Фуриеов ред

- Мотивација

Со Фуриеов ред можат да се одредат излезни сигнали од линеарни временски непроменливи системи на чиј влез делуваат периодични влезни сигнали

Базични сигнали

- Основна идеја. Сигналите да се претставаат како линеарна комбинација од **базични сигнали**, кои ги поседуваат следните особини

  – Да може со нивна помош да се претстави голема класа на сигнали

  – Одзивот на LTI систем да биде едноставен за одредување (линеарна комбинација на одзивите на овие базични сигнали)

Базични сигнали

ако $x(t) = a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t) + \ldots\ldots$

$\phi_k(t) \Rightarrow \varphi_k(t)$

и системот е линеарен

тогаш: $y(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \ldots$

Слично за дикретни системи

Базични сигнали

- Критериум за избор на базични сигнали

Избор на $\phi_k(t)$ или $\phi_k[n]$ таков да:

- широка класа на сигнали може да се претстави како линеарна комбинација на функции ϕ_{k}

- одзивот на функциите ϕ_{k} едноставно може се одреди

Базични сигнали

- Избор на базични сигнали кој не доведе до конволуциска сума и конволуциски интеграл кај LTI системи

аналогни системи:

$$\phi_k(t) = \delta(t - k\Delta)$$

$$\varphi_k(t) = h(t - k\Delta)$$

$\Rightarrow$ Конволуциски интеграл

дискретни системи:

$$\phi_k[n] = \delta[n - k]$$

$$\varphi_k[n] = h[n - k]$$

$\Rightarrow$ Конволуциска сума

Базични сигнали

- Комплексни експоненцијални функции како **базични функции**

$\phi_k(t) = e^{s_k t}$ $\quad s_k$ комплексен број

$\phi_k[n] = z_k{}^n$ $\quad z_k$ комплексен број

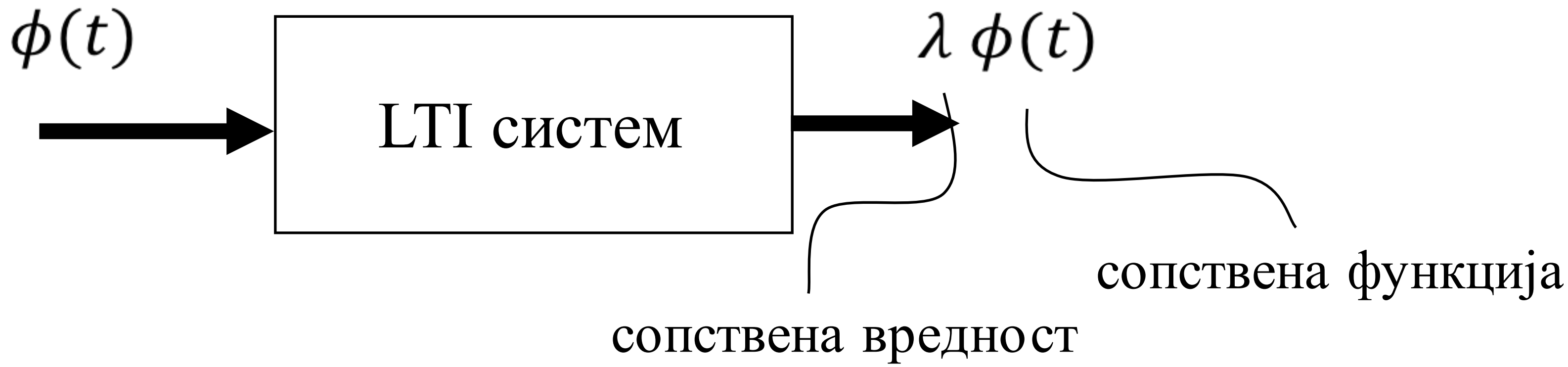
Фуриеова анализа:

аналогни: $s_k = j\omega_k$ $\quad \phi_k(t) = e^{j\omega_k t}$

дигитални: $|z_k| = 1$ $\quad \phi_k[n] = e^{j\Omega_k n}$

Сопствени функции

- Сопствена функција на систем сигнал за кој излезниот сигнал има ист облик како влезниот сигнал помножен со константа



Сопствени функции

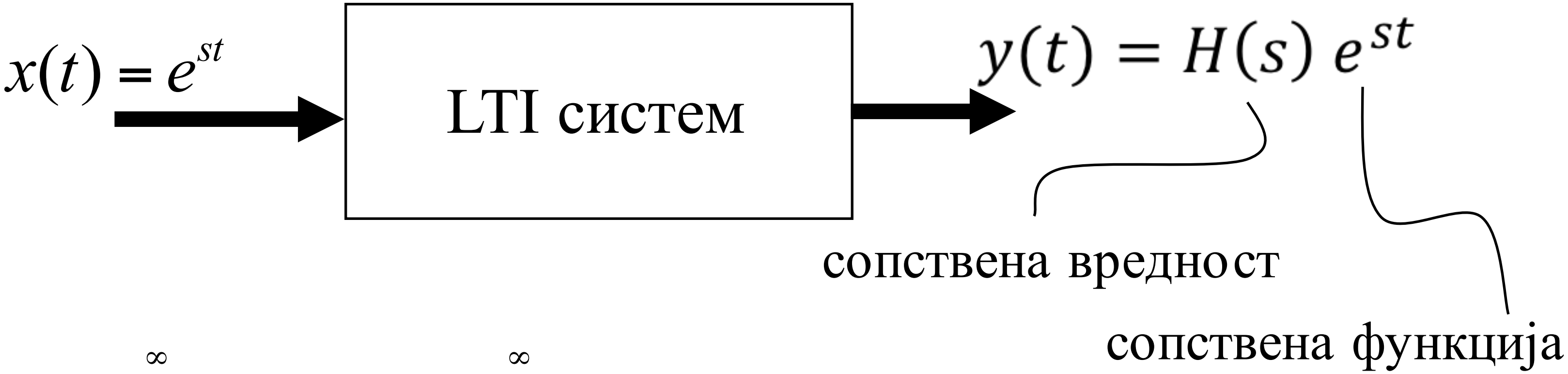
- Значење на комплексни експоненцијални функции

$$x(t) = e^{st} \Rightarrow y(t) = H(s)e^{st}$$

Одзивот на LTI систем на комплексна експоненцијална функција е истата експоненцијална функција со променета амплитуда.

Експоненцијални сигнали

- CT LTI систем



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

$$y(t) = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = H(s)e^{st}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Експоненцијални сигнали

- суперпозиција

$$a_1 e^{s_1 t} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow a_1 H(s_1) e^{s_1 t}$$

$$a_2 e^{s_2 t} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$

$$a_3 e^{s_3 t} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

Експоненцијални сигнали

- Пример
  - LTI систем е претставен со следната релација

$$y(t) = x(t-3)$$

  - Нека влезен сигнал е $x(t) = e^{j2t}$
  - Излезниот сигнал ќе биде $y(t) = e^{j2(t-3)} = e^{-j6}e^{j2t}$

$$y(t) = H(j2)e^{j2t}$$

$$H(j2) = e^{-j6}$$

$$h(t) = ? \qquad h(t) = \delta(t-3)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-3)e^{-s\tau}d\tau = e^{-3s}$$

$$H(s)\big|_{s=2j} = e^{-j6}$$

Фуриеов ред

- Сега за сега се фокусираме на множеството на комплексни експоненцијални функции
  - $s = j\omega$ чисто имагинарни, односно сигнали во форма $e^{j\omega t}$

- Ова води до Фуриова репрезентација на периодични сигнали

Фуриеов ред

- Периодичен сигнал

$$x(t) = x(t+T) \quad \textit{за секое } t$$

  – најмалото T е *основен период*

  – $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ *основна фреквенција*

  – $e^{j\omega_0 t}$ е периодична функција со период T

множество на базични функции поврзани со $e^{j\omega_0 t}$,

$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Секој од овие сигнали има основна фреквенција која е мултипл од ω_0, и секоја е периодична со T (за $|k| \geq 2$, основниот период е T/k).

