EL5205
Laboratorio de Control Avanzado

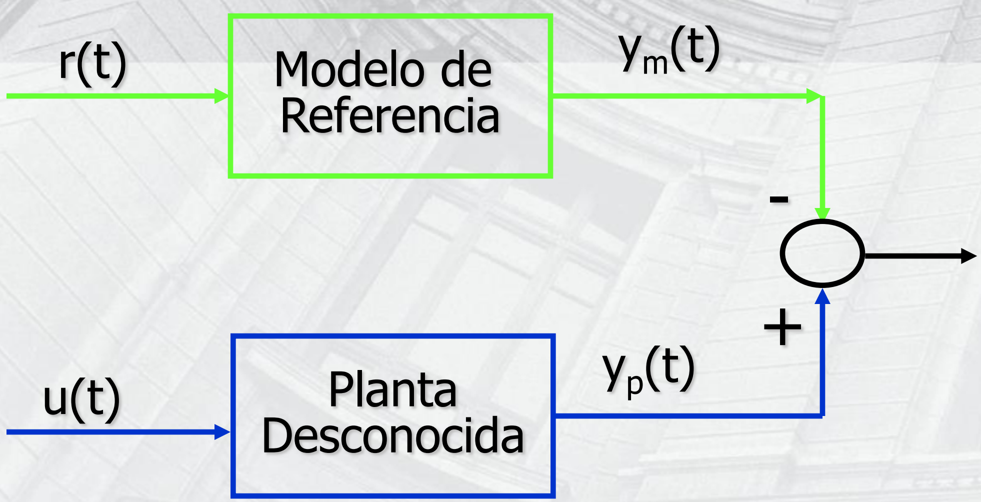
TEMA: CONTROL ADAPTABLE DE SISTEMAS

Prof. Manuel A. Duarte Mermoud

Semestre Otoño 2014

1.0 Sistemas Adaptivos Simples

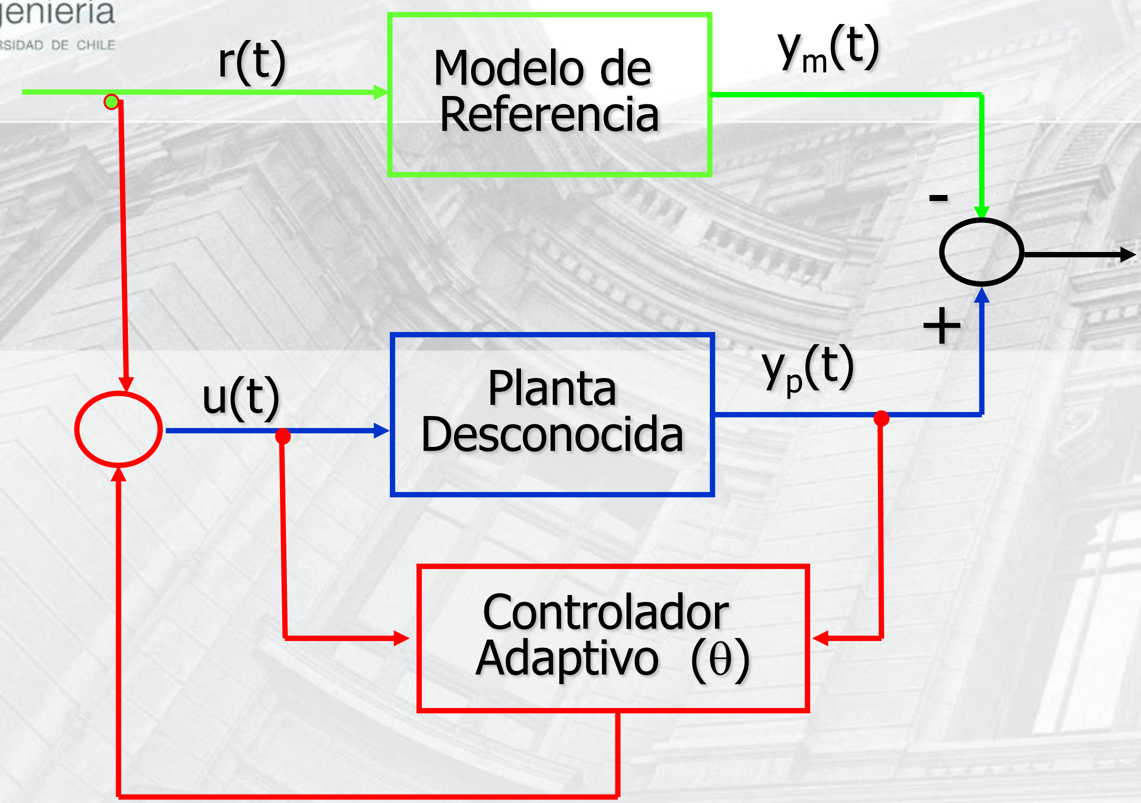
CARM (MRAC)



