + 8 = 2788} \tag{r23}$$

1.1.24. Karatsuba(05,14) - Nivel 3 - Llamado de Karatsuba(41,68)

$Karatsuba(05, 14)$ es un caso base, vemos que $x = 5 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 14 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 0 \wedge x_0 = 5 \tag{101}$$

$$y_1 = 1 \wedge y_0 = 4 \tag{102}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 0 + 5 = 5 \tag{s47}$$
$$y_1 + y_0 = 1 + 4 = 5 \tag{s48}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s47 y s48 y al ser números de una cifra calculamos la multiplicación directamente

$$P = Karatsuba(5, 5) = 5 * 5 = 25 \tag{m46}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base multiplicamos directamente:

$$x_1 y_1 = Karatsuba(0, 1) = 0 * 1 = 0 \tag{m47}$$
$$x_0 y_0 = Karatsuba(5, 4) = 5 * 4 = 20 \tag{m48}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1 y_1 * 10^n + (P - x_1 y_1 - x_0 y_0) * 10^{n/2} + x_0 y_0 \tag{103}$$

Remplazando con $n = 2$, m46, m47 y m48

$$\boxed{retorno = 0 * 10^2 + (25 - 0 - 20) * 10^1 + 20 = 70} \tag{r24}$$

1.1.25. Karatsuba(13,55) - Nivel 2 - Llamado de Karatsuba(13,55)

Para resolver $Karatsuba(13, 55)$ primero tenemos que sacar las incógnitas

Por lo tanto $x = 13 = x_1 * 10^2 + x_0$ e $y = 55 = y_1 * 10^2 + y_0$, resolviendo sacamos:

$$x_1 = 1 \wedge x_0 = 3 \tag{104}$$

$$y_1 = 5 \wedge y_0 = 5 \tag{105}$$

Ahora calculamos $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 1 + 3 = 4 \tag{s49}$$
$$y_1 + y_0 = 5 + 5 = 10 \tag{s50}$$

Continuando con el algoritmo tendremos que resolver para P

$$P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0) = Karatsuba(04, 10)\ con\ s49, s50 \tag{106}$$

que se resuelve en 1.1.26 con retorno r26 = 40, entonces:

$$P = 40 \tag{107}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$, al ser casos base multiplicamos directamente:

$$x_1 y_1 = Karatsuba(1, 5) = 1 * 5 = 5 \tag{m49}$$
$$x_0 y_0 = Karatsuba(3, 5) = 3 * 5 = 15 \tag{m50}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{108}$$

Remplazando con $n = 2$, 107, m49 y m50

$$\boxed{retorno = 5 * 10^2 + (40 - 5 - 15) * 10^1 + 15 = 715} \tag{r25}$$

1.1.26. Karatsuba (04, 10) - Nivel 3 - Llamado de Karatsuba(104,91)

$Karatsuba(04, 10)$ es un caso base, vemos que $x = 4 = x_1 * 10 + x_0$ e $y = 10 = y_1 * 10 + y_0$:

$$x_1 = 0 \wedge x_0 = 4 \tag{109}$$

$$y_1 = 1 \wedge y_0 = 0 \tag{110}$$

Calculamos las sumas $x_1 + x_0$ y $y_1 + y_0$:

$$x_1 + x_0 = 0 + 4 = 4 \tag{s51}$$

$$y_1 + y_0 = 1 + 0 = 1 \tag{s52}$$

Para calcular $P = Karatsuba(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$ remplazamos con s51 y s52 y al ser números de una cifra calculamos la multiplicacion directamente

$$P = Karatsuba(5, 1) = 5 * 1 = 5 \tag{m51}$$

Ahora calculamos $x_1 * y_1$ y $x_0 * y_0$:

$$x_1y_1 = Karatsuba(1, 1) = 1 * 1 = 1 \tag{m52}$$

$$x_0y_0 = Karatsuba(4, 0) = 4 * 0 = 0 \tag{m53}$$

Por ultimo calculamos el retorno

$$retorno = x_1y_1 * 10^n + (P - x_1y_1 - x_0y_0) * 10^{n/2} + x_0y_0 \tag{111}$$

