UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
Instituto de Matemática e Estatística
Lista de Exercícios

Fundamentos de Matemática

1. Determine se as funções a seguir são injetoras e se são sobrejetoras. Justifique.

   a) $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $f(n) = n \pmod 5$
   b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) =$ menor primo p com $p \geq n$
   c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(n) =$ número de dígitos zero em n
   d) $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\alpha(m, n) = 2^m 3^n$
   e) $\beta : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \to \mathbb{Q}$, $\beta(a, b) = \frac{a}{b}$
   f) $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(a, b) = ab$
   g) $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\psi(A, B) = A \cup B$
   h) $\gamma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\gamma(A, B) = A \cap B$
   i) $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\lambda(A, B) = A - B$
   j) $\sigma : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\sigma(A) = \{|x| : x \in A\}$

2. Dado um número real x, definimos o piso de x como $\lfloor x \rfloor = n$, onde n é o maior inteiro com $n \leq x$. E definimos o teto de x como $\lceil x \rceil = m$, onde m é o menor inteiro com $x \leq m$.

   a) Verifique se a função piso $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é injetora e se é sobrejetora.
   b) Verifique se a função teto $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = \lceil x \rceil$ é injetora e se é sobrejetora.

3. Construa uma função bijetora entre A e B para cada um dos seguintes casos:

   a) $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{Z}$
   b) $A = \mathbb{N}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} : n$ é ímpar $\}$

4. Demonstre, usando o Princípio da Indução Finita.

   a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \leq n^3$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$
   b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(2n - 1)(2n + 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$
   c) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$
   d) 80 divide $3^{4n} - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$
   e) 9 divide $4^n + 6n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$
   f) 8 divide $3^{2n} + 7$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$

g) 9 divide $n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$

h) $n! > 2^n$ se $n \geq 4$

i) $n! > 3^n$ se $n \geq 7$

j) $n! > 4^n$ se $n \geq 9$

5. Utilize algum método computacional para verificar que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

é verdade para $n \in \{1, \ldots, 1000\}$. Em seguida, prove por indução que é verdade para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Seja $P(n)$ a proposição definida por

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

a) Prove que se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.

b) A proposição $P(n)$ é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}^*$? Justifique.

c) Os itens (a) e (b) não contradizem o Princípio de Indução Finita? Justifique.

7. a) Demonstre por indução a fórmula da soma de uma progressão geométrica (P.G.): Seja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma P.G. de razão r e seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a soma da P.G., então

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}.$$

b) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Aplique o item (a) para provar que

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$