Error de Seguimiento
o de Control

o de Salida

$$e_c(t)$$
$$e_1(t)$$
$$e_s(t)$$



Error de Seguimiento o de Control

$e_C(t)$

$e_1(t)$

$e_S(t)$

Formas de lograrlo:

- Directo
- Indirecto
- Combinado

Objetivo de Control

$$\lim_{t \to \infty} e_c(t) = 0$$

$$\theta(t) \not\to \theta^*$$

1.1 Control Adaptivo Directo

Planta de primer orden (Narendra, Valavani 1977)

(Planta) $\dot{x}_p = -a_p x_p + k_p u \qquad a_p, k_p \in \Re$ constantes desconocidas

$$x_p(\cdot):[t_0,\infty) \to \Re, \quad u(\cdot):[t_0,\infty) \to \Re$$

(Modelo de Referencia)

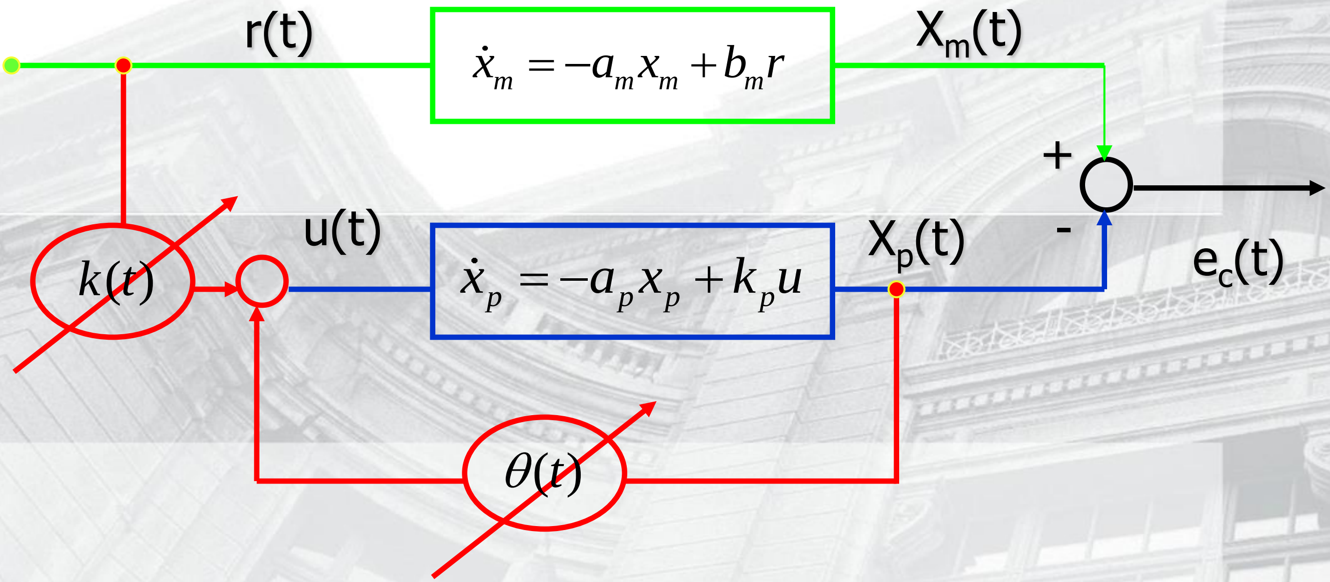
$$\dot{x}_m = -a_m x_m + b_m r, \quad a_m, b_m \in \Re \text{ constantes conocidas } \; a_m > 0$$

