Optimisation Convexe

Adrien Taylor

12 décembre 2024

Table des matières

■ **Notation 0.1**

- $\mathbb{S}^n$ est l'ensemble des matrices symétriques. $\mathbb{S}^n_+$ est l'ensemble des matrices symétriques positives.
- On ne considère que des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On notera $\operatorname{dom} f = \{x \mid |f(x)| < \infty\}$ le domaine de f

1 Modélisation

1.1 Ensembles Convexes

Définition 1.1 Un ensemble C est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in C, \forall \theta \in [0,1], \theta x + (1-\theta)\, y \in C$$

Un ensemble convexe C est dit propre s'il est non vide.

Définition 1.2 L'enveloppe convexe $\operatorname{Conv} S$ d'un ensemble S est le plus petit ensemble convexe qui contient S. Les combinaisons convexes de $x_1, \ldots, x_k$ sont les :

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i, \sum \theta_i = 1$$

Définition 1.3 Un hyperplan est un ensemble de la forme

$$\left\{x \mid {}^{\mathsf{t}}axx = b\right\}, a \neq 0$$

Proposition 1.1

1. Les hyperplans sont affines et convexes, de vecteur normal a.
2. Les boules euclidiennes de la forme :

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \leq r\}$$

sont convexes
3. Les ellipsoïdes de la forme :

$$\{\}$$

sont convexes.

Définition 1.4 Un ensemble K est un cône si :

$$x \in K \Rightarrow \theta x \in K \forall \theta > 0$$

Proposition 1.2 Les ensembles suivants sont convexes :

- $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$
- $K = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq t\right\}$
- $K \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + x_1 t + \ldots + x_n t^n \geq 0\right\}$
- $K = \{X \in \mathbb{S}^n \mid\}$

Définition 1.5 On définit K^* le cone dual d'un cone K :

$$K^* = \left\{y \in {}^{\mathsf{t}}yx \geq 0 \forall x \in K\right\}$$

On va s'intéresser aux opérations qui préservent la convexité.

Proposition 1.3 Soient C, C_1, C_2 des ensembles convexes :

- $C_1 \cap C_2$ est convexe
- $C_1 \cup C_2$ n'est pas nécessairement convexe.
- Si $L(x) = Ax + b$ est affine, $L(C)$ est convexe. $L^{-1}(C)$ est convexe.

Définition 1.6 On définit les polyèdres :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, C_x = d\}$$

Ils sont convexes comme intersection d'ensembles convexes.

Théorème 1.1 Étant donné deux ensembles fermés C et D, convexes et non-intersectant, il existe s, r tels que :

$$ {}^{\mathsf{t}}sx \leq r, x \in C$$
$$ {}^{\mathsf{t}}sx \geq r, x \in D$$

$\{x \in {}^{t}sx = r\}$ est appelé plan de séparation.

Théorème 1.2 Un ensemble convexe est l'intersection de tous les demi-espaces qui le contiennent.

Définition 1.7 Un hyperplan H supporte l'ensemble convexe C en $x \in \partial C$ si :

$$^{t}sx = r \wedge {}^{t}sy \leq r \forall y \in C$$

Définition 1.8 L'opérateur de cone normal d'un ensemble convexe C en x est définit pas :

$$N_C(x) = \begin{cases} \{g \mid {}^{t}g(y-x) \leq 0 \forall y \in C\} & \text{si } x \in C \\ \varnothing & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

C'est l'ensemble des vecteurs qui forment des angles obtus pour tout $y - x$ avec $y \in C$.

Définition 1.9 Le cone tangent à C en $x \in \partial C$ est définit par le cône dual négatif :

$$T_C(x) = N_C^{\circ}(x)$$

Définition 1.10 Une fonction est dite convexe si son épigraphe $\{(x, f(x))\}$ l'est. Cette condition est équivalente à :

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Une fonction est dite concave si et seulement si son opposé est convexe.

Définition 1.11 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Son ensemble de sous-niveau de niveau α est :

$$S_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha\}$$

Proposition 1.4 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dérivable est convexe si et seulement si son domaine est convexe et pour $x, y \in \operatorname{dom} f$, on a :

$$f(x) \geq f(y) + {}^{t}\nabla f(x)(x-y)$$

Un hyperplan de support $(g, -1)$ de f en $(x, f(x))$ correspond à :

$$f(y) \geq f(x) + {}^{t}g(x-y)$$

g est appelé sous-gradient de f en x et appartient à la sous-différentielle de f en x $\partial f(x) = \{g \mid f(y) \geq f(x) + {}^{t}g(x-y)\}$.

- Si f est différentiable et $\partial f(x) \neq \varnothing$ alors $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.
- Si f est convexe et $\partial f(x)$ est un singleton alors $\partial f(x)\,\{\nabla f(x)\}$.

Pour les fonctions convexes :

- Les sous-gradients existent sur $\circ \operatorname{dom} f$.
- Les sous-gradients n'existent pas hors de $\operatorname{dom} f$.
- Les sous-gradients peuvent exister au bord de $\operatorname{dom} f$.

Théorème 1.3 Si f est deux fois différentiables, f est convexe si et seulement si $\nabla^2 f(x) \prec 0$.

En pratique, pour vérifier la convexité :

- On revient à la définition
- On étudie l'existence de sous-gradients
- Si f est deux fois différentiables, on voit si la hessienne est symétrique définie positive.
- On décompose en opérations qui préservent la convexité.

<++>

2 Méthodes