Некои посебни сигнали

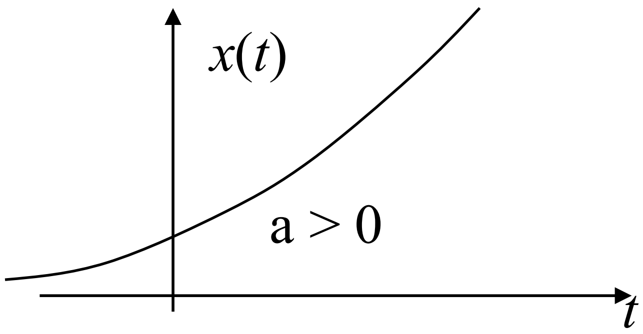
- **Експоненцијални сигнали**

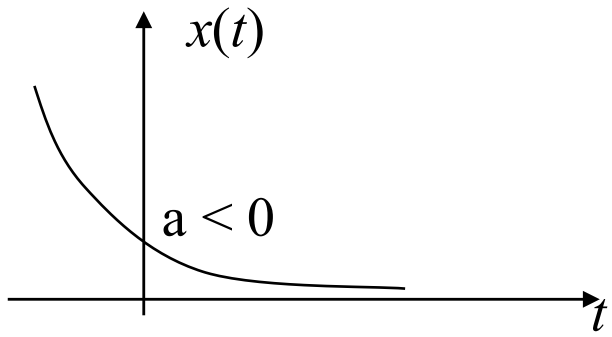
$$x(t) = Ce^{at}$$

каде C и $a = \sigma + j\omega$ во општ случај се комплексни броеви. Во зависност од вредностите на овие параметри можни се следните случаи

Реален експоненцијален сигнал

$$x(t) = Xe^{at} \qquad X \in \Re \qquad a \in \Re$$





Некои посебни сигнали

- Имагинарен експоненцијален сигнал

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

- Важна карактеристика: периодичност

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)}$$

$$e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

за периодичност мора да е

$$e^{j\omega_0 T} = 1$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

Некои посебни сигнали

- Простопериодичен сигнал (во тесна врска со имагинарен експоненцијален сигнал)

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t}$$

$$\underline{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\Re e\{e^{j(\omega_0 t+\phi)}\}}$$

$$Ae^{j(\omega_0 t+\phi)} = A\cos(\omega_0 t + \phi) + jA\sin(\omega_0 t + \phi)$$

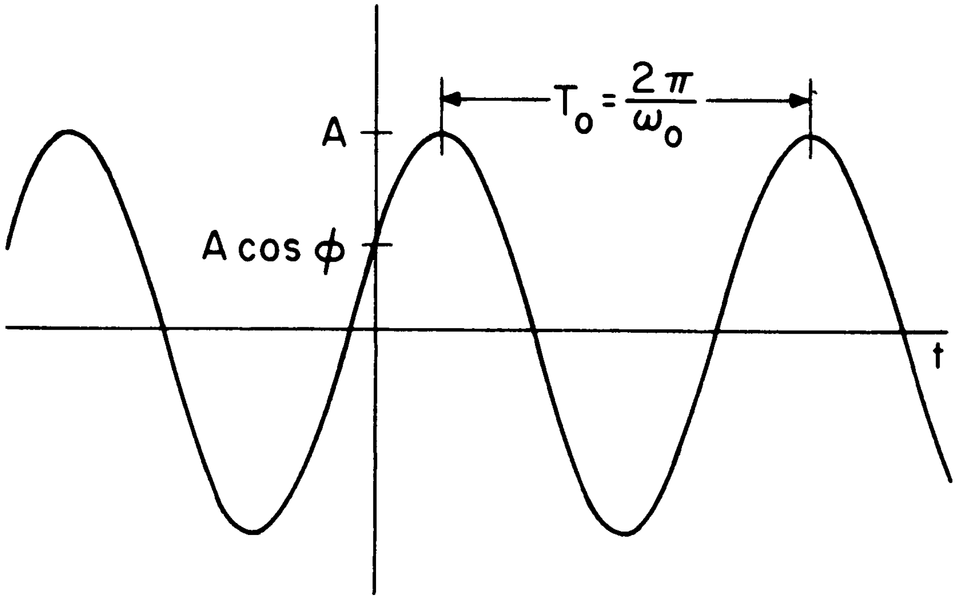
$$Ae^{-j(\omega_0 t+\phi)} = A\cos(\omega_0 t + \phi) - jA\sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2}\left(e^{j(\omega_0 t+\phi)} + e^{-j(\omega_0 t+\phi)}\right)$$

Некои посебни сигнали

- Простопериодичен сигнал (во тесна врска со имагинарен експоненцијален сигнал)

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$



Некои посебни сигнали

- Простопериодичен сигнал (во тесна врска со имагинарен експоненцијален сигнал)

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

  – Периодичен $x(t) = x(t + T_0)$

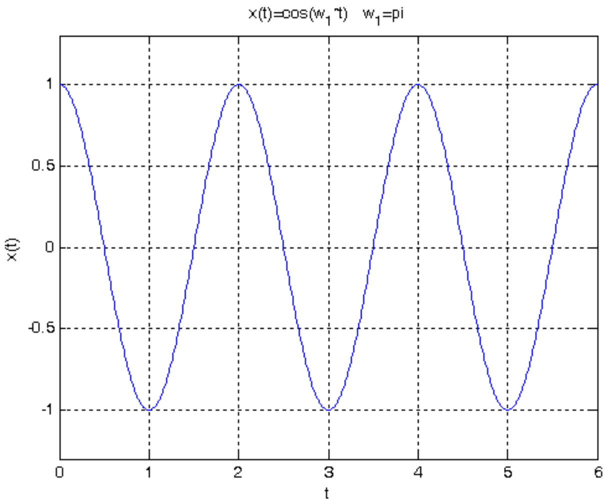
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \underbrace{\omega_0 T_0}_{2\pi m} + \phi)$$

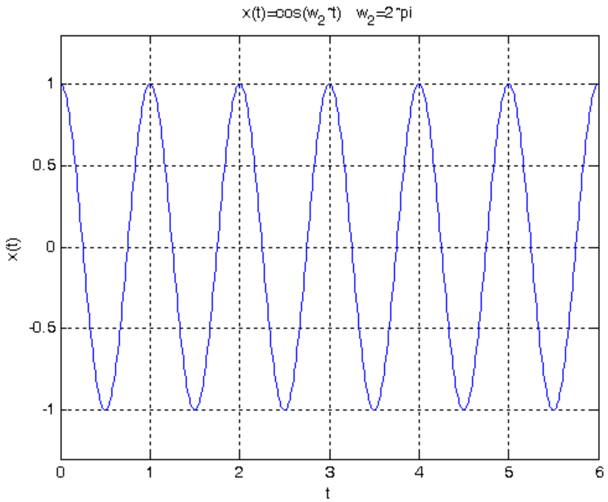
$$T_0 = \frac{2\pi m}{\omega_0} \Rightarrow \text{период} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

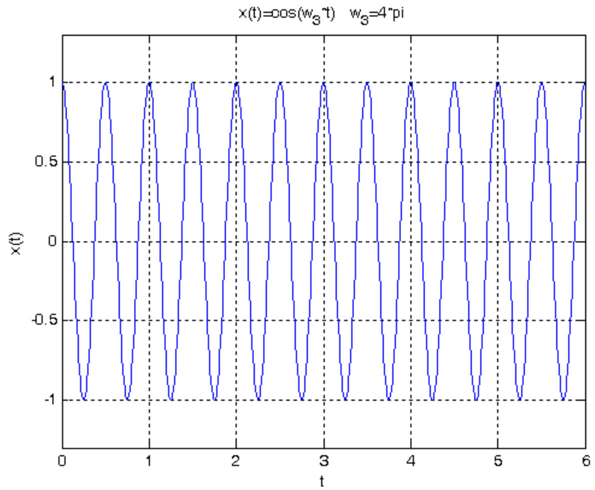
Некои посебни сигнали

- Простопериодичен сигнал (во тесна врска со имагинарен експоненцијален сигнал)