$\dot{x}_m(\cdot):[t_0,\infty) \to \Re$

$r(\cdot):[t_0,\infty) \to \Re$ acotada, continua por tramos

(Ley de Control)

$$u(t) = \theta(t) x_p(t) + k(t) r(t)$$



$$\dot{x}_p(t) = \left[-a_p + k_p\theta(t)\right]x_p(t) + k_p k(t) r(t)$$

$$\dot{x}_m(t) = -a_m x_m(t) + b_m r(t)$$

$$\left.\begin{array}{ll} -a_p + k_p\theta^* = -a_m, & \theta^* \\ k_p k^* = b_m, & k^* \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{parámetros deseados} \\ \text{del controlador}\end{array}$$

$$\dot{e}_c(t) = \left[-a_p + k_p\theta\right]x_p + a_m x_m + \left(k_p k - b_m\right)r \qquad \pm a_m x_p$$

$$\dot{e}_c(t) = \underbrace{[-a_p + a_m}_{-k_p\theta^*} + k_p\theta]x_p + a_m \underbrace{(x_m - x_p)}_{-e_c} + (\underbrace{k_p k}_{k_p k^*} - b_m)r$$

$$\dot{e}_c(t) = k_p \underbrace{(\theta - \theta^*)}_{\phi_\theta} x_p - a_m e_c + k_p \underbrace{(k - k^*)}_{\phi_k} r$$

$$\dot{e}_c(t) = -a_m e_c(t) + k_p \phi_\theta(t) x_p(t) + k_p \phi_k(t) r(t)$$

Modelo de Error Nº 2

Ley de Ajuste de Parámetros:

$$\dot{\phi}_\theta(t) = \dot{\theta}(t) = -\operatorname{sgn}(k_p)e_c(t)x_p(t)$$
$$\dot{\phi}_k(t) = \dot{k}(t) = -\operatorname{sgn}(k_p)e_c(t)r(t)$$

Análisis de Estabilidad

$$V = \frac{1}{2}(e_c^2 + |k_p|\phi_\theta^2 + |k_p|\phi_k^2)$$
$$\dot{V} = e_c\dot{e}_c + |k_p|\phi_\theta\,\dot{\phi}_\theta + |k_p|\phi_k\dot{\phi}_k$$
$$\dot{V} = -a_m e_c^2 + k_p\phi_\theta\, x_p e_c + k_p\phi_k r e_c - |k_p|\operatorname{sgn}(k_p)\phi_\theta x_p e_c - |k_p|\operatorname{sgn}(k_p)\phi_k r e_c$$
$$= -a_m e_c^2 \le 0$$

$$\dot{V} = -a_m e_c^2 \leq 0 \Rightarrow \quad e_c \in \mathcal{L}^2$$

$$V > 0, \quad \dot{V} \leq 0, \quad \Rightarrow \quad e_c, \phi_\theta, \phi_k \in \mathcal{L}^\infty$$

$$x_p, \theta, k \in \mathcal{L}^\infty$$

$$r \in \mathcal{L}^\infty \Rightarrow x_m \in \mathcal{L}^\infty, \quad \therefore \dot{e}_c \in \mathcal{L}^\infty, \quad \therefore u \in \mathcal{L}^\infty$$

Barbalat Lema

$$e_c \text{ continua, } e_c \in \mathcal{L}^2 \text{ y además } e_c \in \mathcal{L}^\infty$$

$$\text{entonces } \lim_{t \to \infty} e_c = 0$$

Conclusión:

$$e_c \to 0, t \to \infty$$

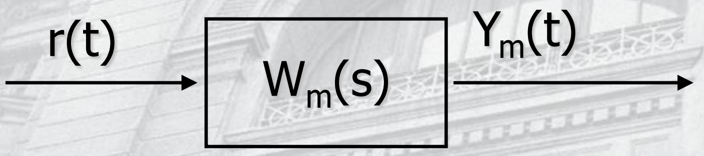
Hipótesis:

