LP01 : Gravitation

__Niveau__ : Licence

__Prérequis__ : électrostatique, mecanique du point, ref non gal.

I - Analogie avec l'électrostatique

1.1. Forces

$$\boxed{\vec{F}_g = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{e_r}}$$

1 sur 2

Force entre 2 masses ponctuelles

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\vec{e_r}$$

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3\,kg^{-1}.s^{-2}$

Donc ① crée un champ $\vec{G}_1 = -\frac{G m_1}{r^2}\vec{e_r}$ et 2 subit $\vec{F}_g = +m_2 \vec{G}_1$, et réciproquement

On voit une analogie entre force avec $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \longleftrightarrow -G$

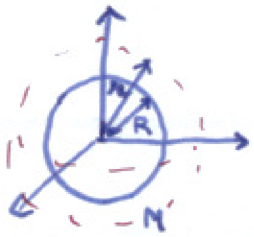
1.2. Equations du champ.

électrostatique	grav
$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\mathrm{div}\,\vec{G} = -4\pi G \rho_m$
$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$	$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{G} = \vec{0}$
$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi_e$	$\vec{G} = -\vec{\nabla}\Phi_N$ ← potentiel Newton.
$\Delta\Phi_e = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\Delta\Phi_N = 4\pi G \rho_m$.

On retrouve le théorème de Gauss :

$$\int_{\partial V} \vec{G}\cdot d\vec{S} = \int_V -4\pi G \rho_m \, dV = -4\pi G \, M_{int}.$$

Pour une boule sphérique $\vec{G} = G(r)\,\vec{e_r}$.



$$G\, 4\pi r^2 = -4\pi G M$$

$$\boxed{G(r) = -G\frac{M}{r^2}}$$

Le champ de gravité d'une sphère est donc équivalent à celui d'une masse ponctuel en son centre, la force aussi.

1.3. Différences

• importances relatives : si on compare $\vec{F_e}$ et $\vec{F_g}$ pour deux protons

$$r^2 F_e = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right.}_{10^{11}} \; \underbrace{q_1 q_2}_{10^{-38}}}_{10^{-27}} \qquad r^2 F_g = \underbrace{\overbrace{G}^{10^{-11}} \; \overbrace{m_1 m_2}^{(10^{-27})^2}}_{10^{-65}}$$

$$\frac{F_e}{F_g} \sim 10^{38}$$

"Il semble que $\vec{F}_e$ domine toujours. Mais grosse différence"

- $m > 0$
- q algébrique $\rightarrow$ $\vec{F}_e$ répulsif et attractif $\rightarrow$ charge se regroupe en bloc neutre

et il y a écrantage

<=> $\vec{F}_g$ domine toujours à grande échelle.

- Le principe d'équivalence induit que l'on a le même paramètre : la masse pour l'inertie et la gravitation

=> trajectoire dans $\vec{G}$ indé de m.

C'est pas le cas de électrostat, dépend de $\frac{q}{m}$.

II - Champ de gravité terrestre

On va étudier la force gravitationnelle sur Terre. La question est quel le mouvement du masse en chute libre à la surface de la Terre. Hyp : Terre sphérique de rayon moyen 6371 km. R_T

2.1. Accélération de la pesanteur

On se place dans réf terrestre accroché à un point de la surface. Système {masse m}

$$BAM : m\vec{G} = -\frac{G m M_T}{R_T^2}\vec{e_r}.$$

$M_T = 5,972 \times 10^{24}$ kg $\qquad \|\vec{G}\| = 9,820\ m.s^{-2}$

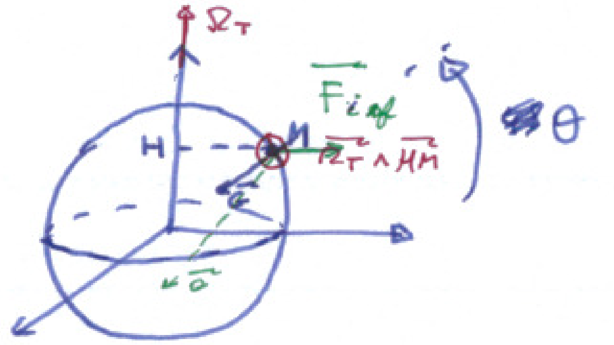
$\mathcal{R}_T$ n'est pas galiléen, du fait de la rot terrestre

→ forces d'inertie

$\Omega_T = 1{,}157 \times 10^{-5}$ tr/s
$= 7{,}292 \times 10^{-5}$ rad.s^{-1}
$\simeq$ cte

- $\vec{F}_{ie} = -m\,\vec{\Omega}_T \wedge (\vec{\Omega}_T \wedge \vec{HM})$
- Coriolis négligeable (à calculer) → $-m2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$ → déviation Est

On considère $\mathcal{R}_{géo}$ galiléen sur l'échelle de temps de la chute



PFD :

$$\boxed{\vec{g} \equiv \vec{a} = \vec{G} - \vec{\Omega}_T \wedge (\vec{\Omega}_T \wedge \vec{HM})}$$

Donc fil à plomb ne va pas vers le centre de la Terre mais plutot "plus bas".

