Topological Data Analysis

D'après Julien Tierny et Frédéric Chazal

7 octobre 2025

Table des matières

Résumé

`mailto:julien.tierny@sorbonne-universite.fr` `mailto:frederic.chazal@inria.fr` `https://julien-tierny.github.io/topologicalDataAnalysisClass.html` `https://geometrica.saclay.inria.fr/team/Fred.Chazal/MVA2025`

Introduction

Méthodes algorithmiques d'analyse topologique de données, particulièrement en science et en ingénierie.

Le but est de partir de données, sous forme de maillages et maillables, et de retrouver des structures au sein de jeux de données. Partant d'une carte (considérée comme jeu de données brutes), avec des features intéressantes, pour pouvoir raisonner sur l'espace, on passe à une représentation abstraite, par exemple comme un graphe, et c'est sur cette structure de données sous-jacente qu'on va raisonner. Ici, on peut ajouter des filtres pour redéfinir le maillage et donc redéfinir le résultat du raisonnement. Plus généralement, on veut construire une carte à partir d'un jeu de données. En astrophysique, par exemple, on modélise la croissance de l'univers à une grande échelle, on la simule par une grille de voxel, on estime la densité de matière noire sur chaque voxel, et on découvre une sorte de géométrie ressemblant à des neurones lorsqu'on trouve aussi des groupes de galaxies, formant une "toile cosmique". On peut calculer les connexions avec des complexes simpliciaux dits de Morse-Smale, dont on peut extraire une structure de graphes.

Ainsi, on extrait de la structure d'un ensemble de données, de manière robuste et indépendante de l'échelle, par comparaison et extraction de propriétés. Sous le capot, on fait :

- Homologie Simpliciale
- Théorie de Morse
- Homologie Persistente

Pour des données numériques, étant données un échantillon de points dans un espace euclidien, par exemple, on peut les représenter et objectiver des représentations géométriques apparaissant. On a des manières de mailler l'ensemble (triangulation de Delaunay, par exemple) qui amènent à des indicateurs qui nous expliquent où sont répartis les données, par exemple avec des noyaux pour estimer la densité. Avec une fonction scalaire sur un maillage, on définit une filtration, et on regarde les propriétés de la fonction, comme les optima locaux et on en extrait une structure algébrique (complexe de Morse-Smale) qui nous donne une structure algébrique. On obtient des générateurs, et des composantes "connexes".

On a ce genre de densité de pixels, par exemple la hauteur de surface de la mer qui permet de remarquer les vortexs, en chimie quantique ou des spectrogrammes d'enregistrement vocaux. On part d'un domaine géométrique et d'un signal sur ce domaine, signal qui exhibe des patternes géométriques qu'on souhaite quantifier. Ceci permet l'extraction de propriétés, la segmentation, la réduction de dimension et autres. Dans le cas de points en grande dimension, on a une unique théorie qui s'applique très généralement.

En terme de logiciels, on a le TTK (ParaView >= 5.10) et Gudhi (bibliothèque python).

1 Homologie Simplicale

Les données reçues, parfois, vont contenir explicitement la géométrie avec une construction combinatoire. On supposera qu'on aura une donnée d'entrée linéaire par morceau sur un complexe simplical.

1.1 Complexe Simpliciaux

Définition 1.1 Un d-simplexe est l'enveloppe convexe σ de $d+1$ points affinement indépendants dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec $0 \leq d \leq n$. On dit que d est la dimension du simplexe.

Une ligne est un 1-simplexe, un triangle un 2-simplexe et un tétrahèdre un 3-simplexe.

Définition 1.2 Une face τ d'un simplexe σ est un simplexe construit par un ensemble non vide des $d+1$ poits définissant σ. On note $\tau \leq \sigma$ et τ_i une face de dimension i. On dit aussi que σ est une coface de τ.

Selon la définition, on a $\sigma \leq \sigma$.

Définition 1.3 Un complexe simplicial $\mathcal{K}$ est une collection finie non-vide de simplexes $\{\sigma_i\}$, telle que :

1. $\tau \leq \sigma \Rightarrow \tau \in \mathcal{K}$;
2. $\sigma_i \cap \sigma_j$ est soit une face, soit vide.