- signo de k_p conocido
- $r \in \mathcal{L}^\infty$
- Modelo de referencia a.e
- Planta lineal, invariable en el tiempo
- Planta C.C. $K_p \neq 0$
- Grado relativo conocido
- Orden de la planta (cota superior)
- Ceros en el s. p. i. c

2.0 Control Adaptivo por Referencia a Modelo (CARM) de Plantas de Grado Relativo Unitario(n*=1)

Modelo de Referencia

$$W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$$



$Z_m(s)$: mónico y Hurwitz grado n-1

$R_m(s)$: mónico y Hurwitz grado n

(F de T $W_m(s)$ estrictamente real positiva, sin pérdida de generalidad)

$r(\cdot)$: uniformemente acotada y continua por tramos

k_m : ganancia de alta frecuencia

$$Z_m(s) = s^{n-1} + b_{n-1}^m s^{n-2} + ... + b_1^m s + b_0^m$$

$$R_m(s) = s^n + a_{n-1}^m s^{n-1} + ... + a_1^m s + a_0^m$$

Planta

$$W_p(s) = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{W_p(s)} \longrightarrow Y_p(t)$$

$Z_p(s)$: mónico y Hurwitz grado n-1

$R_p(s)$: mónico y grado n

k_p : ganancia de alta frecuencia

$$Z_p(s) = s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + ... + b_1 s + b_0$$

