Uma Lista de Exercícios

Marcelo Bezerra

1 de setembro de 2025

Nos exercícios a seguir, F denota um corpo.

1. Mostre que todo domínio euclidiano é um domínio de ideais principais.

2. Mostre que o anel de polinômios em uma indeterminada e coeficientes em F é um domínio euclidiano quando munido da função grau.

3. (a) Defina módulo sobre um anel.
   (b) Mostre que todo grupo abeliano é um $\mathbb{Z}$-módulo.

4. Seja V e W dois F-espaços vetoriais. Seja $\mathfrak{L}_F(V, W)$ o conjunto de todas as transformações F-lineares $V \to W$. Mostre que, com as operações:

$$\mathfrak{L}_F(V, W) \times \mathfrak{L}_F(V, W) \to \mathfrak{L}_F(V, W), \quad (A, B) \mapsto A + B,$$

   e

$$F \times \mathfrak{L}_F(V, W) \to \mathfrak{L}_F(V, W), \quad (\lambda, A) \mapsto \lambda A,$$

   dadas por:

$$\forall\, v \in V: \quad (A + B)x = Ax + Bx \quad \text{e} \quad (\lambda A)x = \lambda(Ax),$$

   o conjunto $\mathfrak{L}_F(V, W)$ é um F-espaço vetorial. Mostre que, se $\dim_F(V) = m$ e $\dim_F(W) = n$, então $\dim_F(\mathfrak{L}_F(V, W)) = mn$.

5. (a) Defina o que vem a ser uma F-álgebra.
   (b) Seja V um F-espaço vetorial. Seja $\mathfrak{L}_F(V) = \mathfrak{L}_F(V, V)$. Mostre que, com a multiplicação:

$$\mathfrak{L}_F(V) \times \mathfrak{L}_F(V) \to \mathfrak{L}_F(V), \quad (A, B) \mapsto AB,$$

   dado por:

$$\forall\, x \in V: \quad (AB)x = A(Bx),$$

   $\mathfrak{L}_F(V)$ é uma F-álgebra.
   (c) Seja V um F-espaço vetorial. Mostre que, com a operação:

$$\mathfrak{L}_F(V) \times V \to V, \quad (T, v) \mapsto Tv,$$

   V é $\mathfrak{L}_F(V)$-módulo.

6. Sejam V um F-espaço vetorial. Dado um operador F-linear $T \in \mathfrak{L}_F(V)$ qualquer, arbitrariamente fixado, defina:

$$F[x] \times V \to V, \quad (f(x), v) \mapsto f(T)v,$$

onde, se $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \in F[x]$, então $f(T)$ denota o operador F-linear $a_0 id_V + a_1 T + \cdots + a_{n-1}T^{n-1} + a_n T^n \in \mathfrak{L}_F(V)$. Mostre que, com a operação acima, V é um $F[x]$-módulo. Iremos denotar tal módulo por V^T.

7. Defina $F[x]$-independência.

8. Prova o Teorema da Decomposição Primária.

9. Prove o Teorema da Base.

[]

Referências

[1] Kenneth Hoffmann and Ray Alden Kunze. *Linear algebra.* Prentice-Hall Hoboken, NJ, 1971.

[2] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups.* Number 148 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 4th ed edition, 1995.