Définition 1.4 L'étoile d'un simplexe $\sigma \in \mathcal{K}$ est l'ensemble des simplexes de $\mathcal{K}$ qui contiennent σ :

$$\mathrm{St}(\sigma) = \{\tau \in \mathcal{K} | \sigma \leq \tau\}$$

On note $\mathrm{St}_d(\sigma)$ les d-simplexes de $\mathrm{St}(\sigma)$.

C'est l'ensemble des cofaces de σ dans $\mathcal{K}$. C'est le plus petit voisinage combinatoire autour d'un simplexe.

Définition 1.5 Le lien d'un simplexe σ est l'ensemble des faces de $\mathrm{St}(\sigma)$ disjointes de σ :

$$\mathrm{Lk}(\sigma) = \{\tau \leq \sigma' \,|\, \sigma' \in \mathrm{St}(\sigma) \wedge \tau \cap \sigma = \varnothing\}$$

On définit de même le d-lien $\mathrm{Lk}_d(\sigma)$ en remplaçant St par St_d dans la définition

C'est en quelque sorte la bordure du voisinage combinatoire de lui-même.

En réalité on va considérer que les sommets (ou 0-simplexes) sont des points, et que les d-simplexes sont des ensembles de points. Ceci définit une notion de complexe simplicial abstrait, utile lorsqu'on n'a pas d'immersion dans un espace euclidien, ou alors dans un espace euclidien en trop grande dimension. On relâche ici la condition d'intersection, puisqu'on n'a plus de structure géométrique de l'espace.

Un exemple de complexe simplicial abstrait est le complexe de Rips ou complexe de Vietori-Rips. Étant donné un nuage de points avec une métrique :

- Le diamètre d'un ensemble P est défini par : $\varnothing(P) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in P\}$
- On construit un complexe simplicial $p \leq p_{max}$ de sorte que tous $p + 1$ points dont le diamètre est plus petit qu'une valeur seuil d_{max}.

Le complexe de Rips est une généralisation de la notion de graphe de voisinage.

Définition 1.6 L'espace sous-jacent à un complexe simplicial est l'union des simplexes du complexe.

Définition 1.7 La triangulation $\mathcal{T}$ d'un espace topologique X est un complexe simplicial $\mathcal{K}$ dont l'espace sous-jacent $|\mathcal{K}|$ est homéomorphe à X.

Une triangulation d'un espace est donc un complexe simplicial abstrait.

Définition 1.8 Une d-variété M est un espace topologique dans lequel tout élément m a un voisinage ouvert homéomorphe à une d-boule euclidienne.

Définition 1.9 La triangulation d'une d-variété est appelée d-variété linéaire par morceaux.

Représenter en mémoire un complexe simplicial est très couteux : il faut, pour chaque dimension, une liste des hyperarêtes (ou d-simplexes) en les représentant par un indice de sommet.

1.2 Homologie simpliciale

1.2.1 Rappels d'homotopie

Définition 1.10 Un chemin p dans C est un homéomorphisme d'un intervalle réel vers l'objet C. On dit que C est connexe (par arcs) si pour tous deux points il existe un chemin dans C les reliant.

Définition 1.11 Une composante connexe d'un objet est un sous-ensemble connexe (par arcs) maximal de l'objet.

Définition 1.12 Une homotopie entre deux fonctions continues f et g de X vers Y est une fonction continue $H : X \to [0, 1] \to Y$ du produit d'un espace topologique X par l'intervalle unité vers un espace topologique Y de sorte que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. S'il existe une homotopie entre f et g on dit que f et g sont homotopes.

Définition 1.13 Si dans un espace X, tous les chemins entre tous deux points sont homotopes, on dit que X est simplement connexe.

Le disque est simplement connexe, mais pas le disque privé de 0.

Définition 1.14 La caractéristique d'Euler d'une triangulation T d'un espace topologique est la somme alternée des nombres des i-simplexes :

$$\chi(T) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i |\sigma_i|$$

Proposition 1.1 La caractéristique d'Euler est invariante par homéomorphisme.

1.2.2 Groupes d'homologie

Définition 1.15 Une p-chaine est une somme (formelle) de p-simplexes. On suppose que l'opérateur somme est défini modulo 2.

Ici, la somme est réellement la différence symétrique (ou la disjonction exclusive) sur $\mathbb{F}_2^{|\sigma_p|}$, et définit le groupe C_p des p-chaînes. Le rang de C_p est $|\sigma_p|$ et son ordre est $2^{|\sigma_p|}$

On peut généraliser à des coefficients plus généraux. Informatiquement, il faut voir la notion de chaîne comme un masque binaire sur l'ensemble des p-simplexes.

