

Introdução à Lógica Proposicional

Marcelo Bezerra

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

18 de agosto de 2025

Roteiro da Aula

- ▶ O que é Lógica?
- ▶ Proposições e o seu valor-verdade
- ▶ Conectivos Lógicos Fundamentais
 - ▶ Negação (\neg)
 - ▶ Conjunção (\wedge)
 - ▶ Disjunção (\vee)
 - ▶ Condicional (\rightarrow)
 - ▶ Bicondicional (\leftrightarrow)
- ▶ Tautologias, Contradições e Contingências
- ▶ Equivalência Lógica
- ▶ Exercícios

O que é Lógica?

- ▶ A Lógica é o estudo do raciocínio e da argumentação.
- ▶ Nos permite distinguir argumentos válidos de argumentos inválidos.
- ▶ A **Lógica Proposicional** é a parte da lógica que lida com a verdade ou falsidade de sentenças inteiras, chamadas de **proposições**.

O que é uma Proposição?

- ▶ Uma proposição é uma frase declarativa que pode ser classificada, sem ambiguidade, como **verdadeira (V)** ou **falsa (F)**.
- ▶ Chamamos V e F de **valores-verdade**.

O que é uma Proposição?

- ▶ Uma proposição é uma frase declarativa que pode ser classificada, sem ambiguidade, como **verdadeira (V)** ou **falsa (F)**.
- ▶ Chamamos V e F de **valores-verdade**.

Exemplos:

- ▶ O sol é uma estrela. (Verdadeira)
- ▶ $2 + 2 = 5$. (Falsa)
- ▶ Qual é o seu nome? (Não é proposição)
- ▶ Estude para a prova. (Não é proposição)

Conectivos Lógicos

- ▶ Usamos conectivos para combinar proposições simples e formar proposições compostas.
- ▶ Vamos ver os 5 conectivos fundamentais.

Negação (\neg)

- ▶ A negação de uma proposição P é "não P ".
- ▶ Altera o valor-verdade da proposição.

Negação (\neg)

- ▶ A negação de uma proposição P é "não P ".
- ▶ Altera o valor-verdade da proposição.

Tabela-Verdade da Negação:

P	$\neg P$
V	F
F	V

Negação (\neg)

- ▶ A negação de uma proposição P é "não P ".
- ▶ Altera o valor-verdade da proposição.

Tabela-Verdade da Negação:

P	$\neg P$
V	F
F	V

Exemplo:

- ▶ P : "João é alto." ($\neg P$): "João não é alto."

Conjunção (\wedge)

- ▶ Conjunção de P e Q é "P e Q".
- ▶ Só é verdadeira se **ambas** as proposições P e Q forem verdadeiras.

Conjunção (\wedge)

- ▶ Conjunção de P e Q é "P e Q".
- ▶ Só é verdadeira se **ambas** as proposições P e Q forem verdadeiras.

Tabela-Verdade da Conjunção:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção (\vee)

- ▶ Disjunção de P e Q é "P ou Q".
- ▶ É verdadeira se **pelo menos uma** das proposições P ou Q for verdadeira.

Disjunção (\vee)

- ▶ Disjunção de P e Q é "P ou Q".
- ▶ É verdadeira se **pelo menos uma** das proposições P ou Q for verdadeira.

Tabela-Verdade da Disjunção:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional (\rightarrow)

- ▶ Condicional de P e Q é "Se P, então Q".
- ▶ P é a **hipótese** (ou antecedente) e Q é a **tese** (ou consequente).
- ▶ É falsa **apenas** quando a hipótese (P) é verdadeira e a tese (Q) é falsa.

Condicional (\rightarrow)

- ▶ Condicional de P e Q é "Se P, então Q".
- ▶ P é a **hipótese** (ou antecedente) e Q é a **tese** (ou consequente).
- ▶ É falsa **apenas** quando a hipótese (P) é verdadeira e a tese (Q) é falsa.

Tabela-Verdade do Condicional:

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional (\leftrightarrow)

- ▶ Bicondicional de P e Q é "P se, e somente se, Q".
- ▶ É verdadeira se P e Q tiverem o **mesmo** valor-verdade.

