# LP03 : Notion de viscosité d'un fluide - Ecoulement visqueux

Niveau : CPGE.

Prérequis : description d'un fluide, equation d'Euler, statique des fluides, équation de diffusion

Jusqu'ici on a vu comment décrire un fluide avec des particules de fluide soumise à la gravité et aux forces de pression via l'équation d'Euler.

Mais avec ces forces on explique pas l'écoulement different du miel, où la mise en mvt d'un fluide par une plaque.
↳ comme si miel.

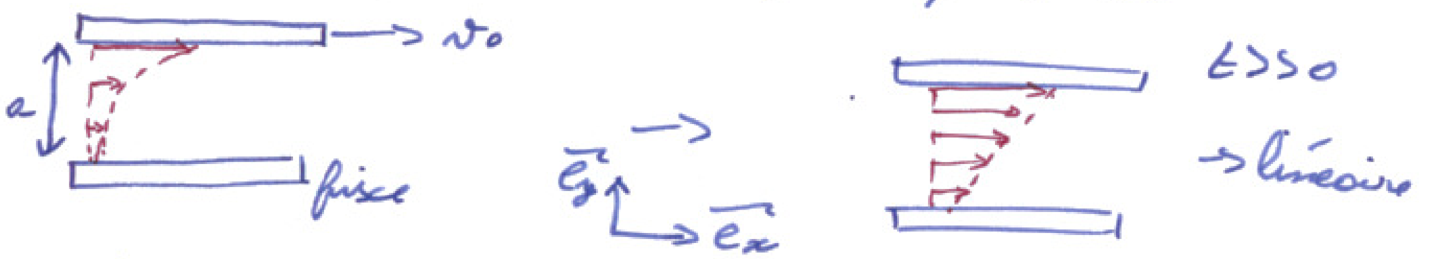
Pour comprendre ça on va voir aujourd'hui la notion de viscosité.

(être au clair sur viscosimètre de Couette)
faire OG Re pour ~~Eo~~ Poisseuille

# I - Notion de viscosité.

## 1.1. Cas d'un cisaillement

fluide initialement au repos puis $\vec{v_0}$

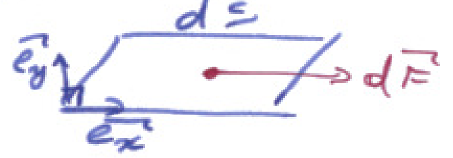



« C'est comme si le fluide adhérait à la paroi, et était emporté par elle du fait de la différence de vitesse. C'est la viscosité qui est la cause de ça.

« À termes » $t \gg 0$ profil en vitesse linéaire avec

$$\vec{v}_{paroi} = \vec{v}_{fluide}$$

« Donc il y a une force entre deux particules fluides de vitesse dû au gradient transverse de vitesse, cette force y est proportionnelle. »




$$dF_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS.$$

Le facteur de prop $\eta$ est la viscosité

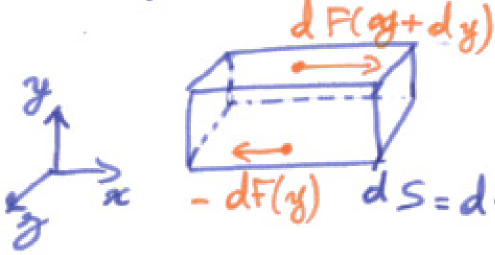
$\eta$ : viscosité dynamique (Pa.s).

OG ?!

Plus d'interaction si surface plus grande $\rightarrow \propto dS$.

1.2. <u>Force volumique.</u> → "comme résultant des forces de pressions"

On considère une part fluide soumise à cette force de la part du dessous et du dessus.




$dS = dx\,dz$.

" sens expliquer par action réciproque. applique F(y) sur dessous et sent - F(y)

$$dF_x\,\text{totale} = dF(y+dy) - dF(y).$$

$$= \eta \underbrace{\left( \frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) \right)}_{\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,dy.} dS$$

$$dF_x\,\text{tot} = \underbrace{\boxed{\eta\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}}_{\vec{f_v}} \underbrace{dx\,dy\,dz}_{d\tau}.$$

→ selon $x$.

→ si gradient de vitesse dans toute direction

$$\boxed{\vec{f_v} = \eta\,\Delta \vec{v}.}$$

On peut ainsi généraliser l'équation d'Euler par la précédente

1.3. <u>Equation de Navier - Stokes.</u>

$$\boxed{\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad}\,P + \eta \Delta \vec{v}}$$

Rq : valable que pour $\text{div}\,\vec{v} = 0$ pour un fluide incompressible

Dans le cas du cisaillement qu'on a vu, $\vec{v} = v_x(y)\vec{e_x}$

$\rightarrow (\vec{v}.\vec{grad})\vec{v} = 0$. car $(\underbrace{\vec{v}}_{\propto \vec{e_x}} . \underbrace{\vec{grad}}_{\perp \vec{e_x}})\vec{v}(y)$

de plus $\rho\vec{g}.\vec{e_x} = 0$ et $-\vec{grad}\,P = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} \quad \times \rho.$$

"On reconnait une equation de diffusion pr la qté de mouvement, c'est dû à la viscosité!"
↳ explique profil lin

Ici, coef de diffusion : $\boxed{D = \frac{\eta}{\rho} \equiv \nu}$ viscosité cinématique

Rq: épaisseur d'influence d'une perturbation $\delta = \sqrt{\nu t}$.

"Mais revenons au cas général de l'eq de N-S, elle va avoir ≠ régime selon que ~~v.grad~~ terme convectif domine ou viscosité (ici dans le cas de cisaillement ν domine).