Définition 1.16 L'opérateur de bordure ∂ d'un p-simplexe renvoie la $(p-1)$-chaîne des $(p-1)$-faces du simplexe. On l'étend aux p-chaînes comme un morphisme de $C_p \to C_{p-1}$.

Pour un triangle, c'est l'ensemble de ses arêtes. Pour une arête, c'est l'ensemble des extrémités.

Proposition 1.2 L'opérateur de bordure définit une suite exacte appelée le complexe de chaîne associé au complexe K de dimension d :

$$\{0\} \to C_d(K) \xrightarrow{\partial} C_{d-1}(K) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_{k+1}(K) \xrightarrow{\partial} C_k(K) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K) \xrightarrow{\partial} O$$

Définition 1.17 Un p-cycle est une p-chaîne dont la bordure est vide. On définit Z_p le groupe des p-cycles comme sous-groupe de C_p.

Définition 1.18 Le groupe B_p des p-bordures est l'image de $C_{(p+1)}$ par ∂.

Lemme 1.1 Pour tout $x \in C_p, p \geq 2$, $\partial\partial x = 0$.

Démonstration. Il suffit de vérifier le résultat sur les p-simplexes et d'étendre par somme. Puisque pour tout $(p-2)$-faces τ on a exactement 2 $(p-1)$-co-faces de τ dans un p-simplexe σ, on a le résultat. ■

On obtient directement :

Proposition 1.3 B_p est un sous-groupe de Z_p.

Si on a trois 1-simplexes e_1, e_2, e_3 mais pas leur coface commune $\{e_1, e_2, e_2\}$, on a un exemple d'inclusion stricte. Ceci nous amène à définir la notion de trou, en isolant les cycles :

Définition 1.19 Le p-ème groupe d'homologie H_p est le quotient de Z_p par B_p.

Démonstration. B_p étant un sous-groupe de Z_p, H_p est bien défini. ■

Géométriquement, on peut étendre un p-cycle à un autre p-cycle lorsqu'ils encapsulent le même "trou", c'est-à-dire lorsque qu'on peut "étendre" le premier cycle en encapsulant un $(p+1)$-simplexe. Une classe d'homologie est un élément de H_p, ou plutôt sa classe d'équivalence dans Z_p.

Pour calculer $|H_p|$, on énumère C_p, on élimine les chaînes de bordure non-vide pour calculer Z_p, et on peut ensuite énumérer les classes d'homologie.

Définition 1.20 On définit le p-ème nombre de Betti β_p comme le rang du groupe H_p. Ici, c'est $\log_2 |H_p|$.

La formule logarithmique pour β_p vient du calcul modulo 2 dans notre opération de groupe.

Proposition 1.4 La caractéristique d'Euler d'une triangulation T d'un espace topologique X de dimension d vérifie :

$$\chi(T) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \beta_i(T)$$

On a des interprétentations des nombres de Betti en faible dimension. Par exemple, $\beta_0(K)$ est le nombre de composantes connexes de K.

2 Homologie Persistente

2.1 Invariance Topologique et Filtrations

2.1.1 Homologie Singulière

On a le résultat important suivant, qui va nous permettre de simplifier la manière de définir l'homologie, notamment dans la représentation des simplexes :

Théorème 2.1 Si K et K' sont des complexes simpliciaux de supports homéomorphes, leurs groupes d'homologie sont isomorphes et leurs nombres de Betti sont égaux.

Démonstration. « Débrouille-toi, normalien. » ■

On va donc définir l'homologie singulière, sur tout espace topologique, en considérant à homotopie près. On note Δ_k le k-simplexe standard dans $\mathbb{R}^k$.

Définition 2.1 Un k-simplexe singulier dans un espace topologique X est une fonction continue $\sigma : \Delta_k \to X$.

On reprends les constructions de l'homologie simpliciale pour les complexes singuliers : c'est la définition de l'homologie singulière.

Proposition 2.1 L'homologie singulière est définie pour tout espace X. Si X est homotopiquement équivalent au support d'un complexe simpliciel, les homologies singulières et simpliciales coïncident.

