

LP13 : Diffraction
de Fraunhofer.

(1)

Niveau: CPGE

Prerequis: diffraction?, description ondulatoire de la
lumière, optique geo, TF.

I - Phénomènes de diffraction.

1.1. Principe d'Huygens-Fresnel.



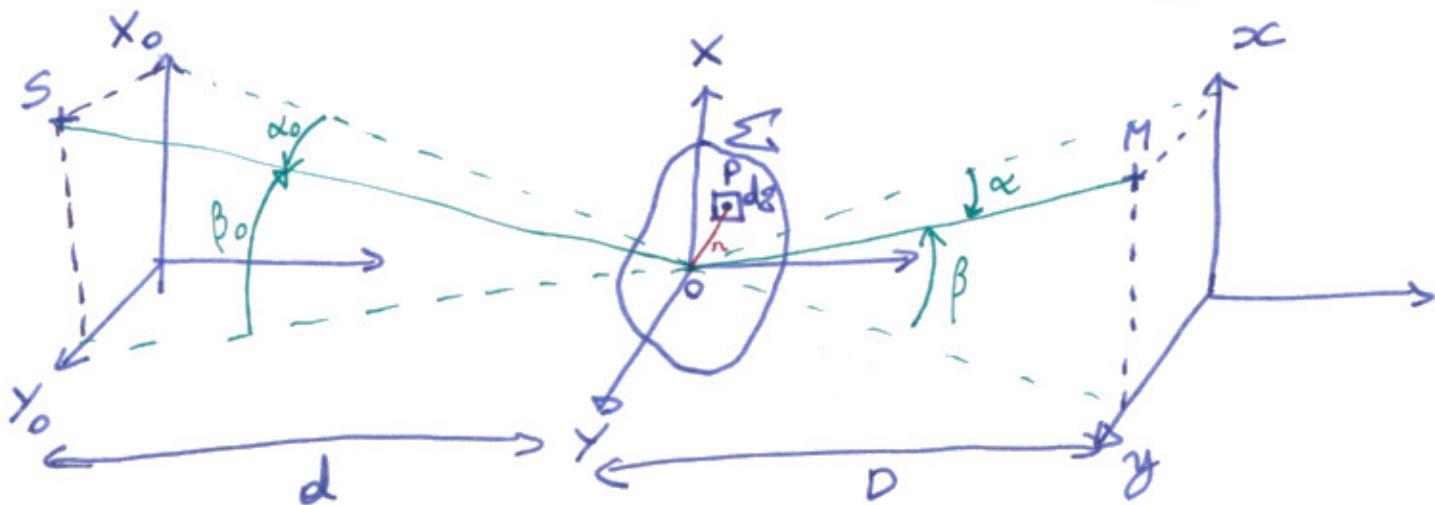
Chaque point P émet une onde secondaire sphérique de

- \hat{m} fréquence
- \hat{m} phase
- d'amplitude proportionnelle à l'amplitude incidente et à la surface $d\Sigma$ élémentaire

$$ds = \frac{e^{i k \cdot \|\vec{PM}\|}}{\|\vec{PM}\|} A s_0(P) d\Sigma.$$

→ sommation \int car en phase donc les ondes interfèrent.

1.2. Diffraction par un objet plan.



On éclipse par une source sphérique en S. ⁽³⁾

$$s_0 \frac{e^{ik.SP}}{SP}$$

→ onde en M:

$$s(M) = \int_{\Sigma} d\Sigma A s_0 \underbrace{t(x,y)}_{\text{conversion}} \frac{e^{ik.SP}}{SP} \frac{e^{ik.PM}}{PM}$$

conversion "en s'intéressant par ex. aux ordres de l'onde"

On cherche à exprimer SP & PM:

$$PM = \sqrt{D^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2}$$

$$= D \left(1 + \frac{(x-x')^2}{D^2} + \frac{(y-y')^2}{D^2} \right)^{1/2}$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{conditions} \\ \text{de Gauss}}}{=} D \left(1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x-x'}{D} \right)^2 + \left(\frac{y-y'}{D} \right)^2 \right] \right)$$

$$= D \left(1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{D} \right)^2 + \left(\frac{x'}{D} \right)^2 + \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \left(\frac{y'}{D} \right)^2 \right] - \frac{xx' + yy'}{D^2} \right)$$

$$PM = D \left(1 + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{r^2}{2D^2} - \frac{\alpha x + \beta y}{D} \right)$$

où on a posé $\alpha = \frac{x}{d}$, $\beta = \frac{y}{d}$ et $r^2 = x^2 + y^2$

$$\text{car } \sin \alpha = \frac{x}{OM} \approx \frac{x}{d}$$

à l'ordre 1
des 1/D

De même:

(4)

$$SP = d \left(1 + \frac{1}{2} (\alpha_0^2 + \beta_0^2) + \frac{r^2}{2d^2} - \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{d} \right)$$

du dénominateur:

$$SP \approx d \quad \text{et} \quad PM \approx D.$$

Dans la phase: l'ordre 2 doit être comparé à λ car $2\pi \frac{PM}{\lambda} \rightarrow$ NON NEGLIGEABLE

On obtient:

$\varphi_{\text{commune.}}$

$$s(M) = \frac{A D_0}{d D} e^{i k \left[d + D + \frac{d}{2} (\alpha_0^2 + \beta_0^2) + \frac{D}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \right]} \times \int_{\Sigma} dx dy \mathcal{L}(x, y) e^{-i k [(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y] + i k \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right)}$$

1.3. Approximation de Fraunhofer.

Cette formule donne la luminosité en fonction de la position d'observation (x, y) .

Il existe plusieurs régimes:

- Fresnel \rightarrow courtes distances
- Fraunhofer \rightarrow grandes distances de l'objet dif.

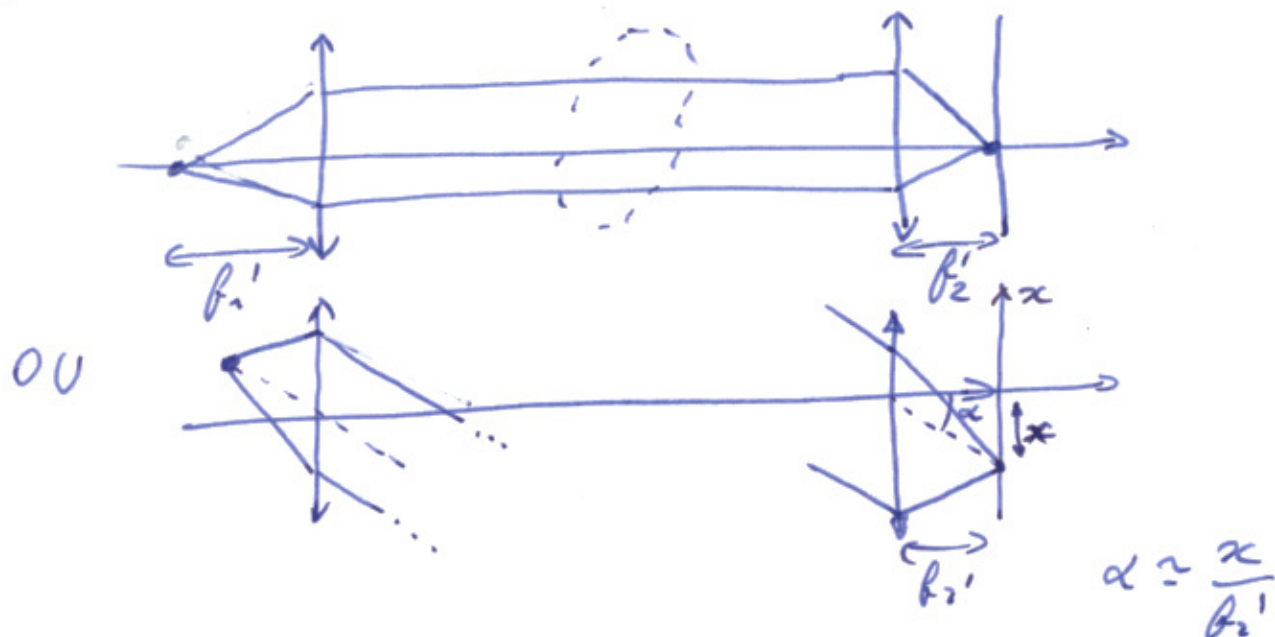
1 La correspond a negligé le deuxième termes.

$$\frac{k r^2}{2d} \ll 1 \quad \frac{k r^2}{2D} \ll 1$$

D'où $D, d \gg \frac{kx^2}{2}$.

ODG: $\lambda_{\text{He-Ne}} = 630 \text{ nm.}$ } $D, d \gg 5 \text{ cm.}$
 $x \approx 0,1 \text{ mm}$
 $x \approx 1 \text{ mm} \rightarrow D, d \gg 5 \text{ m.}$

- En pratique on se place à 1 m.
- Meilleur on place source et écran au foyer de deux lentilles \rightarrow infinie



Dans ce cas :

$$s(M) = \tilde{s}_0 \int_{\Sigma} dx dy t(x, y) \times e^{-i \frac{2\pi}{\lambda f_2'} [(x-x_{s'})x + (y-y_{s'})y]}$$

position image source $x_{s'}, y_{s'}$
cf. Bonard p 312

$x_{s'}, y_{s'}$ position image de la source.