Remplazando con $n = 2$ m51, m52 y m53

$$\boxed{retorno = 1 * 10^2 + (5 - 1 - 0) * 10^1 + 0 = 140} \tag{r26}$$

1.2. Cuente la cantidad de sumas y multiplicaciones que realiza y relaciónelo con la complejidad temporal del método.

Para este punto se va a tener en cuenta que las multiplicaciones $x * 10^n$ $x, n \in \mathbb{R}$ y las ecuaciones iniciales para sacar x_1, X_0, y_1 e y_o como triviales y no se van a contar para las sumas ni multiplicaciones. En el punto 1 se conto las sumas, multiplicaciones no triviales con sn y mn con $n \in \mathbb{N}$ respectivamente.

El retorno del algoritmo es un caso especial donde se hayan 2 sumas y 3 restas(5 sumas en total), al haber 26 retornos y 52 sumas no triviales se consigue que:

$$sumas\ totales = retornos * 5 + sumas\ no\ triviales = 26 * 5 + 52 = 182$$

$$\boxed{sumas\ totales = 26 * 5 + 52 = 182}$$

y se hizo un total de 53 multiplicaciones.

Las sumas son un trabajo menos intenso por lo cual las voy a contar para la complejidad pero las multiplicaciones con Karatsuba son menores, acercándose mas a la complejidad $O(n^log_2 3)$ pero al ser un n tan chico la complejidad sigue siendo mas cercana a $O(n^2)$

1.3. Comparar lo obtenido con el método de multiplicación tradicional. ¿Observa alguna mejora? Analice.

Comparando con el método tradicional se que el resultado es correcto. La diferencia es que hay una menor cantidad de multiplicaciones, 53 en vez de 64 pero una mayor cantidad de sumas(182 contra 64 o 8 dependiendo de como los cuentes). Pero gran diferencia también se encuentra en que estas sumas y multiplicaciones en Karatsuba son de mayor facilidad, en especial las multiplicaciones que son de digitos de una cifra.

Otra diferencia es el espacio que lleva resolverlo, mientras que de forma tradicional la multiplicación me podrá haber llevado una hoja, con Karatsuba me llevo varias. Pero con el método tradicional la multiplicación es mucho mas compleja y puede llevar a errores muy difíciles de ver. Además con karatsuba la multiplicación se divide en partes mas chicas que pueden ser resueltas por otras personas facilitando la multiplicación y el tiempo que llevaría. Por ejemplo en $Karatsuba(63524113, 22986855)$ se llaman a $Karatsuba(6352, 2298)$,$Karatsuba(4113, 6855)$ y $Karatsuba(10465, 9153)$, entonces cada llamada pude ser resuelta por una persona, juntar los resultados y resolver $Karatsuba(63524113, 22986855)$

1.4. ¿Por qué se puede considerar al algoritmo de Karatsuba como de "división y conquista"?

División y conquista es un conjunto de técnicas algorítmicas en el que se divide el problema en subproblemas de igual naturaleza y menor tamaño se los conquista (resuelve) en forma recursiva (hasta un caso base) y se combina los resultados en una solución general.

Esto es algo que se puede ver en el algoritmo de Karatsuba como se explico en la respuesta anterior. Este algoritmo divide la multiplicación de dos números en 3 multiplicaciones mas chicas(donde se vuelve a aplicar Karatsuba) y después los resultados de esas multiplicaciones se juntan para resolver la multiplicación mas compleja. Esta división se hace hasta llegar a los casos base que son multiplicaciones muy simples de una cifra.

