Notons enfin que le problème peut être traité dans le cadre du formalisme hamiltonien (*cf* & 39). Du lagrangien (2) on tire les moments conjugués : $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ et $p_r = m\dot{r}$, de sorte que le hamiltonien $H(q,p) = \sum p\dot{q} - L$ est

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) + W. \tag{7}$$

Les équations de Hamilton $\left(\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}\right)$ se lisent donc

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}\,, \quad \dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{dW}{dr} \qquad \text{et} \qquad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}\,, \quad \dot{p}_\phi = 0\,, \tag{8}$$

ce qui est bien équivalent à (3).

CHAPITRE 12

MÉCANIQUE CÉLESTE I

La question de Weierstrass

Karl Weierstrass soumit en 1889 la question suivante à la communauté scientifique lors d'un concours à l'occasion des soixante ans du roi Oscar II de Suède :

« *Pour un système quelconque de points massifs s'attirant mutuellement selon les lois de Newton, donner en fonction du temps les coordonnées des points individuels sous la forme d'une série uniformément convergente dont les termes s'expriment par des fonctions connues.* »

Le jury (dont Weierstrass, Cayley, Hermitte, Tchebytcheff) décerna le prix à Henri Poincaré... pour avoir démontré que le problème posé n'a pas de solution : les équations du mouvement de plus de deux corps graves ne sont pas intégrables.

SECTION 52

Égalité des masses grave et inerte : l'effet Laplace-Nordtvedt

L'égalité des masses grave, m, et inerte, m^I, est très bien testée en laboratoire comme nous l'avons vu en & 45. On peut la tester aussi pour des corps célestes, de masses bien plus considérables, par une étude du mouvement du couple Terre-Lune dans le champ de gravitation du Soleil.

Les équations du mouvement du Soleil (S), de la Terre (T) et de la Lune (L) s'écrivent, dans un repère inertiel et dans des notations transparentes :

$$\left\{\begin{aligned} m_S^I \ddot{R}_S &= -Gm_S m_T \frac{l_{TS}}{r_{TS}^3} - Gm_S m_L \frac{l_{LS}}{r_{LS}^3} \\ m_T^I \ddot{R}_T &= -Gm_T m_S \frac{l_{ST}}{r_{ST}^3} - Gm_T m_L \frac{l_{LT}}{r_{LT}^3} \\ m_L^I \ddot{R}_L &= -Gm_L m_S \frac{l_{SL}}{r_{SL}^3} - Gm_L m_T \frac{l_{TL}}{r_{TL}^3}\,. \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

L'accélération relative de la Lune par rapport à la Terre est donc, en posant $l \equiv l_{TL} \equiv R_L - R_T$ et $r \equiv r_{TL}$

$$\ddot{l} = -G\left(\frac{m_L}{m_L^I}m_T + \frac{m_T}{m_T^I}m_L\right)\frac{l}{r^3} + Gm_S\left(\frac{m_T}{m_T^I}\frac{l_{ST}}{r_{ST}^3} - \frac{m_L}{m_L^I}\frac{l_{SL}}{r_{SL}^3}\right)\,. \qquad (2)$$

Si l'on pose $m/m^I = 1 + \epsilon$ ceci se réécrit selon

$$\ddot{l} = -Gm_*\frac{l}{r^3} + Gm_S\left(\frac{l_{ST}}{r_{ST}^3} - \frac{l_{SL}}{r_{SL}^3}\right) + Gm_S\left(\epsilon_T\frac{l_{ST}}{r_{ST}^3} - \epsilon_L\frac{l_{SL}}{r_{SL}^3}\right) \qquad (3)$$

où l'on a introduit la masse effective du couple Terre-Lune :

$$m_* = m_T + m_L + m_T\epsilon_L + m_L\epsilon_T.$$

L'équation (3) est exacte. Le premier terme, principal, décrit l'attraction gravitationnelle Terre-Lune ; le second terme est à l'origine d'effets de marées qui s'ajouteront linéairement aux autres et que nous ignorons ici ; dans le troisième enfin on peut négliger la différence entre l_{ST} et l_{SL}, de sorte que l'équation du mouvement à résoudre se réduit à

$$\ddot{l} = -Gm_*\frac{l}{r^3} - \delta a\frac{l_{ST}}{r_{ST}} \qquad \text{avec} \qquad \delta a \equiv -\frac{Gm_S}{r_{ST}^2}(\epsilon_T - \epsilon_L)\,. \qquad (4)$$