$$R_p(s) = s^{n} + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$$

<u>Supuestos Clásicos</u>

i) Signo de k_p conocido

ii) Cota superior de n conocida

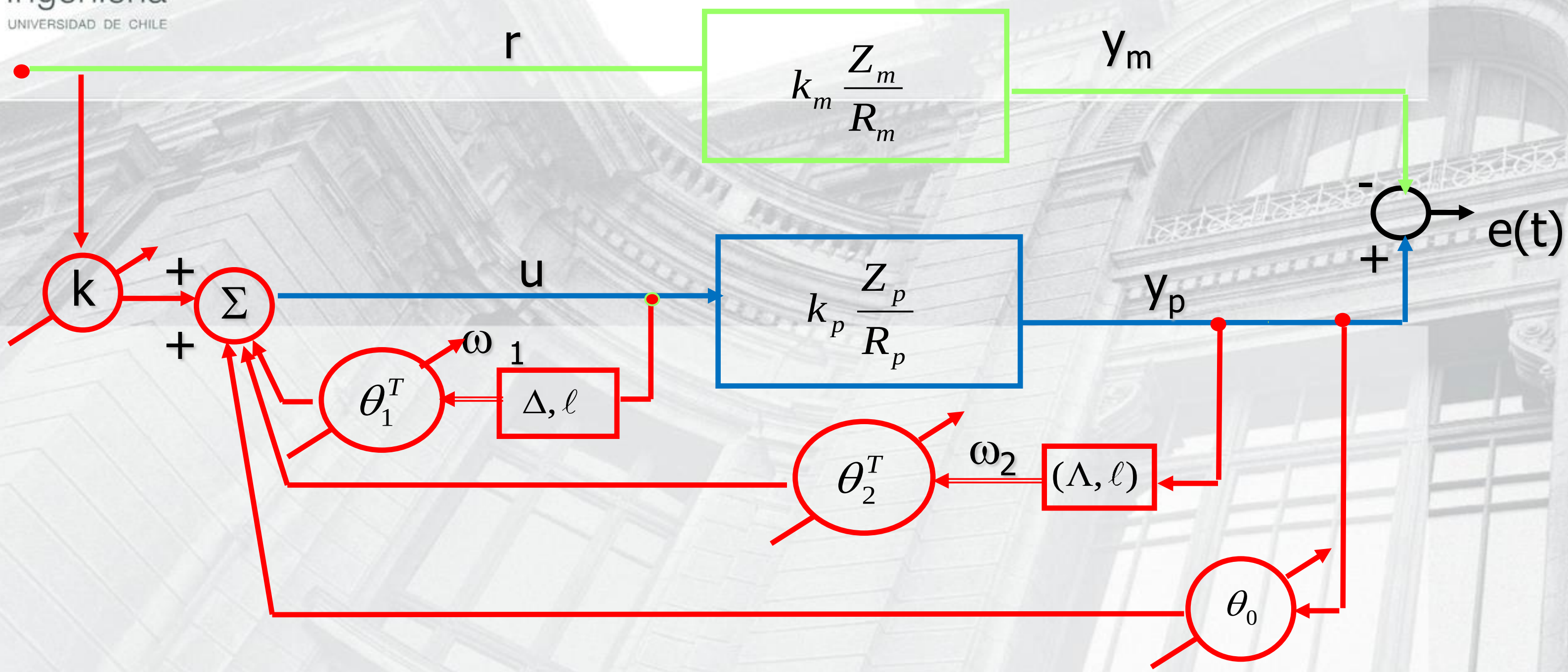
iii) grado relativo n* conocido

iv) ceros de la planta en **C**$^-$

$$\dot{x}_p = A_p x_p + b_p u$$

$$y_p = h_p^T x_p$$

Esquema de Control



$Z_m(s)$, $R_m(s)$: mónico y Hurwitz grado n-1 y n (conocidos)

W_m (s) e.r.p.

$Z_p(s)$: mónico y grado n-1 (desconocido)

$R_m(s)$: mónico y Hurwitz grado n (desconocido)

Objetivo de Control

$$\lim_{t \to \infty} \left(y_p(t) - y_m(t) \right) = 0$$

$$\dot{\omega}_1 = \Lambda\omega_1 + \ell u \qquad \Lambda \in \Re^{(n-1)\times(n-1)}$$

$$\dot{\omega}_2 = \Lambda\omega_2 + \ell y_p$$

$$\omega = \left[r\ \omega_1^T\ \ y_p\ \ \omega_2^T \right]^T \qquad \theta = \left[k\ \theta_1^T\ \ \theta_0\ \ \theta_2^T \right]^T \in \Re^{2n}$$

Se escoge $\Lambda(s) = Z_m(s)$

Definimos

$$\phi(t) = \theta(t) - \theta^* = \left[k - k^*\ \ (\theta_1 - \theta_1^*)^T\ \ \theta_0 - \theta_0^*\ \ (\theta_2 - \theta_2^*)^T \right]^T$$

$$= \left[\psi(t)\ \ \phi_1^T(t)\ \ \phi_0(t)\ \ \phi_2^T(t) \right]^T$$

Ingeniería
UNIVERSIDAD DE CHILE

Leyes de ajuste:

$$\dot{\psi}(t) = \dot{k}(t) = -\operatorname{sgn}(k_p)e(t)r(t)$$

$$\dot{\phi}_0(t) = \dot{\theta}_0(t) = -\operatorname{sgn}(k_p)e(t)y_p(t)$$

$$\dot{\phi}_1(t) = \dot{\theta}_1(t) = -\operatorname{sgn}(k_p)e(t)\omega_1(t)$$

$$\dot{\phi}_2(t) = \dot{\theta}_2(t) = -\operatorname{sgn}(k_p)e(t)\omega_2(t)$$

$$\dot{\phi}(t) = \dot{\theta}(t) = -\operatorname{sgn}(k_p)e(t)\omega(t)$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|y_p(t)-y_m(t)\right|=0$$ Estabilidad Lema (e.r.p.)