Фуриеов ред

- Линеарна комбинација на овие експоненцијални функции

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

претставува **Фуриеов ред**

- Периодичен со T
- $\{a_k\}$ Фуриеови коефициенти
- $k = 0$ константен член (нулти хармоник)
- $k =$ +/-1 прв (основен) хармоник
- $k =$ +/-2 втор хармоник

- $k =$ +/-N N-ти хармоник

Фуриеов ред

- Пример

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$$

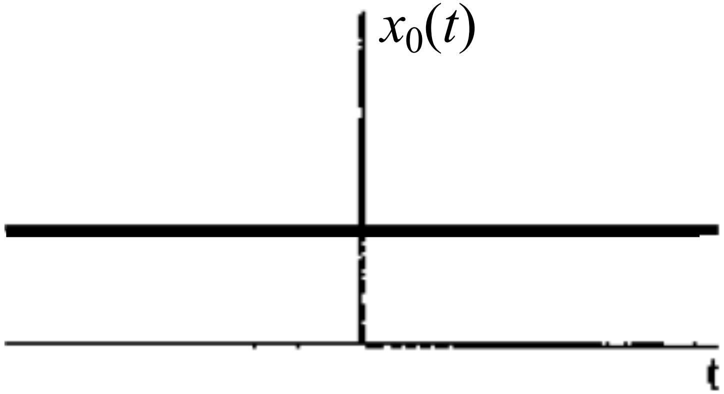
$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t})$$

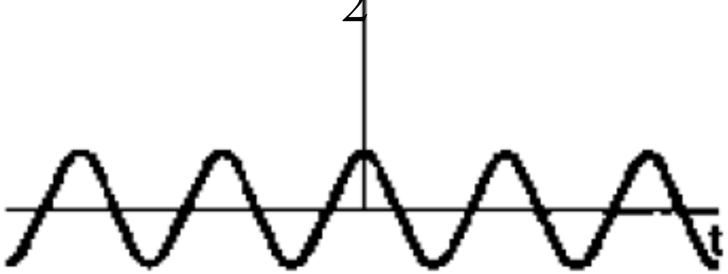
$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t$$

Фуриеов ред

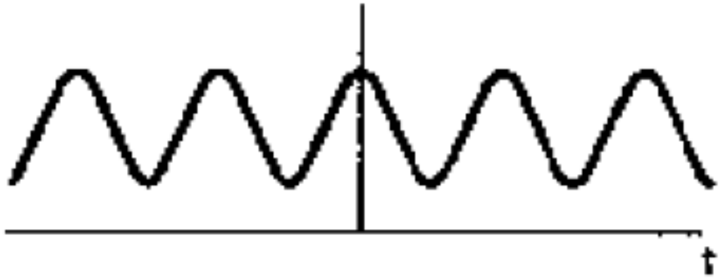
- Пример $$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t$$



$$x_1(t) = \frac{1}{2}\cos 2\pi t$$



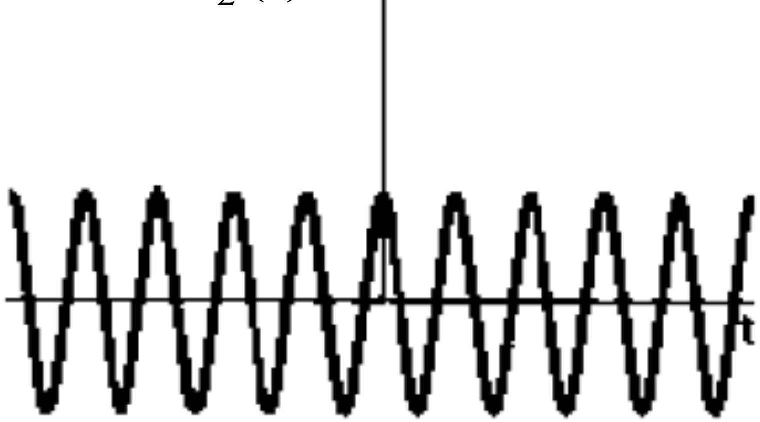
$x_0(t)+x_1(t)$



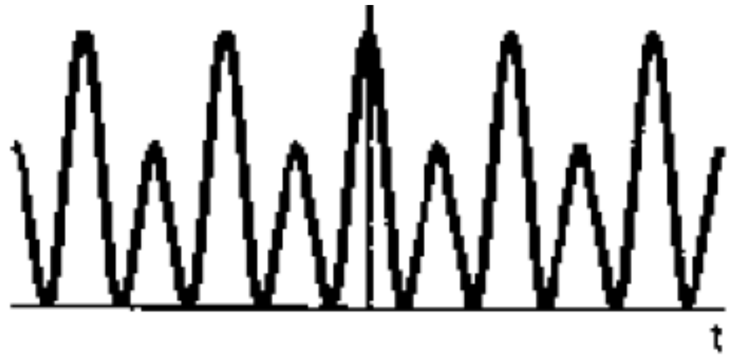
Фуриеов ред

- Пример $x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t$

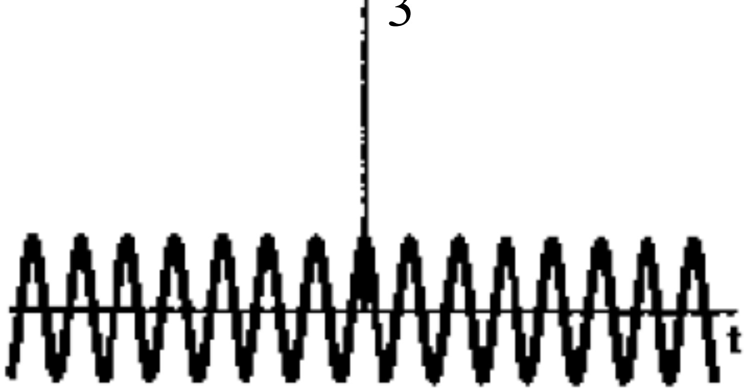
$x_2(t) = \cos 4\pi t$



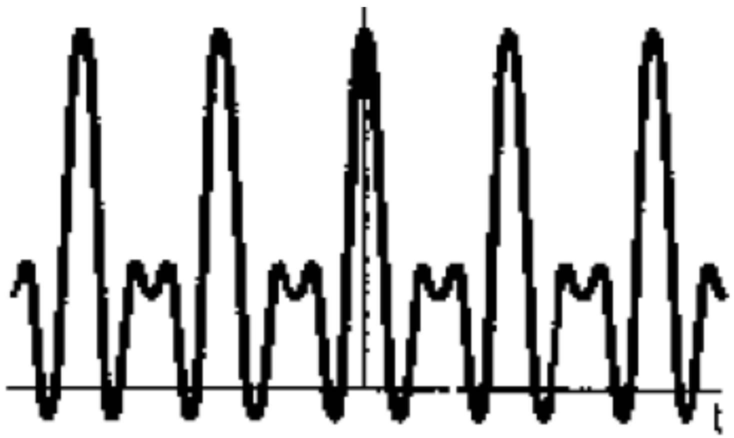
$x_0(t)+x_1(t)+x_2(t)$



$x_3(t) = \frac{2}{3}\cos 6\pi t$



$x_0(t)+x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$



Други форми на Фуриеов ред (за реални сигнали)

- Други форми на Фуриеов ред $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ $\quad ***$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

за реален сигнал $x(t)$, $\quad x^*(t) = x(t)$.

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$, замена на k со $-k$,

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$ и споредба со ***,

$$\Rightarrow$$

$a_k = a_{-k}^*$, или $a_k^* = a_{-k}$.