Pour résoudre cette équation on procède comme dans le cas du problème à deux corps : une multiplication vectorielle par l et l'introduction du moment cinétique massique $L \equiv l \wedge \dot{l}$ conduit à

$$\dot{L} = -\delta a\, l \wedge \frac{l_{ST}}{r_{ST}}\,. \qquad (5)$$

Une multiplication scalaire par l donne, en notant que $l \cdot \ddot{l} = r\ddot{r} - L^2/r^2$:

$$\ddot{r} = -\frac{Gm_*}{r^2} + \frac{L^2}{r^3} - \delta a\frac{l}{r}\cdot\frac{l_{ST}}{r_{ST}}\,. \qquad (6)$$

Pour progresser rapidement nous supposons qu'en première approximation, les orbites de la Terre autour du Soleil et de la Lune autour de la Terre sont circulaires *et* situées dans un même plan. On écrit donc, à l'ordre le plus bas, dans le repère du plan centré sur la Terre (e_X, e_Y) :

$$l = r(e_X \cos\omega_L t + e_Y \sin\omega_L t)\,, \qquad l_{TS} = r_{TS}(e_X \cos\omega_T t + e_Y \sin\omega_T t) \quad (7)$$

où ω_L et ω_T sont les pulsations de révolution de la Lune autour de la Terre et du Soleil autour de la Terre. Les équations (5-6) se simplifient alors en

$$\dot{L} = -\delta a\, r \sin\Omega t\,, \qquad \ddot{r} = -\frac{Gm_*}{r^2} + \frac{L^2}{r^3} + \delta a \cos\Omega t \qquad (8)$$

où on a posé $\Omega = \omega_L - \omega_T$.

Procédons par itération : $r = r_0 + \delta r$ et $L = L_0 + \delta L$ et rappelons que les lois du problème à deux corps donnent : $\omega_L^2 = Gm_*/r_0^3 = L_0^2/r_0^4$. La première équation (8) s'intègre alors directement en

$$\delta L = \frac{r_0}{\Omega}\delta a \cos\Omega t\,. \qquad (9)$$

En insérant ce résultat dans la seconde, développée au premier ordre en δr, on obtient

$$\delta\ddot{r} + \omega_L^2\delta r = \left(1 + 2\frac{\omega_L}{\Omega}\right)\delta a \cos\Omega t\,, \qquad (10)$$

dont la solution est

$$\delta r = \frac{1 + 2\frac{\omega_L}{\Omega}}{\omega_L^2 - \Omega^2}\delta a \cos\Omega t\,. \qquad (11)$$

Ainsi l'effet d'un δa non nul est de polariser le système Terre-Lune vers le Soleil.

Numériquement

$$\omega_T = 2\pi/1\,\text{an},$$
$$\omega_L = 2\pi/27\,\text{jours} \sim 13.4\omega_T \sim 2.7 \times 10^{-6}\,\text{s}^{-1}.$$

Ainsi $\delta r_{max} \sim 39\delta a/2\omega_L^2$. Par ailleurs $Gm_S/r_{ST}^2 \sim 5.9 \times 10^{-6}\,\text{km.s}^{-2}$ et par conséquent

$$\delta r \approx -1.8 \times 10^{10}(\epsilon_T - \epsilon_L)\cos(\omega_L - \omega_T)t \qquad (12)$$

où δr est exprimé en mètres.

Le temps aller-retour de faisceaux lasers entre un réseau d'observatoires terrestres et quatre miroirs lunaires est actuellement mesuré avec une précision de

1 ps, ce qui correspond à une précision de 1 cm sur la distance Terre-Lune. La contrainte $\delta r < 1$ cm se traduit alors par

$$\left(\frac{m}{m_I}\right)_T - \left(\frac{m}{m_I}\right)_L < 5.5 \times 10^{-13}. \tag{13}$$

Bien sûr il faut, dans une analyse fine, vérifier qu'aucun autre effet perturbateur n'a la même signature, par exemple la même période. La perturbation principale s'avère être l'effet de marée que nous avons négligé dans l'équation (4).

