УНИВЕРЗИТЕТ “Св. КИРИЛ И МЕТОДИЈ”– СКОПЈЕ
Факултет за електротехника и информациски технологии

МАТЕМАТИКА 3

–Збирка задачи–
–2013/14 –

Скопје, 2013

1 Функции од повеќе променливи

1.1 Дефиниција и својства на функции од повеќе променливи

Задача 1.1. Колку променливи имаат следниве функции:

а) $f(x+y) = \cos y(\sin x - \cos x) + \sin y(\cos x + \sin y)$;

б) $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y + 2$;

в) $f\left(x, \dfrac{u}{v}\right) = x^2 + 2\dfrac{uv}{u^2+v^2} + 1$.

Задача 1.2. Да се пресмета $f(-x,-y)$, $\quad f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$, $\quad \dfrac{1}{f(x,y)}$ ако $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{2xy}$.

Задача 1.3. Докажи дека функцијата $f(x,y) = \ln x \ln y$ го задоволува равенството:

$$f(xy, uv) = f(x,v) + f(x,u) + f(y,u) + f(y,v).$$

Задача 1.4. Ако $f\left(x+y, \dfrac{x}{y}\right) = x^2 - y^2$, да се определи $f(x,y)$.

Задача 1.5. Да се определат функциите f и g дефинирани со условите

$$g(x,y) = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1), \quad g(x,1) = x, \quad x, y \geq 0.$$

Задача 1.6. Да се определи дефиниционата област на следниве функции:

а) $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$;

б) $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$;

в) $z = \sqrt{y \sin x}$;

г) $z = \arctan \dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$;

д) $z = \ln(x \ln(y-x))$;

ѓ) $z = \dfrac{\sqrt{x+y-1}}{x-1}$;

е) $z = x \ln(y^2 - x)$;

ж) $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$;

з) $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$;

ѕ) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2-16}$.

1.2 Гранична вредност и непрекинатост на функции од повеќе променливи

$$L_{12} = \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y), \quad L_{21} = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y), \quad L = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Задача 1.7. Дадена е функцијата $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2+2x^3+2y^3}{x^2+y^2}$. Да се пресмета:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$;

б) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y)$.

Задача 1.8. Дали постојат сукцесивните (последователните) и симултаната (истовремената) гранична вредност на функцијата

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} \text{ во точката } (0,0)?$$

Задача 1.9. Да се пресметаат (ако постојат) L_{12}, L_{21}, L за функцијата

$$f(x)=(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \text{ во точката } (0,0).$$

Задача 1.10. Да се докаже дека $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0.$

Задача 1.11. Дали постои границата $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$?

Задача 1.12. Да се пресмета $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)$ ако:

а) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}, \quad a=\infty, \quad b=\infty;$

б) $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}, \quad a=\infty, \quad b=0^+;$

в) $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}, \quad a=\infty, \quad b=\infty.$

Задача 1.13. Да се пресметаат следниве гранични вредности:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2};$ б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4};$

в) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)};$ г) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2};$

д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2};$ ѓ) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}.$

Задача 1.14. Да се пресметаат следниве гранични вредности:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sqrt{x^2+(y-1)^2+4}-2}{x^2+(y-1)^2};$ б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy};$ в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}, \ a>0.$

Задача 1.15. Да се најдат точките на прекин на функциите

а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$ б) $z=\dfrac{xy}{x+y};$ в) $z=\dfrac{x+y}{x^3+y^3};$ г) $z=\dfrac{1}{\sin x\sin y}.$

Задача 1.16. Да се докаже дека функцијата $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & , \ x^2+y^2\neq 0\\ 0 & , \ x^2+y^2=0\end{cases}$ има прекин во точката $(0,0)$.

Задача 1.17. Дадена е функцијата $f(x,y)=\dfrac{xy^3}{x^2-xy^2+y^4}$, $(x,y)\neq(0,0)$. Да се провери дали постојат последователните гранични вредности и двојната гранична вредност во точката $(0,0)$. Дали функцијата може да се дефинира во точката $(0,0)$ така што $f(x,y)$ да биде непрекината во $(0,0)$?

