LP 44 : Ondes acoustiques

<u>Niveau</u> : CPGE

<u>Prérequis</u> : meca flu, equations Euler, conservation masse, thermo, loi de Laplace.

perturbe P_1 ρ_1

I - Propagation dans les fluides

1.1. Approximation acoustique

On considère un état stationnaire ρ_0, $P_0 = 1\,\text{bar}$, $\vec{v}_0 = \vec{0}$ que l'on perturbe :

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad , \quad \rho_1 \ll \rho_0$$
$$P = P_0 + P_1 \quad , \quad P_1 \ll P_0$$
$$\vec{v} = \vec{v}_1 \quad , \quad v_1 \ll c$$

On considère fluide parfait ($\eta = 0$ et ~~...~~) compressible | $\hookrightarrow$ grandeur que l'on verra plus tard.

1.2. Linéarisation et équation de propagation

- conservation de la masse :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho_0+\rho_1)}{\partial t}}_{\substack{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \\ \text{car stat}}} + \operatorname{div} \underbrace{\rho \vec{v}}_{(\rho_0+\rho_1)(\vec{v}_0+\vec{v}_1)} = 0$$

→ ordre 1 :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\underbrace{\cancel{(\rho_0+\rho_1)\vec{v}_0}}_{=0 \text{ car } \vec{v}_0 \text{ uniforme}} + \rho_0 \vec{v}_1\right] = 0$$

uniforme

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0} \quad (1)$$

- Euler pour la qté de mouvement :

$$\rho\left(\underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}_{\frac{\partial\vec{v_1}}{\partial t}} + \cancel{\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\,\vec{v}}\right) = -\underbrace{\overrightarrow{grad}\,P}_{\overrightarrow{grad}\,P_1}$$

on neglige pesanteur.

$\vec{v}_0$ stat

$= 0$ ordre 2.

↳ se justifie aussi car $v_1 << c_s$

P_0 uniforme

$$\rightarrow \boxed{\rho_0\frac{\partial\vec{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,P_1} \quad (2)$$

On a deux eq qui lie P_1 à $\vec{v_1}$ et ρ_1 à $\vec{v_1}$, lien entre P et ρ:

- Approximation isentropique (adiab + reversible)

↳ valable car $T_{propag} < T_{diff}$

- $$\chi_S = \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial\rho}{\partial P}\right|_S$$

- $\rho = f(P)$ eq d'état

$$\rho = f(P_0) + f'(P_0)\,P_1.$$

$$= \rho_0 + \underbrace{\left.\frac{\partial\rho}{\partial P}\right|_{P=P_0} P_1}_{\rho_1}$$

D'où $$\boxed{\rho_1 = \rho_0\,\chi_{S,0}\,P_1} \quad (3)$$

(3)→(1) $\Longrightarrow$ $$\rho_0 \chi_S \frac{\partial P_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0$$

$\xrightarrow{\partial t}$ $$\chi_S \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = 0.$$

$\xrightarrow{(2)}$ $$\chi_S \frac{\partial^2 P_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \underbrace{\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} P_1}_{\Delta P_1} = 0$$

D'où $$\boxed{\Delta P_1 = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 P_1}{\partial t}}$$ Équation de d'Alembert

"De même pour $\vec{v}_1$"

avec $\boxed{c_S = 1/\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$ ~~vitesse~~ célérité du son.

Rq: $v_1 \ll c_S$.

4.3. Célérité du son.

Pour un gaz parfait, évolution isentropique loi de Laplace

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = c^{te}$$

(⚠ être au clair sur Laplace $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$)

$$\rho = A\, P^{1/\gamma}$$

$$\left.\frac{d\rho}{dP}\right|_{P=P_0} = \frac{A}{\gamma} P_0^{1/\gamma - 1} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0}$$

$$\longrightarrow \boxed{c_S = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{R T_0}{M}}}$$

$$\left(\begin{aligned} PV &= \frac{m}{M} RT \\ P &= \frac{\rho}{M} RT \end{aligned} \right)$$

5

AN : GP : diatomique $\gamma = 1,4 = \frac{\frac{\alpha}{2}+1}{\frac{\alpha}{2}}$ $\alpha = 5$