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}]$$

Други форми на Фуриеов ред (за реални сигнали)

- Други форми на Фуриеов ред

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}] = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}.$$

Ако $a_k = A_k e^{j\theta_k}$, $\qquad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\}.$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)}$$

Ако $a_k = B_k + jC_k$,

$$\boxed{x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}[B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t].}$$

Фуриеов ред

- Како ги одредуваме коефициентите?

- На пример, $$x(t) = \cos 4\pi t + 2\sin 8\pi t$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right] + \frac{2}{2j}\left[e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t}\right]$$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\omega_0 = 4\pi \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{j}$$

$$a_{-2} = -\frac{1}{j}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_{-3} = 0$$

M

Фуриеов ред

- Како ги одредуваме коефициентите?

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

со множење на двете страни со $e^{-jn\omega_0 t}$

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

и интегралење од 0 до T

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Фуриеов ред

- Како ги одредуваме коефициентите?

со промена на редоследот на интегралот и сумата

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right]$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t\, dt + j\int_0^T \sin(k-n)\omega_0 t\, dt$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n T$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt}$$

Фуриеов ред

- Фуриеов пар

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

израз за синтеза

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt$$

израз за анализа

Фуриеов ред

- Пример $$x(t) = 1 + \sin\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}[e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}]$$

$$x(t) = 1 + (1 + \frac{1}{2j})e^{j\omega_0 t} + (1 - \frac{1}{2j})e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)})e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)})e^{-j2\omega_0 t}$$

Коефициентите на редот се

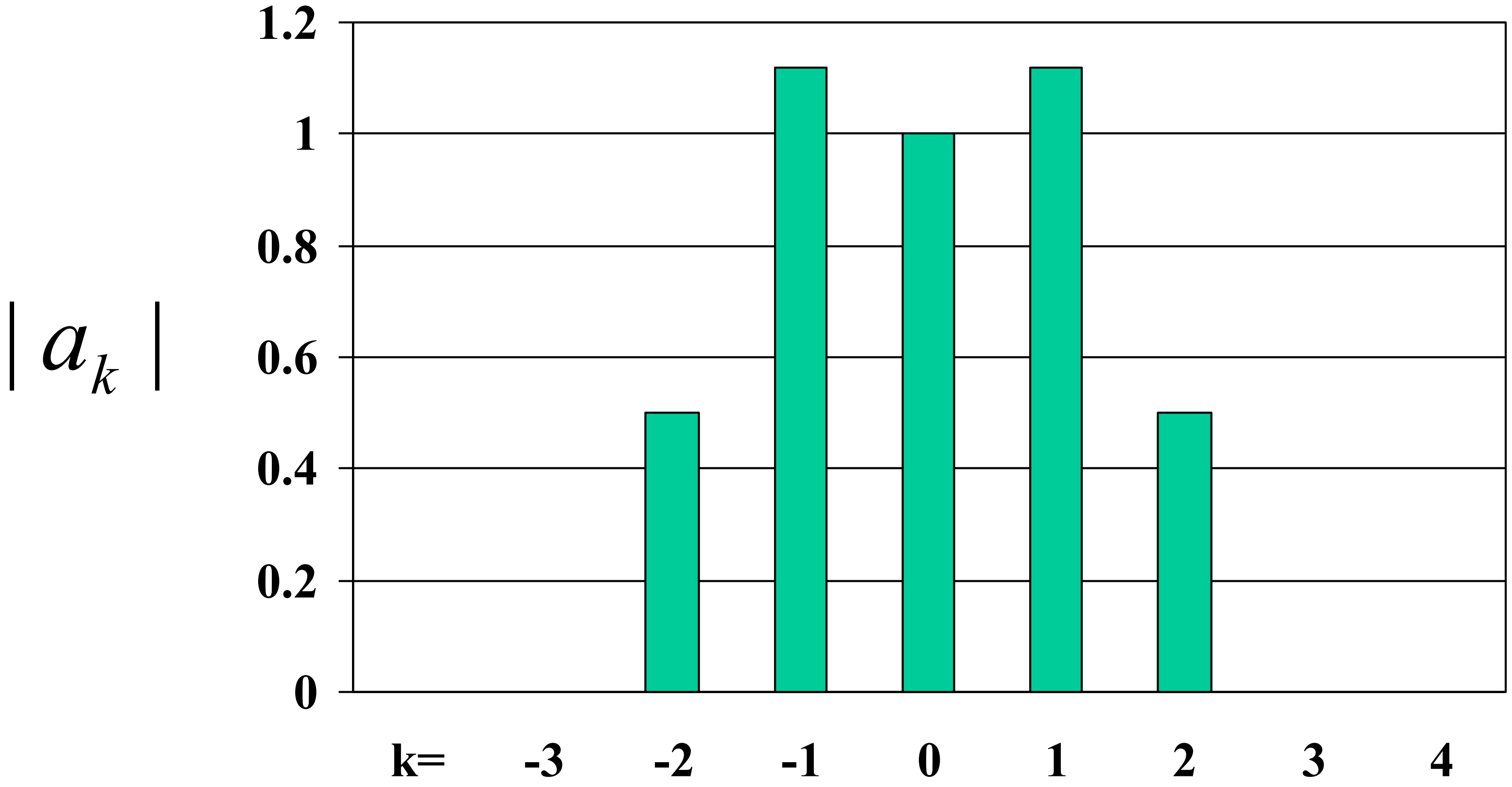
$$a_0 = 1, \quad a_1 = (1 + \frac{1}{2j}), \quad a_{-1} = (1 - \frac{1}{2j}),$$

$$a_2 = \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)}, \quad a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)},$$