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$



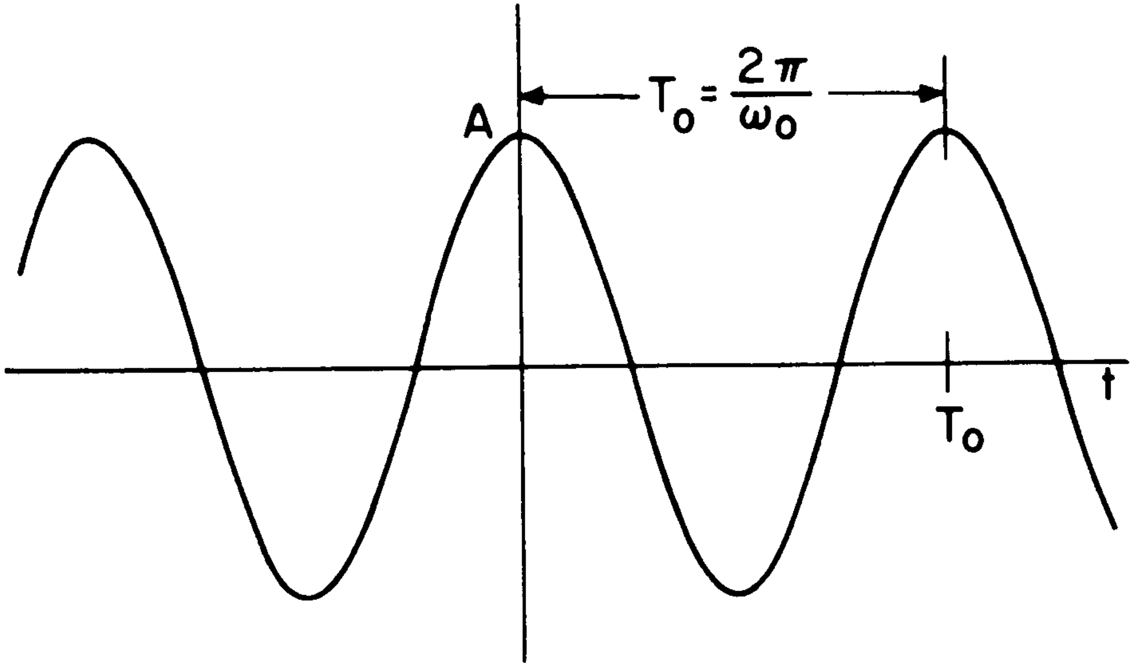




Некои посебни сигнали

- Простопериодичен сигнал

$$\phi = 0 \qquad x(t) = A\cos\omega_0 t$$



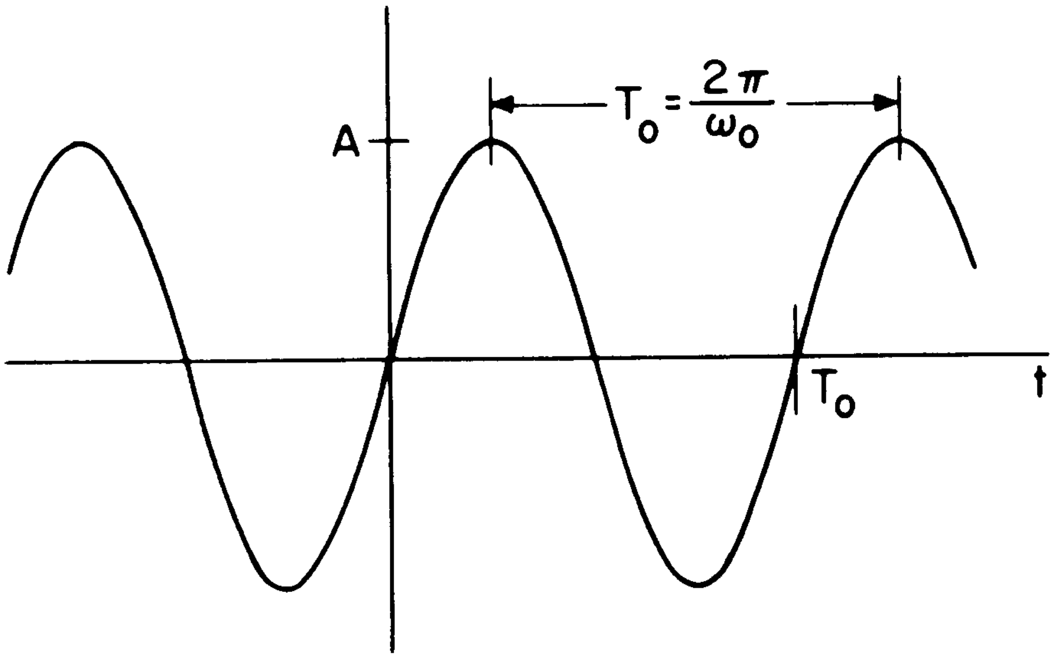
$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$x(t) = x(-t)$$

Некои посебни сигнали

- Простопериодичен сигнал

$$\phi = -\frac{\pi}{2} \qquad x(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ A\sin\omega_0 t \\ A\cos[\omega_0 (t - \frac{T_0}{4})] \end{cases}$$



$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$x(t) = -x(-t)$$

Некои посебни сигнали

- Комплексен експоненцијален сигнал

$$x(t) = Ce^{at}$$

каде C и $a = \sigma + j\omega$ се комплексни броеви

$$C = |C| e^{j\theta}$$

$$a = \sigma + j\omega_0$$

$$x(t) = |C| e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega_0)t} = |C| e^{\sigma t} e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

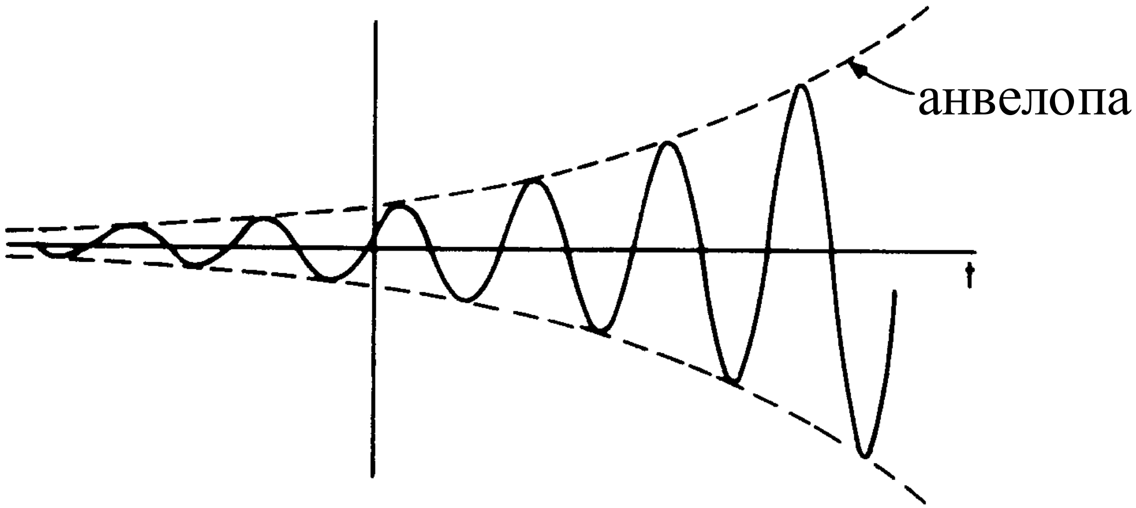
$$x(t) = |C| e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t + \theta) + j |C| e^{\sigma t} \sin(\omega_0 t + \theta)$$

Некои посебни сигнали

- Комплексен експоненцијален сигнал

$$x(t) = |C| e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$\sigma > 0$

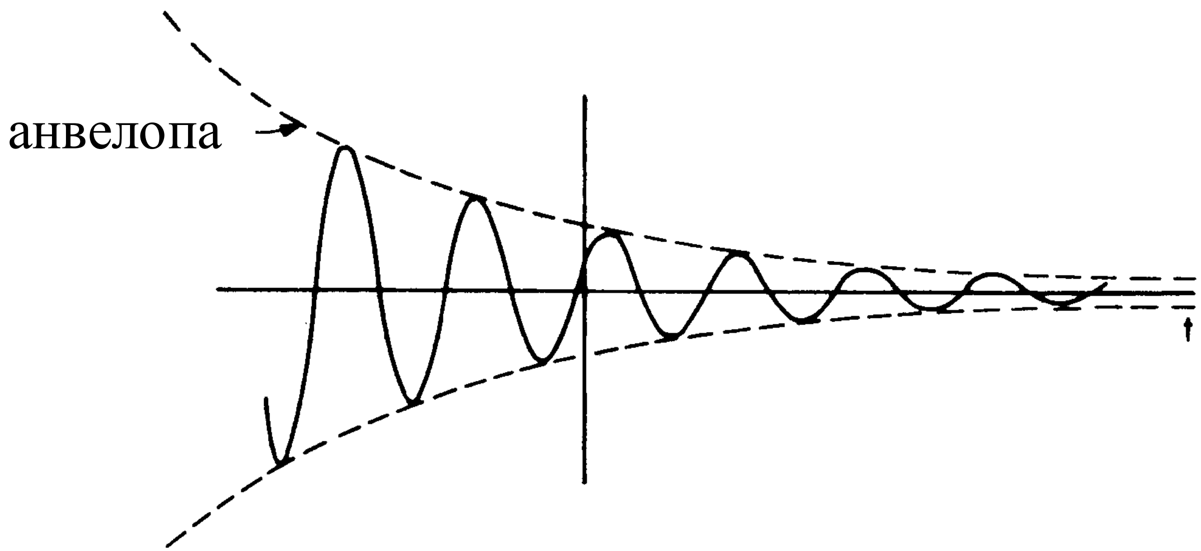


Некои посебни сигнали

- Комплексен експоненцијален сигнал

$$x(t) = |C|\, e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$\sigma < 0$



