

Optimisation Convexe

Adrien Taylor

28 novembre 2024



Table des matières

1	Modélisation	1
1.1	Ensembles Convexes	1
2	Méthodes	3

■ **Notation 0.1** • \mathbb{S}^n est l'ensemble des matrices symétriques positives.
 métriques. \mathbb{S}_+^n est l'ensemble des matrices symé-

1 Modélisation

1.1 Ensembles Convexes

Définition 1.1 Un ensemble C est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in C, \forall \theta \in [0, 1], \theta x + (1 - \theta) y \in C$$

Un ensemble convexe C est dit propre s'il est non vide.

Définition 1.2 L'enveloppe convexe $\text{Conv } S$ d'un ensemble S est le plus petit ensemble convexe qui contient S . Les combinaisons convexes de x_1, \dots, x_k sont les :

$$\sum_{i=1}^k \theta_i x_i, \sum \theta_i = 1$$

Définition 1.3 Un hyperplan est un ensemble de la forme

$$\{x \mid {}^t a x = b\}, a \neq 0$$

Proposition 1.1 1. Les hyperplans sont affines et convexes, de vecteur normal a .

2. Les boules euclidiennes de la forme :

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \leq r\}$$

sont convexes

3. Les ellipsoïdes de la forme :

$$\{ \}$$

sont convexes.

Définition 1.4 Un ensemble K est un cône si :

$$x \in K \Rightarrow \theta x \in K \forall \theta > 0$$

Proposition 1.2 Les ensembles suivants sont convexes :

- $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$
- $K = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq t\}$
- $K = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n \geq 0\}$
- $K = \{X \in \mathbb{S}^n \mid \}$

Définition 1.5 On définit K^* le cône dual d'un cône K :

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \forall x \in K\}$$

On va s'intéresser aux opérations qui préservent la convexité.

Proposition 1.3 Soient C, C_1, C_2 des ensembles convexes :

- $C_1 \cap C_2$ est convexe
- $C_1 \cup C_2$ n'est pas nécessairement convexe.
- Si $L(x) = Ax + b$ est affine, $L(C)$ est convexe. $L^{-1}(C)$ est convexe.

Définition 1.6 On définit les polyèdres :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, C_x = d\}$$

Ils sont convexes comme intersection d'ensembles convexes.

Théorème 1.1 Un ensemble convexe est l'intersection de tous les demi-espaces qui le contiennent.

Définition 1.7 Un hyperplan H supporte l'ensemble convexe C en $x \in \partial C$ si :

$$\langle s, x \rangle = r \wedge \langle s, y \rangle \leq r \forall y \in C$$

Définition 1.8 L'opérateur de cône normal d'un ensemble convexe C en x est défini par :

$$N_C(x) = \begin{cases} \{g \mid \langle g, y - x \rangle \leq 0 \forall y \in C\} & \text{si } x \in C \\ \emptyset & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

C'est l'ensemble des vecteurs qui forment des angles obtus pour tout $y - x$ avec $y \in C$.

Définition 1.9 Le cône tangent à C en $x \in \partial C$ est défini par le cône dual négatif :

$$T_C(x) = N_C^\circ(x)$$

Définition 1.10 Une fonction est dite convexe si son épigraphe l'est. Une fonction est dite concave si et seulement si son opposé est convexe.

Définition 1.11 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Son ensemble de sous-niveau de niveau α est :

$$S_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha\}$$

<++>

2 Méthodes