LP24 : Phénomènes de résonances dans différents domaines de la physique

ENSP ~~2835~~ 4199

Niveau : CPGE

Prérequis : oscillations libres (meca, elec) electrocinétique, mécanique, rayonnement dipolaire

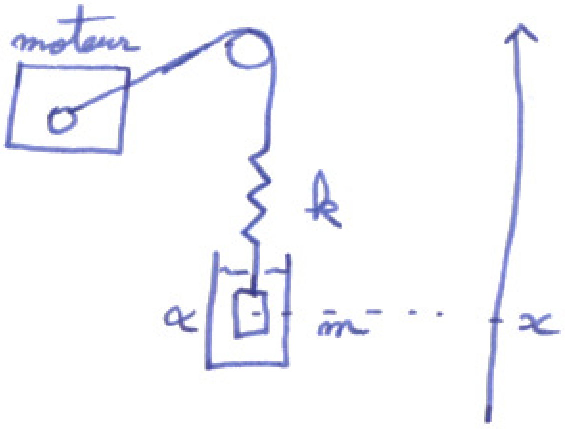
exp : ressort + vibreur

~~Resonnance : phénomène dans lequel un système soumis à une excitation périodique de fréquence proche d'une fréquence caractéristique du système répond~~

Resonance : phenomène dans lequel l'excitation périodique d'un système à une fréquence caractéristique provoque une réponse de grande amplitude.

I - Resonance en mécanique

1.1. Oscillateur harmonique en regime forcé.



Equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \overbrace{\underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{\text{frottement}}}^{\frac{\omega_0}{Q}} \frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = F_{moteur}$$

$$= \underbrace{F \times \cos(\omega t + \phi_e)}_{\text{excitation}}$$

→ perte

fréquence propre du système

Le système est linéaire, il répond à la même fréquence que l'excitation.

On attend donc une réponse :

$$x = x_0 \cos(\omega t + \phi_r).$$

La question est quelle est l'amplitude x_0 et ϕ_r.

On utilise la notation complexe

$$\underline{X} = X_0 \, e^{j(\omega t + \phi_r)}$$

$$\underline{X} = \underline{X_0} \, e^{j\omega t}$$

où $x = Re(\underline{X})$.
$x_0 = |\underline{X_0}|$
$\phi_r = Arg \, \underline{X_0}$

et $\underline{F} = F \, e^{j\omega t + \phi_e} = \underline{F} \, e^{j\omega t}$

"On va analyser ce qu'on obtient pour x_0 et ϕ_r."

1.2. Résonance en position

"On veut quantifier la réponse du système à l'excitation. Le système va repondre par une amplitude et un déphasage p/r à l'excitation"

"On quantifie cela avec :"

On définit la fonction de transfert "$\frac{\text{reponse}}{\text{excitation}}$"

$$\underline{H}_x = \frac{\underline{X}}{\underline{F}}$$

$|\underline{H}_x| \leftrightarrow$ gain "rapport entre amplitudes"

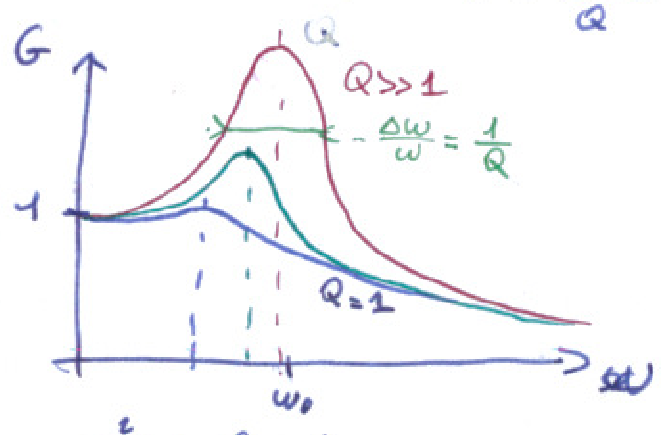
$Arg(\underline{H}_x) \leftrightarrow$ déphasage entre les deux.