$$a_k = 0 \quad \text{за} \quad |k| > 2.$$

Фуриеов ред

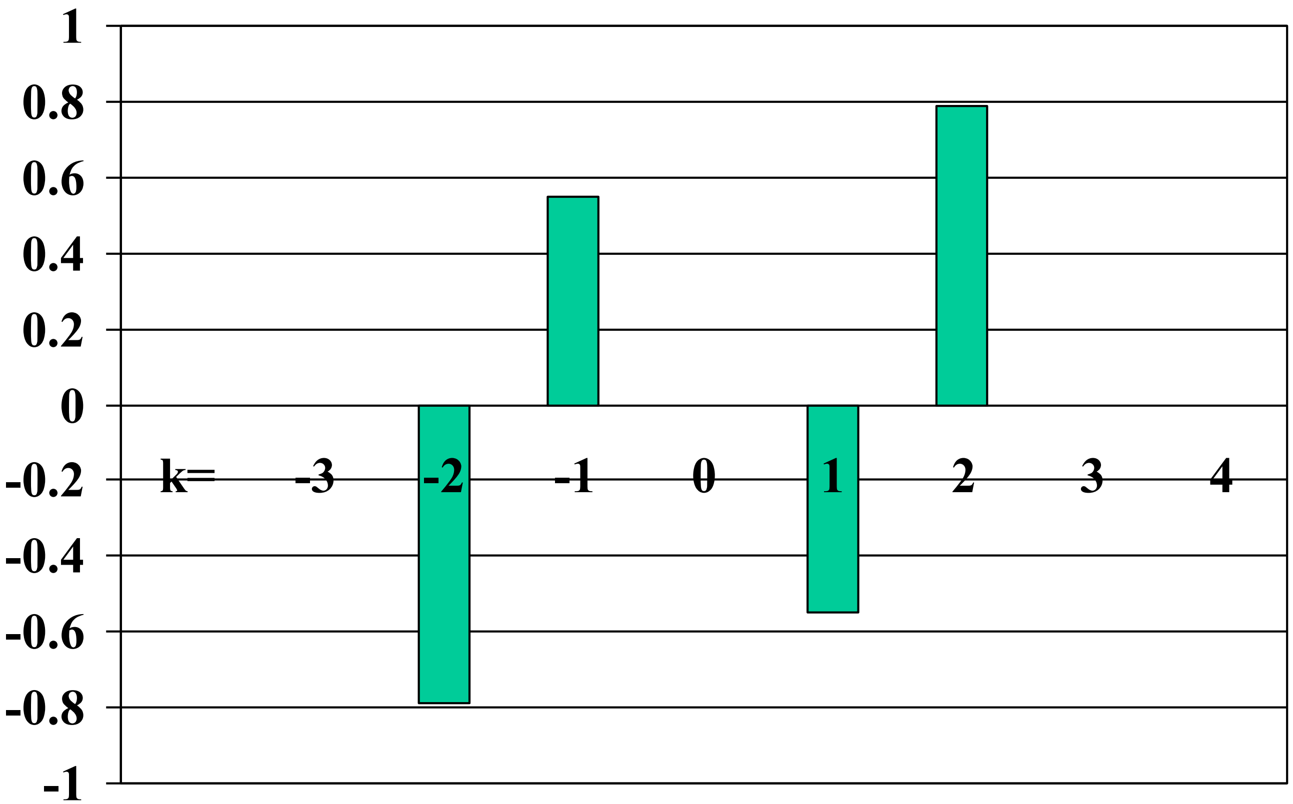
- Пример



Фуриеов ред

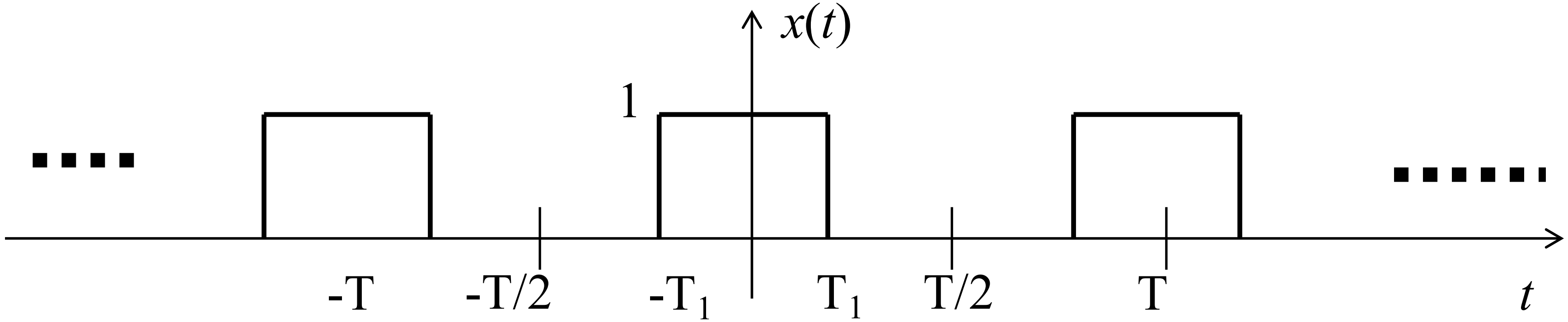
- Пример

$\angle a_k$



Фуриеов ред

- Пример



Основен период = T,

Основна фреквенција $\omega_0 = 2\pi/T$.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$$

Фуриеов ред

- Пример

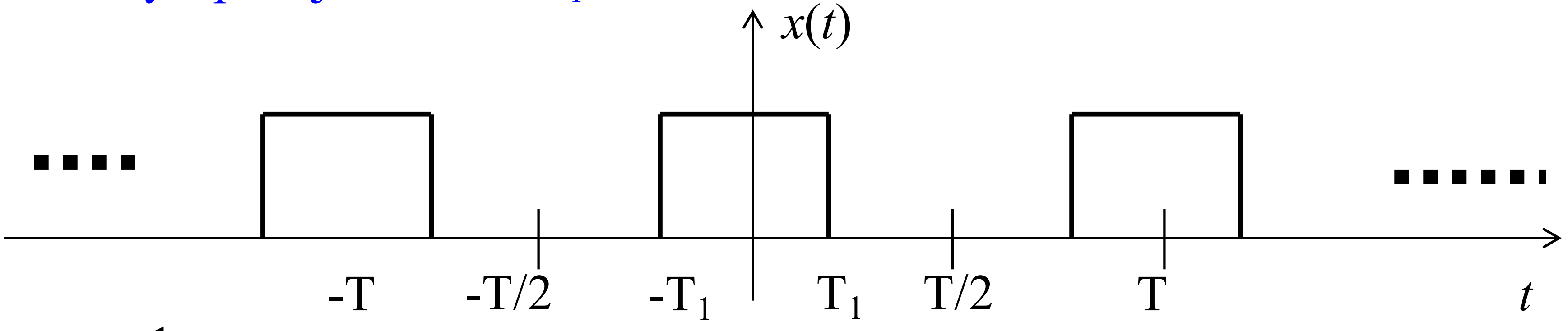
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1},$$

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right] = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

Фуриеов ред

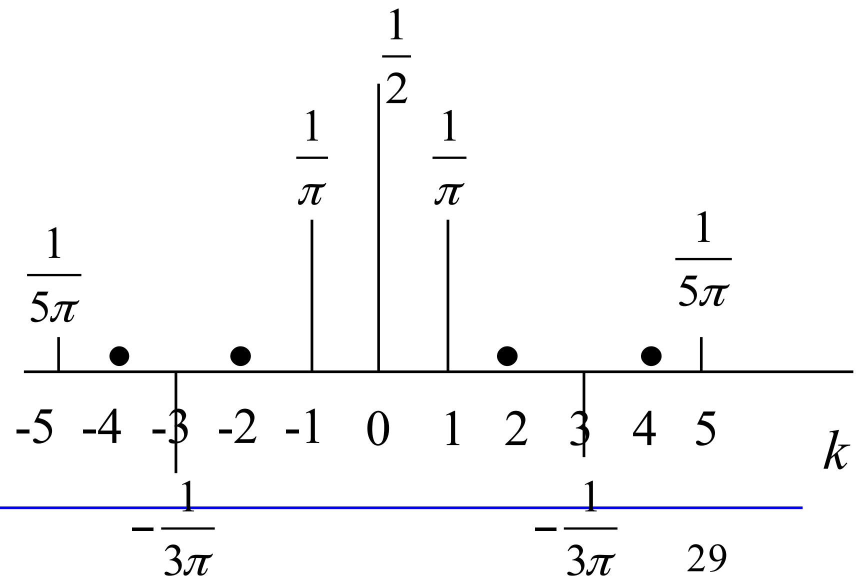
- Илустрација за $T = 4T_1$



$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$

- непарни хармоници
- $a_к$ реални
- $a_к = a_{-к}$ (симетрија)

