(1

LP25 : Oscillateurs, portraits de phase, non linéarité

B : Gié
BUP 744.

Niveau : Licence.

Prérequis

ouverture sur syst dyn ?

Oscillateur: système présentant un comportement périodique.

$$\underline{\text{ex}}: \quad \ddot{x} + \overset{\text{dissipation}}{\alpha \dot{x}} + \beta x = 0$$

Pour x décrivant le système.

oscillateur si $\Delta < 0$.

amortie si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \overset{?}{>} 0$.

"Ici l'oscillateur est linéaire, mais certains sont non linéaires (ex: pendule → avec $\sin x$). Ont des specificités différentes".

"On va s'intéresser à comment les étudier, caractériser les comportements"

"Outils principal est le portrait de phase.

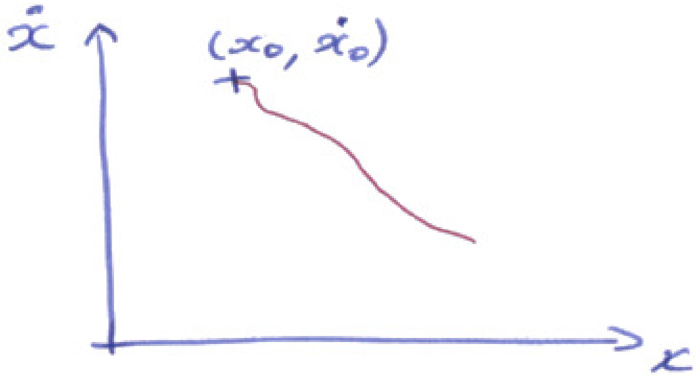
I - Portrait de phase et oscillateur linéaire

1.1. Définitions

(Espace des phases: espace des $(x_i, \dot{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$.)

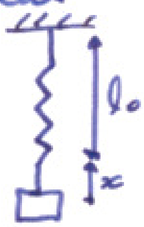
Portrait de phase : représentation graphique de $\dot{x} = f(x)$.

"Pour Un système régit par une ed, on obtient la dynamique en resolvant à partir de CI $(x_0, \dot{x}_0)$, la solution correspond à une traj dans l'espace des phases".



slide

1.2. Oscillateur harmonique



Eq : $\ddot{x} + \omega_0^2 \, x = 0$ ω_0 : fréquence propre. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

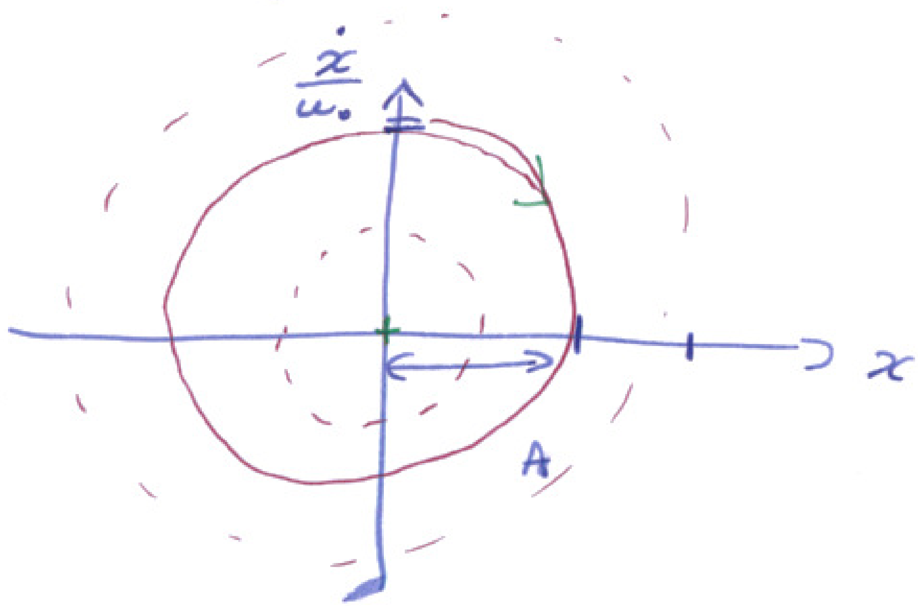
Solution : $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\dot{x} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

A, φ imposé par CI.

