LP02 : Lois de conservation en dynamique

<u>Niveau</u> : CPGE

<u>Prérequis</u> : PFD, TMC, TEM, meca

On a vu précedement les lois de la dynamique. Les problèmes sont souvent à plusieurs d.o.f et donc compliqué. Aujourd'hui on va voir que souvent certaines qtés sont conservées (on les appelles intégrales 1ère du mot) et vont permettre de réduire le pb pr le résoudre.

On se place toujours dans un référenciel galiléen

I - Conservation de la qté de mouvement

1.1. Loi

Considérons une masse tel que $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ (pseudo-isolé ou isolé)

PFD : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \implies \boxed{\vec{p} = \vec{cte}}$

Rq : Toujours valable pr système $\vec{p} = \sum_i \vec{v}_i m_i$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{int}}_{0} + \sum \vec{F}_{ext}$$

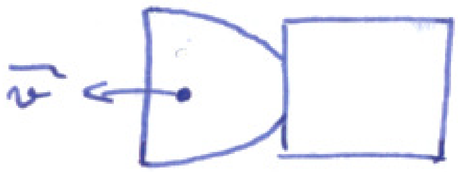
$= 0$ car 3ème loi de Newton

ex : $N = 2$ $\quad \vec{F}_{int}^{1\to 2} = -\vec{F}^{2\to 1}$

$\sum = 0$

Donc $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \implies \vec{p} = \vec{cte}$

1.2. Exemple : propulsion



On accelère gaz de masse m_g à vitesse $\vec{v}_g$

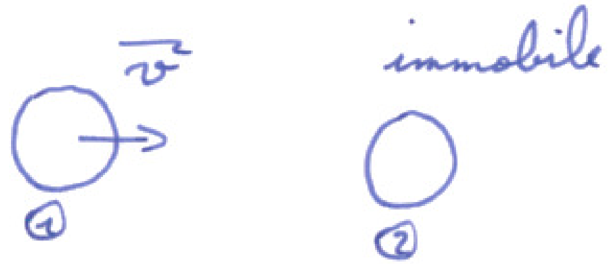
Syst {gaz + fusée} isolé $\to \vec{p} = \vec{cte}$

$$0 = \vec{p}_i = \vec{p}_f = m_g \vec{v}_g + \vec{p}_{fusée}$$

$\rightarrow \vec{p}_{fusée} = -m_g \vec{v}_g \neq 0$.

$\Rightarrow$ propulsion.

1.3. Application aux chocs



Syst {① + ②} isolé car si plateau horiz

$$\vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}.$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$\vec{p}_{1,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}$$

$$m_1 \vec{v}_{1,i} = m_1 \vec{v}_{1,f} + m_2 \vec{v}_{2,f}.$$

exp : On voit que ① s'arrête $\vec{v}_{1,f}$, il faut que

$$\vec{v}_{2,f} = \vec{v}_{1,i}$$

$\rightarrow$ vérif.

Donc $\vec{p}$ est conservé si $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$. En fait c'est du a une symétrie d'invariance par translation ici car E_p invar selon l'axe de la table.

II - Moment cinétique

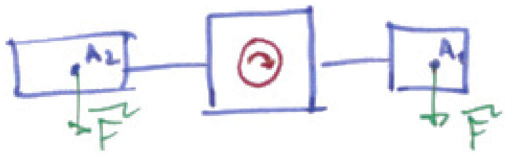
2.1. Loi

TMC en un point fixe O.

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{F})$$

Si $\vec{\mathcal{M}_0}(\vec{F}) = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{\vec{L_0} = \vec{cte}.}$

2.2. Application : roue à réaction



Syst : satellite autour de la terre.

Si on considère que les forces qu'il subit sont constante au niveau du satellite

$$\vec{\mathcal{M}_{O_T}}(\vec{F}) = \vec{O_TA_1} \wedge \vec{F} - \vec{O_TA_2} \wedge \vec{F}.$$

$$= \vec{A_2A_1} \wedge \vec{F} = \vec{0}.$$

$$\vec{L_0} = \vec{cte}.$$

$$''$$

$$\vec{L}_{sat} + \vec{L}_{roue} = cte.$$

Donc si $\vec{L}_{roue} \nearrow$ alors $-\vec{L}_{sat} \nearrow$

Le satellite tourne dans l'autre sens que roue

$\Rightarrow$ positionnement (orientation) de telescope spatiaux

Rq : En fait pas uniforme $\rightarrow$ tend à alligné asce avec force, mais compensé par roue de reaction

2.3. Application : éloignement de la Lune.

On a vue que si $\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}_{ext}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = \vec{c}^{te}$. En fait symilairement à tte à l'heure c'est du à symétrie de rotation du syst : $\dfrac{dE_P}{d\theta} = 0$.