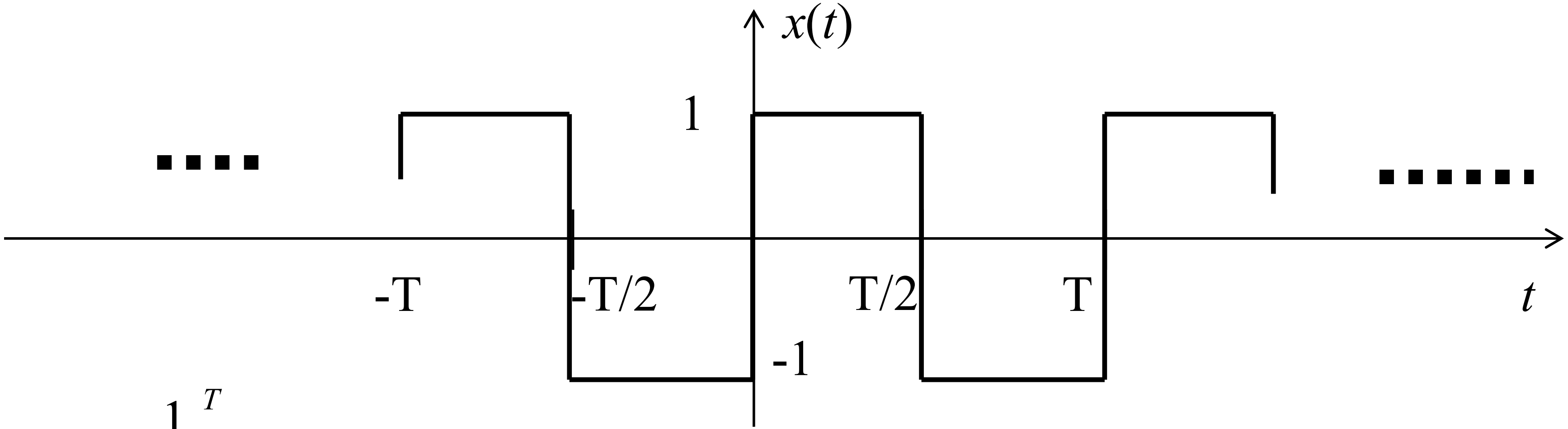


Фуриеов ред

- Демо http://dsp.feit.ukim.edu.mk/demos/Fourier series/index.html

Фуриеов ред

- Задача за вежбање



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T dt = 0$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0}(-1)e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2}(1)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

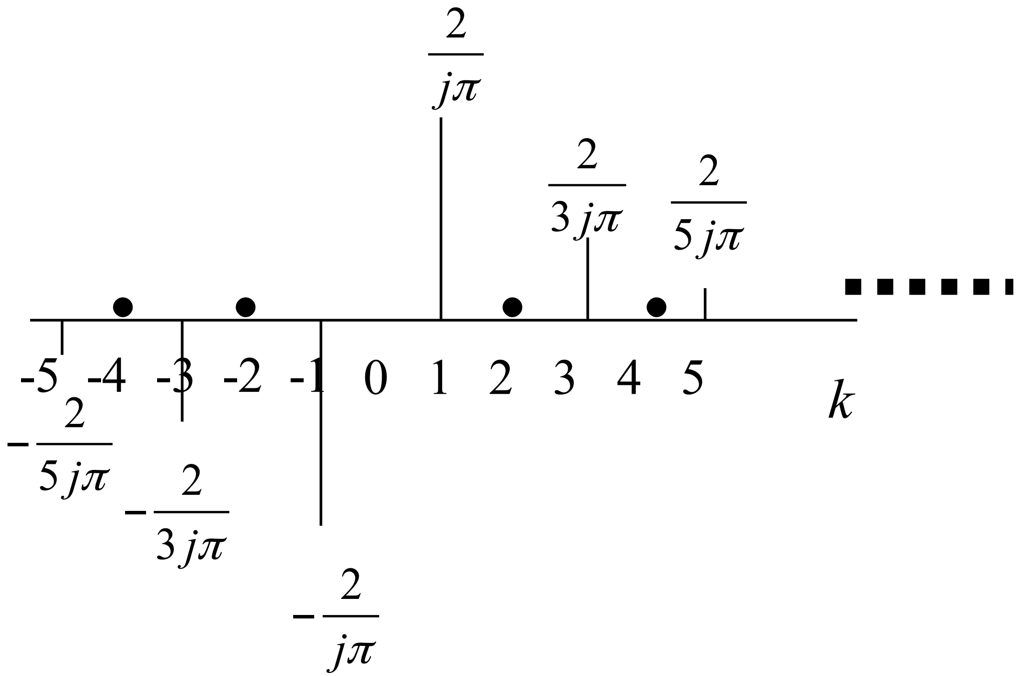
$$a_k = \frac{1}{jk\pi}\left\{1-(-1)^k\right\}, \quad k \neq 0$$

Фуриеов ред

- Задача за вежбање

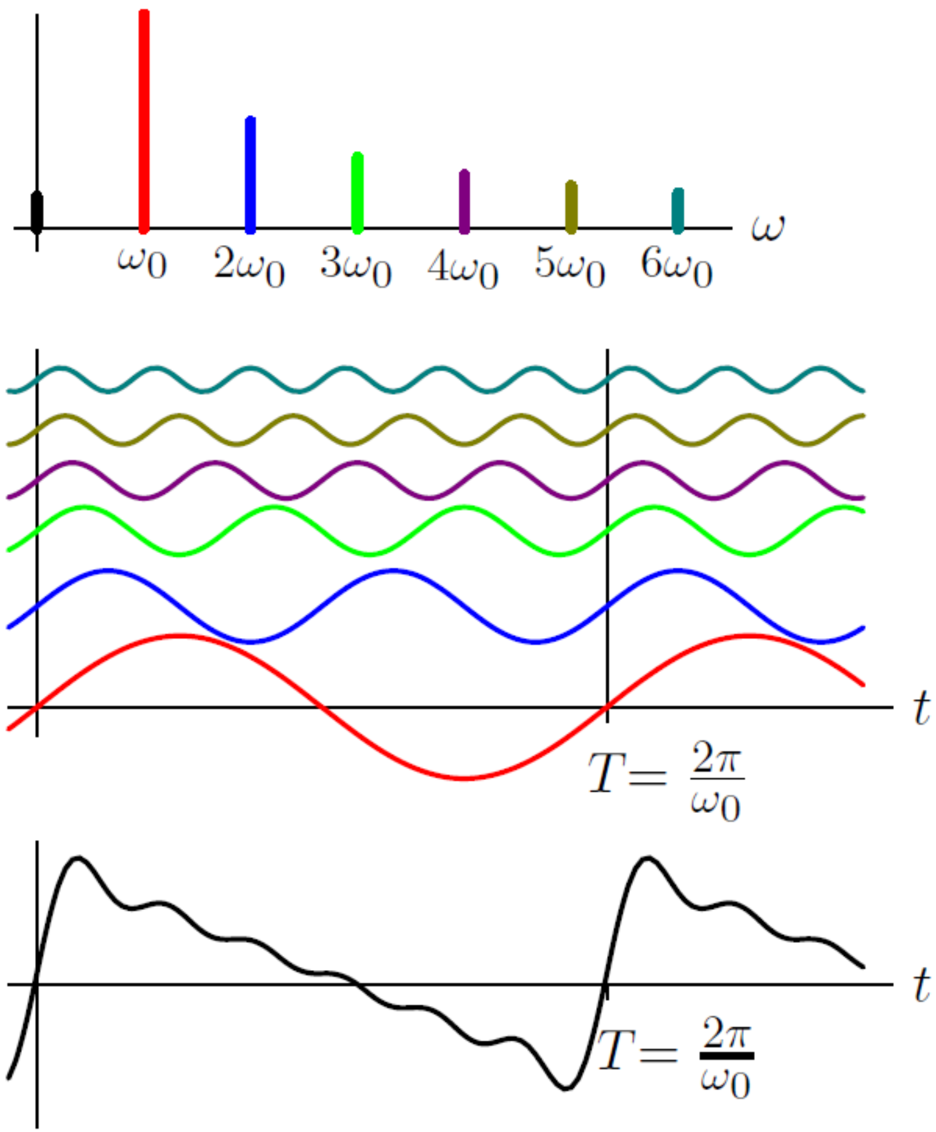
$$a_0 = 0$$

$$a_k = \frac{1}{jk\pi}\left\{1-(-1)^k\right\}, \quad k \neq 0$$



- непарни хармоници
- $a_к$ имагинарни
- $a_к = - a_{-к}$ (антисиметрија)

Конвергенција на Фуриеов ред



Конвергенција на Фуриеов ред

- Прашања
- Дали може да добиеме Фуриеова репрезентација за било кој периодичен сигнал?
- Со други зборови, дали коефициентите на Фуриеовиот ред се конечни односно дали интегралите конвергираат?
- Доколку коефициентите се конечни и се заменат во изразот за синтеза, дали бесконечната низа ќе конвергира или не кон оригиналниот сигнал x(t)?