$\rightarrow \quad x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 = A^2.$ → "eq d'une ellipse que l'on peut ramener à un cercle."

En renormalisant $\dot{x}$ par ω_0, trajectoire dans l'espace des phases → cercle concentrique
→ on normalise pour reconnaître $\omega = \omega_0$!!



Rq imp : si $\omega \neq \omega_0$ → ellipse
si pas harmonique → pas ellipse.

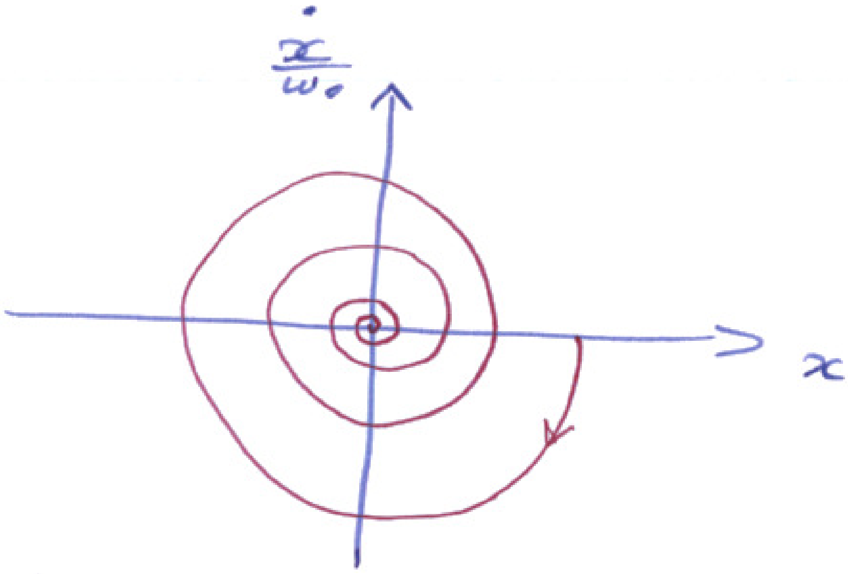
Propriété : - sens horaire - 1 tour ⟺ 1 oscillations (4

- on voit qu'une classe de CI donne m̂ traj
(ex : laché écarté, ou pichenette à $x=0$)
- trajectoire ne se coupent pas.
- point fixe stable : on reconnait car traj bornée autour - harmonicité se voit avec le fait que des cercles → ω_0
- l'amplitude se voit par la taille du cercle.
⟺ énergie du système.

1.2. Oscillateur amorti

$$Eq : \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha \dot{x}. \qquad \alpha = \frac{\omega_0}{Q}.$$

→ oscillations amortie exponentiellement, plus ou moins selon le facteur de qualité Q.



Propriétés

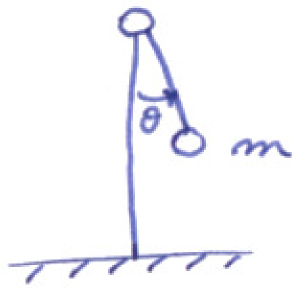
- existence de point attracteur où les trajectoires convergent. (⟺ position d'équilibre)
- on peut lire le facteur de qualité en comptant le nombre de tour visible. (ici $Q=4$).

I On a vu que les portraits de phase était un bon outil pour étudier les systèmes linéaire dont la caractéristique qu'est l'harmonicité se voit par des cercles de rayons donné par l'energie du système.

On va voir des systèmes non linéaires.

II - Système non-linéaire

2.1. Pendule pesant?



$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \overbrace{\sin\theta}^{\text{non lin}} = 0.$$

→ pas de solution analytique simple.

→ étude via le portrait de phase.

