LP15 : propagation guidée des ondes.

Niveau : L3.

Pré-requis : ~~équation d'Euler~~, onde acoustique, onde et milieux dispersifs, onde EM, métaux parfaits

~~Guide d'onde : dispositif délimitant une région où des ondes peuvent se propager en respectant des conditions en ces bords.~~

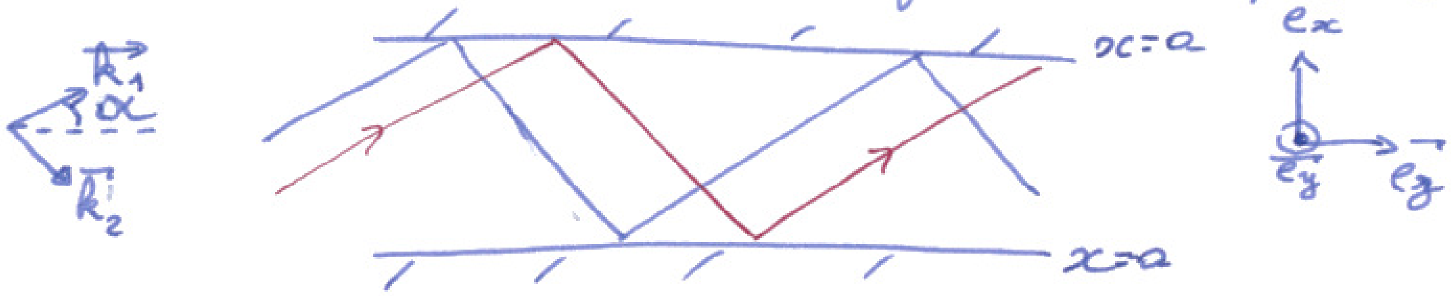
Guide d'onde : dispositif permettant de guider une onde en bornant sa propagation ~~en imposant~~ par l'imposition des conditions en ses bords.

1)

I - Guide rectangulaire

1.1. Modèle simple

On considère une OPPM se réfléchissant sur paroi rigide



OPPM :

$$\vec{v_i} = V\, e^{i(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{r})}\, \frac{\vec{k_i}}{k}$$

avec $\vec{k}_{1/2} = k(\cos\alpha\, \vec{e_z} +/- \sin\alpha\, \vec{e_x})$

$\vec{r} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y} + z\,\vec{e_z}$

Onde totale :

$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$

$$= V\, e^{i(\omega t - z k\cos\alpha)} \left| \begin{array}{l} (e^{ixk\sin\alpha} - e^{-ixk\sin\alpha})\sin\alpha \\ 0 \\ (e^{ixk\sin\alpha} + e^{-ixk\sin\alpha})\cos\alpha \end{array} \right.$$

$$\vec{v} = V\, e^{i(\omega t - z k\cos\alpha)} \left| \begin{array}{l} 2i\sin(xk\sin\alpha)\sin\alpha \\ 0 \\ 2\cos(xk\sin\alpha)\cos\alpha . \end{array} \right.$$

Conditions aux limites :

en $x = \pm a$ $\rightarrow$ $v_\perp = v_x = 0$

$\rightarrow \sin(ak\sin\alpha) = 0.$

Donc $ak\sin\alpha = n\frac{\pi}{2}$ et $\boxed{\sin\alpha_n = \frac{n\pi}{2ak}}$

2)

pour $\alpha \neq \alpha_n$ pas de propagation

pour $\alpha = \alpha_n$, CL OK $\rightarrow$ propagation

On a donc des modes quantifiés.