Конвергенција на Фуриеов ред

- Дали секој сигнал може да се претстави со Фуриов ред?

- Апроксимација на даден периодичен сигнал $x(t)$ како линеарна комбинација на конечен број комплексни експоненцијални функции, т.е

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

нека $e_N(t)$ е грешката на апрокосимација....

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Како критериум користиме

$$E = \int_T |e_N(t)|^2 \; dt.$$

Конвергенција на Фуриеов ред

- Цел е да се минимизира оваа енергија

Се покажува дека истата е минимална за следниот избор

на коефициентите

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt.$$

а тое се коефициентите на Фуриеовиот ред

Значи, ако $x(t)$ може да се претстави во Фуриеов ред, најдобра апроксимација се добива со одреден број коефициенти од Фуриеовиот ред.

Со додавање на нови коефициенти, како N се зголемува, E_N се намалува

Конвергенција на Фуриеов ред

- Услови на Dirichlet
  - 1) $x(t)$ е апсолутно интеграбилна во интервал на еден период

$$\int_T |x(t)| < \infty.$$

$$|a_k| = \frac{1}{T}\int_T |x(t)e^{-jk\omega_0 t}|\,dt = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|\,dt$$

  - ако

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|\,dt < \infty$$

  - тогаш

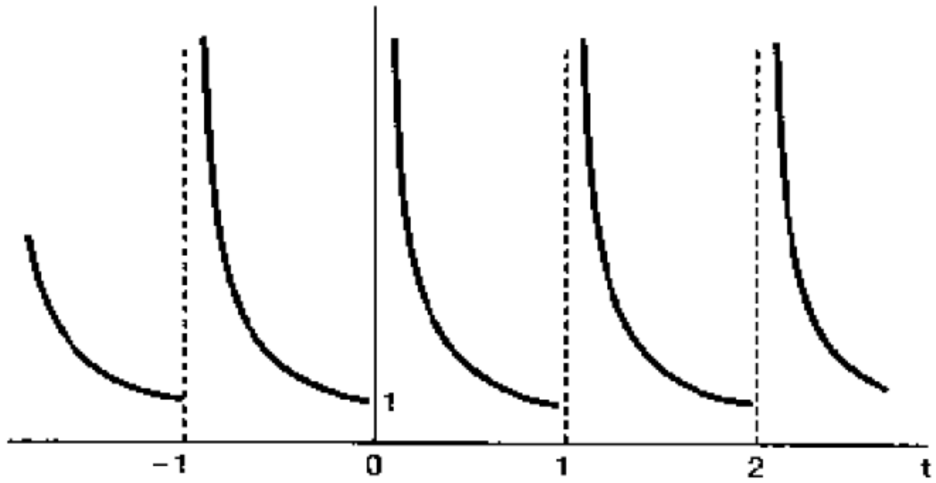
$$|a_k| < \infty$$

Конвергенција на Фуриеов ред

- Услови на Dirichlet
  - 1) $x(t)$ е апсолутно интеграбилна во интервал на еден период

$$\int_T |x(t)| < \infty.$$

  - Функција која не го задоволува овој услов

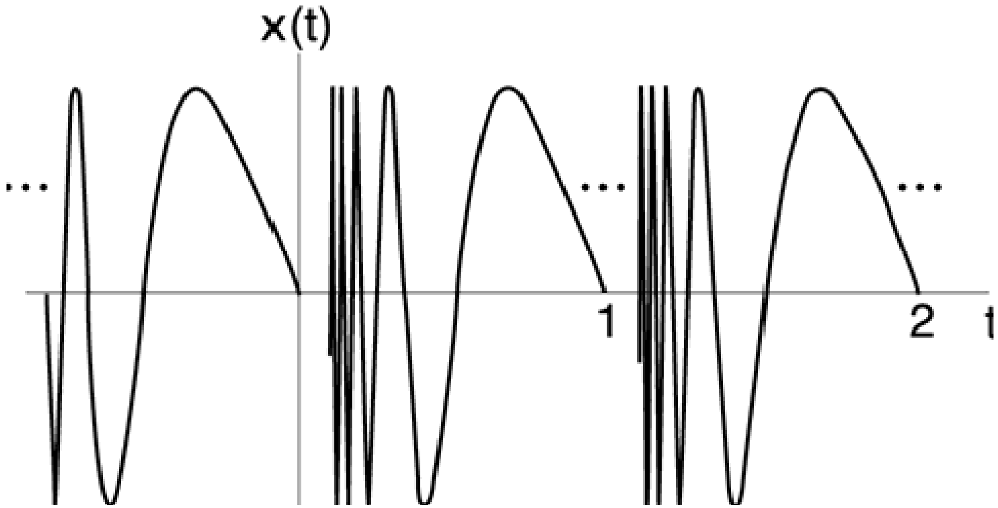


$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1$$

Конвергенција на Фуриеов ред

- Услови на Dirichlet
  – 2) во секој конечен интервал, $x(t)$ има конечен број на максимуми и мимимуми

  – Пример на функција која не го задоволува овој услов

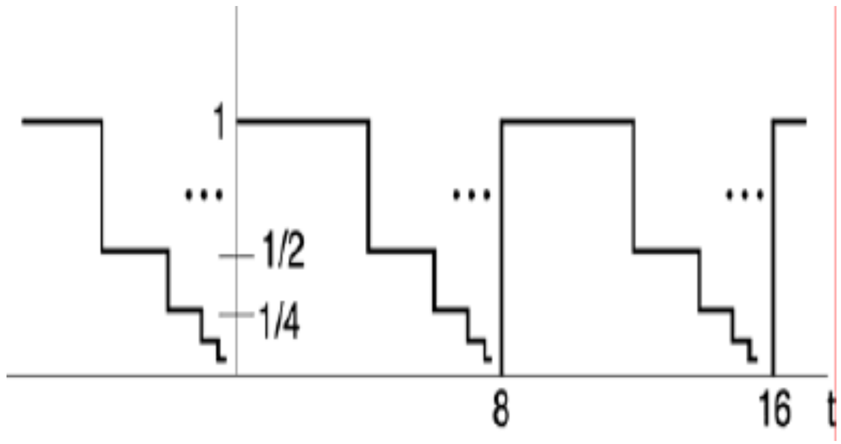


$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \le 1$$

Конвергенција на Фуриеов ред

- Услови на Dirichlet
  - 3) во секој конечен интервал, $x(t)$ има конечен број на дисконтинуитети

  - Пример на функција која не го задоволува овој услов



Конвергенција на Фуриеов ред

- Условите на Dirichlet се задоволени за големо множество на сигнали кои се среќаваат во реалниот свет.