Некои посебни сигнали

- Комплексен експоненцијален дискретен сигнал

$$x[n] = C\alpha^n$$

  – C и α се комплексни броеви

Алтернативно

$$x[n] = Ce^{\beta n}$$

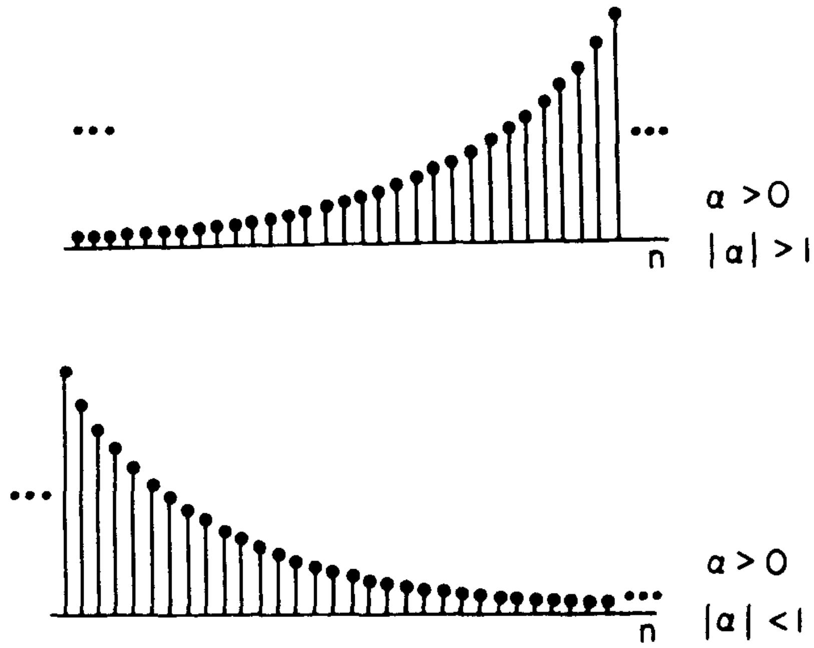
каде $\alpha = e^{\beta}$

Некои посебни сигнали

- Реален експоненцијален дискретен сигнал

$$x[n] = Ce^{\beta n} = C\alpha^{n}$$

  – C и α се реални броеви

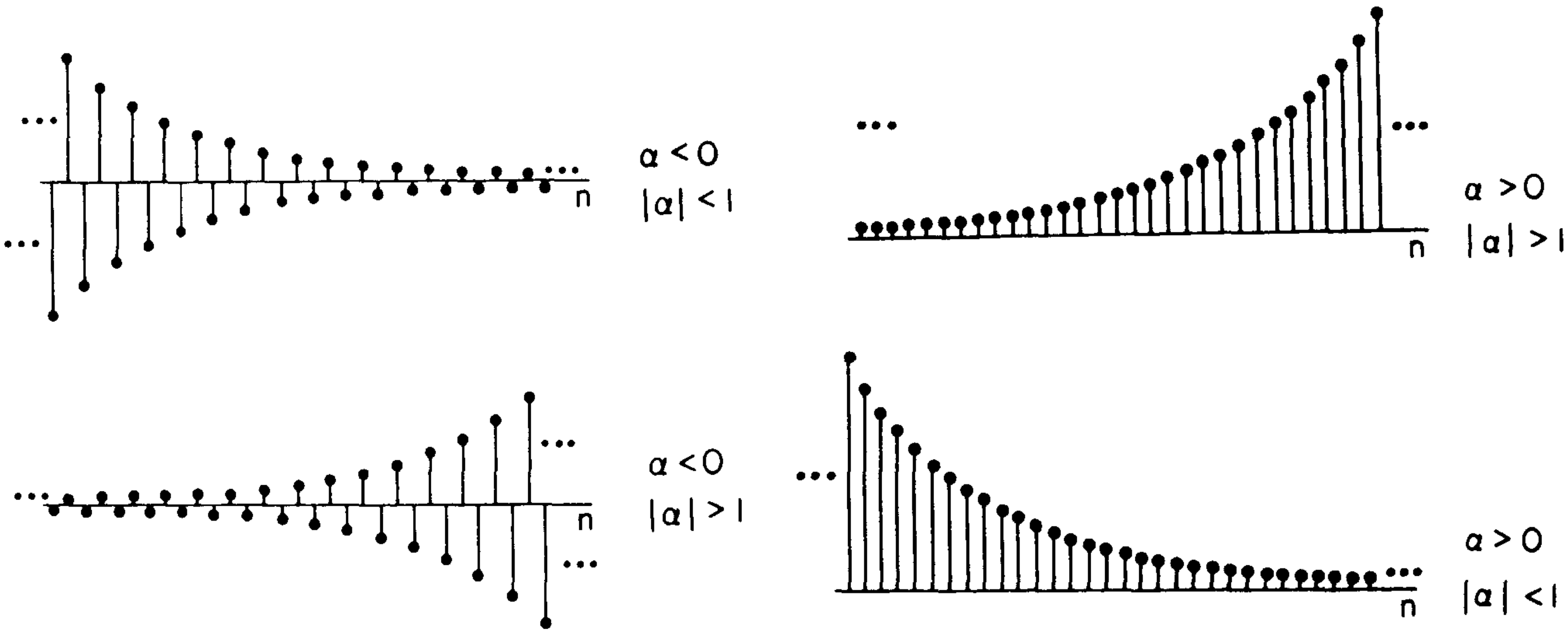


Некои посебни сигнали

- Реален експоненцијален дискретен сигнал

$$x[n] = Ce^{\beta n} = C\alpha^n$$

  – C и α се реални броеви



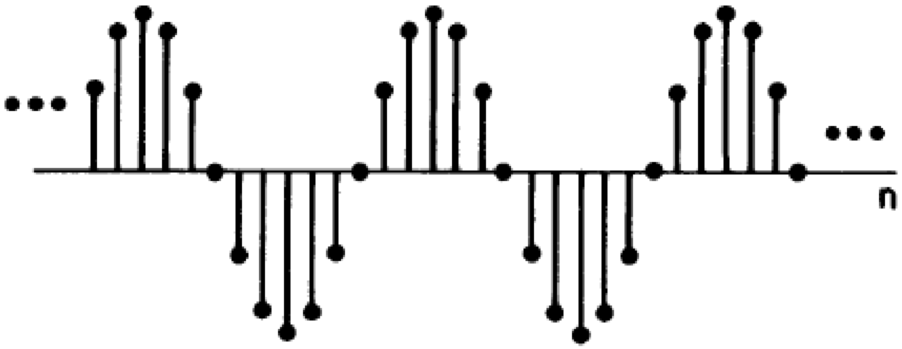
Некои посебни сигнали

- Простопериодичен дискретен сигнал $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$$

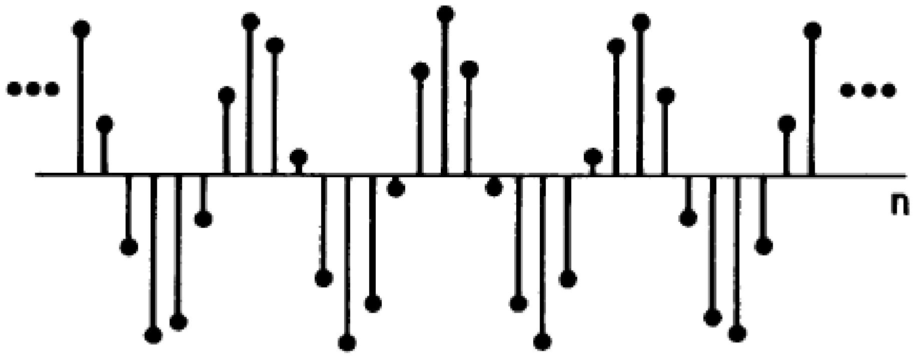
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{12}$$