SECTION 53

Le problème à trois corps restreint

Considérons le mouvement de trois corps m, m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle dans la limite $m \ll m_1$, $m \ll m_2$, ce qui revient à supposer que m est une particule test qui n'affecte pas le mouvement des deux autres corps. Nous supposons de plus que les mouvements des trois corps s'effectuent dans un même plan. Nous supposons enfin que m_1 et m_2 sont en mouvement circulaire.

Ainsi, dans le repère de leur centre de masse, les trajectoires de m_1 et m_2 sont (*cf* & 48)

$$\begin{cases} R_1(t) = \dfrac{m_1}{M} d\left(e_X \cos\omega t + e_Y \sin\omega t\right), \\ R_2(t) = -\dfrac{m_2}{M} d\left(e_X \cos\omega t + e_Y \sin\omega t\right) \end{cases} \tag{1}$$

où $M = m_1 + m_2$, où d est la distance entre les deux masses et où $d^3\omega^2 = GM$ (troisième loi de Kepler). Le mouvement de la masse m, de rayon vecteur $R = Xe_X + Ye_Y$ est alors dicté par le lagrangien

$$L(X,X,\dot{X},\dot{Y}) = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + Gm\left(\frac{m_1}{|R - R_1|} + \frac{m_2}{|R - R_2|}\right). \tag{2}$$

En passant à des grandeurs sans dimension par les transformations $R_{1,2} \to R_{1,2}d$, $t \to t/\omega$, en posant $\mu = m_2/M$ et en choisissant le système d'unités tel que $G = 1$, le lagrangien se réécrit :

$$L = md^2\omega^2 L_0$$

avec

$$L_0 = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \left(\frac{1-\mu}{|R - R_1(t)|} + \frac{\mu}{|R - R_2(t)|}\right). \tag{3}$$

L_0 dépend explicitement du temps. L'énergie n'est donc pas conservée. Ceci est dû au fait que l'on impose à m_1 et m_2 de rester en orbite circulaire sans prendre en compte le champ gravitationnel créé par m.

Pour déterminer la dynamique, il est plus simple de se placer dans le repère en rotation dans le plan des deux masses, dont l'axe OX' est la droite joignant m_1 et m_2 : $e'_X = e_X \cos\omega t + e_Y \sin\omega t$. Ainsi, dans le même système d'unités, les positions de m_1 et m_2 sont respectivement $(1-\mu,0)$ et $(-\mu,0)$ et l'équation du mouvement est (en omettant les « primes »)

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \nabla\left(\frac{1-\mu}{|R - R_1|} + \frac{\mu}{|R - R_2|}\right) + 2\frac{dR}{dt} \wedge \Omega + \Omega \wedge (R \wedge \Omega) \tag{4}$$

où le vecteur $\Omega = e_Z$ dans les unités choisies, de sorte que le terme centrifuge peut s'écrire : $\Omega \wedge (R \wedge \Omega) = R = \nabla(x^2 + y^2)/2$, où (x,y) sont les composantes de R. Ainsi (4) devient

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \tag{5}$$

où la fonction Φ est définie par

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}} + \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}}. \tag{6}$$

En introduisant $\rho_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}$ et $\rho_2 = \sqrt{(x+\mu-1)^2 + y^2}$ (6) s'écrit aussi :

$$\Phi = \frac{3 - \mu(1-\mu)}{2} + \mu\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_1}\right)(\rho_1 - 1)^2 + (1-\mu)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_2}\right)(\rho_2 - 1)^2. \tag{7}$$

En multipliant la première équation (5) par $\dot{x}$ et la seconde par $\dot{y}$, on obtient

$$2\Phi - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = J, \tag{8}$$

où J est la *constante de Jacobi*. On ne connait pas d'autre intégrale première de ce système qui doit donc être intégré numériquement. Pour une valeur de J donnée, on doit avoir $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Phi - J > 0$ si bien que le plan est divisé en deux zones, l'une interdite l'autre autorisée, séparées par la courbe d'équation $\Phi = J/2$, appelée *courbe de Hill*.