- Фуриеов ред = $x(t)$ во точки каде $x(t)$ е континуирана
- Фуриеов ред = "средните вредности" во точките каде има дисконтинуитет

- Сепак, интересен случај-низа од правоаголни импулси

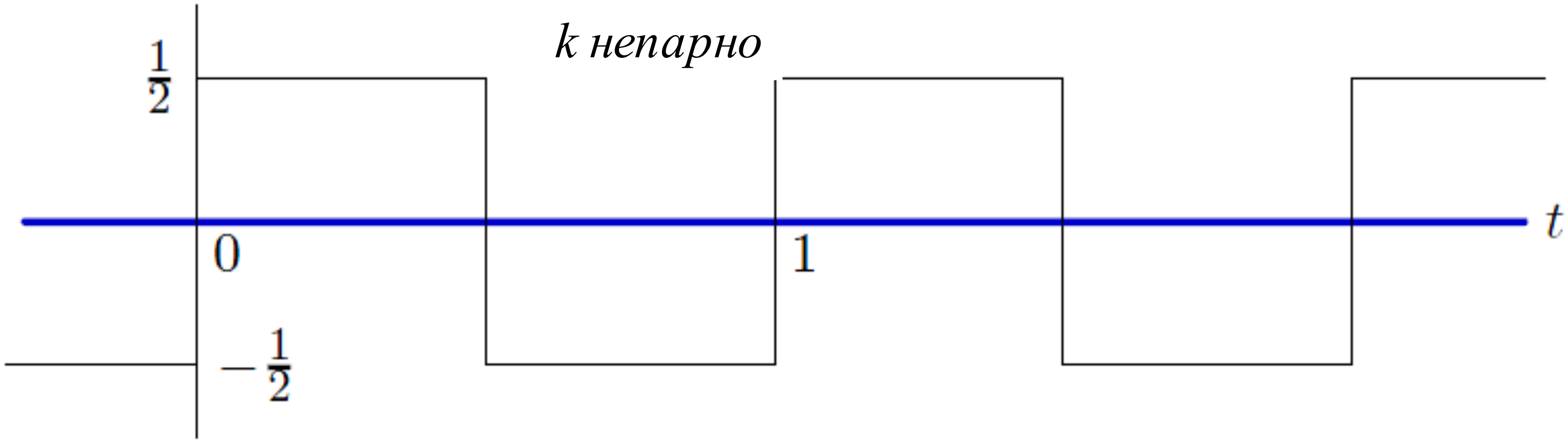
$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- Како $N \to \infty$, се јавува *Gibbs*-ов ефект во точките каде $x_N(t)$ има дисконтинуитети

- **Демо: Фуриов ред на низа од правоаголни импулси** (Gibbs ефект).

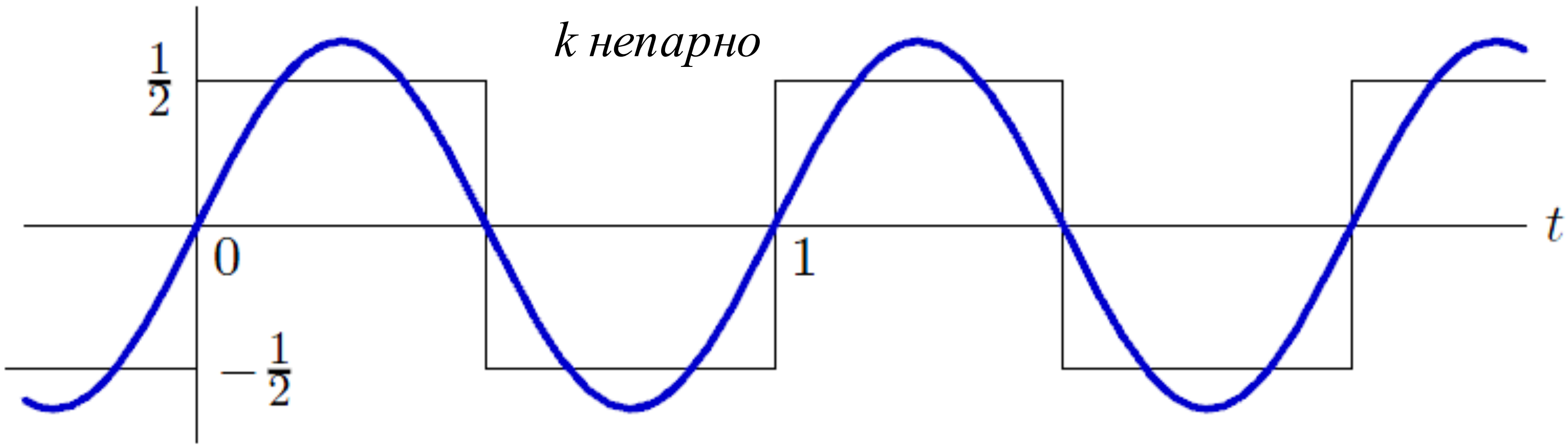
Gibbs-ов ефект

$$\sum_{\substack{k=-0 \\ k\ \text{непарно}}}^{0} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



Gibbs-ов ефект

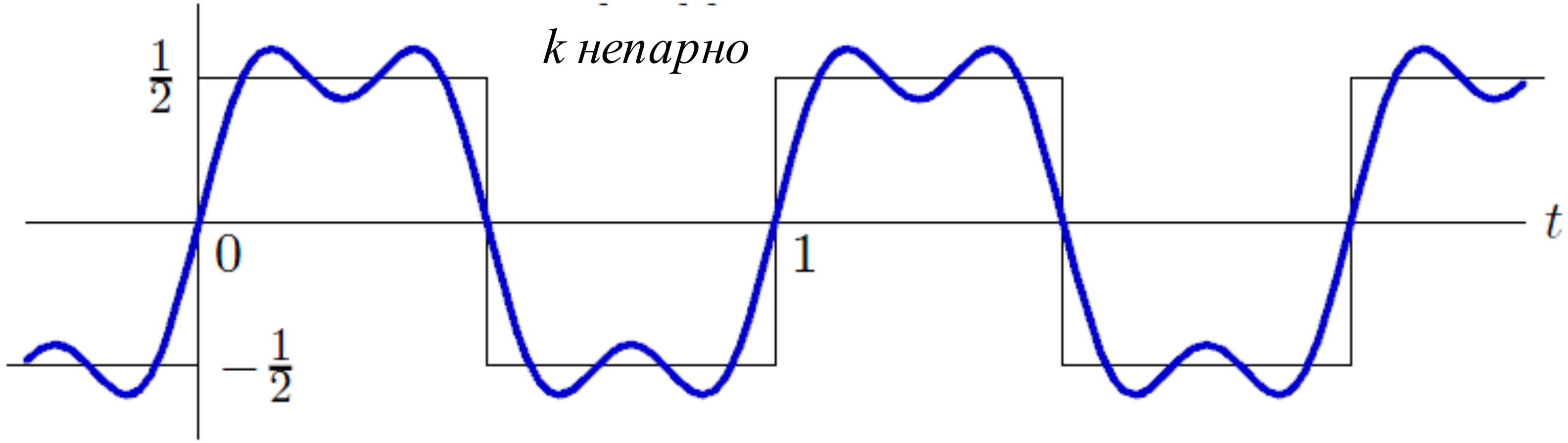
$$\sum_{\substack{k=-1 \\ k \text{ непарно}}}^{1} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