$$\phi = 0$$



$$\omega_0 = \frac{8\pi}{31}$$

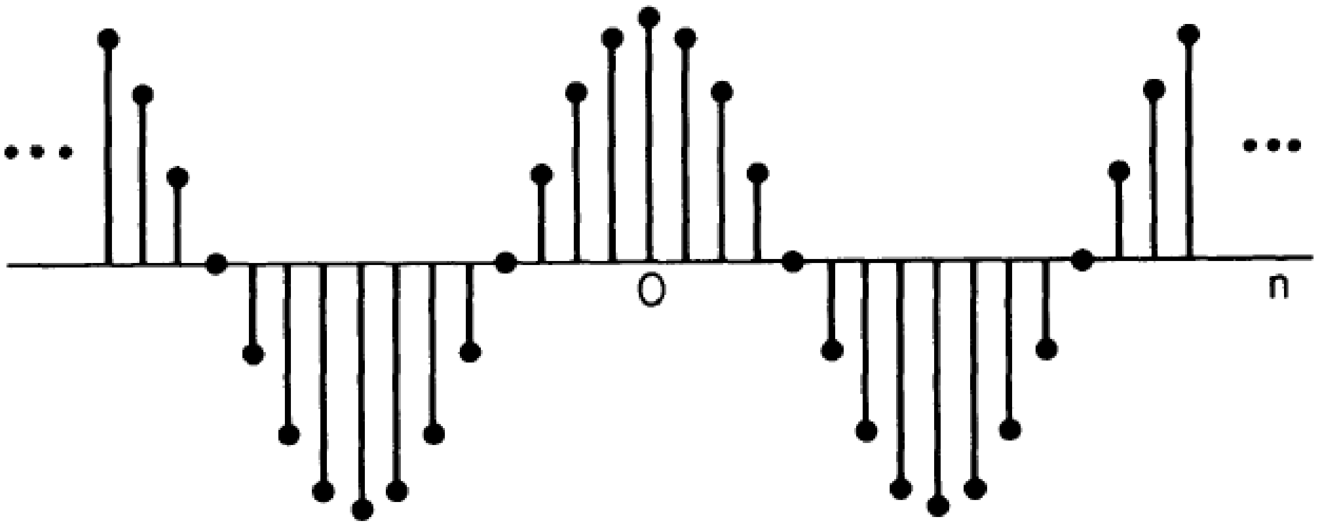
$$\phi = 0$$



Некои посебни сигнали

- Простопериодичен дискретен сигнал

$$\phi = 0 \qquad x[n] = A\cos\omega_0 n$$



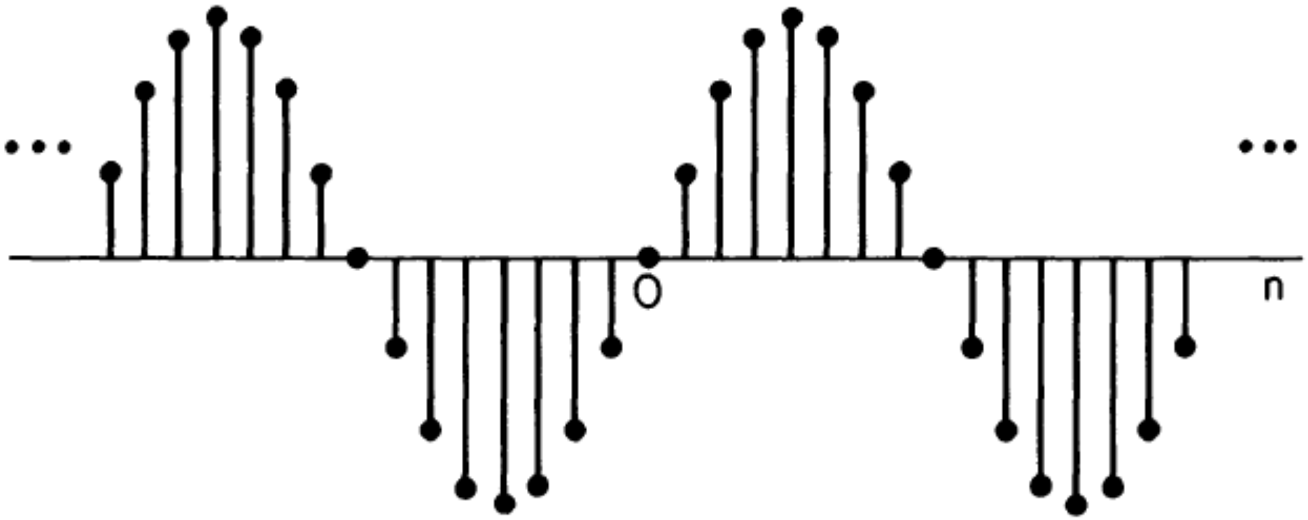
$$\omega_0 = \frac{\pi}{8}$$

$$x[n] = x[-n]$$

Некои посебни сигнали

- Простопериодичен дискретен сигнал

$$\phi = -\frac{\pi}{2} \qquad x(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_0 n - \frac{\pi}{2}) \\ A\sin\omega_0 t \\ A\cos[\omega_0(n - n_0)] \end{cases}$$



$$\omega_0 = \frac{\pi}{8}$$

$$x[n] = -x[-n]$$

Некои посебни сигнали

- Комплексен експоненцијален дискретен сигнал

$$x[n] = Ce^{\beta n} = C\alpha^n$$

  – C и α се комплексни броеви

$$C = |C|e^{j\theta}$$

$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$$

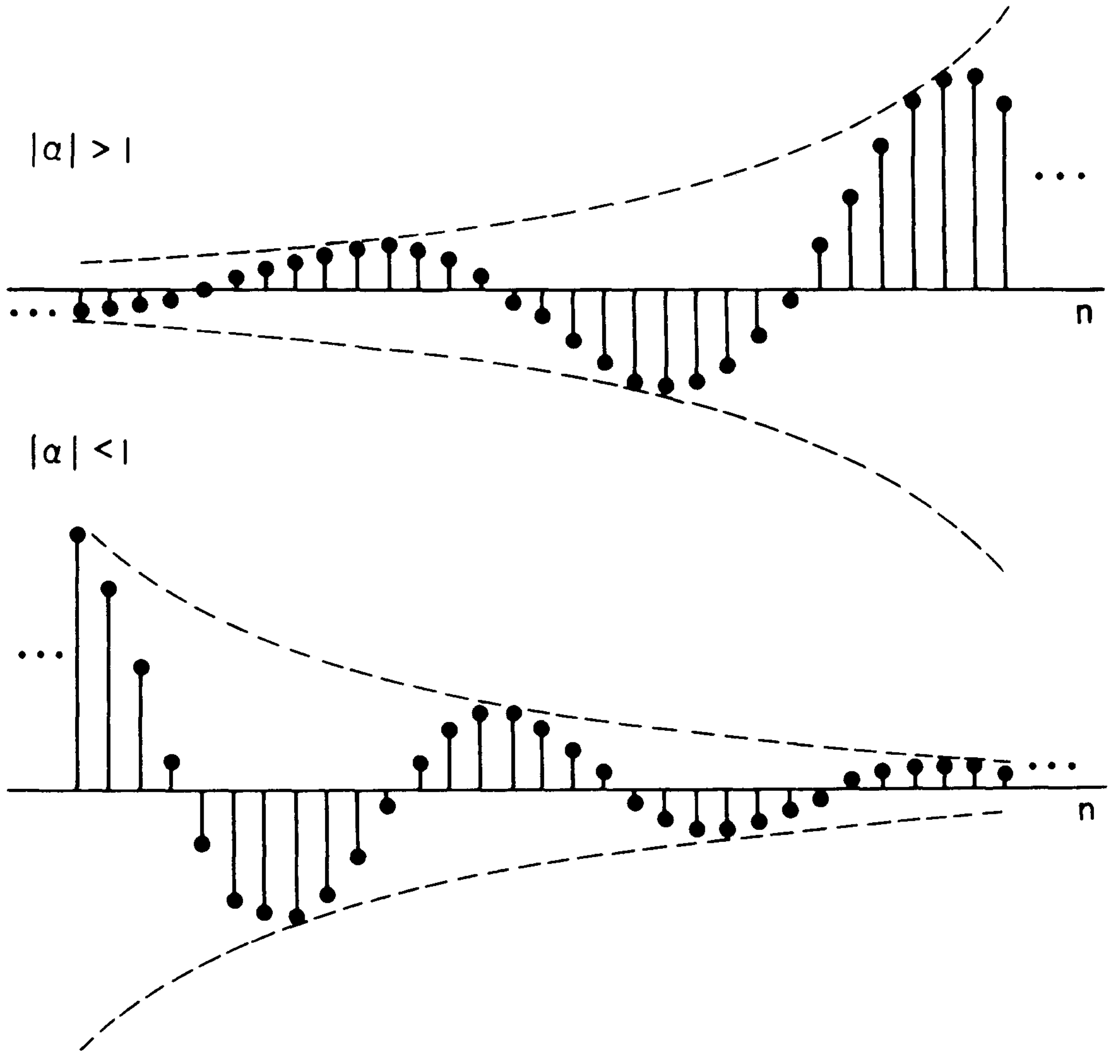
$$x(t) = |C|e^{j\theta}(|\alpha|e^{j\omega_0})^n = |C||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n+\theta)}$$

$$x(t) = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \theta)$$

$|\alpha| = 1 \Rightarrow$ простопериодичен реален и имагинарен дел

Некои посебни сигнали

- Комплексен експоненцијален дискретен сигнал



Некои посебни сигнали

- Експоненцијални сигнали: аналогни и дискретни
  - Видовме сличности
  - Но има и разлики
  - Кај аналоген беше

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

    - Поголемо ω_0 значи и поголема рата /брзина/ на осцилирање на сигналот
    - Периодично за секое ω_0

  - Што се случува кај дискретен сигнал?