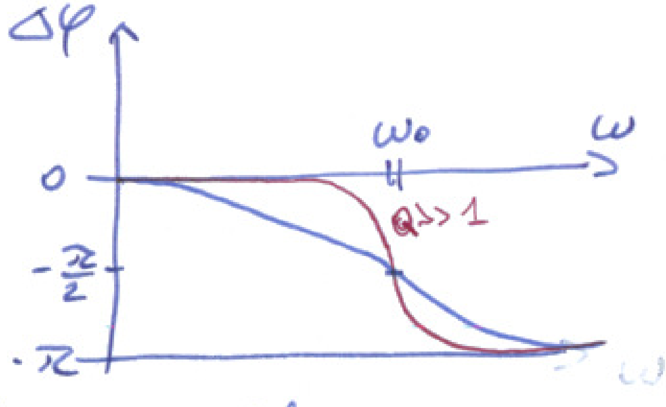
Ici : eq en $\mathbb{C}$:

$$-\omega^2 \underline{X_0} e^{j\omega t} + j\omega \frac{\omega_0 \underline{X_0}}{Q} e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{X_0} e^{j\omega t} = \underline{F} e^{j\omega t}$$

$$\boxed{\underline{H}_x = \frac{\underline{X}}{\underline{F}} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}}$$

$\longrightarrow \quad |H_x|^2 = \dfrac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2\omega_0}{Q}}$ → faire avec regime limite





$Q^2 < \frac{1}{2}$ plus de resonnances car plus sinusoïdal

"Le gain atteint son maximum proche de ω_0 c'est la résonance" → comme oscillation libre $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ "passe bande"

→ ω dépend de Q

"Les frott limitent le phénomène de résonance à petit Q."

→ pour $Q^2 < \frac{1}{2}$ pas de résonance, frottement trop important

~~"La résonance correspond à une transmission maximale d'énergie entre l'excitation et le système, due à une synchronisation~~

"La résonance apparaît lorsque l'excitation accompagne le mouvement du système, il donne une force maximale dans un sens lorsque le système | atome commence le mouvement dans ce sens".

↳ d'où le déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ à résonance.

1.3. Résonance en vitesse

↳ exemple : de l'amortisseur

$$v = \dot{x}$$

$$\underline{V} = j\omega \, \underline{X}$$

"On regarde toujours $\underline{V}$ p/r à $\underline{F}$"

$$\underline{H_v} = \frac{\underline{V}}{\underline{F}} = j\omega \, \underline{H_x} = \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

fact par $j\omega$ et par $\frac{\omega_0}{Q}$ →

$$\boxed{\underline{H_v} = \frac{Q/\omega_0}{1 - jQ\left(\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$

OG amortisseur :

Δx défaut $\simeq 10$ cm $= 10^{-2}$ m.

$v = 20$ km/h $\simeq 5$ m.s^{-1}.

$T = \dfrac{\Delta x}{v} = 1{,}8 \times 10^{-3}$ s.

$f = 555$ Hz.

$k_{\text{défaut}} = (2\pi)^2 f^2 \times m$ $\qquad \omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

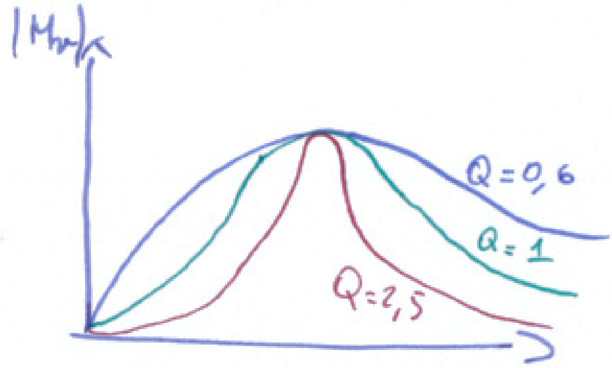
$\dfrac{1000\ \text{kg}}{4} = 250$ kg.

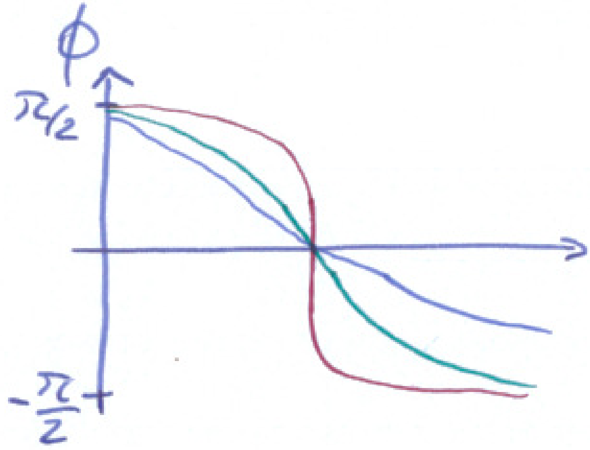
$= 3 \times 10^{9}$ N.m^{-1}

$k_{\text{typique}} \simeq 60$ kN.m^{-1}. $\ll k_{\text{défaut}}$

pr que pas de resonnance.

