

# Les Sept Merveilles de la Linéarité

Cours TalENS n°3-4

Clément Allard — Matthieu Boyer

11 janvier 2025



## 1 Découvrons la linéarité

### 1.1 Ce qui marche déjà bien

Commençons avec un exemple simple, la géométrie euclidienne dans le plan, et essayons de le formaliser de manière un peu abstraite. On va se donner une origine  $O$  et on va repérer chaque point par un vecteur : à un point  $M$  on associera le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ . Que peut-on faire dans le plan ? Voici quelques réponses :

- On a le droit d'ajouter deux vecteurs  $\overrightarrow{u}$  et  $\overrightarrow{v}$ , on obtient un troisième vecteur qui est toujours dans le plan, et on a  $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ , ce qui revient à les mettre bout à bout ;
- Il existe un vecteur qui traduit le non déplacement  $\overrightarrow{0}$  appelé *vecteur nul* ;
- À chaque vecteur  $\overrightarrow{u}$ , on peut associer un autre vecteur  $\overrightarrow{-u}$  tel que  $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{-u} = \overrightarrow{0}$  : on parle d'opposé, et cela revient à aller dans la direction opposée au vecteur de départ ;
- On a le droit de multiplier un vecteur par un nombre (on parle de multiplication par un scalaire), ce qui revient à l'agrandir ;
- On a  $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$  (distributivité scalaire) et  $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$  (distributivité vectorielle).

On peut décomposer les vecteurs sur des vecteurs dits de base, et on peut leur appliquer différentes opérations, comme une projection orthogonale ou bien une rotation selon un axe. Ce formalisme fonctionne très bien pour la géométrie dans le plan, et on peut l'étendre à plein d'autres concepts mathématiques. L'idée de ce cours est donc d'étudier un peu le concept d'espace vectoriel décrit ci-dessus, et de voir quelques-unes de ses plus belles applications.

### 1.2 Explorons l'inexploré !

Pour formaliser vraiment notre concept, il nous faut un petit outil abstrait, qui formalise la notion de nombre : la notion de *corps*.

Un corps est un ensemble qui nous permet de faire des additions, soustractions, des multiplications et des divisions (sauf par 0, où 0 est défini comme  $x + 0 = 0 + x = x$  pour  $x$  un élément du corps).

### Définition 1.1: Notion de Corps

Un ensemble  $\mathbb{K}$  muni de deux lois de produit interne  $+, \times$  (c'est à dire qui prennent deux éléments du corps et renvoient un élément du corps), est un corps si, et seulement si :

- L'addition est commutative :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda + \mu = \mu + \lambda$
- Il existe un nombre  $0_{\mathbb{K}}$  (appelé neutre additif, ou simplement zéro) tel que  $\forall \lambda, \lambda + 0_{\mathbb{K}} = \lambda$ , et  $\forall \lambda, \exists -\lambda, \lambda + (-\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$ . On dit que  $(\mathbb{K}, +)$  est un groupe et qu'il est de plus abélien.
- Il existe un nombre  $1_{\mathbb{K}}$  (appelé neutre multiplicatif, ou simplement zéro) tel que  $\forall \lambda, \lambda \times 1_{\mathbb{K}} = \lambda = 1_{\mathbb{K}} \times \lambda$  et de plus,  $\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, \exists \lambda^{-1}, \lambda^{-1} \times \lambda = \lambda \times \lambda^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$ . On dit que  $(\mathbb{K}, \times)$  est un groupe.
- On a toujours :  $\lambda \times (a + b) = \lambda \times a + \lambda \times b$  et  $(a + b) \times \lambda = a \times \lambda + b \times \lambda$ .

On appelle morphisme de groupe une fonction entre deux groupes qui transporte la loi et envoie le neutre sur le neutre. Un morphisme de corps préserve les deux lois, et envoie le neutre.

### Remarque 1.1: Corps Commutatif

Dans la tradition mathématique française, on ne demande pas qu'un corps  $(\mathbb{K}, +, \times)$  soit commutatif, c'est-à-dire qu'on n'a pas nécessairement une multiplication commutative. Un exemple de corps non commutatif est celui noté  $\mathbb{H}$  des quaternions. On ne détaillera pas sa construction ici.

### Théorème 1.1: $\mathbb{R}$ existe

Il existe un corps des réels noté  $\mathbb{R}$  muni d'une addition  $+$  et d'une multiplication  $\times$ .

*Démonstration.* Si vous ne connaissez pas les opérations qui définissent  $\mathbb{R}$  il est temps de s'inquiéter. Cependant, si vous cherchez à vérifier que  $\mathbb{R}$  existe, il vaut mieux chercher des informations sur la construction de l'ensemble  $\mathbb{R}$  comme complété de l'ensemble des suites sur  $\mathbb{Q}$ . ■

Nous pouvons donc enfin formaliser la notion de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dont nous avons parlé en introduction.