Proposition 2.2 Si $f : X \to Y$ est continue, et $\sigma : \Delta_k \to X$ est un simplexe dans X, alors $f \circ \sigma$ est un simplexe dans Y, et f définit donc une application linéaire entre les groupes d'homologie :

$$f_\sharp : H_k(X) \to H_k(Y)$$

Si f est un homéomorphisme ou une équivalence d'homotopie, alors $f_\sharp$ est un isomorphisme.

R En particulier, si $X \subset Y$, l'application d'inclusion induit une application linéaire d'homologie.

2.1.2 Filtrations

Définition 2.2 Un complexe simplicial filtré (ou une filtration) $\mathbb{K}$ construit sur un ensemble X est une famille $\{K_a \,|\, a \in T\}$, où $T \subseteq \mathbb{R}$, de sous-complexes d'un certain complexe simplicial fixé K avec ensemble de sommets X de sorte que $K_a \subseteq K_b$ pour tout $a \leq b$.

L'homologie persistente d'un complexe simplical filtré encode l'évolution de l'homologie des sous-complexes.

Définition 2.3 Une filtration d'un complexe simplicial fini K est une séquence de sous-complexes telle que :

1. $\varnothing = K^0 \subset K^1 \subset \cdots \subset K^m = K$
2. $K^{i+1} = K^i \cup \sigma^{i+1}$ où σ^{i+1} est un simplexe de K.

La famille des ensembles de sous-niveau pour une fonction est un exemple de filtration. On verra plus bas comment définir de telles filtrations dans plus de cas. On a toutefois un algorithme pour calculer itérativement l'homologie simpliciale d'un complexe étant donné une filtration de celui-ci :

Algorithme 1 Calcul d'homologie (simpliciale)

InputUne filtration $\left(K^i\right)_{i \leq m}$ d'un complexe simplical K en dimension d

$\beta_i \leftarrow 0$
for $i \in \{1, \ldots, m\}$ **do**
  $k \leftarrow \dim \sigma^i - 1$
  if σ^i est dans un $(k+1)$-cycle de K^i **then**
    $\beta_{k+1} \leftarrow \beta_{k+1} + 1$
  else
    $\beta_k \leftarrow \beta_k - 1$
return $(\beta_0, \ldots, \beta_d)$

Définition 2.4 Un $(k+1)$-simplexe σ^i est dit *positif* s'il est contenu dans un $(k+1)$-cycle de K^i. Il est dit *négatif* sinon.

Un $(k+1)$-simplexe positif crée un $(k+1)$-cycle dans K^i. Un $(k+1)$-simplexe négatif détruit un k-cycle dans K^i.

On veut donc vérifier :

$$\beta_k(K) = |k\text{-simplexes positifs}| - |(k-1)\text{-simplexes négatifs}|$$

On a :

Lemme 2.1 Si σ^i est un k-simplexe positif, il existe un unique k-cycle c_σ tel que :

1. c_σ n'est pas une bordure dans K^i
2. c_σ contient σ^i mais pas d'autre k-simplexe positif.

Démonstration. Par induction sur l'ordre d'apparition des simplexes dans la filtration. ■

Preuve de correction de l'algorithme 1. Si σ^i est contenu dans un $(k+1)$-cycle c de K^i, alors ce cycle n'est pas une bordure dans K^i. De plus, c ne peut pas être homologue à un cycle dans K^{i-1}, et donc $\beta_{k+1}\left(K^i\right) \geq \beta_{k+1}(K^{i-1}) + 1$. Si σ^i n'est contenu dans aucun $(k+1)$-cycle c de K^i, alors $\partial\sigma^i$ n'est pas une bordure dans K^{i-1} et donc $\beta_k(K^i) \leq \beta_k\left(K^{i-1}\right) - 1$. ■

Cela pose quelques questions, qui vont nous conduire à introduire l'homologie persistente.

2.2 Homologie Persistente

2.2.1 Sur les fonctions

Pour définir les diagrammes de persistence pour une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, on étudie ses ensembles de sous-niveau. On représente, pour chaque dimension d d'homologie, la "durée de vie" d'une propriété topologique de dimension d. Ces propriétés topologiques sont, entre autres, observées par la variation du d-ème nombre de Betti. On représente alors sur un graphe 2-D, en abscisse, la valeur x pour laquelle une propriété apparaît, et en ordonnée la valeur x' pour laquelle la propriété disparaît. On a nécessairement $x' > x$. On notera $D_{f,d}$ le diagramme défini ci-dessus, comme son ensemble de points du plan $\mathbb{R}^2_+$.