$\rho \simeq 1,2 \, kg.m^{-3}$

~~$\chi_S = 1,2 \times 10^5$~~
$$\left\{ \begin{array}{l} M = 29 \, g.mol^{-1} \\ T_0 = 298 \, K \\ R = 8,31 \end{array} \right\} \rightarrow c_S = 346 \, m.s^{-1} \text{ à } 25°C$$

348 à 30°C

$\boxed{343 \, m.s^{-1}}$ à 20°C

Rq : • eau $\left| \begin{array}{l} \chi_0 = 5 \times 10^{-10} \, Pa^{-1} \text{ (plus incompressible)} \\ \rho_0 = 10^3 \end{array} \right.$

$\rightarrow c_S = 1,4 \times 10^3 \, m.s^{-1}$.
$= 1400$

• solide $c_S = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ← Young, ← ρ

$\rightarrow 4,9 \times 10^3 \, m.s^{-1}$.

exp : dephasage ultrason.

1.4. Retour sur les hypothèses (à soutenir)

• isentropique

$$\rightarrow \tau_{th} = \frac{\lambda^2}{K_{th}} \gg \underbrace{\frac{\lambda}{c_s}}_{\text{periode signal}}$$

$\nu, K \sim 10^{-6} \, m^2.s^{-1}$

$$\rightarrow \tau_{dyd} = \frac{\lambda^2}{\nu} \gg \frac{\lambda}{c_s}$$

dissip dynamique

$\nu \ll c_s \lambda \approx 10^3$

##

III - Aspects énergétiques

3.1. Bilan d'énergie

On peut comme en EM définir une densité d'énergie associée à l'onde.

$$e = \frac{1}{2}\rho_0 v_1^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\chi_S}_{\rho_0 c^2} p_1^2 .$$

De sorte que $\frac{de}{dt} + \operatorname{div}\vec{\Pi} = 0$

$\vec{\Pi}$ analogue à Poynting

$$\boxed{\vec{\Pi} = p\,\vec{v}.}$$

intensité acoustique

2.2. Intensité sonore

$$I_{dB} = 10 \log \frac{\langle \vec{\Pi} \rangle_t}{\varphi_0}$$

avec $\varphi_0 = 10^{-12}\ W.m^{-2}$ (seuil d'audibilité)

$= \sqrt{\rho_0 c_S P_1}$ $\Longrightarrow$

OG. en slides pr ≠ bruit

III – Notion d'impédance

3.1. Impédance

élec :

$$Z = \frac{\Delta V}{I}$$

$\sim \Delta$ pot

$\sim$ cinétique

acoustique

$$\boxed{Z_{ac} = \frac{p_1}{v_1}}$$

Pour OPPM :

$$\underline{v_1} = \underline{v_{10}}\, e^{i\omega t - kx}$$

$$\chi_S \frac{\partial \underline{p_1}}{\partial t} + \vec{\nabla}\, \underline{\vec{v_1}} = 0$$

$$i\omega \chi_S \underline{p_{10}} = i k V_{10}$$

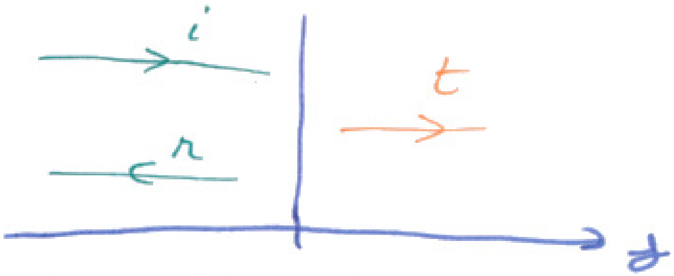
$$\to Z_{ac} = \frac{\underline{p_{10}}}{\underline{V_{10}}} = \frac{1}{\chi_S c_S} = \rho_0 c_S .$$

ODG :

$$Z_{ac}^{AIR} = 400 \text{ Pa.s.m}^{-1}$$

$$Z^{H_2O} = 1,6 \times 10^6 \text{ Pa.s.m}^{-1}$$

3.2. Adaptation d'impédance



CL : masse $\underline{V_1} = \underline{V_2}$ en $z = 0$

qté de mvt $\underline{P_1} = \underline{P_2}$

...

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

$$T = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

exp : diapason dans air on entend pas car $Z_2 \ll Z_1$

contre bois $Z_1 \simeq Z_2$ on entend.