LP 14 : Ondes acoustiques

Niveau :

Prérequis : meca flu, equations Euler, conservation masse, thermo, loi de Laplace.

I - Propagation dans les fluides

1.1. Approximation acoustique

On considère un état stationnaire ρ_0, $P_0 = 1\,\text{bar}$, $\vec{v}_0 = \vec{0}$ que l'on perturbe :

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad , \quad \rho_1 \ll \rho_0$$

$$P = P_0 + P_1 \quad , \quad P_1 \ll P_0$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \quad , \quad v_1 \ll c$$

$\hookrightarrow$ grandeur que l'on verra plus tard.

On considère fluide parfait ($\eta = 0$ et) compressible

1.2. Linéarisation et équation de propagation

- conservation de la masse :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho_0+\rho_1)}{\partial t}}_{\frac{\partial \rho_1}{\partial t}} + \operatorname{div} \underbrace{\rho\vec{v}}_{(\rho_0+\rho_1)(\vec{v}_0+\vec{v}_1)} = 0$$

constat

$\rightarrow$ ordre 1 :

uniforme

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\underbrace{\cancel{(\rho_0+\rho_1)\vec{v}_0}}_{=0 \text{ car } \vec{v}_0 \text{ uniforme}} + \rho_0 \vec{v}_1\right] = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0} \quad (1)$$

3

- Euler pour la qté de mouvement :

$$\rho\left(\underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}_{\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t}} + \cancel{\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{v}}\right) = -\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P}_{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P_1}$$

on neglige pesanteur.

$\vec{v}_0$ stat

$=0$ ordre 2.

↳ se justifie aussi car $v_1 \ll c_s$

P_0 uniforme

$$\rightarrow \boxed{\rho_0\,\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P_1} \quad (2)$$

On a deux eq qui lie P_1 à $\vec{v}_1$ et ρ_1 à $\vec{v}_1$, lien entre P et ρ :

- Approximation isentropique (adiab + reversible)
  ↳ valable car $T_{propag} < T_{diff}$

  - $$\chi_S = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial P}\bigg|_S$$

  - $\rho = f(P)$ eq d'état

$$\rho = f(P_0) + f'(P_0)\,P_1.$$

$$= \rho_0 + \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial P}\bigg|_{P=P_0} P_1}_{\rho_1}$$

D'où $$\boxed{\rho_1 = \rho_0\,\chi_{S,0}\,P_1} \quad (3)$$

$(3) \to (1)$

$$\Longrightarrow \quad \rho_0 \chi_S \frac{\partial P_1}{\partial t} + \rho_0 \, \mathrm{div}\, \vec{v}_1 = 0$$

$$\xrightarrow{\partial t} \quad \chi_S \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \mathrm{div}\, \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = 0.$$

$$\xrightarrow{(2)} \quad \chi_S \frac{\partial^2 P_1}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0} \underbrace{\mathrm{div}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P_1}_{\Delta P_1.} = 0$$

D'où

$$\boxed{\Delta P_1 = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 P_1}{\partial t}}$$

Équation de d'Alembert

"De même pour $\vec{v}_1$"

avec $\boxed{c_S = 1/\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$

~~vitesse~~ célérité du son.

Rq: $v_1 << c_S$.

1.3. Célérité du son.

Pour un gaz parfait, évolution isentropique loi de Laplace

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = c^{te}$$

(⑤ être au clair sur Laplace $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$)

$$\rho = A \, P^{1/\gamma}$$

$$\left.\frac{d\rho}{dP}\right|_{P=P_0} = \frac{A}{\gamma} P_0^{1/\gamma - 1} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0}$$

$$\longrightarrow \boxed{c_S = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{R T_0}{M}}}$$

$$\left(\begin{array}{l} PV = \frac{m}{M} RT \\ P = \frac{\rho}{M} RT \end{array} \right)$$

$\rho \simeq 1{,}2\,kg.m^{-3}$

AN: GP : diatomique $\gamma = 1{,}4 = \frac{\frac{\alpha}{2}+1}{\frac{\alpha}{2}}$ $\alpha = 5$

~~$\chi_S = 1{,}2\times10^5$~~ $\left\{ \begin{array}{l} M = 29\ g.mol^{-1} \\ T_0 = 298\ K \\ R = 8{,}31 \end{array} \right\} \rightarrow c_S = 346\ m.s^{-1}$ à 25°C

348 à 30°C

$\boxed{343\ m.s^{-1}}$ à 20°C

Rq: • eau $\left| \begin{array}{l} \chi_0 = 5\times10^{-10}\ Pa^{-1} \text{ (plus incompressible)} \\ \rho_0 = 10^3 \end{array} \right.$

$\rightarrow c_S = 1{,}4\times10^3\ m.s^{-1} = 1400$

• solide $c_S = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ← Young ← ρ

$\rightarrow 4{,}9\times10^3\ m.s^{-1}$

exp: déphasage ultrason.