Solution:

$$\vec{v} = V2e^{i(\omega t - zk\cos\alpha)} \left| \begin{array}{l} i \sin \frac{n\pi}{2a} x \sin\alpha \\ 0 \\ \cos \frac{n\pi}{2a} x \cos\alpha \end{array} \right.$$

$\rightarrow$ SLIDE

Et la pression est obtenue via l'équation d'Euler

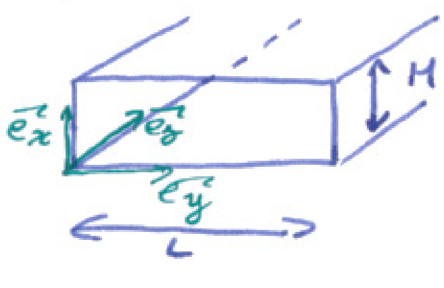
$$i\omega\rho\vec{v} = -\vec{\nabla} p = \left| \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right.$$

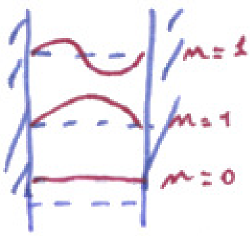
$$p = \frac{-\cancel{i}\omega\rho}{-\cancel{i}k\cos\alpha} v_z$$

$$\boxed{p = +\underbrace{\frac{\omega\rho}{k} 2V}_{P} \cos\left(\frac{n\pi}{2a} x\right) e^{i(\omega t - zk\cos\alpha)}}$$

$k_z = k\cos\alpha$

1.2. Guide rectangulaire





"dans plan transverse onde stationnaire amplitude périodique selon z"

Solution:

$$p = P\cos\left(\frac{m\pi}{L} y\right)\cos\left(\frac{n\pi}{H} x\right) e^{i(\omega t - zk_z)}$$

a) <u>Relation de dispersion</u>

$$\Delta p - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

$$\left(-\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + (ik_z)^2 - \frac{(i\omega)^2}{c_s^2}\right) p = 0$$

On obtient :

$$\boxed{k_z^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} - \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}$$

<u>Conclusion</u> :

- il existe toujours un mode $(n,m)=(0,0)$ qui se propage, incidence longitudinale.
- pour autre incidence, seul les hautes frequences peuvent se propager $(k_z^2>0)$

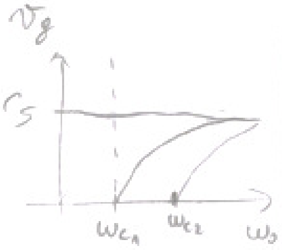
freq coupure, passe haut

Pour BF, $k_z^2<0$, onde evanescente.

- à $\omega = cte$, si $H\searrow$ ou $L\searrow$, moins de mode.

b) <u>Vitesse de groupe</u>. • milieu dispersif

$$v_{g(\omega_0)} = \left.\frac{d\omega}{dk_z}\right|_{\omega_0} \qquad k_z\, dk_z = \frac{\omega\, d\omega}{c_s^2}$$



$$\boxed{v_g = \frac{k_z}{\omega}c_s^2 = c_s\sqrt{1-\left(\frac{c_s m\pi}{\omega H}\right)^2-\left(\frac{c_s n\pi}{\omega L}\right)^2}}$$

ccl :

- Le mode fonda : $v_g = c_s$
- harmonique : $v_g \searrow \quad v_g < c_s$.

II - Guide cylindrique

2.1. Modes.

Symétrie cylindrique → fonction de Bessel.

$$\cos \frac{m\pi}{H} x \quad \longrightarrow \quad J_m(k_r r)\cos(m\theta)$$

où $k_r a = \mu_{mn}$ sont les zéros de J_m en $r = a$
→ $\boxed{\text{SLIDES}}$.

$$\boxed{\begin{aligned} p &= P\, J_m(k_r r)\cos m\theta\; e^{i(\omega t - k_z t)} \\ v_g &= c_s\sqrt{1-\left(\frac{c_s\,\mu_{mn}}{\omega\; a}\right)^2} \end{aligned}}$$

2.2. Mise en pratique

$n_{burst} = 26$

On fixe $f = 40{,}130$ kHz $\ll 1\%$

On varie angle pour exciter deux modes (car onde sphérique)

