Unicidade dos Sólitons de Ricci gradiente estáveis

Vítor Emanoel Resplandes de Souza

Maio 2022

Resumo: O fluxo de Ricci foi introduzido em 1982 por Hamilton.Esse fluxo teve papel muito importante na demonstração da conjectura de Poincaré e, por este motivo, problemas envolvendo fluxo de Ricci tem sido amplamente estudados nos últimos anos. Estruturas soluções do fluxo de Ricci são conhecidas como Ricci sólitons, portanto, entender suas propriedades geométricas é de suma importância.

Neste trabalho iremos apresentar os sólitons de Ricci, objetos que surgem como soluções auto-similares do fluxo de Ricci; mostraremos algumas propriedades e reultados relacionados a esses sólitons e, além disso, provaremos que um sóliton de Ricci gradiente estável tridimensional que é assintótico ao sóliton de Bryant, deve ser isométrico ao sóliton de Bryant. Esse teorema foi provado por Brendle em [1], o mesmo teorema foi enunciado de maneira mais geral por Cao et al em "Bach-flat gradient steady Ricci solitons".

Teorema: Seja (M, g, f) $n \geq 3$ um Sóliton de Ricci gradiente estável. Suponha que a curvatura escalar R é positiva e se aproxima de 0 no infinito.

Denote por $\psi(0,1) \to R$ uma função diferenciável tal que o campo vetorial $X = \nabla R + \psi(R)\nabla f = 0$ no sóliton de Bryant e defina $u : (0,1) \to R$ dada por

$$u(s) = log(\psi(s)) + \frac{1}{n-1}\int_{1/2}^{s}\left(\frac{n}{1-t} - \frac{n-1-(n-3)t}{(1-t)\psi(t)}\right)dt$$

Além disso, assuma que exista uma exaustão de M^n por domínios limitados Ω_l tal que

$$\lim_{l\to\infty}\int_{\partial\Omega_l} e^{u(R)}\langle\nabla R + \psi(R), v\rangle = 0$$

Então, $X = 0$ e $D_{ijk} = 0$.

Em particular, para $n = 3$, (M^3, g, f) é isométrico ao Sóliton de Bryant. Nesse artigo Cao apenas enuncia o resultado sem uma demonstração, dessa forma, o objetivo final de nossa pesquisa é demonstrar o teorema enunciado por Cao generalizando o resultado de Brendle para dimensões maiores que 3.

References

[1] Brendle, Simon - Uniqueness of gradient Ricci solitons.Math. Res. Lett. 18 (2011), no. 3, 531–538, MR2802586.

[2] H. dong Cao, G. Catino, Q. Chen, C. Mantegazza, and L. Mazzieri. Bach-flat gradient steady ricci solitons. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 49 (2014):125–138,DOI 10.1007/s00526-012-0575-3