### Définition 1.2: $\mathbb{R}$ -Espace Vectoriel

Soit  $E$  un ensemble. Il existe une addition  $+$  et un produit extérieur  $\cdot$  tels que

- On peut faire des additions sur  $E$ , avec existence d'un élément neutre  $0_E$  et d'un opposé (que l'on note  $-u$ ) : on a  $u + v = v + u$ ,  $u + (v + w) = (u + v) + w$ ,  $u + 0 = u$  et  $u + (-u) = 0$  pour  $u, v$  et  $w$  trois éléments de  $E$ .
- On peut multiplier des vecteurs par des scalaires avec le produit extérieur :  $\lambda \cdot x$  est encore un élément de  $E$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- La multiplication se comporte bien avec l'addition : on peut distribuer des scalaires et des vecteurs, multiplier par 1 un vecteur ne le change pas : on a  $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$  (distributivité scalaire) et  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$  (distributivité vectorielle),  $1 \cdot u = u$ ,  $(\lambda \times \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$  pour  $u, v$  éléments de  $E$  et  $\lambda$  et  $\mu$  des réels.

Alors  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Il est bien évidemment possible de remplacer  $\mathbb{R}$  par un corps quelconque  $\mathbb{K}$  pour obtenir une notion de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Vous verrez par exemple en mathématiques expertes l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, qu'on peut également munir d'une structure de corps, ce qui permet de définir des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels. Quand le corps est évident (dans la suite on ne travaillera que sur des  $\mathbb{R}$ -espaces, par exemple), ou alors qu'il n'est pas vraiment utilisé, on parle juste d'espace vectoriel.

### Définition 1.3: Vecteurs et scalaires

Les éléments de  $E$  sont appelés vecteurs et ceux de  $\mathbb{R}$  des scalaires.

Finalement, si on veut résumer la notion de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on en arrive simplement à : Soit  $E$  un ensemble. Il existe une addition  $+$  et un produit extérieur  $\cdot$  tels que

- On peut faire des additions sur  $E$ , avec existence d'un élément neutre  $0_E$  tel que  $x + 0_E = 0_E + x = x$  pour  $x$  dans  $E$ , et d'un opposé.
- On peut multiplier des vecteurs par des scalaires avec le produit extérieur :  $\lambda \cdot x$  est encore un élément de  $E$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- La multiplication se comporte bien avec l'addition : on peut distribuer des scalaires et des vecteurs, multiplier par 1 un vecteur ne le change pas.

Alors  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

## 1.3 Revenons sur $\mathbb{R}^2$

Essayons de montrer que  $\mathbb{R}^2$  ("l'espace vectoriel de la géométrie euclidienne dans le plan") est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On note les éléments de  $\mathbb{R}^2$  sous la forme suivante :  $(x, y)$  où  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

Si on prend pour l'opération d'addition sur  $\mathbb{R}^2$  la fonction  $+$  :  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (\mathbb{R}^2)^2 \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ , et pour le produit extérieur  $\cdot$  :  $\lambda, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ , on munit bien  $\mathbb{R}^2$  d'une structure d'espace vectoriel. On vérifie aisément les propriétés demandées, mais surtout, on vérifie que c'est bien la même que celle décrite en introduction, en prenant  $O = (0, 0)$ .

### Remarque 1.2: Affinité de $\mathbb{R}^2$

Le type d'espace obtenu en reprenant la construction de l'introduction mais sans spécifier de point particulier "origine" est appelé *espace affine*. La construction définie ci-dessus est alors le vectorialisé en  $(0, 0)$  d'un espace affine sur l'ensemble  $\mathbb{R}^2$ . Cette notion est toutefois bien plus compliquée à formaliser et demande plus de pratique de la notion de groupe.

## 1.4 Autres exemples d'espaces vectoriels

### 1.4.1 $\mathbb{R}^n$

On peut définir de même ce qu'on appelle "espace 3D" en géométrie euclidienne :  $\mathbb{R}^3$  dont les vecteurs s'écrivent sous la forme  $(x, y, z)$ , et aller plus loin avec par exemple l'espace-temps  $\mathbb{R}^4$  de vecteurs  $(x, y, z, t)$  etc. On garde les mêmes lois que pour  $\mathbb{R}^2$  : on a  $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$  et  $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ .

### Définition 1.4: Espace Euclidiens Réels de Dimension Finie

Plus généralement, si  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}^n$  de la même manière que précédemment :

- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ .
- $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$ .