Bicondicional (\leftrightarrow)

- ▶ Bicondicional de P e Q é "P se, e somente se, Q".
- ▶ É verdadeira se P e Q tiverem o **mesmo** valor-verdade.

Tabela-Verdade do Bicondicional:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Construção de Tabelas-Verdade Complexas

- ▶ A tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples terá 2^n linhas.
- ▶ Exemplo: P, Q e R $\rightarrow 2^3 = 8$ linhas.
- ▶ A ordem das operações é importante: primeiro parênteses, depois negação, depois conjunção e disjunção, e por fim condicional e bicondicional.

Exemplo: Tabela-Verdade de $(P \vee \neg Q) \rightarrow R$

P	Q	R	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	$(P \vee \neg Q) \rightarrow R$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F

Tautologias, Contradições e Contingências

- ▶ **Tautologia:** uma proposição que é **sempre verdadeira**, independentemente dos valores-verdade de suas proposições componentes.
- ▶ **Contradição:** uma proposição que é **sempre falsa**, independentemente dos valores-verdade de suas proposições componentes.
- ▶ **Contingência:** uma proposição que não é nem tautologia nem contradição. Seu valor-verdade depende dos valores-verdade de suas proposições componentes.

Exemplo de Tautologia: $P \vee \neg P$

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	V
F	V	V

- O resultado é sempre verdadeiro. É uma tautologia.

Exemplo de Contradição: $P \wedge \neg P$

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

- O resultado é sempre falso. É uma contradição.

Equivalência Lógica

- ▶ Duas proposições são **logicamente equivalentes** se possuem a mesma tabela-verdade.
- ▶ Usamos o símbolo \equiv para denotar equivalência.

Equivalência Lógica

- ▶ Duas proposições são **logicamente equivalentes** se possuem a mesma tabela-verdade.
- ▶ Usamos o símbolo \equiv para denotar equivalência.

Exemplo: A lei de De Morgan: $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

- ▶ As colunas de $\neg(P \wedge Q)$ e $\neg P \vee \neg Q$ são idênticas.

Exercício 1

- ▶ Construa a tabela-verdade para a seguinte proposição:
 $\neg(P \leftrightarrow Q)$.

Exercício 2

- ▶ Classifique a proposição $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ como tautologia, contradição ou contingência.

Exercício 3

- ▶ Verifique se as proposições $(P \rightarrow Q)$ e $(\neg Q \rightarrow \neg P)$ são logicamente equivalentes.

Exercício 4

- ▶ Considere a proposição "Se está chovendo (P), então a rua está molhada (Q)."
- ▶ Expresse em linguagem natural a negação dessa proposição, $\neg(P \rightarrow Q)$.
- ▶ Em seguida, construa a tabela-verdade para $\neg(P \rightarrow Q)$ e verifique que ela é equivalente a $P \wedge \neg Q$.

Exercício 5

- ▶ Construa a tabela-verdade para a proposição:
 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$.
- ▶ Em seguida, determine o valor-verdade da proposição sabendo que P é falso, Q é verdadeiro e R é verdadeiro.

Exercício 6

- ▶ Classifique a proposição $[(P \wedge Q) \rightarrow P]$ como **tautologia**, **contradição** ou **contingência**.
- ▶ O que essa classificação nos diz sobre a relação entre as proposições P e Q ?

Exercício 7

- Utilize uma tabela-verdade para provar a seguinte lei de De Morgan: $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$.

Exercício 8

- ▶ Uma proposição composta é dita ser uma ****Implicação Material****. Sabendo que ela só é falsa se sua hipótese for verdadeira e sua tese for falsa, construa a tabela-verdade para a proposição: $[(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)] \rightarrow (Q \vee R)$.
- ▶ Que tipo de proposição é essa (tautologia, contradição ou contingência)?

Exercício 9

- ▶ Suponha que a proposição $A \leftrightarrow B$ é falsa. Quais são os possíveis valores-verdade de A e B ?
- ▶ Agora, se a proposição $(A \vee C) \rightarrow D$ é falsa, quais são os valores-verdade de A , C e D ?

Exercício 10

- ▶ Verifique se a proposição $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ é logicamente equivalente a $(P \wedge Q) \rightarrow R$.
- ▶ Qual nome essa lei recebe na lógica proposicional?

Obrigado!