

LP03: d[]ation de viscosité
d'un fluide ——— Ecoulement visqueux

Niveau: CPGE.

Prérequis: description d'un fluide, équation d'Euler,
statique des fluides, équation de diffusion

Jusqu'ici on a vu comment décrire un
fluide avec des particules de fluide soumise
à la gravité et aux forces de pression via
l'équation d'Euler.

Mais avec ces forces on n'explique pas l'écoulement
différent du miel, où le fluide se comporte ^{comme si miel} comme si miel.
mise en mot d'un
fluide par une plaque.

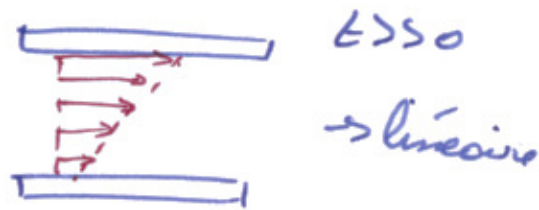
Pour comprendre ça on va voir aujourd'hui
la notion de viscosité.

(être au lab sur viscosimètre de Couette)
faire OG Re pour Poiseuille

I - Notion de viscosité.

1.1. Cas d'un cisaillement

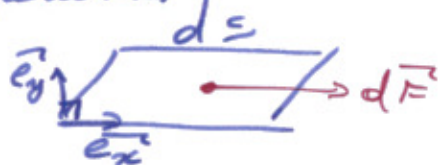
fluide initialement au repos puis \vec{v}_0



"C'est comme si le fluide ~~était~~ adhérait à la paroi, et était emporté par elle du fait de la différence de vitesse. C'est la viscosité qui est la cause de ça.

"à termes $\epsilon \gg 0$ profil en vitesse linéaire avec
 $\vec{v}_{\text{paroi}} = \vec{v}_{\text{fluide}}$

"Donc il y a une force entre deux particules fluides de vitesse dû au gradient transversale de vitesse, cette force y est proportionnel."



$$dF_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS$$

Le facteur de prop η est la viscosité

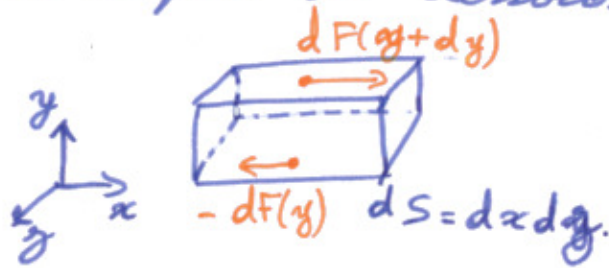
η : viscosité dynamique (Pa.s).

OG ?!

Plus d'interaction si surface plus grande $\rightarrow \propto dS$.

1.2. Force volumique. \rightarrow "somme résultante des forces de pressions"

On considère une part fluide soumise à cette force de la part du dessous et du dessus.



"sens opposés par action réciproque : applique $F(y)$ sur dessous et sent $-F(y)$ "

$$\begin{aligned} dF_{x \text{ totale}} &= dF(y+dy) - dF(y) \\ &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) \right) dS \\ &= \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy dS \end{aligned}$$

$$dF_{x \text{ tot}} = \underbrace{\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}_{\vec{P}_v} \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

\rightarrow selon x .

\rightarrow si gradient de vitesse dans toute direction

$$\vec{P}_v = \eta \Delta \vec{v}$$

On peut ainsi généraliser l'équation d'Euler par la qtdommet

1.3. Equation de Navier - Stokes.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \text{grad} P + \eta \Delta \vec{v}$$

\underline{Rq} : valable que pour $\text{div} \vec{v} = 0$

pour un fluide incompressible

Dans le cas du cisaillement qu'on a vu, $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$
 $\rightarrow (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = 0$. car $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}(y)$
 de plus $\rho \vec{g} \cdot \vec{e}_x = 0$ et $-\vec{\text{grad}} P = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} \times \rho.$$

"On reconnaît une équation de diffusion par la qté de mouvement, c'est dû à la viscosité!"
 ↗ explique profil lin

Ici, coef de diffusion : $\boxed{D = \frac{\eta}{\rho} \equiv \nu}$ viscosité cinématique

δ : épaisseur d'influence d'une perturbation $\delta = \sqrt{\nu t}$.

"Mais revenons au cas général de l'éq de N-S, elle va avoir ≠ régime selon que ~~viscous~~ terme convectif domine ou viscosité (ici dans le cas de cisaillement ν domine).

Pour quantifier : nombre de Reynolds.