### 1.4.2 Les fonctions réelles

### Définition 1.5: Fonction réelle à valeurs réelles

On appelle fonction réelle à valeurs réelles toute fonction qui a un réel associe un autre réel.

### Théorème 1.2: Espace vectoriel des fonctions réelles à valeurs réelles

On définit  $f + g$  pour  $f$  et  $g$  des fonctions à valeurs réelles par la relation  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  et  $\lambda f$  par  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ , autrement dit l'addition et la multiplication point à point. On obtient que l'ensemble des fonctions réelles muni des deux opérations est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

## 1.5 Sous-espace vectoriel

On va s'intéresser aux parties de  $E$  qui profitent des propriétés géométriques des espaces vectoriels. Intuitivement, ce sont les parties de  $E$  qu'on peut considérer comme des espaces vectoriels.

**Exemple 1.5.1.** Par exemple, une droite passant par l'origine est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

### Définition 1.6: Sous-Espace Vectoriel

$F \subseteq E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $0_E$  appartient à  $F$  et que  $F$  est stable par toute combinaison linéaire : pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $x, y \in F$ ,  $\lambda x + \mu y \in F$ .

### Proposition 1.1: (Sous-)Espace Vectoriel

Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $(E, +, \cdot)$ , est un espace vectoriel pour  $+|_F, \cdot|_F$ .

Un sous-espace vectoriel, c'est donc un espace vectoriel dans un espace vectoriel.

## 2 Liberté, bases et dimension

### 2.1 Espace Engendré

#### Définition 2.1: Famille

Une famille d'éléments indicée par un ensemble  $I$  est un ensemble ordonné d'éléments  $(x_i)_{i \in I}$ . On dira que la famille est finie si et seulement si  $I$  est fini.

Ceci nous permet de définir la portée/l'espace engendré d'une famille de vecteurs. C'est l'espace dans lequel on voudra faire de la géométrie, en sachant qu'on pourra profiter de la famille.

#### Définition 2.2: Espace Vectoriel Engendré

L'espace vectoriel engendré  $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(x_i)$  par une famille  $(x_i)_{i \in I}$  est le plus petit espace vectoriel qui contient tous les  $x_i$ .

#### Proposition 2.1: Caractérisation des Espaces Engendrés

Soit  $\mathcal{V}(x_i)_{i \in I}$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$  qui contiennent la famille  $(x_i)_{i \in I}$ . Alors, on a :

$$\text{Vect}_{\mathbb{K}}(x_i) = \bigcap_{F \in \mathcal{V}(x_i)} F = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \mid (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \right\}$$

Autrement dit,  $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(x_i)$

*Démonstration.* La première égalité se déduit du fait que si  $F_1, F_2$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors,  $F_1 \cap F_2$  est un espace vectoriel. La seconde se déduit du fait que l'ensemble de droite est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient les  $(x_i)$  ■

## 2.2 Base et Dimension

### Définition 2.3: Famille libre, génératrice, base

- Une famille est dite libre si, pour toute famille de scalaires  $(\lambda_i)$  indexée par  $I$ , la condition  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$  donne que tous les  $\lambda_i$  sont nuls ;
- Une famille est dite génératrice si, pour tout élément de  $E$ , on peut associer une écriture sous la forme  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ , c'est-à-dire si  $\text{Vect}(x_i) = E$  ;
- Une famille est une base si elle est libre et génératrice. Ceci est équivalent au fait qu'il existe, pour chaque élément de  $E$  une unique écriture sous la forme  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ .

**Exemple 2.2.1.** Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $((1, 0), (0, 1))$  forme une base de  $\mathbb{R}^2$  : en effet, tout vecteur  $(a, b)$  peut s'écrire sous la forme  $a(1, 0) + b(0, 1)$  et si  $(0, 0) = a(1, 0) + b(0, 1) = (a, b)$ , alors on a nécessairement  $a = b = 0$

En substance, à chaque vecteur de la famille, on associe un "axe" qui est l'ensemble des déplacements que l'on peut faire selon cet "axe" (en allant dans la direction du vecteur).

- La liberté s'illustre comme le fait que chacun de nos axes est utile : un déplacement selon cet axe ne pourrait être substitué en se déplaçant selon d'autres axes ;
- Le caractère générateur s'illustre comme le fait qu'on puisse atteindre un point en se déplaçant selon nos axes ;
- Si notre famille est une base, alors on a, pour tout point, une seule combinaison de vecteurs permettant d'atteindre ce point.

### Définition 2.4: Dimension

En se donnant une base d'un espace vectoriel, on appelle dimension la taille de la base : ceci correspond au nombre d'indices. La dimension ne dépend pas de la base choisie.