$\vec{F}_{ie}$ max à l'équateur, varie selon latitude

Si on se place à paris : $\theta = 48°52'$

$HM = 4194$ km.

$$\boxed{\|\vec{g}\| = 9{,}805 \text{ m.s}^{-2}}$$

Rq corio joue sur 4ème digit

Rq : g normal $\cong 9{,}806$ val moy au niveau de la mer

Rq: applatissement fait varié de 9,78 à 9,83.

2.2. Vérification

exp: pendule → TF → $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

possiblement pour $\neq l$.

III - Dynamique du système solaire

3.1. Problème à deux corps.

• Pour simplifier l'étude on ne va considérer chaque planète intéragissant seule avec Soleil. € (justifié par $\frac{M_S}{M_P} = 10^4$ pr jupiter et distance respective)

• En toute rigueur chaque astre tourne autour du centre de masse du syst. On néglige car S représente 99,85% du syst solaire.

→ slides loi de Kepler (observé)

3.2. Mouvement à force centrale

TMC en S fixe

$$\frac{d\vec{L_S}}{dt} = \vec{SP} \wedge \vec{F} = \vec{0}.$$

$\vec{L_S}$ conservé

→ mouvement plan.

$$\vec{L_S} = r\,\vec{e_r} \wedge m(\overbrace{\dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}}^{\vec{v} \text{ en coord polaire}}) \qquad \vec{L_S} = \vec{e_z}$$ (7

$$\vec{L_S} = m r^2 \dot{\theta}\,\vec{e_z} = cte \qquad \dot{\theta} = cte$$

3.3. $\Rightarrow$ 2ème loi de Kepler : $\frac{dS}{dt} = cte$.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{|\vec{L_S}|}{2m} = cte.$$

3.3. Mouvement radial.

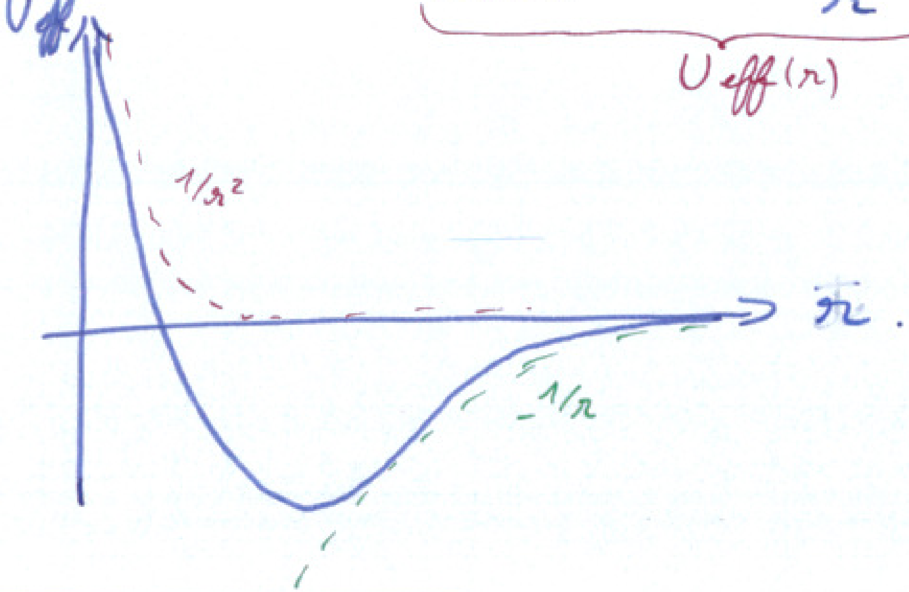
$E_m = cte$ car force conservative

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + m \vec{G_S}$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + \underbrace{r^2\dot{\theta}^2}_{\frac{1}{r^2}\frac{L_S^2}{(2m)^2}}) + \frac{GmM_S}{r}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \underbrace{+\frac{1\,L_S^2}{2 m r^2} - \frac{G m M_S}{r}}_{U_{eff}(r)} = cte.$$

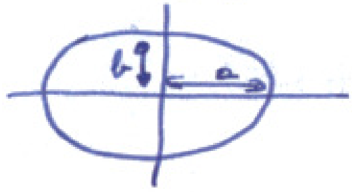
slides



→ ellipse : 1ère loi de Kepler.
↳ 3 types de mouvement.

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

$$p = \frac{L_s^2}{m^2 G M_s}$$



3.4. Mouvement elliptique

$$S = \pi a b$$

$$T = \frac{S}{\dot{S}} = \pi a b \times \frac{2m}{L_s}$$

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$2a = r_{min} + r_{max} = p\left(\frac{1}{1-e} + \frac{1}{1+e}\right)$$

$$2a = p\,\frac{2}{1-e^2} = \frac{L_s^2}{G M_s m^2}\,\frac{2}{1-e^2}$$

$$\rightarrow L_s = \sqrt{m^2 a G M_s (1-e^2)}$$

$$T = \frac{\pi a^2\, 2m}{\sqrt{a G M_s}}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \cancel{m}}{G M_s}}$$

Ccl : On a introduit la gravité qui est une loi en $1/r^2$ comme électrostat, on a vu les ≠, on a étudié le champ de grav terrestre.
On a retrouvé les lois du syst solaire.

↳ ouverture RG périhélie