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n}e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

    - Сигналот на фреквенција ω_0 е идентичен со сигналот на фреквенција $\omega_0 \pm 2\pi, \omega_0 \pm 4\pi ...$

Некои посебни сигнали

- Експоненцијални сигнали: аналогни и дискретни
  - Аналогни сигнали

$$x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \phi) \qquad \text{ако } \omega_2 \neq \omega_1$$

$$x_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \phi) \qquad x_2(t) \neq x_1(t)$$

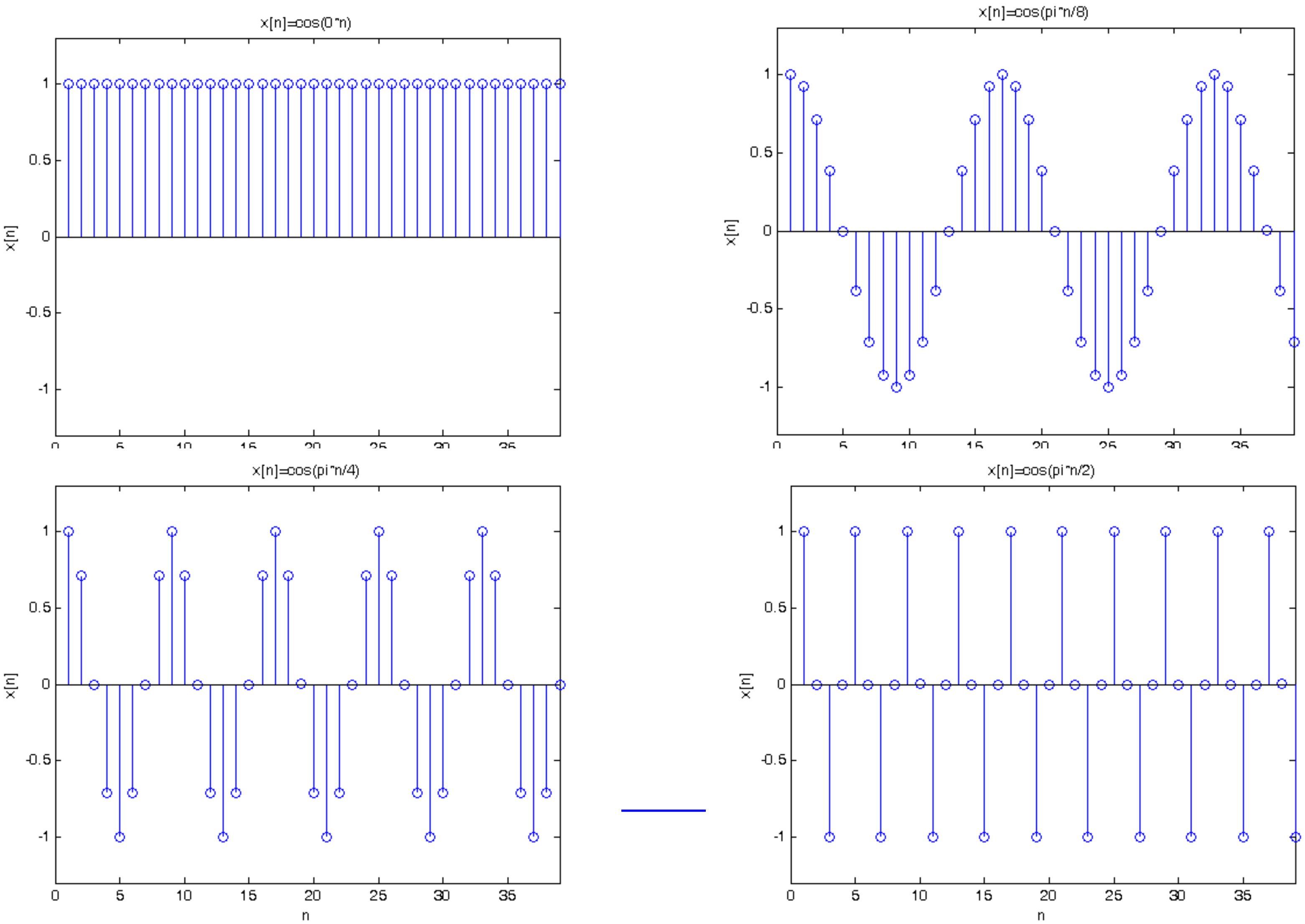
  - Дискретни сигнали

$$x_1[n] = A\cos(\omega_1 n + \phi) \qquad \text{ако } \omega_2 = \omega_1 + 2\pi m$$

$$x_2[n] = A\cos(\omega_2 n + \phi) \qquad x_2[n] = x_1[n]$$

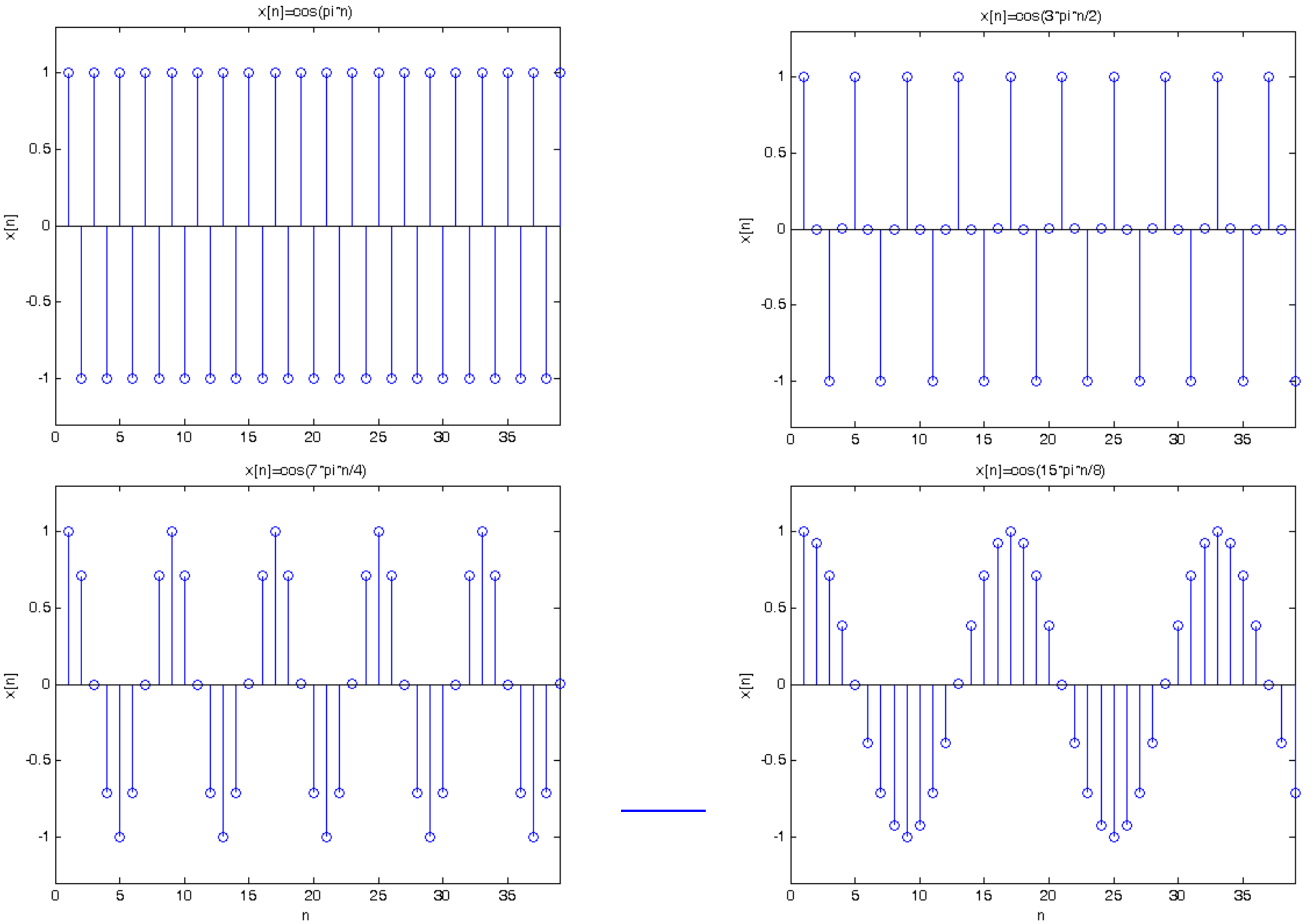
Некои посебни сигнали

- Експоненцијални сигнали: аналогни и дискретни



Некои посебни сигнали

- Експоненцијални сигнали: аналогни и дискретни



Некои посебни сигнали

- Експоненцијални сигнали: аналогни и дискретни

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$$

  - Периодичност $\quad x[n] = x[n+N]$

$$A\cos(\omega_0(n+N)+\phi) = A\cos(\omega_0 n + \underbrace{\omega_0 N}_{\text{цел број мултипл од } 2\pi} + \phi)$$