$2a = 17{,}5 \pm 0{,}3$ mm 1,7 %

On veut vérifier $c_s = 343 \pm 3\ m.s^{-1}$ 1 %

$$\Delta v_{g\,th} = 67{,}4 \pm 1 \quad m.s^{-1}$$

On mesure

$$\boxed{\Delta v_{g\,exp} = \frac{L}{t_1 - t_r} - \frac{L}{t_2 - t_r}}$$

t_r : temps de montée du syst

$t_r = 1{,}02 \pm 0{,}05$ ms
5%

5) $L = \cancel{140}, \pm 1$ cm ~~1%~~
$149{,}7 \pm 1{,}5$ cm 1 %

$0{,}88 \pm 0{,}07$ ms
7%

Mesures : $\begin{cases} t_1 = 5,32 \pm 0,05 \text{ ms} & 1\% \\ t_2 = 6,42 \pm 0,13 \text{ ms.} & 2\% \end{cases}$

$$\boxed{\Delta v_{g\,exp} = 71 \pm 4 \text{ m.s}^{-1}}$$

III - Ondes EM & polarisation.

3.1. Analogie et différences.

- CL différentes :

conducteur parfait :

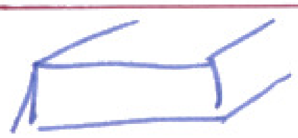
$$E_{//} = 0$$
$$B_{\perp} = 0.$$

- ondes est transverse, les champs sont compris dans le plan transverse au guide.

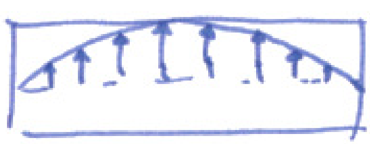
Conséquence :

- Le mode d'incidence normal ne se propage pas toujours (alors que accoustique si !
- plus grande sélectivité, à chaque ω ne correspond pas forcement un mode qui se propage.
- ~~pour qu~~

3.2. Structures des solutions



$\rightarrow$ modes TE : $\vec{E} \cdot \vec{e_z} = 0$



$\rightarrow$ l'onde est polarisé rectilignement

6)

→ modes TM : $\vec{B} \cdot \vec{e_z} = 0$

analogue fonda acoustique

Rq: pas de mode TEM pr guide creux car

$\text{rot}\, E_z = -\frac{\partial B(z)}{\partial t}$ $\qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega \underbrace{B_{0z}}_{=0\ \text{TEM.}} = 0$

$\rightarrow \vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V(x,y)$

BF : EM^2 [illegible] $\quad E = E_x \vec{e_x} + E_y \vec{e_y}$ $\quad$ V uniforme car vide.

<> cable COAX → pas le cas

Conclusion :

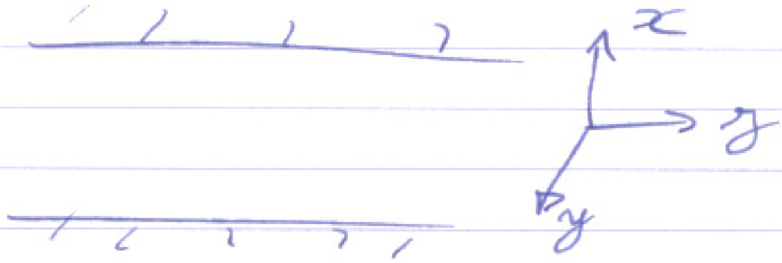
- on peut propager une onde avec moins d'atténuation
- apparition de mode quantifié se propageant à des vitesses différentes. → milieu dispersif
- ~~apparition~~ sélectivité des modes.

 pour chaque mode, une freq de coupure.

 → passe - haut.

 → surtout vrai pr EM, à BF → pas de mode car pas de mode transverse

- ouverture application



$$\square \vec{E} = \vec{0} \qquad \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

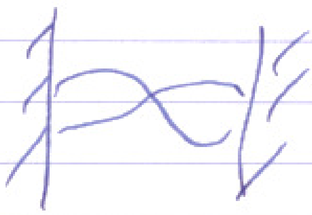
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right. \qquad \left. \begin{array}{l} \vec{E}\cdot\vec{e_z} = 0 \\ \vec{B}\cdot\vec{e_z} = 0 \end{array} \right\} \text{TEM.}$$

→ mode → rel de dispersion.

vide $\square \vec{E} = \vec{0}$ → OPPM sont des sol.