Pour quantifié : nombre de Reynolds.

1.4. Nombre de Reynolds.

$$Re = \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme visqueux}} = \frac{\|\rho(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta\vec{v}\|}$$

On prend $L$ = longueur caract de l'écoulement
$U$ = vit moyenne.

$$Re = \frac{\rho \; U^2/L}{\eta \; U/L^2} \rightarrow \boxed{Re = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{UL}{\nu}}$$

Deux régimes : -> slides.

- $Re \ll 1$ -> écoulement visqueux -> comme le cisaillement
  - diffusion visqueuse domine.
  - les particules de fluide reste bien parallèle.
  - reversible. "les couches de fluides glissent entre elles".

- $Re \gg 1$ -> écoulement inertiel
  - dominé par la convection
  - présence de tourbillons
  - irreversibilité
  - non linéaire
  - apparition de la turbulence

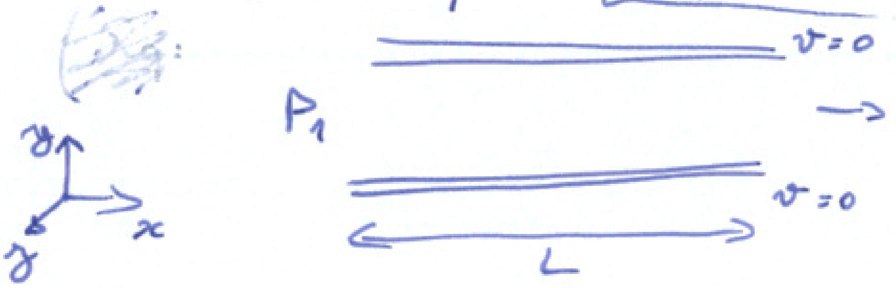
## II - Ecoulement de Poiseuille.

→ ecoulement le long d'un tube cylindrique
ecoulement car $P_2 < P_1$ (grace au vase de mariotte.

→ le ≠ de P va imposer un débit volumique qui est dû à viscosité. → faire exp : montrer que $D_v = f(\Delta P)$ ou plutot $\Delta P = f(D_v)$

### 2.1. Cas cylindrique

justifier mesure P avec h car stat fluide




(Rq : $\vec{v} = v_x \vec{e_x} = v_x(x, y, \cancel{z})$ car div $\vec{v} = 0$)
incompréssible

On s'intéresse à la situation stationnaire $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

Champ de vitesse : $\vec{v} = v_x(r)\, \vec{e_x}$
$(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v} = 0$ aussi. car incompressible.

dP - g :

$$- \vec{grad}\, P + \eta \Delta \vec{v} = 0.$$

(on neglige $\vec{g}$ car tube petit)
NON → transverse jou pas.

$\rightarrow \vec{e_x}$ :

$$C(x) = + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{indé de } r} = \underbrace{\eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_x}{\partial r}\right)}_{\text{depend que de } r}.$$

car . $\vec{e_r}$ $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$

- $P = C\,x + P(0)$. $\rightarrow C = \dfrac{P(L) - P(0)}{L} = \dfrac{\Delta P}{L}$

- $$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_x}{\partial r}\right) = r \frac{C}{\eta}.$$

$$\rightarrow r \frac{\partial v_x}{\partial r} = r^2 \frac{C}{2\eta} + D.$$

$D = 0$ sinon $\frac{\partial v_x}{\partial r}$ diverge en 0.

$$\rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial r} = r \frac{C}{2\eta} + \frac{D}{r}$$

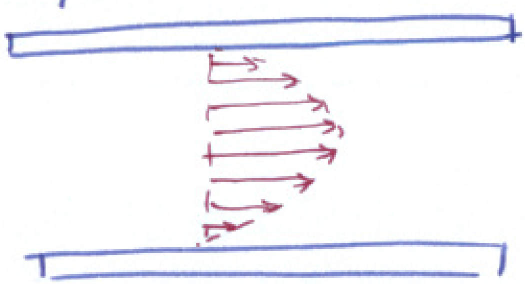
$$\Longrightarrow v_x(r) = r^2 \frac{C}{4\eta} + E$$

Condition de non glissement dû à viscosité

$$v_x(r=R) = 0 \rightarrow E = -R^2 \frac{C}{4\eta}.$$

$$\boxed{v_x(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(r^2 - R^2)} > 0 \text{ avec } \Delta P < 0.$$

Profil parabolique



Débit volumique

$$D_v = \int \vec{v_x}(r)\, \underbrace{d\vec{S}}_{2\pi r\, dr\, \vec{e_x}}.$$

$$D_v = \frac{\Delta P}{4\eta L} 2\pi \underbrace{\int_0^R r(r^2 - R^2)\, dr}_{\left[\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{2}r^2R^2\right]_0^R = -\frac{1}{4}R^4}.$$

$$\boxed{D_v = -\frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta P.}$$

→ moyen de mesurer la viscosité d'un fluide.

→ calcul de $\eta$.

Rq : on pourrait s'attendre que $D_v$ varie en $R^2$ (surface) → ici $R^4$ c'est un effet de viscosité, varie plus. car à petit R, la cond au bord se "voit plus", donc ↘ en $R^4$.

Ccl : On a introduit la viscosité, on a vu qu'elle est respon de la diffusion de la quantité de mvt dans un ecoulement. De fois elle est dominé par l'inertie de l'ecoulement. et des fois elle domine et régit l'ecoulement.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{grad})\,\rho.$$

→ conservation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\mathrm{div}\,\rho\vec{v}}_{\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} + \vec{v}.\vec{grad}\,\rho} = 0.$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{v}}_{=0} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

02 97 65 97 67