On voit que $s(M)$ est la TF de $t[x, y]$
 $s(M) \propto \text{TF}[t(x, y)]$

II - Diffraction par une fente rectangulaire (6)

2.1. Figure de diffraction on choisit par convention $x_{S'} = y_{S'} = 0$



$$t(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{ab} & \text{si } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ & -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{TF: } s(M) = s_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a x}{\lambda f'}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b y}{\lambda f'}\right)$$

Expérimentalement on mesure

$$I(M) = |s(M)|^2$$

$$I(M) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi a x}{\lambda f'} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi b y}{\lambda f'}$$

slide : sinc^2 $a \searrow$ largeur $\frac{2\lambda f'}{a} \nearrow$.

2.2. Vérification

exp: fente + laser \rightarrow ajustement

Rq: $8 \mu\text{m}$ CCD.

\rightarrow ouvrir laser pour plus belle tâche

Rq: qu'une figure car plus fine que large.

III - Limitations des instruments

3.1. Diffraction par une fente circulaire

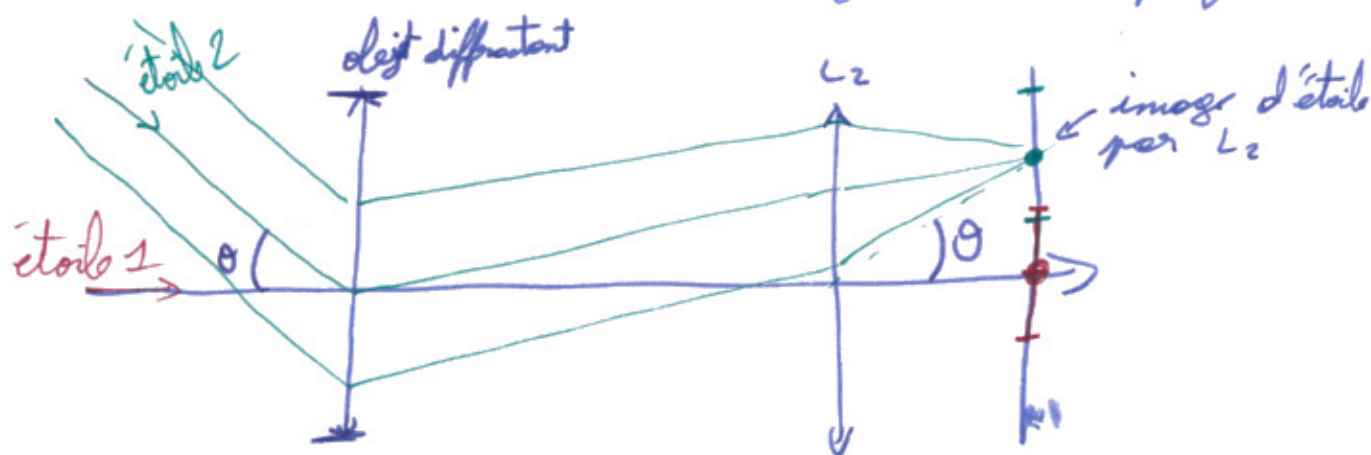
slide : figure

Première annulation pour \leftarrow Bessel.

$$\alpha - \alpha_0 = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad \leftarrow \text{diam.}$$

3.2. Critère

Considérons deux étoiles \rightarrow chacune fait une figure de diff. \rightarrow les taches se "brouillent" si écart angulaire trop faible.



pas bon schéma

Critère de Rayleigh en angl. de ② = max de ①.

ie. $\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$

\rightarrow on ne pourra pas distinguer étoile.

III - Propriétés

3.1. Théorème de Babinet → p 315

$$\underline{t}_1(P) + \underline{t}_2(P) = 1$$

$$\underline{E}_1(M, \epsilon) + \underline{E}_2(M, \epsilon) = \underline{E}_{06} \quad \begin{array}{l} \text{optique geo} \\ \text{car absence de} \\ \text{pupille geo} \end{array}$$

i.e. = 0 si $M \neq S'$ image de S .

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \underline{E}_1(M, \epsilon) &= -\underline{E}_2(M, \epsilon) && \text{sauf en } M = S' \\ \underline{I}_1(M) &= \underline{I}_2(M) && (\text{valable que en 2ème ord.}) \end{aligned}$$

3.2. Théorème de translation → p 313

$$\dots \quad \underline{E}'(M, \epsilon) = e^{i(\vec{k}_d - \vec{k}_i) \cdot \vec{OO'}} \underline{E}(M, \epsilon)$$

$$\rightarrow \underline{I}'(M) = \underline{I}(M)$$

→ ouverture sur diffraction périodique. et interf si 2 fentes