2. Parte 2: Cuestión de complejidad...

Dado la siguiente relación de recurrencia

$$aT(n/b) + O(c)$$

Con:

a: 1 + (los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 9)
b: 2 + (los dos dígitos del padrón de la izquierda mod 7)
c: "n" si su padrón es múltiplo de 4,
sino "nlogn" si su padrón es múltiplo de 3,
sino "n2"

Se pide:

1. Responda y complete:¿Qué le falta a la relación de recurrencia para que se pueda aplicar el teorema maestro?
2. Calcular la complejidad temporal utilizando el teorema maestro.
3. Explique paso a paso cómo llega a la misma.

2.1. Responda y complete:¿Qué le falta a la relación de recurrencia para que se pueda aplicar el teorema maestro?

Primero completo la relacion de recurrencia con mi padron 106226

$$a = 1 + 10\,\%9 = 2$$
$$b = 2 + 10\,\%7 = 5$$

Para c:

$$106226\,\%4 = 2 \neq 0$$
$$106226\,\%3 = 2 \neq 0$$

Entonces $c = n^2$

Completando la relacion de recurrencia

$$T(n) = 2T(n/5) + O(n^2)$$

Ahora para aplicar terorema maestro tiene que ocurrir:

1. $a \geq 1$ y $b \geq 1$ constantes
2. $f(n)$ una función
3. $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ una recurrencia con $T(0) = cte$

El punto 1 se cumple ya que $a = 2 \geq 1 \wedge b = 5 \geq 1$ y $a = cte \wedge b = cte$. El punto 2 tambien se cumple ya que $f(n) = O(n^2)$, aca voy a asumir que se debe continuar con $O(n^2)$ y no se debe remplazar por alguna funcion acotada por ella. El punto 3 solo si cumple si $T(0) = cte$ entonces si asumimos que $T(0) = cte$ podemos aplicar el teroema maestro a $T(n) = 2T(n/5) + O(n^2)$

2.2. Calcular la complejidad temporal utilizando el teorema maestro.

Para resolver el teorema maestro se pueden utilizar 3 casos

1. $Si\ f(n) = O(n^{\log_b a-e}), e < 0 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. $Si\ f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} * \log n)$
3. $Si\ f(n) = \Omega(n^{\log_b a+e}) \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$, si $af(n/b) \leq cf(n)$ con $c < 1 \wedge n >>$

Con $T(n) = 2T(n/5) + O(n^2)$ tenemos:

$$a = 2 \quad b = 5 \quad f(n) = O(n^2)$$

2.2.1. Resolviendo para el caso 1:

$$O(n^2) \stackrel{?}{=} O(n^{\log_5 2-e}) \stackrel{?}{=} O(n^{0,43-e})$$

Este caso ya sabemos que no da, ya que $O(n^2)$ nunca podria ser acotado por $O(n^{0,43-e})$

2.2.2. Resolviendo para el caso 2:

$$O(n^2) \stackrel{?}{=} \Theta(n^{\log_5 2}) \stackrel{?}{=} \Theta(n^{0,43})$$

Este caso ya sabemos que no da, ya que $O(n^2)$ nunca podria ser acotado por $\Theta(n^{0,43})$

2.2.3. Resolviendo para el caso 3:

Primero tenemos que resolver $af(n/b) \leq cf(n)$ con $c < 1 \wedge n >>$

$$2O((n/5)^2) \leq cO(n^2)$$

Con cualquier $c \neq 0$ y $n >>$ las constantes con big O no son relevantes, entonces $O(n^2) \leq O(n^2)$ y se puede aplicar el caso 3

$$O(n^2) \stackrel{?}{=} \Omega(n^{\log_5 2+e}) \stackrel{?}{=} \Omega(n^{0,43+e})$$

Con $e = 0,1$

$$O(n^2) = \Omega(n^{0,43+0,1}) = \Omega(n^{0,53})$$

Ya que $O(n^2)$ esta acotada inferiormente por $\Omega(n^{0,53})$

$$\Rightarrow \boxed{T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(O(n^2))}$$