$$\Rightarrow \omega_0 N = 2\pi m$$

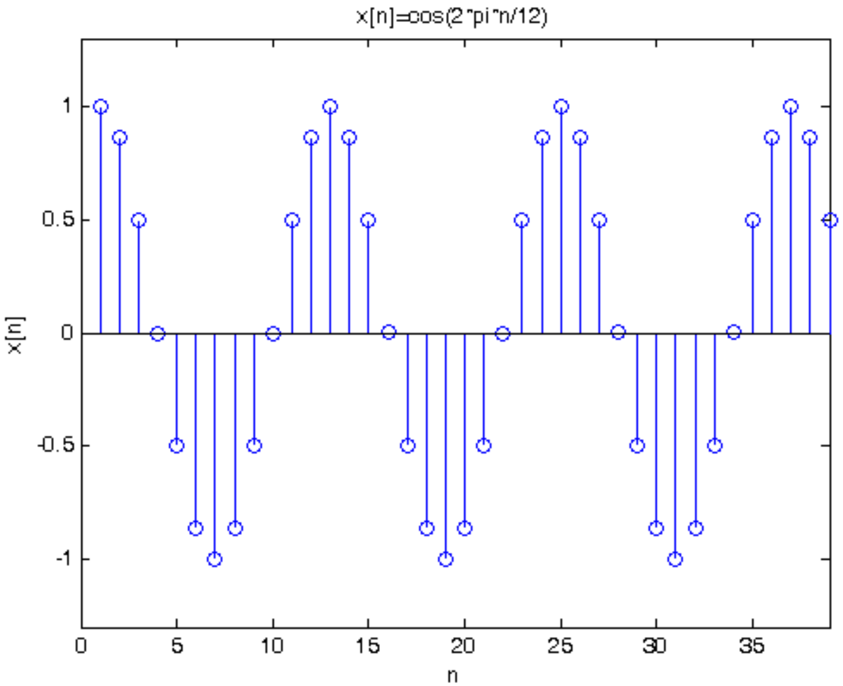
$$N = \frac{2\pi m}{\omega_0}$$

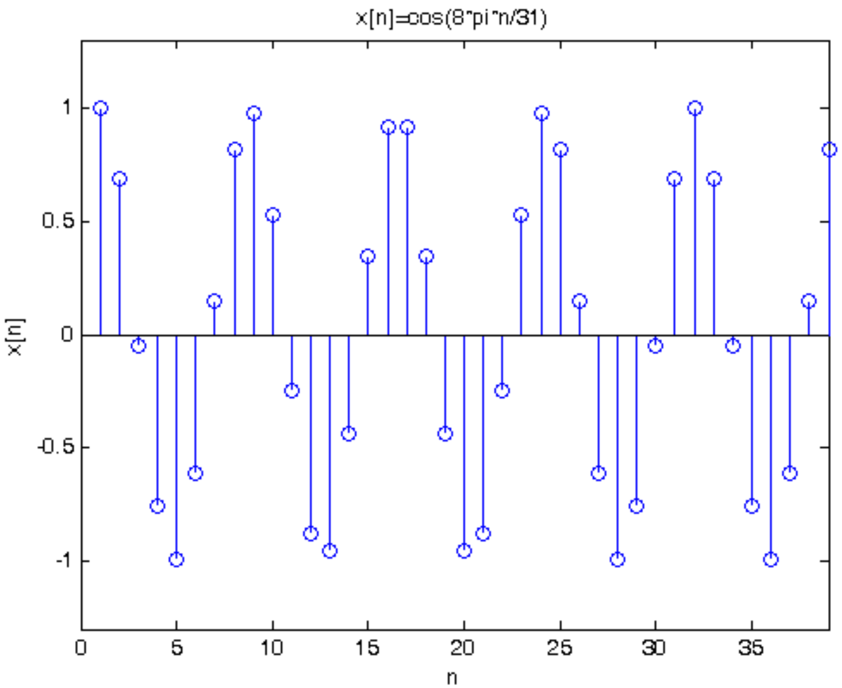
N, m мора да бидат цели броеви

најмалото N (ако постои) = период

Некои посебни сигнали

- Експоненцијални сигнали: аналогни и дискретни
  - периодичност





Некои посебни сигнали

- Разлики помеѓу аналоген и дискретен сигнал

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$$

Различни сигнали за различни вредности за ω_0

Идентични сигнали за вредности за $\omega_0 \pm 2\pi$

Периодични за било која вредност на ω_0

Периодични само за

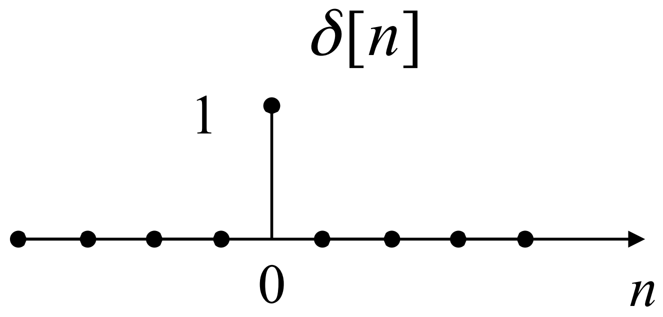
$$\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$$

N>0 и m мора да бидат цели броеви

Некои посебни сигнали

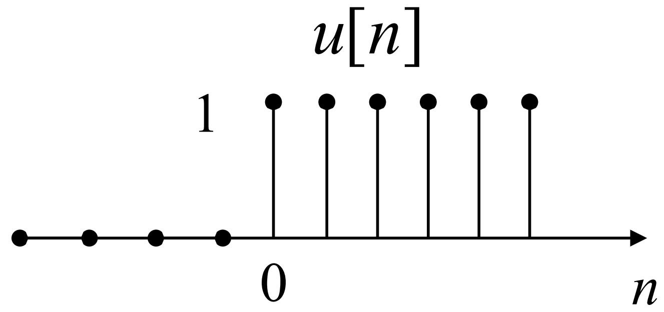
- Единичен импулс

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$



- Единичен скок

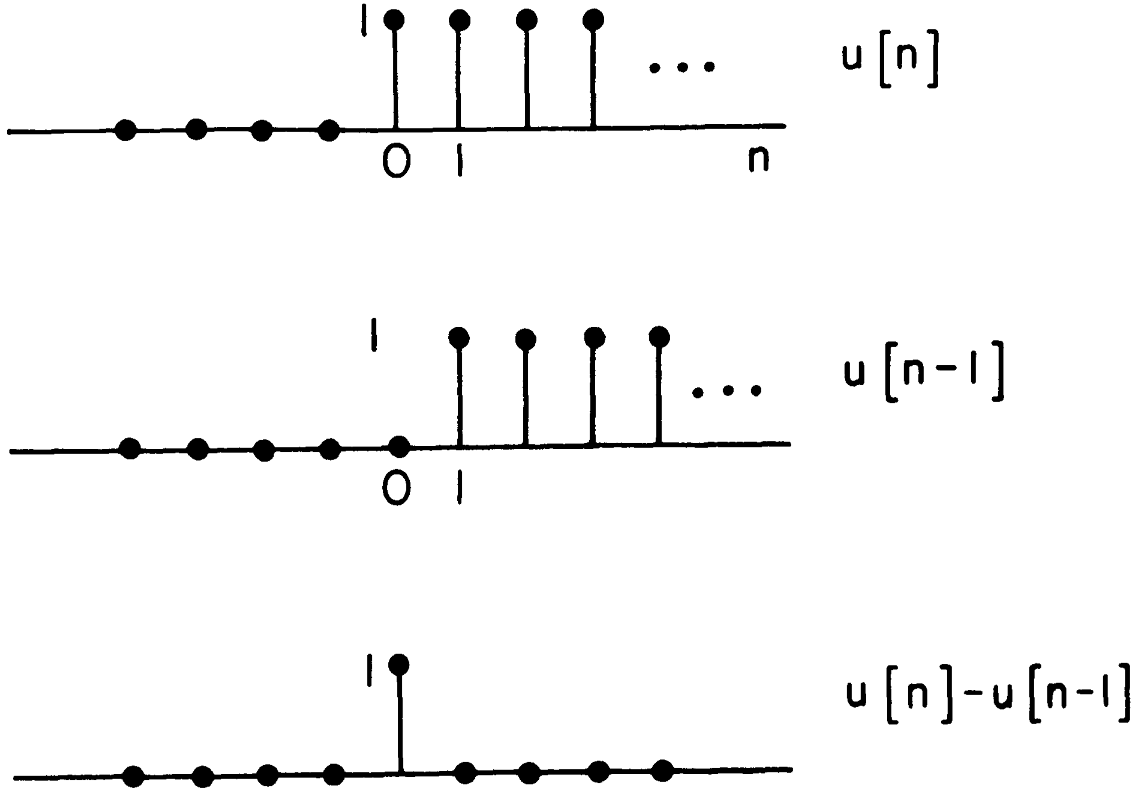
$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$