Consecuencia directa Lema:

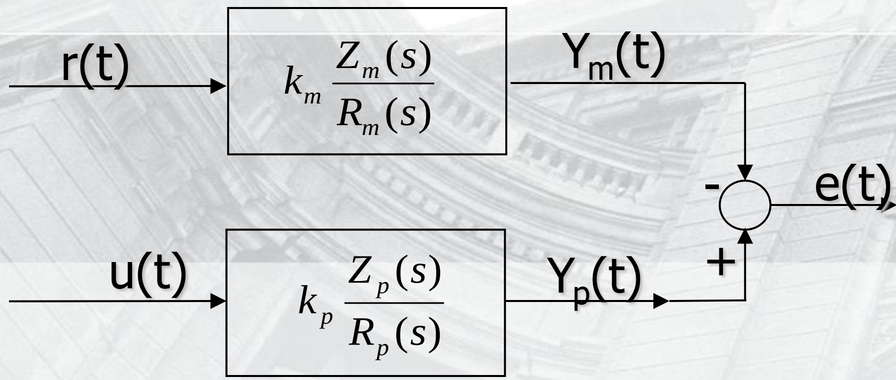
$$e'(t),\phi(t)\in\mathcal{L}^{\infty},\quad e'\in\mathcal{L}^{2}$$

$$e'(t)\in\mathcal{L}^{\infty}\Rightarrow x_p,\omega_1,\omega_2\in\mathcal{L}^{\infty}$$

$$\therefore\dot{e}'(t)\in\mathcal{L}^{\infty}\quad\therefore\quad e'(t)\underset{t\to\infty}{\rightarrow}0$$

$$\therefore\lim_{t\to\infty}e(t)=0$$

3.0 Control Adaptable Plantas de Orden n y Grado Relativo Arbritrario (n* arbitrario)



$$Z_m(s) = s^m + b_{m-1}^m s^{m-1} + ... + b_1^m s + b_0^m$$

$$R_m(s) = s^n + a_{n-1}^m s^{n-1} + ... + a_1^m s + a_0^m$$

$$Z_p(s) = s^m + b_{m-1}^m s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0$$

$$R_p(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + b_0$$

$Z_m(s)$, $R_m(s)$: mónico y Hurwitz grado m y n (conocidos)

$Z_p(s)$: mónico y Hurwitz grado m (desconocido)

$R_p(s)$: mónico, grado n (desconocido)