“partie $\underline{R_e}$ du dén. V indé ω, résonance toujours à ω_0”
“quelque soit la valeur de Q, $|\underline{H_v}|$ passe tjrs par un maximum.”





1.4. Aspects énergétiques

car on moyenne cos² .

$$P = \cancel{Re \langle \underline{F} \cdot \underline{V} \rangle} = \frac{1}{2} Re(\underline{F} \cdot \underline{V})$$

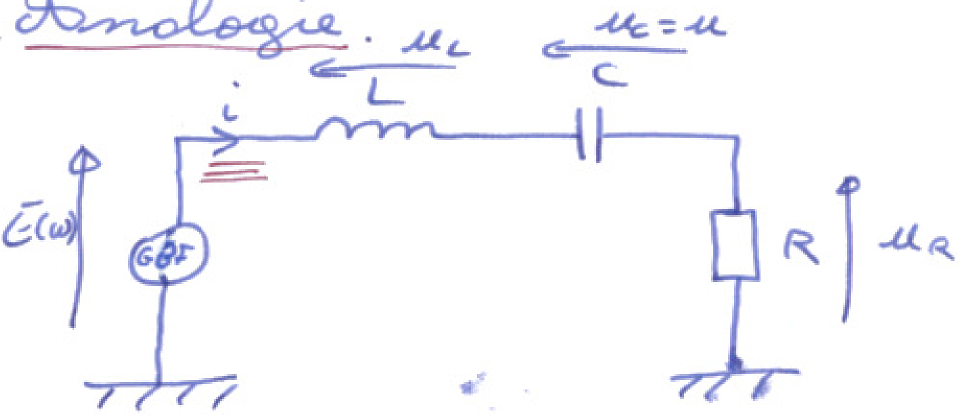
$$= F^2 \frac{Q}{\omega_0} \frac{1}{1 + Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \qquad \underline{F} \times H_v = V$$

$\rightarrow$ maximum d'énergie transmis en ω_0.

On voit que P max quand V max ~~i.e.~~ pour ça que $\underline{F}$ et $\underline{V}$ en phase. et $\underline{V}$ est max quand $x = 0$ $\rightarrow$ pour ça que $-\frac{\pi}{2}$.

II - Résonance en électronique

2.1. Analogie.



GBF $\leftrightarrow$ excitation

LC $\leftrightarrow$ oscillateur

R $\leftrightarrow$ frottement

Loi des mailles.

$$\underbrace{u_L}_{L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2u}{dt}} + u + \underbrace{u_R}_{Ri = RC\frac{du}{dt}} = E.\cos(\omega t + \phi_e)$$

D'où $$\frac{d^2u}{dt} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\frac{\omega_0}{Q}}\frac{du}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}u = E\cos(\omega t + \phi_e)$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Même équation, même phénoménologie

$u \leftrightarrow x$ $\qquad$ $i \leftrightarrow v$ $\qquad$ car $i = C\frac{du}{dt}$.

2.2. Mise en pratique

RLC — $L = \frac{f_0^2}{4\pi^2} \cdot C = 25\ \text{mH}.$

$f_0 = 1\ \text{kHz}$ — $C = 1\ \mu\text{F}$

$R = 1$

En Wobble autour de 1 kHz

Montrer d'abord en u.

- faire varier R montrer résonance apparait à R petit
- montrer que $\omega_c < \omega_0$.

⚠

Montrer en i

- apparait tjrs
- $\omega_c = \omega_0$.

Mesure de ω_0 comparer à $\frac{1}{\sqrt{LC}}$

↑ LCR mètre

On a vu donc que les résonances en méca et en élec, en fait ce phénomène est présent partout en physique. Par exemple il permet d'expliquer la couleur du ciel. Pour cela voyons l'interaction entre la matière et la lumière

III - Diffusion d'un rayonnement par des électrons atomiques

3.1. Modèle de l'électron élastiquement lié.

Électron atomique soumis à :

- force de rappel de la part du noyau $-Kx$
- force de frottement visqueuse $-\alpha \frac{dx}{dt}$

pr que bary + et − (nuage) soit confondu

↳ dû à rayonnement → recul.

Ce modèle permet de décrire la polarisabilité d'un nuage électronique lorsqu'il est soumis à un champ électrique $-e\vec{E}$.