III - Conservation de l'énergie mécanique

3.1. Loi

[Demo TEM.

$$dE_c = \underbrace{\delta W^c}_{-dE_p.} + \delta W^{nc}$$

$$\rightarrow d(E_c + E_p) = \delta W^{nc}$$

$$\rightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{nc}. \quad]$$

D'après le TEM :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{nc}$$

Donc si soumis qu'à des forces conservatives ou ^{nc} qui ne travaille pas $\rightarrow$ $\boxed{E_m \text{ conservé.}}$

3.2. Retour sur les chocs.

On a vu choc à 1D, on a vu exp que une masse s'arrêter ~~mais~~

Pas explicable avec conservation de $\vec{p}$

1 eq 2 inconnues

"Il manque donc 1 equations
c'est la conservation de l'énergie"

"Ici soumis à $\vec{P}$ qui est conservatif et à R (qui ?), mais ⊥ au mouvement donc ne travaille pas."

$$E_{m,i} = E_{m,f}.$$

On s'intéresse au collision élastique pour qui l'énergie interne des objets restent constante, si bien que toute l'énergie cinétique de l'un va à l'autre. Rq: Pas de E_p car que des intéractions à ~~longue~~ courte distance et instantanée.

$$\sum E_{c,i} = \sum E_{c,f}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 \\ m_1 \vec{v}_{1,i}^2 + m_2 \vec{v}_{2,i}^2 = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2,f}^2 \end{array}\right.$$

de plus

2 eq et 2 inconnue → la conservation de $\vec{p}$ et Em fixe le mouvement !

Calcule à passer : choc direct $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 1$ (8

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_1' - v_1) = m_2 (v_2 - v_2') & (1) \\ m_1 (v_1'^2 - v_1^2) = m_2 (v_2^2 - v_2'^2) & (2) \end{cases}$$

$\frac{(2)}{(1)}$: $$\frac{v_1'^2 - v_1^2}{\underbrace{v_1' - v_1}} = \frac{v_2^2 - v_2'^2}{v_2 - v_2'}$$

$$\frac{\cancel{(v_1' - v_1)}(v_1' + v_1)}{\cancel{(v_1' - v_1)}}$$

$$v_1' + v_1 = v_2' + v_2$$

$\boxed{v_2 = 0}$

$m_1(1)^2$ $\quad m_1^2 v_1^2 = m_1^2 v_1'^2 + m_2^2 v_2'^2 + 2 m_1 m_2 v_1' v_2'$ (3)

$m_1(2)$ $\quad m_1^2 v_1^2 = m_1^2 v_1'^2 + m_1 m_2 v_2'^2$ (4)

(3) − (4) :

$$m_2^2 v_2'^2 + 2 m_1 m_2 v_1' v_2' + m_1 m_2 v_2'^2 = 0$$

$$v_1' = \frac{m_1 \cancel{m_2} v_2'^2 - m_2^2 v_2'^2}{2 m_1 \cancel{m_2} \cancel{v_2'}}$$

$$v_1 = v_2' \left(\frac{m_1 - m_2}{2 m_1} \right)$$

Or $v_2' = v_1' + v_1$

$$v_1' = (v_1' + v_1)\left(\frac{m_1 - m_2}{2m_1}\right)$$

$$v_1' \underbrace{\left(1 - \frac{m_1 - m_2}{2m_1}\right)}_{\frac{m_1+m_2}{2m_1}} = v_1 \frac{m_1 - m_2}{2m_1}$$

$$\boxed{v_1' = v_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)}$$

... $$\boxed{v_2' = v_1 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)}$$

Si $m_2 >> m_1$: $v_1' \simeq -v_1$ et $v_2' \simeq 0$

$\rightarrow$ 1 rebondit.

Si $m_2 << m_1$ $v_1' \sim v_1$ et $v_2' \simeq 2 m v_1$

1 garde même vitesse et sens.

Si $m_1 = m_2$ $v_1' = 0$ et $v_2' = v_1$

$\rightarrow$ échange total d'E_c.

On a vu donc ici comment conservation
~~Cd~~ : de E_m peut déterminer un système.

En fait E_m est associé à la conservation
de E_p du par transl dans le temps.

Cd : On a vu ≠ lois de conservation, on
a vu dans le cas du choc qu'elle déter-
miner le mouvement.

Rq : choc 2d ⊕ d'inconnue besoin d'autre
conservation ?

On peut appliquer ce principe à plusieurs
syst. Comme par exemple pb à 2 corps
pr expliquer traj. plannètes (6 inconnues)
les quantités conservées vont déterminer traj.

Rq : conservé : E_K , $\vec{L}$, $\vec{A}$ Runge-Lenz du à $1/r^2$

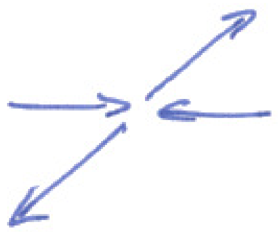
7 conservé

(+ 2 rel $\vec{A}.\vec{L} = 0$
et $\vec{A}^2 = f(\vec{L})$

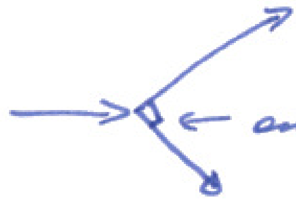
$6 - (7-2) = 1$ dof ⇒ trajectoire

Rq: choc 2 d

dans ref cdm



si $v_2 = 0$



angle droit.