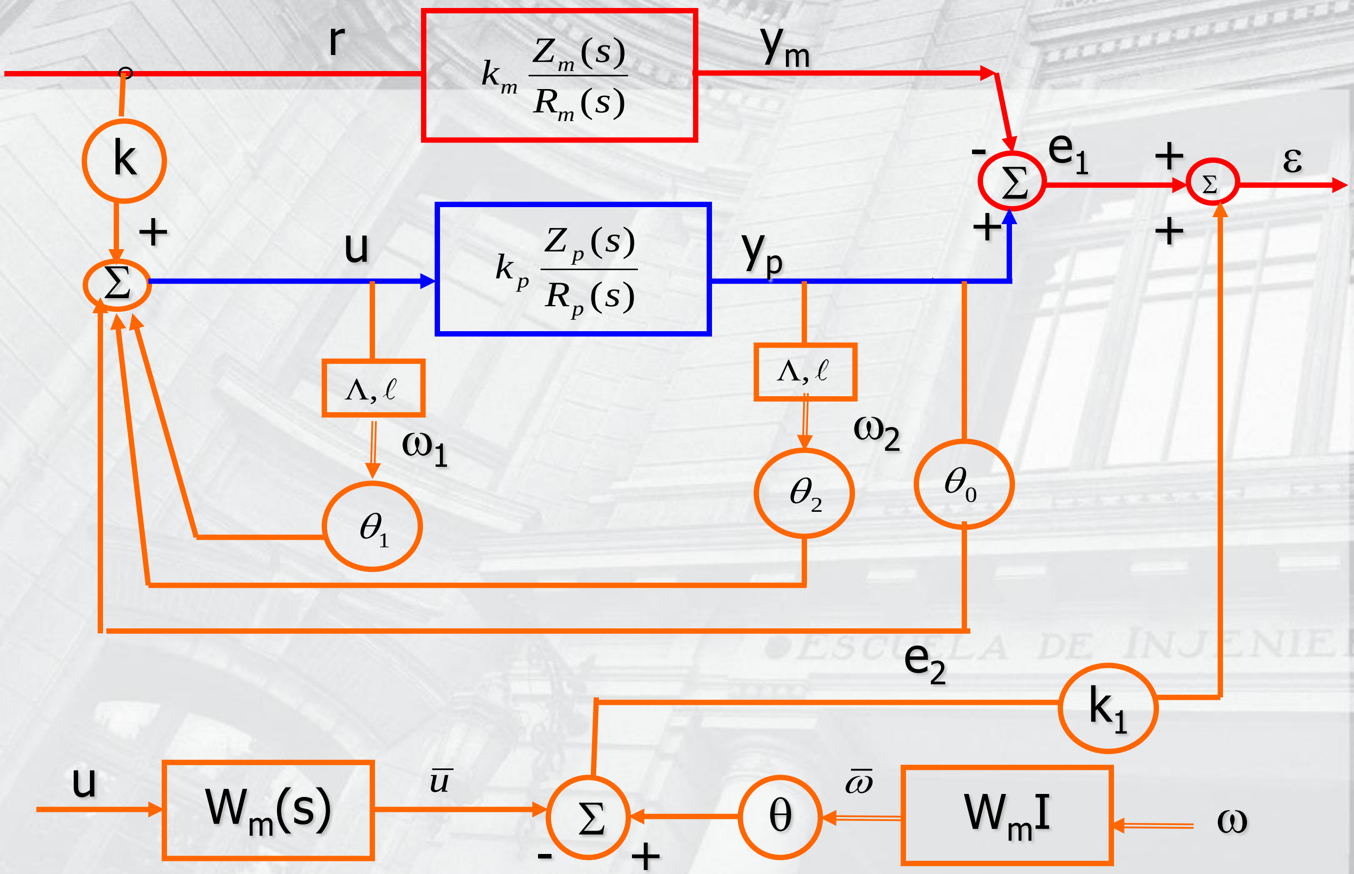
Signo de k_p conocido.

$r(\cdot)$ uniformemente acotada y continua por tramos.

Grado relativo conocido $n^* = n - m$.

Cota superior de n conocida (se supone n).

Ceros de la planta en C^-



$Z_m(s)$: mónico, Hurwitz grado m, n-m $\geq$ 2
$R_m(s)$: mónico, grado n , conocidos

$Z_p(s)$: mónico, Hurwitz grado m, n-m$\geq$ 2
$R_p(s)$: mónico, grado n , desconocidos

$$u = \theta^T(t)\omega(t)$$

$$\theta(t) = \left[k \ \theta_1^T \ \theta_0 \ \theta_2^T \right]^T$$

$$\omega(t) = \left[r \ \omega_1^T \ y_p \omega_2^T \right]^T$$

$$\varepsilon = e_1 + k_1(t) e_2 \quad \text{error aumentado}$$

$$e_2 = \theta^T \bar{\omega} - \bar{u} \quad \text{error auxiliar}$$

Escogemos $\Lambda(s) = Z_m(s)\Lambda_1(s)$

$\Lambda_1(s)$: Hurtwitz, grado n–m-1

Ley de Ajuste

$$\dot{\theta} = \dot{\phi} = -sgn(k_p)\,\frac{\varepsilon\bar{\omega}}{1+\bar{\omega}^T\bar{\omega}}$$

$$\dot{k}_1 = \dot{\psi}_1 = -\frac{\varepsilon e_2}{1+\bar{\omega}^T\bar{\omega}}$$

Se demuestra (consultar bibliografía)

- Todas las señales uniformemente acotadas
- $\lim_{t\to\infty} e_1(t) = 0$ (también e_2 y ε)
- Si $\bar{\omega}\in\Omega_{2n}$ entonces $\lim_{t\to\infty}\phi = 0$ y $\lim_{t\to\infty}\psi_1 = 0$

Comentarios:

- Introducción de ganancias adaptivas constantes o incluso variantes en el tiempo.

- $n_m^* \geq n^*$

- $\bar{n} \geq n$