→ on intègre :

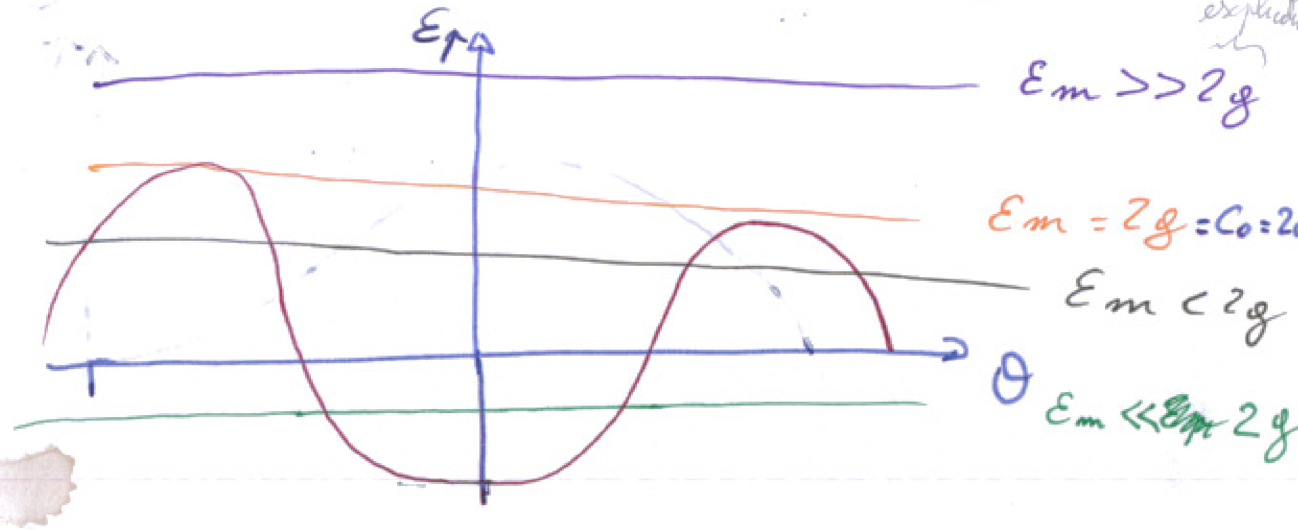
$$\underset{\updownarrow\,\text{“}\mathcal{E}_c\text{”}}{\dot{\theta}^2} - \underset{\updownarrow\,\text{“}\mathcal{E}_p\text{”}}{2\omega_0^2 \cos\theta} = \text{Constante}$$

$$= \underset{\uparrow\,\text{“}\mathcal{E}_m\text{”}}{C}(\theta_0, \dot{\theta}_0)$$

→ tracer avec python!

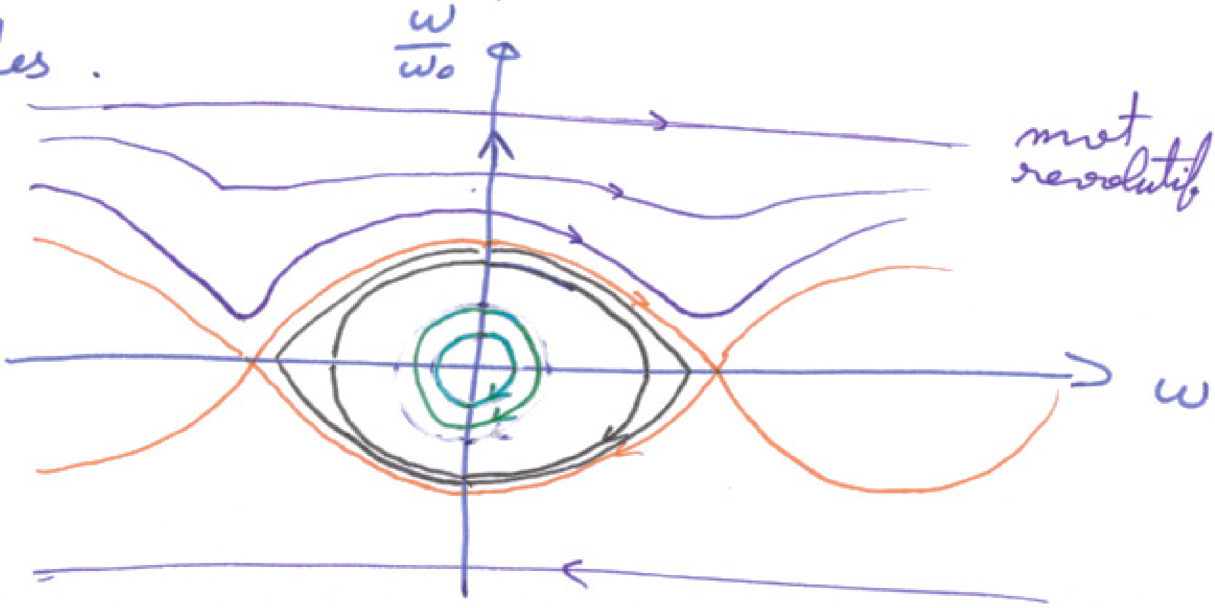
C depend de l'énergie mise dans le système