*Démonstration.* On vérifie d'abord que si  $w_1, \dots, w_n$  engendrent  $V$ , et que si  $v_1, \dots, v_m$  est une famille libre de  $V$ , alors  $v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n$  engendrent  $V$ . En effet, puisque  $v_1 \in V$ , on peut écrire :

$$v_1 = \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k \text{ et donc } w_1 = \lambda_1^{-1} v_1 - \sum_{k=2}^n \lambda_1^{-1} \lambda_k w_k$$

Donc  $v_1, w_2, \dots, w_n$  engendrent encore  $V$ . On recommence l'opération pour chaque  $v_i$  :

$$v_i = \sum_{k=1}^{i-1} \mu_k v_k + \sum_{k=i}^n \mu_k w_k$$

et donc :

$$w_i = \mu_i^{-1} v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \mu_i^{-1} \mu_k v_k - \sum_{k=i+1}^n \mu_i^{-1} \mu_k w_k$$

Soit  $L$  une famille libre et  $G$  une famille génératrice de  $E$ , on va montrer que  $|L| \leq |G|$ . On va supposer d'abord que  $G$  est finie de taille  $n$ . Le résultat précédent nous affirme que pour toute partie finie de  $L$  de cardinal  $m$ , on a  $m \leq n$ . Par conséquent,  $L$  est finie et de cardinal inférieur ou égal à  $n$ . Le fait que si  $x_k \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$  ou  $x_1, \dots, x_{k-1}$  est une famille libre, alors  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$  a pour base  $x_1, \dots, x_k$  permet de terminer la preuve. ■

Le premier résultat démontré dans la preuve est appelé Lemme de Steinitz, et le dernier résultat est appelé théorème de la base incomplète.

Le résultat dans le cas infini demande l'utilisation de l'axiome du choix (ou du lemme des ultrafiltres), et dépasse donc très fortement le cadre de ce cours.

### 3 Applications linéaires et matrices

#### 3.1 Applications Linéaires

Maintenant que nous avons introduit les notions de vecteurs et de bases, essayons de voir comment modéliser des transformations qui ont un sens géométrique : une dilatation, projection orthogonale ou bien rotation selon un axe. Le formalisme pertinent est celui d'application linéaire, des sortes de morphismes d'espaces vectoriels.

##### Définition 3.1: Application linéaire

On considère deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$ . On appelle application linéaire une fonction  $u$  qui à un élément de  $E$  associe un élément de  $F$ , et qui vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ ,  $u(x + y) = u(x) + u(y)$
- Pour tout vecteur  $x$  de  $E$  et tout scalaire  $\lambda$ ,  $u(\lambda x) = \lambda u(x)$

On note  $L(E : F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

Une application linéaire est un morphisme de groupe notés additivement qui préserve le produit externe, d'où la dénomination de morphisme d'espace vectoriel.

##### Proposition 3.1: Opérations avec des applications linéaires

On a

$$u(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 u(x_1) + \dots + \lambda_n u(x_n)$$

où  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  sont des scalaires et  $x_1 \dots x_n$  des vecteurs.

*Démonstration.* On a :

$$u\left(\lambda_1 x_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i x_i\right) = u(\lambda_1 x_1) + u\left(\sum_{i=2}^n \lambda_i x_i\right) = \lambda_1 u(x_1) + u\left(\sum_{i=2}^n \lambda_i x_i\right)$$

et donc par récurrence on a le résultat. ■

**Exemple 3.1.1.** Donnons nous un exemple pour visualiser ceci : on considère  $\mathbb{R}^3$  comme espace vectoriel de départ et d'arrivée, c'est-à-dire  $E = F = \mathbb{R}^3$ . Comment peut-on décrire la rotation d'un d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $z$  ? On utilise notre théorème précédent : on sait que  $f(x) = -x$ ,  $f(y) = -y$  ainsi que  $f(z) = z$ . Ensuite, on utilise notre théorème précédent : pour tout vecteur  $u$ , on a l'existence de scalaires tels que  $u = \alpha x + \beta y + \gamma z$ , et donc  $f(u) = \alpha f(x) + \beta f(y) + \gamma f(z)$  ce qui donne donc  $f(u) = -\alpha x - \beta y + \gamma z$

##### Définition 3.2: \*morphisme

Une application linéaire  $u$  est appelée épimorphisme si elle est surjective, monomorphisme si elle est injective et isomorphisme si elle est bijective. Elle est de plus appelée automorphisme si de plus elle va de  $E$  dans  $E$ . On dit que deux espaces sont isomorphes si et seulement si il y a un isomorphisme entre les deux.

#### 3.2 Matrices

Commençons déjà par un théorème fondamental.

##### Théorème 3.1: Identification d'applications linéaires

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $F$ . Il existe une unique application linéaire  $u$  telle que, pour tout indice  $i$ ,  $u(e_i) = f_i$ .