1.4. Nombre de Reynolds.

$$Re = \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme visqueux}} = \frac{\| \rho (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \|}{\| \eta \Delta \vec{v} \|}$$

On prend L = longueur caract de l'écoulement
 U = vit moyenne.

$$Re = \frac{\rho U^2 / L}{\eta U / L^2} \rightarrow \boxed{Re = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu}}$$

Deux régimes : \rightarrow slides.

- $Re \ll 1 \rightarrow$ écoulement visqueux \rightarrow comme le cisaillement
 - diffusion visqueuse domine.
 - les particules de fluide reste bien parallèle.
 - réversible.
"les couches de fluides glissent entre elles."
- $Re \gg 1 \rightarrow$ écoulement inertiel
 - dominé par la convection
 - présence de tourbillons
 - irréversibilité
 - non linéaire
 - apparition de la turbulence

II - Écoulement de Poiseuille.

→ écoulement le long d'un tube cylindrique
 écoulement car $P_2 < P_1$ (grâce au vase de mariotte).

→ le ∇ de P va imposer un débit ^{volumique} qui est dû à viscosité. → faire exp: montrer que $Dv = f(\Delta P)$ ou plutôt $\Delta P = f(Dv)$

2.1. Cas cylindrique [justifier mesure P avec h car état fluide]



(Req: $\vec{v} = v_x \vec{e}_x = v_x(x, y, z)$ car $\text{div } \vec{v} = 0$ incompressible)

On s'intéresse à la situation stationnaire
 $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

Champ de vitesse: $\vec{v} = v_x(r) \vec{e}_x$ car incompressible.
 $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = 0$ aussi.

$\Delta P - \gamma$:

$-\text{grad } P + \gamma \Delta \vec{v} = 0.$ (on néglige \vec{g} car tube petit)

→ \vec{e}_x :

$$C_{ix} = + \frac{\partial P}{\partial x} = \gamma \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right)$$

indépendant de x car $\vec{e}_x \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = 0$ dépend que de r .

NON → transverse pour pos.

- $P = Cx + P(0) \rightarrow C = \frac{P(L) - P(0)}{L} = \frac{\Delta P}{L}$

- $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = r \frac{C}{\eta}$

$$\rightarrow r \frac{\partial v_x}{\partial r} = r^2 \frac{C}{2\eta} + D \quad \begin{array}{l} 0 \text{ sinon } \frac{\partial v_x}{\partial r} \\ \text{diverge en 0.} \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial r} = r \frac{C}{2\eta} + \frac{D}{r}$$

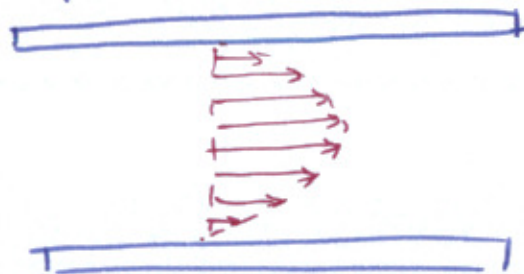
$$\Rightarrow v_x(r) = r^2 \frac{C}{4\eta} + E$$

Condition de non glissement dû à viscosité

$$v_x(r=R) = 0 \rightarrow E = -R^2 \frac{C}{4\eta}$$

$$\boxed{v_x(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (r^2 - R^2)} > 0 \text{ avec } \Delta P < 0.$$

Profil parabolique



Débit volumique

$$D_v = \int \underbrace{\vec{v}_x(r)}_{2\pi r dr \vec{e}_x} d\vec{S}$$

$$D_v = \frac{\Delta P}{4\eta L} 2\pi \int_0^R r(r^2 - R^2) dr.$$

$$\left[\frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{2} r^2 R^2 \right]_0^R = -\frac{1}{4} R^4.$$

$$\boxed{D_v = -\frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P.}$$

→ moyen de mesurer la viscosité d'un fluide.

→ calcul de η .

Rq: on pourrait s'attendre que D_v varie en R^2 (surface) → ici R^4 c'est un effet de viscosité, varie plus. car à petit R , la cond ou bord se "voit plus", donc en R^4 .

Ed: On a introduit la viscosité, on a vu quelle est responsable de la diffusion de la quantité de mouvement dans un écoulement. De plus elle est dominée par l'inertie de l'écoulement, et des fois elle domine et régit l'écoulement.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \rho.$$

→ conservation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\text{div } \rho \vec{v}}_{\rho \text{ div } \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \rho} = 0.$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \underbrace{\rho \text{ div } \vec{v}}_{=0} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0$$