TP 1 Computational Statistics

Matthieu Boyer

10 octobre 2025

1 Exercice 1

1.1 Question 1

Par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(X_1) &= \int_{\mathbb{R}} x p_\theta(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} x\frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\theta x\frac{1}{\theta}\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{x^2}{2\theta}\right|_{x=0}^{x=\theta} \\ &= \frac{\theta^2}{2\theta} = \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

On remarque que ce calcul est indépendant de la variable aléatoire d'entrée considérée.

En se donnant une seule (puisqu'on n'a qu'un seul paramètre) fonction T mesurable avec un premier moment possédant une forme fermée $e(\theta)$, on va estimer θ par la solution de l'équation suivante :

$$e(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T(X_i)$$

En considérant par exemple, $T = \mathrm{id}$, qui vérifie bien nos hypothèses, puisqu'alors $e(\theta) = \mathbb{E}_\theta(X_i) = \frac{\theta}{2}$ pour tout i est bien fini et ne dépend bien que de θ :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

1.2 Question 2

Le risque quadratique peut s'écrire :

$$\mathbb{E}_\theta[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2] = \mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_1) + \mathcal{B}(\hat{\theta}_1)^2$$

où $\mathbb{V}$ désigne la variance et $\mathcal{B}$ désigne le biais. Ici, les variables X_i étant indépendantes : $\mathbb{V}_{\hat{\theta}_1} = \mathbb{E}[(\frac{2}{n}\sum \mathbb{E}[X_i] - \theta)^2] = 0$ et de plus :

$$\mathcal{B}(\hat{\theta}_1) = \frac{2}{n}\sum \mathbb{E}[X_i] - \theta = 0$$

Donc le risque quadratique est nul.

1.3 Question 3

On veut calculer :

$$\hat{\theta}_2 \in \operatorname{argmax}_\theta \Pi_{i=1}^N p_\theta(X_i) = \operatorname{argmax}_\theta \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(X_i)$$

puisque les variables X_i sont supposées indépendantes. En maximisant ci-dessus, puisque $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est strictement décroissante, on trouve :

$$\hat{\theta}_2 = \max_i X_i$$

En effet, un paramètre plus petit rendrait le produit ci-dessus nul.

1.4 Question 4

De même qu'à la question 2, on a :

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}_2) = \mathbb{E}[(\mathbb{E}[(\max_i X_i)] - \max_i X_i)^2] \text{ et } \mathcal{B}(\hat{\theta}_2) = (\mathbb{E}\max_i X_i - \theta)^2$$

Puisque :

$$\mathbb{P}(\max X_i \leq z) = \prod \mathbb{P}(X_i \leq z) = \frac{z^n}{\hat{\theta}_2^n}$$

On trouve :

$$\mathbb{E}[\max X_i] = \int_{x=0}^{\hat{\theta}_2} \frac{x^{n+1}}{\hat{\theta}_2^n} \, \mathrm{d}x = \frac{\hat{\theta}_2^2}{n+2}$$