Задача 1.18. Да се докаже дека функцијата $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2\neq 0\\ 0 & , \quad x^2+y^2=0\end{cases}$ има прекин во точката $(0,0)$.

Задача 1.19. Нека $g(x,y)=x+y+f(x-y)$.
а) Да се определат функциите f и g ако $g(x,0)=x^2$;
б) Дали може функцијата F зададена со $F(x,y)=\dfrac{g(x,y)-2y}{(x+y)^2}$ да се додефинира така што да биде непрекината во точката $(0,0)$?

Задача 1.20. Нека е дадена функцијата $g(x,y)=x^4-f(x+2y)+\dfrac{x}{2}$ при што $g(0,y)=-y$.
а) Да се определат функциите f и g;
б) Да се пресметаа последователните граници на функцијата $h(x,y)=\dfrac{g(x,y)}{g(-x,-y)}$ во точката $(0,0)$;
в) Дали може да се додефинира функцијата $h(x,y)$ во точката $(0,0)$ за да биде непрекината.

1.3 Парцијални изводи и диференцијал од прв ред. Диференцијабилност на функции од повеќе променливи

Задача 1.21. Испитај дали функцијата $z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ има парцијални изводи во сите точки од дефиниционата област!

Задача 1.22. Да се најдат првите парцијални изводи на функцијата:

а) $u(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^2$; б) $u(x,y)=\ln(x+y^2)$;

в) $u(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; г) $u(x,y)=x^{z+y^2}$.

Задача 1.23. Да се докаже дека $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u$ ако $u(x,y)=x^y$.

Задача 1.24. Да се докаже дека $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=(x+y-1)z$ ако $u(x,y)=\frac{e^{xy}}{e^x+e^y}$.

Задача 1.25. Ако $u(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$, каде φ е диференцијабилна функција од една променлива, да се докаже дека

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Задача 1.26. Да се определат парцијалните изводи од прв ред за функцијата $u(x,y)=\varphi(xy)+(x-y)\psi'(y)$, каде φ и ψ се два пати диференцијабилни функции. Потоа, да се пресмета изразот

$$\frac{y}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Задача 1.27. Да се докаже дека функцијата $z=z(x,y)$ дефинирана со $x+y+z=f(x^2+y^2+z^2)$, каде што f е диференцијабилна функција од една променлива, ја задоволува равенката

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial x}{\partial y}=x-y.$$

Задача 1.28. Да се пресмета тоталниот диференцијал од прв ред за функцијата

а) $z(x,y)=e^{x+y}\sin x+y$; б) $z(x,y)=a^{xy}\tan x$.

Задача 1.29. Да се пресметаат првите изводи $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$ ако $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$. Дали функцијата е диференцијабилна во точката $(0,0)$?

Задача 1.30. Да се докаже дека функцијата $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & , \quad x^2+y^2\neq 0\\ 0 & , \quad x^2+y^2=0\end{cases}$ има прекин во точката $(0,0)$, но има парцијални изводи во таа точка.

Задача 1.31. Да се докаже дека функцијата $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad x^2+y^2\neq 0\\ 0 & , \quad x^2+y^2=0\end{cases}$ е непрекината во точката $(0,0)$, има парцијални изводи $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$, но не е диференцијабилна во точката $(0,0)$.

Задача 1.32. Да се покаже дека функцијата $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2\neq 0\\ 0 & , \quad x^2+y^2=0\end{cases}$ е непрекината во точката $(0,0)$, има парцијални изводи $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$, но не е диференцијабилна во точката $(0,0)$.

Задача 1.33. Испитај дали функцијата $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2\neq 0\\ 1 & , \quad x^2+y^2=0\end{cases}$ е диференцијабилна во точката $(0,0)$.