On considère $\vec{E} = E_m e^{-j\omega t}$ (lumière)

PFD : x écart à position équi

e^- • $\uparrow x$

O •

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\underbrace{\frac{K}{m_e}}_{\omega_0^2} x - \underbrace{\frac{\alpha}{m_e}}_{\frac{\omega_0}{Q}} \frac{dx}{dt} - \frac{e E_m}{m_e} \cos \omega t}$$

Même éq donc résonance !!!

RSF : $$\underline{x} = \frac{-e E_m}{m_e} \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega \frac{\omega_0}{Q}\right)} e^{-j\omega t}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}$$

3.2. Diffusion

Crée un dipôle qui va rayonner

$$\underline{p} = -e\,\underline{x}\,\vec{e_x}$$

$$= \underline{p_0}\, e^{-j\omega t}\ \vec{e_x}$$

$$\text{où } \underline{p_0} = \frac{e^2 E_m}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

Or la puissance totale rayonnée par un dipôle à grande distance vaut

$$\overline{P} = p_0^2 \times \frac{\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

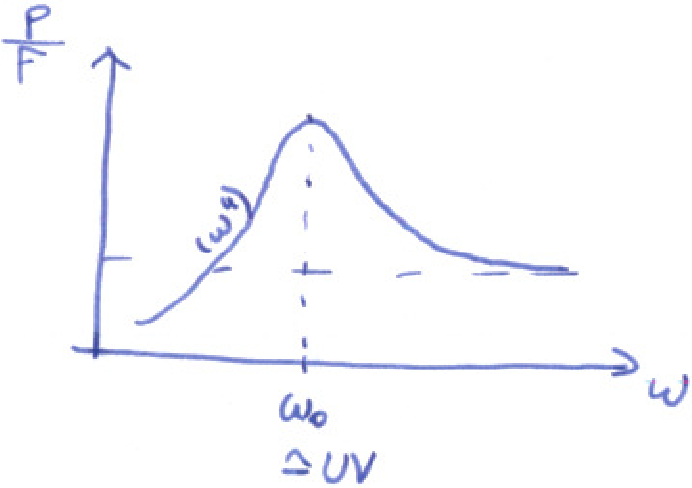
"amplitude d'oscillation dipôle"

$$= \frac{c\,\varepsilon_0 E_m^2}{2}\ \sigma(\omega)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi r_e^2\,\omega^4}{3\left((\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2\omega_0^2}{Q}\right)}$$ ← section efficace

Plutot :

$$\boxed{\overline{P} = F \times \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2\omega_0^2}{Q}}}.$$



$\omega \ll \omega_0$: Rayleigh

$$\frac{\bar{P}}{F} = \frac{\omega^4}{\omega_0^2}$$

$\omega \simeq \omega_0$: resonnance.

$\omega \gg \omega_0$ Thomson.

$$\frac{\bar{P}}{F} = 1$$

$\omega_B \gg \omega_R$ plus rayonné, on voit le ciel bleu car atm rayonne plus le bleue.

En transparance on voit le ciel rouge → couché soleil car non rayonné.

<u>Rayonnement</u> dipol<u>aire</u> :

électrostat

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3} \quad \propto \frac{1}{r^2}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(3\vec{r}\,\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^4} - \frac{\vec{d}}{r^3}\right). \quad 1/r^3 .$$

$E(r) =$

champ EM rayonné en variable à grande distance

$$E_\theta \propto \ddot{p} \propto \omega^2 p/r$$
$$B_\varphi \propto \ddot{p} \propto \omega^2 p/r .$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} \propto \frac{\omega^4}{r^2} p^2 . \qquad \bar{P} = \int \vec{\Pi}\, d\vec{S}$$

$$\bar{P} \propto \omega^4 p^2 .$$

- trop de système avec trop de calcul.

- ~~•~~ OH   truc général   proche de position d'équilibre avec dissipation !!! à 10.

- parler de largeur !!! $\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{1}{Q}$.

- NRJ   : resonance. → max d'NRJ.

- oscillateur $\hat{m}$ à A très grand → $\hat{m}$ ω.
  ↳ trop de modelisation

- passe ~~bas~~.

- formuler des questions pr faire sortir les trucs importants (Q, Δω, ...)

parler de termes / d'inertie (⟺ L).
/ élasticité

↑ s'oppose à des changement de vitesse.

resonance sur q
↓
$q = C u$
$i = \frac{dq}{dt}$

II - plusieurs exemples.