explication?



→ Les traj de phase dépendent de l'énergie méca

→ slides.



→ interprétation avec le truc d'avant.

Interprétation : $C_0 = 2\omega_0^2$ critique $= 2g$ pr pendule simple.

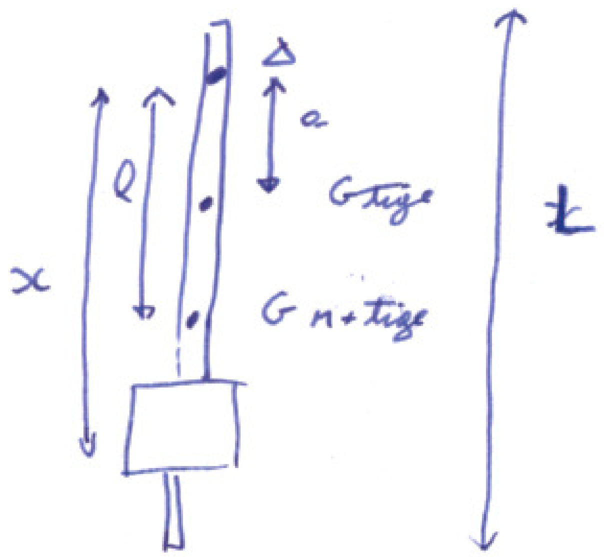
- faible énergie, faible oscillation
  → cercle → oscillation harmonique à ω_0
- énergie moyenne, oscillation importante.
  → ellipse → $T > T_0$ $\omega < \omega_0$.
  $\omega \neq \omega_0$
- énergie importante
  → plus ellipse → mvt plus sinusoïdale
  → enrichissement en harmonique.
  "on passe bcp de tps à $\theta = \pm\pi$"
- energie très imp. → mouvement revolutif.

Système non linéaire → non harmonicité
→ enrichissement spectrale.

2.2. Grandes oscillations et formule de Borda.

cf bouquin CAPES.

Pendule pesant



$$J_\Delta = \underbrace{Mx^2}_{J_{M/\Delta}} + \underbrace{\frac{1}{12} mL^2 + ma^2}_{J_{tige/\Delta}}.$$

$$J_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(M+m) g \ell \sin\theta.$$

$$\rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{(m+M) g \ell}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{Mx^2 + \frac{1}{12} mL^2 + ma^2}{(m+M) g \ell}}.$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{x}{g}}.$$

- $E = 2g$ → ——— séparatrice sen parler

- on peut voir sur portrait de phase.
  - stable si trajectoires reste bornées
    au voisinage
  - instable si trajectoires non bornées

Retour:

- $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -A(x) \mp \beta x \end{cases}$ <=> $\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$

syst hamiltonien et dissipatif

<=> pr tt syst hamiltonien à 1D sont
** intégrable (peut s'exprimer avec en fct d'un intégrale)

∃ syst non intégrable (inverse ->
<=> chaos.

Les portraits de phase ont été introduit par Poincaré pr étudier syst chaotique