Задача 1.34. За функцијата $z=z(x,y)$ зададена со равенката $z^3-3xyz=a^3$, да се најдат парцијалните изводи и тоталниот диференцијал од прв ред.

Задача 1.35. Да се пресметаат $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и dz ако $z=\arctan\dfrac{u}{v}$, $\quad u=x-y, \quad v=x+y.$

Задача 1.36. Да се пресмета du ако $u=e^{x-2y}$, $\;x=\sin t, \quad y=t^3.$

1.4 Парцијални изводи и диференцијали од повисок ред

Задача 1.37. Да се најде $y', \quad y'', \quad y'''$ ако функцијата $y = y(x)$ е зададена имплицитно со равенката $x^2 + xy + y^2 = 3$.

Задача 1.38. Ако $u(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$ да се покаже дека $u'''_{yyx} = u'''_{xyy}$.

Задача 1.39. Да се докаже дека $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \;\; u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, и φ и ψ се два пати диференцијабилни функции од една променлива.

Задача 1.40. Да се докаже дека $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ако $u(x,y) = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$ и φ и ψ се два пати диференцијабилни функции од една променлива.

Задача 1.41. Да се пресмета вредноста на изразот $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ако $z(x,y) = x^2\varphi(\dfrac{x}{y^2})$ и φ е два пати непрекинато диференцијабилна функција со една променлива.

Задача 1.42. Да се најдат парцијалните изводи од втор ред и тоталниот диференцијал од втор ред за функцијата

а) $z(x,y) = e^{xy}$; б) $u(x,y,z) = xyz + \ln(xyz)$

Задача 1.43. Да се најде dz и d^2z ако $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 1, \quad z = z(x,y)$.

Задача 1.44. Да се пресмета du и d^2u ако $u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$, каде што f е двапати диференцијабилна функција од една променлива.

Задача 1.45. Нека $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \;\; x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , \;\; x^2+y^2 = 0 \end{cases}$. Да се покаже дека $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

1.5 Смена на променливи

Задача 1.46. Во равенката $x^2y'' + xy' + y = 0$, каде што $y = y(x)$ да се воведе нова независна променлива t со смената $x = e^t$.

Задача 1.47. Во равенката $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, каде што $z = z(x,y)$ да се воведат нови независни променливи u и v со смената $u = ln(x+\sqrt{1+x^2}), \quad v = \ln(y+\sqrt{1+y^2}), \quad z = z(u,v)$.

Задача 1.48. Во равенката $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2$, каде што $z = z(x,y)$ да се воведат нови независни променливи u и v и нова функција $w = w(u,v)$ со смените $u = x, \; v = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$ и $w = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x}$.

Задача 1.49. Да се трансформира равенството $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ z=z(x,y)$ така што x е нова функција, а y и z нови независни променливи.

Задача 1.50. Да се трансформира равенството $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ z=z(x,y)$ така што x е нова функција, а $u=y-z$ и $v=y+z$ се нови независни променливи.

Задача 1.51. Да се трансформира равенката

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z,$$

со воведување на нови независни променливи $u=x^2+y^2, v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ и нова функција $w=\ln z-(x+y)$.

Задача 1.52. Во равенката $\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{y}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}$, $z=z(x,y)$ да се воведат нови независни променливи u и v и нова функција $w=w(u,v)$ со смените $u=\frac{x}{y}$, $v=x$ и $w=w(u,v)$, $\quad w=xz-y$.

Задача 1.53. Преминувајќи во поларни координати да се трансформира равенството

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

Задача 1.54. Во изразот $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $z=z(x,y)$ да се воведат нови независни променливи ρ и φ со смената

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Задача 1.55. За функцијата $F=F(u,v,w)$, каде што $u=x^2+y^2,\quad v=x^2-y^2,\quad w=2xy$, да се определат dF и d^2F.

Задача 1.56. Да се пресмета $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ако $F(x+y,y+z)=0,\quad z=z(x,y)$.