Некои посебни сигнали

- Врска помеѓу овие два сигнала

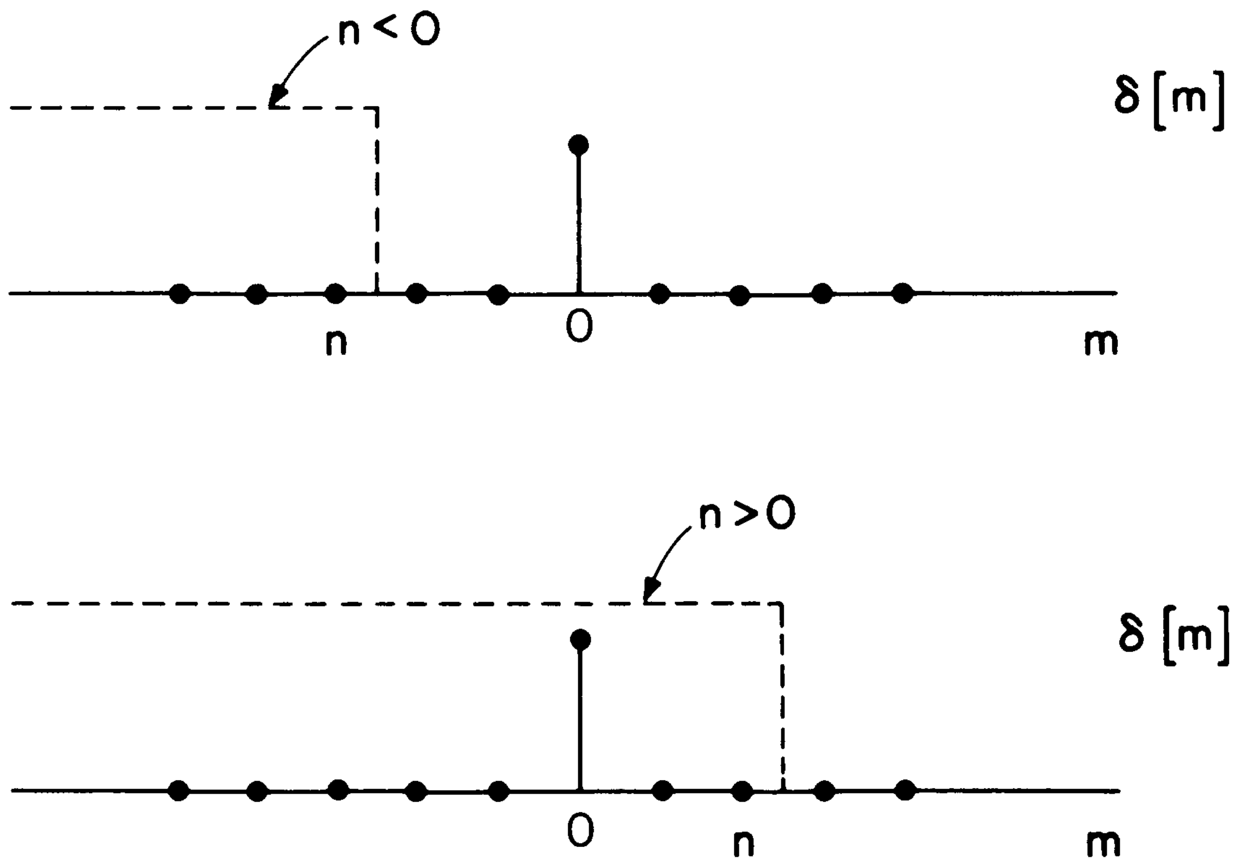
$$\boxed{\delta[n] = u[n] - u[n-1]}$$



Некои посебни сигнали

- Врска помеѓу овие два сигнала

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$



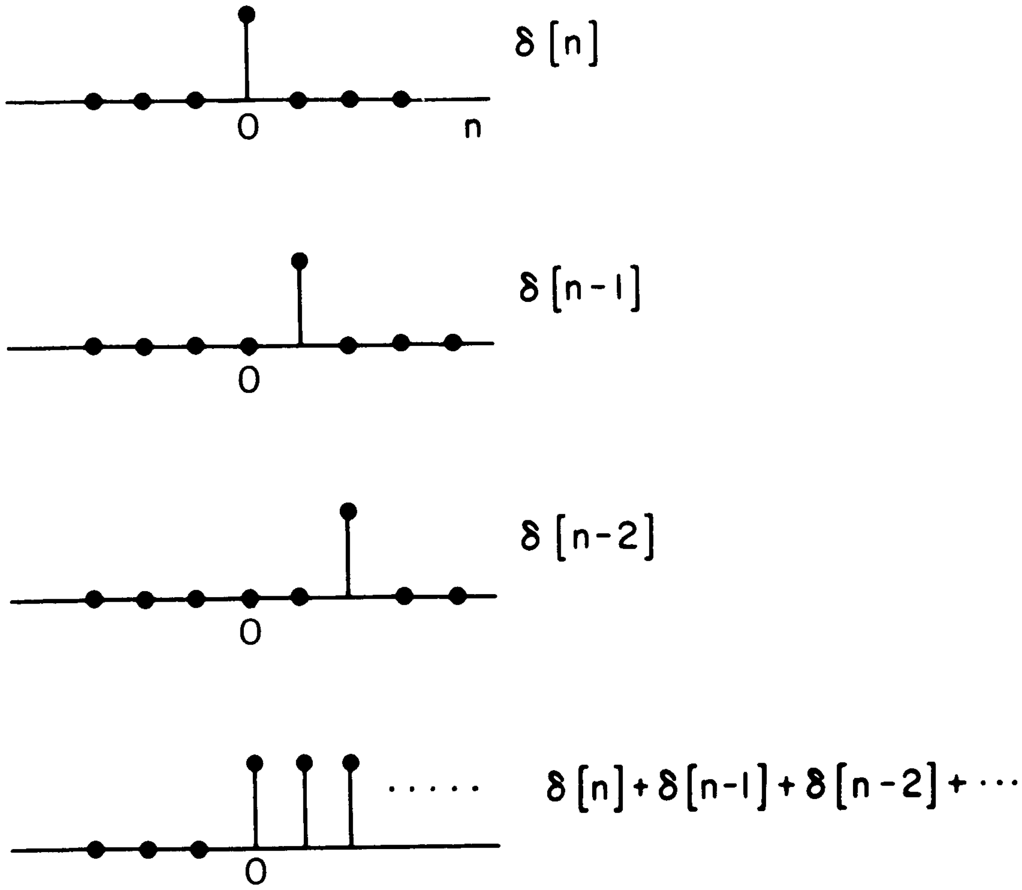
Некои посебни сигнали

- Врска помеѓу овие два сигнала

  смена $k = n - m$

$$u[n] = \sum_{k=\infty}^{0} \delta[n-k]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$



Некои посебни сигнали

- Особина на одбирање

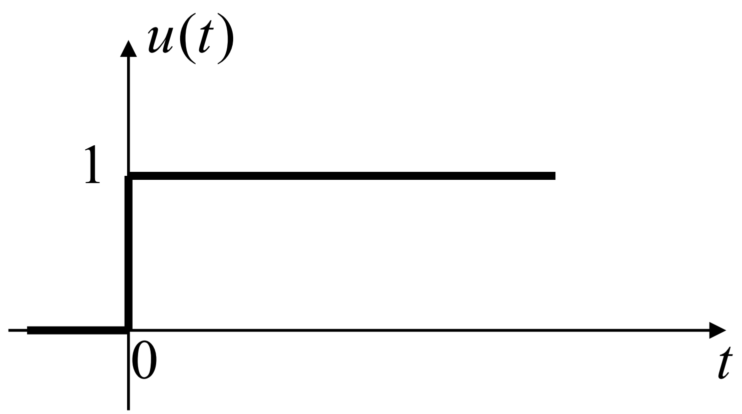
$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

Некои посебни сигнали

- Единичен скок (аналогни сигнали)
  - Хевисајдова функција

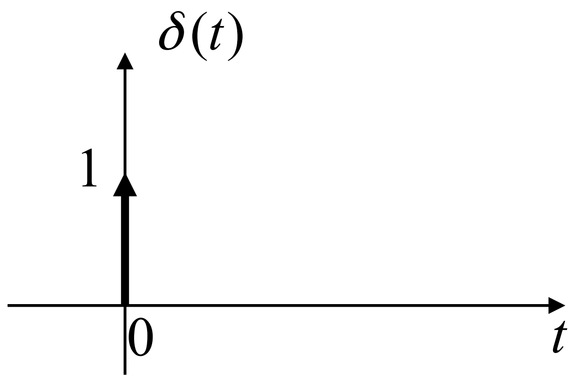
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



Некои посебни сигнали

- Единичен импулс (аналогни сигнали)
  - Дираков импулс

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & \text{други } t \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

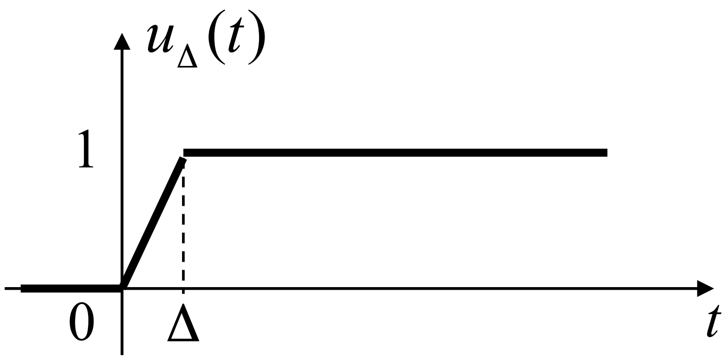


Некои посебни сигнали

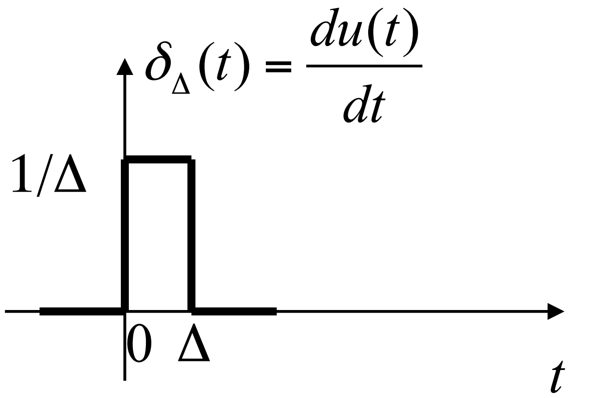
- Врска помеѓу единичен скок и единичен импулс кај аналогни сигнали

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

- Можат да се интерпретираат преку следната апроксимација:

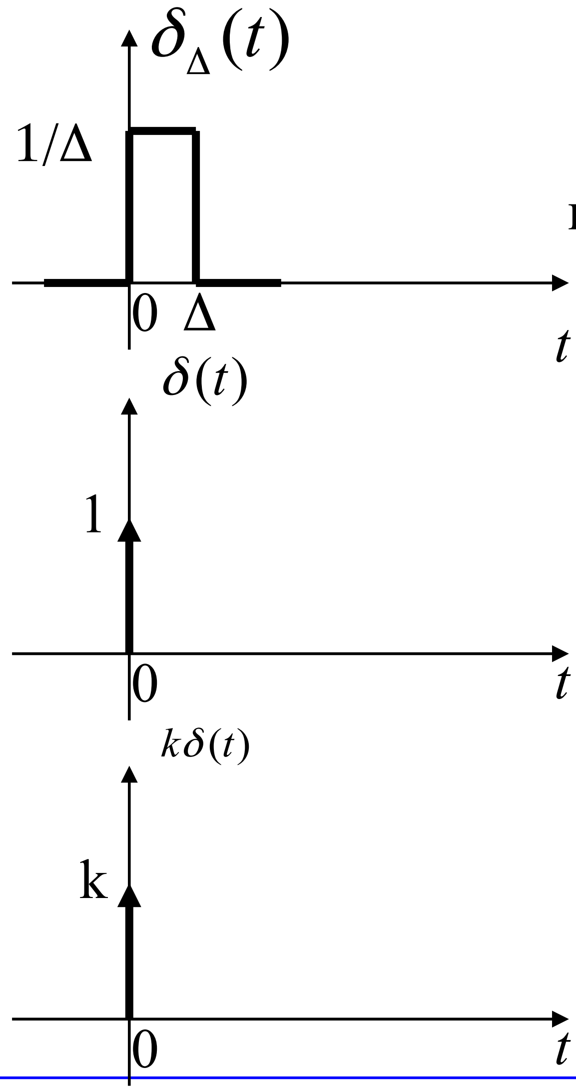


$u(t) = u_\Delta(t)$ за $\Delta \rightarrow 0$



$\delta(t) = \delta_\Delta(t)$ за $\Delta \rightarrow 0$

Некои посебни сигнали

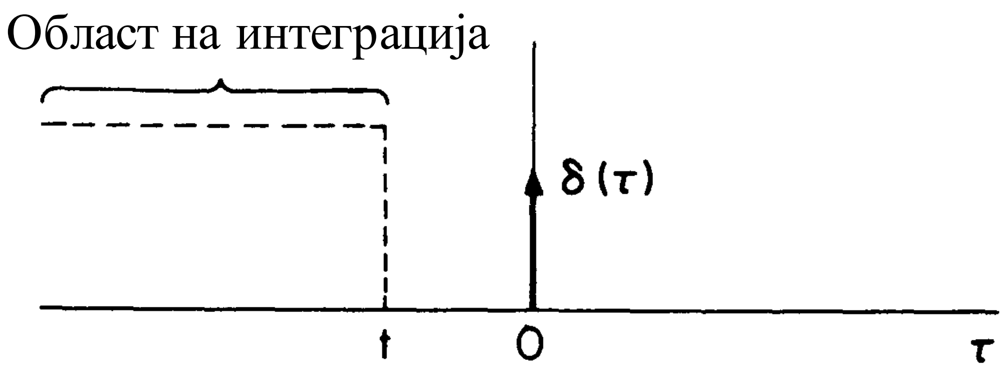


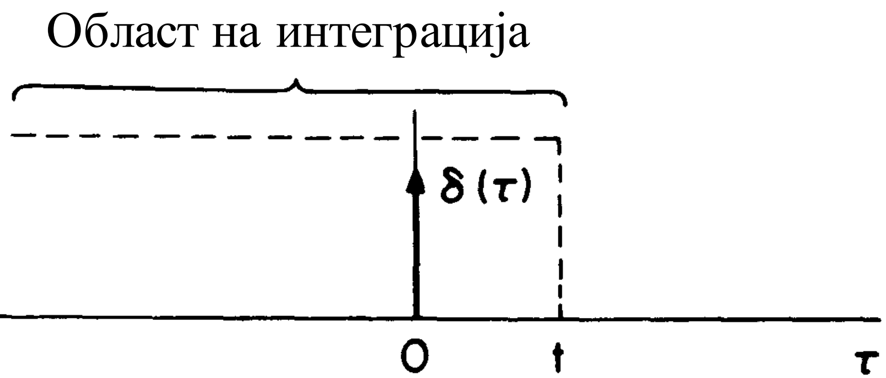
површина = 1

висина = “ ∞ ”
ширина = “0”
површина = 1

Некои посебни сигнали

- Врска помеѓу овие два сигнала $\qquad \delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$ и $u(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$





Некои посебни сигнали

- $u(t)$ преку поместени импулси
  - Смена $\sigma = t - \tau$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = \int_{\infty}^{0} \delta(t-\sigma) d(-\sigma)$$

$$= \int_{0}^{\infty} \delta(t-\sigma) d(\sigma)$$

Некои посебни сигнали

- Особина на одбирање кај аналогни сигнали

$$\delta(t) = \delta_\Delta(t) \quad \text{за} \quad \Delta \to 0$$

$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

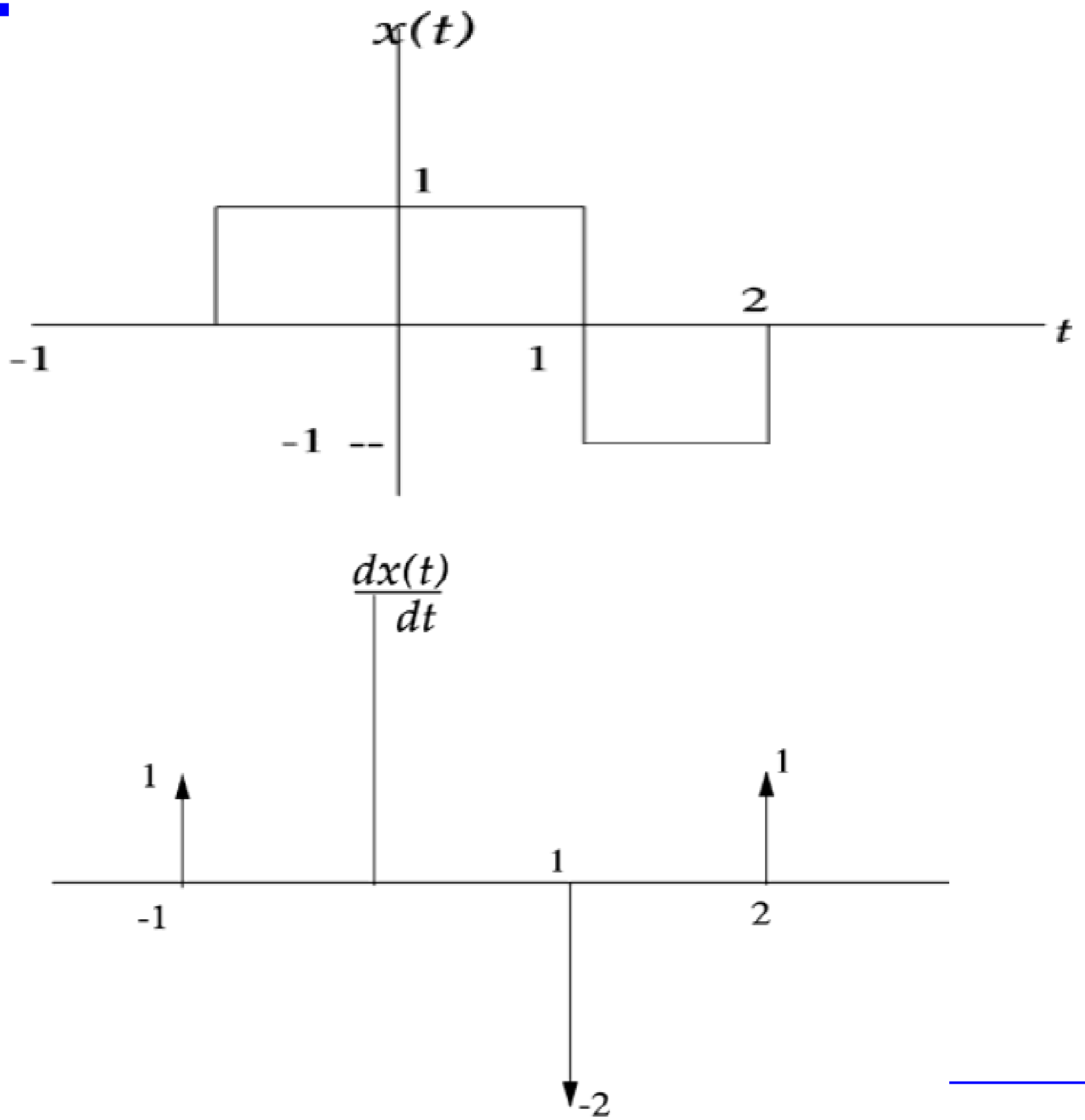
ако $\Delta \to 0$ $\qquad x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$

$$\boxed{x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t)dt = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0)}$$

Некои посебни сигнали

- Пример



Некои посебни сигнали

- Задача за вежбање
  - Да се нацртаат сигналите

$$x_1[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n-3]$$

$$x_2(t) = u(t+2) - u(t-2)$$

  - Да се поедностават изразите

$$\left(\frac{\sin(t)}{t^2+3}\right)\delta(t)$$

$$\left(\frac{5+jt}{2-jt}\right)\delta(t-2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(2t-5)\delta(t-2)dt$$