On définit alors une distance sur deux tels diagrammes :

Définition 2.5 La distance infinie de Wasserstein, ou distance du goulot entre deux diagrammes D_1 et D_2 est définie par :

$$d_B\left(D_1, D_2\right) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{p\in D_1} \|p - \gamma(p)\|_\infty$$

où Γ est l'ensemble des bijections entre D_1 et D_2.

R Pour pouvoir obtenir des bijections, on doit souvent *augmenter* les diagrammes, en projetant les points de l'un sur la diagonale de l'autre et réciproquement.

On aura alors un théorème important de stabilité :

Théorème 2.2 Pour toutes fonctions *calmes* $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $d_B(D_f, D_g) \leq \|f - g\|_\infty$.

Cette définition, avec les mains, va être précisée et étendue plus bas.

2.2.2 Sur les filtrations

On va maintenant étendre la notion de diagrammes de persistences aux filtrations de complexes simpliciaux. On a une relation fondamentale :

Proposition 2.3 Si $t \leq t'$, $f^{-1}\left(]-\infty, t]\right) \subseteq f^{-1}\left(]-\infty, t']\right)$. Si f est définie sur les sommets d'un complexe simplicial K, et étendue de sorte que

$$f\left(\sigma = [v_0, \ldots, v_k]\right) = \max f\left(v_i\right),$$

alors les ensembles de sous-niveau de f définissent une filtration du complexe simplcial K.

Il suffit maintenant d'adapter l'algorithme 1 ci-dessus pour maintenir une base d'homologie et les paires naissance-mort d'une propriété. On notera $H_k^i = H_k\left(K^i\right)$, et on va construire des bases par récurrence (les H_k sont des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels).

La base de H_k^0 est vide, puisque l'ensemble est vide. Si on a construit une base de H_k^{i-1}, on a deux cas :

1. Si σ^i est un k-simplexe positif, alors on ajoute la classe d'homologie du cycle c^i associé à σ^i par le Lemme 2.1 à la base de H_k^{i-1} pour obtenir une base de H_k^i.
2. Si σ^i est un $(k+1)$-simplexe négatif :
   - On dénote $c^{j_1}, \dots, c^{j_p}$ les cycles associés aux simplexes positifs $\sigma^{j_1}, \dots, \sigma^{j_p}$ de la base de H_k^{i-1}.
   - On pose $d = \partial \sigma^j = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k c^{j_k} + b$
   - On pose $l(i) = \max\{j_k \mid \varepsilon_k = 1\}$
   - On enlève la classe d'homologie de $c^{l(i)}$ pour obtenir une base de H_k^i.

Ceci explique comment modifier l'algorithme 1 pour calculer les diagrammes de persistence. Cependant, avant de réécrire l'algorithme, on va s'intéresser à un test algorithmique pour vérifier que σ^j est positif ou négatif. Pour ce faire, on introduit la matrice de l'opérateur de bordure. On rappelle qu'on se donne une filtration : d'un complexe simplicial fini d-dimensionnel $\varnothing = K^0 \subset K^1 \subset \cdots \subset K^m = K$ telle que $K^{i+1} = K^i \cup \sigma^{i+1}$ où σ^{i+1} est un simplexe de K.

Définition 2.6 On pose $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le m}$ telle que $m_{i,j} = 1$ si, et seulement si σ^i est une face de σ^j et vaut 0 sinon.

Pour toute colonne C_j, on définit donc $l(j)$ par :

$$(i = l(j)) \Leftrightarrow (m_{i,j} = 1 \wedge m_{i',j} = 0, \forall i' > i)$$

On obtient une version matricielle de l'algorithme de persistence :

Algorithme 2 Algorithme de Persistence, version Matricielle

InputUne filtration $\varnothing = K^0 \subseteq \cdots \subseteq K^m = K$ d'un complexe simplical d-dimensionnel de sorte que $K^{i+1} = K^i \cup \sigma^{i+1}$ où σ^{i+1} est un simplexe de K
Calculer la matrice M de l'opérateur de bordure.
for $j \in \{0, \dots, m\}$ **do**
  while $\exists j' < j, l(j') = l(j)$ **do**
    $C_j \leftarrow C_j + C_{j'} \mod 2$
return Paires $(l(j), j)$

Dans le pire des cas, on a un algorithme en $\mathcal{O}(m^3)$.