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\,\vec{e_z}$$

On trouve une C.L. d'OPPM qui vérifie CL.



sur axe transverse → onde stationnaire

sur — longi → onde prog.

$$k^2 = k_z^2 + \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

$$[v] = \left[\frac{Pk}{\omega\rho}\right] = \frac{F\,\frac{2\pi}{\lambda}}{S\,2\pi f\,kg.m^{-3}} = \frac{kg\,m.s^{-2}\;m^{-1}}{m^2\,m^{-3}\,kg\;s^{-1}} = \boxed{m^{4}.s^{-1}}$$

$F = ma$

$kg.m.s^{-2}$

$$\rho\frac{\partial\vec v}{\partial t} = -\vec\nabla p$$

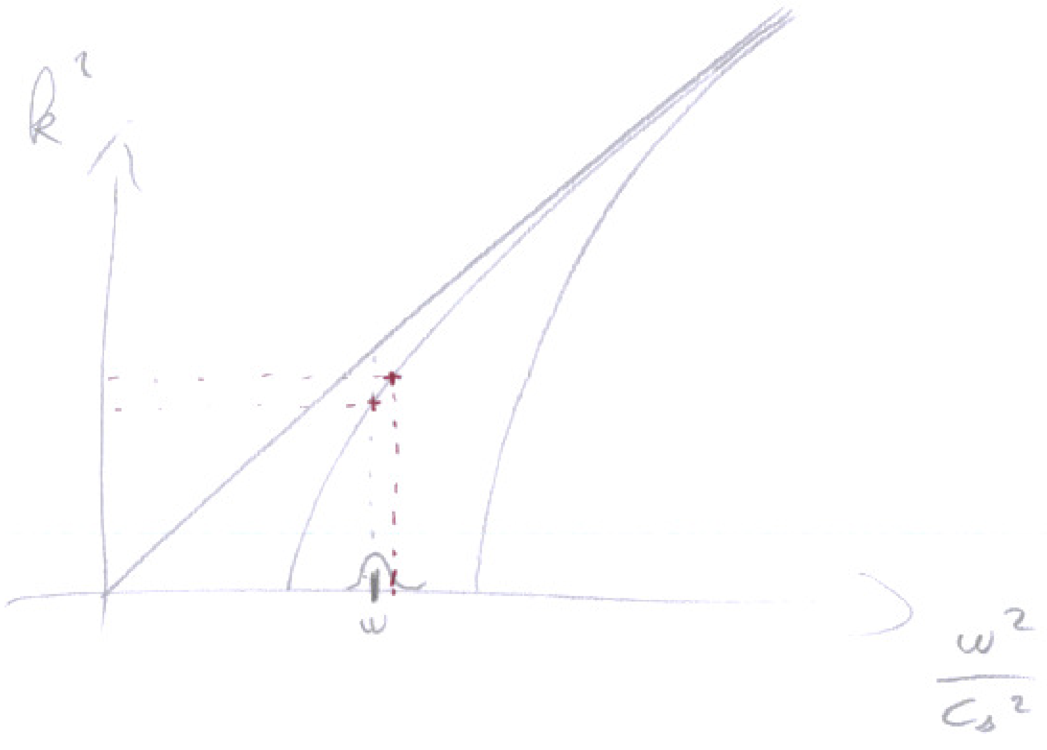
$$i\omega\rho\vec v = -i\vec k\, p$$

$$\cancel{\frac{\omega\rho}{k}\,p = \frac{\vec k}{k}\,\vec k}$$

$$\underbrace{\frac{\vec k}{k}}_{(\cos\alpha+\sin\alpha)}\,p = \frac{\omega\rho\vec v}{k}$$

$$p = \underbrace{\frac{\omega\rho}{k}}\,V\,\cos\frac{n\pi x}{2a}\,e^{i(\omega t - y k\cos\alpha)}$$

cable COAX -> MHz
guide d'onde -> ~GHz
fibre optique -> lumière



k^2
ω
$\frac{\omega^2}{c_s^2}$