Задача 1.57. Да се пресмета $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ако $F(x+z,y+z)=0,\quad z=z(x,y)$.

1.6 Тангентна рамнина и нормала на површина

Задача 1.58. Да се напише равенка на тангентна рамнина и нормала на површината $z(x,y)=\frac{x^2}{2}-y^2$ во точката $M(2,-1,1)$.

Задача 1.59. Во која точка тангентната рамнина на површината $x^2+2y^2+3z^2=21$, $z=z(x,y)$ е паралелна со рамнината $x+4y+6z=0$?

Задача 1.60. Да се најдат аглите што нормалата повлечена во точката $M(2,2,0)$ на површината $2z=x^2-y^2$, $z=z(x,y)$ ги зафаќа со координатните оски.

Задача 1.61. Да се докаже дека тангентните рамнини на површината $xyz = m^3$, $m - const.$, $z = z(x, y)$ со координатните рамнини формираат тетраедар со константен волумен.

Задача 1.62. Да се докаже дека тангентните рамнини на површината $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = \sqrt{a}$, $a-const$, $a > 0$ од координатните оски отсекуваат отсечки чиј збир е еднаков на a.

Задача 1.63. Да се најде реалниот параметар m така што рамнината $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{m} = 1$ го допира елипсоидот $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$.

Задача 1.64. Да се најдат точките од параболоидот $z = 4x^2 + y^2$ во кои што тангентната рамнина е паралелна со рамнината $x + 2y + z = 6$. Потоа, да се напише тангентната рамнина и нормалата на параболоидот во добиената точка.

1.7 Екстремни вредности на функција од повеќе променливи

Задача 1.65. Да се најде локалниот екстрем на следниве функции:

а) $z(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$;

б) $u(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0, \quad z = z(x, y)$;

г) $z(x, y) = x + 2y$ при услов $x^2 + y^2 = 5$;

д) $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ако $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c > 0$;

ѓ) $u(x, y, z) = xy^2z^3$ ако $x + 2y + 3z = a, \quad x,\ y,\ z,\ a > 0$;

е) $u(x, y, z) = xy + yz$ ако $x^2 + y^2 = 2$ и $y + z = 2,\ \ x > 0,\ y > 0\ , z > 0$.

Задача 1.66. Да се определи точка на рамнината $2x + 3y + 5z = 18$ во која функцијата $u(x, y, z) = 4x^2 + 3y^2 + 5z^2$ има најмала вредност.

Задача 1.67. На кривата C која претставува пресек на површината $2z = 16 - x^2 - y^2$ и рамнината $x + y = 4$ да се определат точки кои се најмалку и најмногу оддалечени од координатниот почеток.

Задача 1.68. Да се определи најголемата и најмалата вредност на функцијата $z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ во правоаголникот $0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 2$.

Задача 1.69. Да се определи најголемата и најмалата вредност на функцијата $z(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ во областа затворена и ограничена со кривите $y = x^2,\ \ y = 4$.

Задача 1.70. Да се определи најголемата и најмалата вредност на функцијата $z(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4x + 8y$ во областа зададена со неравенствата $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y - x + 3 \geq 0$.

Задача 1.71. Во даден триаголник со страни a, b и c и плоштината P да се најде точка т.ш. сумата на квадратите на нејзините растојанија до страните на триаголникот да биде најмала.

Задача 1.72. Во елипсоидот $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ да се впише паралелопипед чии рабови се паралелни со координатните оски, а неговиот волумен е максимален.

Задача 1.73. На елипсоидот $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ да се определи точка во која тангентната рамнина на елипсоидот со координатните рамнини образува тетраедар со максимален волумен.

Задача 1.74. Да се најде најголемата и најмалата вредност на функцијата

$$f(x, y) = 5 - 2\ln x + 2xy - y^2,$$

во областа $D : y = x - 2,\ -2 \leq y \leq 2$ и $x > 0$.