Démonstration. À chaque étape de l'algorithme, la colonne C_j représente une chaîne de la forme :

$$\partial\left(\sigma^j + \sum_{i<j} \varepsilon_i \sigma^i\right), \varepsilon_i \in \{0,1\}$$

À la fin de l'algorithme, si j est tel que $l(j)$ est défini, alors $\sigma^{l(j)}$ est un simplexe positif. Donc si à la fin de l'algorithme, C_j est nulle alors σ^j est positif. Donc, si C_j n'est pas nulle, alors $(\sigma^{l(j)}, \sigma^j)$ est une paire de persistence. ■

Définition 2.7 On représente sur un diagramme de persistence les paires $\left(\sigma^{l(j)}, \sigma^j\right)$ par $(l(j), j)$ ou $\left(f\left(\sigma^{l(j)}\right), f\left(\sigma^j\right)\right)$. On ajoute au diagramme la diagonale $\{y = x\}$ et, pour chaque simplexe positif qui n'est pas dans une paire σ^i, le point $(i, +\infty)$.

Définition 2.8 Si D_1, D_2 sont deux diagrammes (potentiellement augmentés pour avoir le même cardinal) :

La Distance du Goulot est définie par :

$$d_B^\infty(D_1, D_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{p \in D_1} \|p - \gamma(p)\|_\infty$$

La Distance p-Wasserstein est définie, pour $p \geq 1$ par :

$$W_p(D_1, D_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma} (\sum_{\rho \in D_1} \|\rho - \gamma(\rho)\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$$

Dans les deux cas, Γ est l'ensemble des bijections entre D_1 et D_2.

R Ces deux définitions peuvent être vues comme le coût du transport optimal pour la norme infinie et la norme p.

Théorème 2.3 Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont *dociles*, on a :

$$d_B^\infty(D_f, D_g) \leq \|f - g\|_\infty$$

où D_φ est le diagramme de persistence de la filtration associée aux ensembles de sous-niveau de φ sur X.

On reviendra plus tard sur la notion de docilité.

2.3 Calcul de filtrations

2.3.1 Complexes de ech, de Vietoris-Rips, et autres

Définition 2.9 On considère un recouvrement $\mathcal{U}$ par des ouverts d'un espace topologique X. Le complexe de de ech $C(\mathcal{U})$ associé au recouvrement $\mathcal{U}$ vérifie :

- L'ensemble de sommets de $C(\mathcal{U})$ est l'ensemble $\mathcal{U}$.
- $[U_0, \ldots, U_k]$ est un k-simplexe dans $C(\mathcal{U})$ si et seulement si $\cap U_j \neq \varnothing$.

Théorème 2.4 — Nerveux (Leray) Si toutes les intersections entre les ouverts de $\mathcal{U}$ sont soit vides soit contractibles, alors $C(\mathcal{U})$ et X sont homotopiquement équivalents.

On se donne un nuage de point V dans un espace métrique (X, d) et un réel α.

Définition 2.10 Le complexe de ech ech (V, α) est le complexe simplicial filtré indexé par $\mathbb{R}$ dont l'ensemblde sommets est V et tel que :

$$\sigma = [p_0, \ldots, p_k] \in \text{ech}\,(V, \alpha) \Leftrightarrow \bigcap_{i=0}^{k} B(p_i, \alpha) \neq \varnothing$$

Définition 2.11 Le complexe de Vietoris-Rips Rips(V) est le complexe simplicial filtré indexé par $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de sommets est V et est défini par :

$$\sigma = [p_0, \ldots, p_k] \in \text{ech}\,(V, \alpha) \Leftrightarrow \forall i, j \in \{0, \ldots, k\}\,, d\,(p_i, p_j) \leq \alpha$$

Proposition 2.4 On a, pour tout $\alpha > 0$:

$$\text{ech}\left(L, \frac{\alpha}{2}\right) \subseteq \text{Rips}\,(L, \alpha) \subseteq \text{ech}\,(L, \alpha)$$

Définition 2.12 Si $V = \{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$.

2.3.2 Stabilité

3 Fonctions de Morse

4 Inférence Topologique

5 Théorie de Morse Discrète

6 Noyaux et Statistiques