Oscilateur et ED du 2ème ordre :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau_e}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$(E) \quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad Q = \omega_0 \tau_e.$$

Discriminant : $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1-4Q^2)$

Donc :
- $\Delta > 0$: $Q^2 < \frac{1}{4}$ i.e. $Q < \frac{1}{2}$.
  ↳ solution apériodique en $(e^{-\alpha t}$ et $e^{\alpha t})e^{\beta t}$
- $\Delta = 0$: $Q = \frac{1}{2}$
  ↳ solution critique en $t e^{\beta t}$
- $\Delta < 0$: $Q > \frac{1}{2}$
  ↳ solution périodique en $(e^{-i\alpha t}$ et $e^{i\alpha t})e^{\beta t}$

Solution de l'eq caracteristique :

$$x_{\pm} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2}(1-4Q^2)}}{2} = \frac{-\omega_0}{Q2}\left(1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right)$$

- Si $\Delta \geq 0$ $x_{\pm} = -\alpha \mp \beta$ avec $\boxed{\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}}$
  $\beta = +\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2} = \sqrt{\Delta}.$
- Si $\Delta = 0$ $x = -\alpha$
- Si $\Delta < 0$: $x_{\pm} = -\alpha \mp i\beta$ avec
  $\beta = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$

<u>Régime apériodique</u> $Q < \frac{1}{2}$ $(\Delta > 0)$

$$x(t) = A\, e^{(-\alpha+\beta)t} + B\, e^{(-\alpha-\beta)t}$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t}\left(A\, e^{\beta t} + B\, e^{-\beta t}\right)}$$

<u>Régime critique</u> $Q = \frac{1}{2}$ $(\Delta = 0)$

$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t}\left(A t + B\right)}$$

<u>Régime quasipériodique</u> $Q > \frac{1}{2}$ $(\Delta < 0)$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(A\, e^{+i\beta t} + B\, e^{-i\beta t}\right)$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t}\left(C \cos \omega t + D \sin \omega t\right)}$$

avec $\omega = \omega_0 \dfrac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q} = \omega_0 \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

Rq : Si $\alpha < 0$ (pour signe + devant $\ddot{x}$) alors

~~coefficient~~

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2} \text{ facteur de } \dot{x}}$

$$e^{-\alpha t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty \rightarrow \text{SYSTÈME INSTABLE !!!}$$

Si $\alpha = 0$ (i.e. $Q \to +\infty$) alors

oscillation périodique ~~pour $Q > \frac{1}{2}$~~