Gibbs-ов ефект

$$\sum_{k=-3}^{3} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$

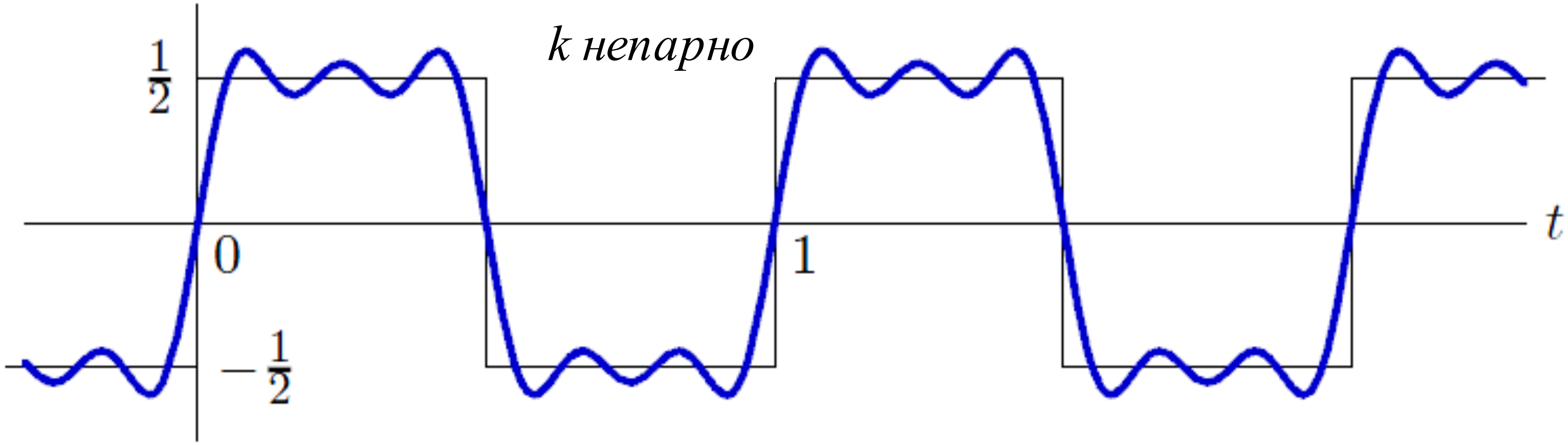
k непарно



Gibbs-ов ефект

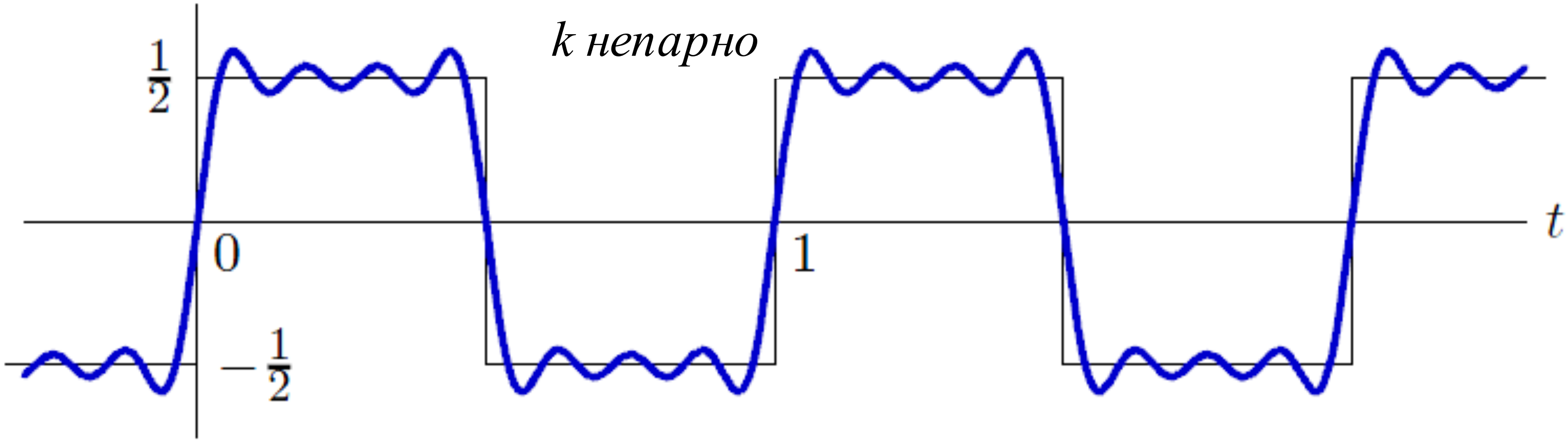
$$\sum_{k=-5}^{5} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$

k непарно



Gibbs-ов ефект

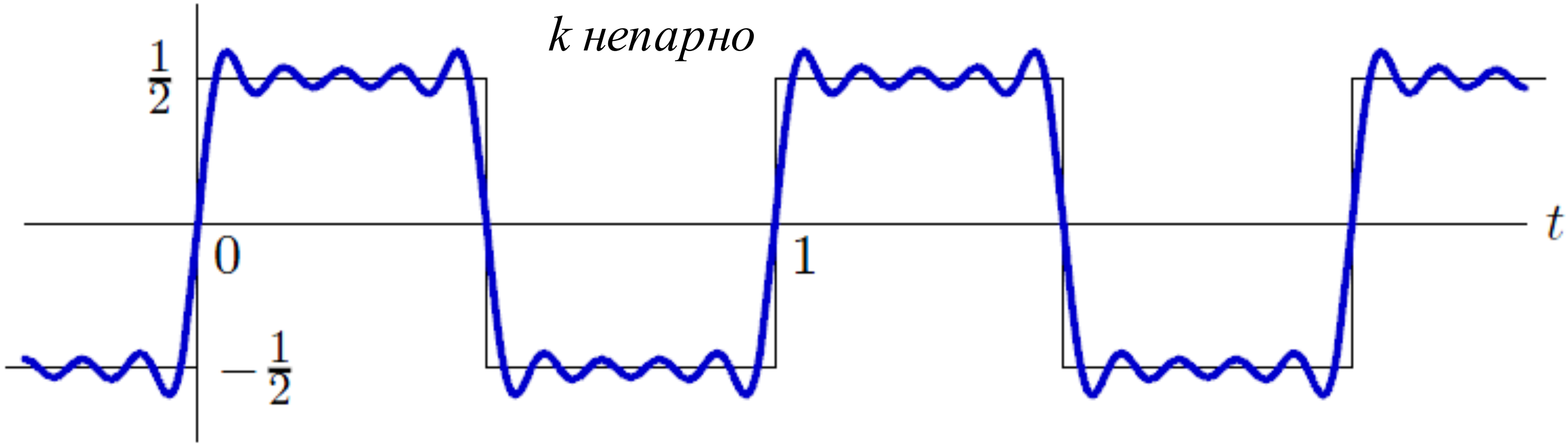
$$\sum_{\substack{k=-7 \\ k \text{ непарно}}}^{7} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



Gibbs-ов ефект

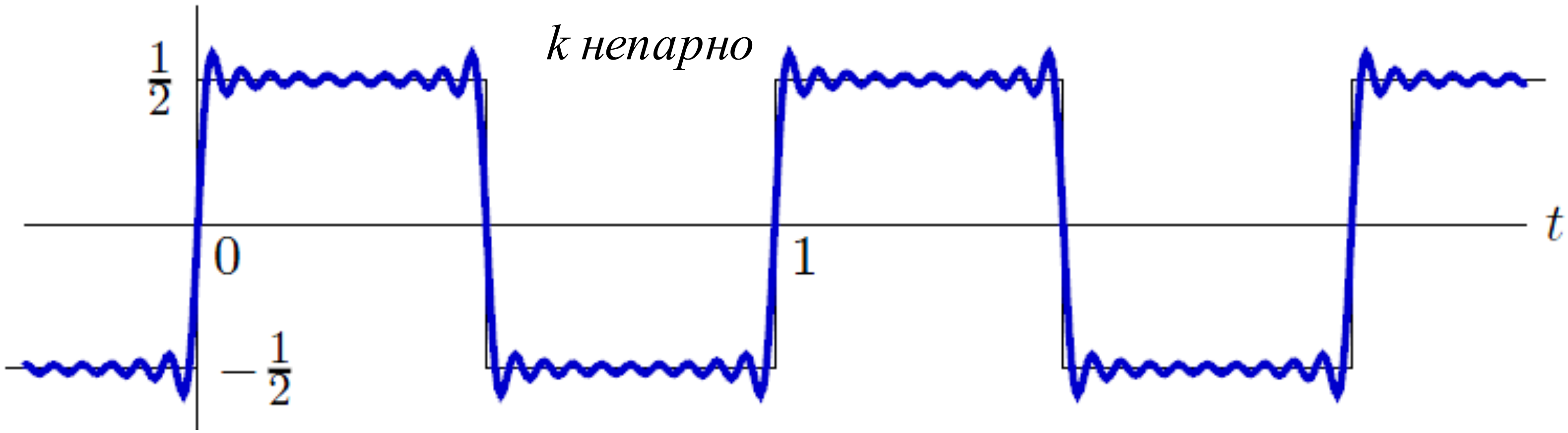
$$\sum_{k=-9}^{9} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$

k непарно



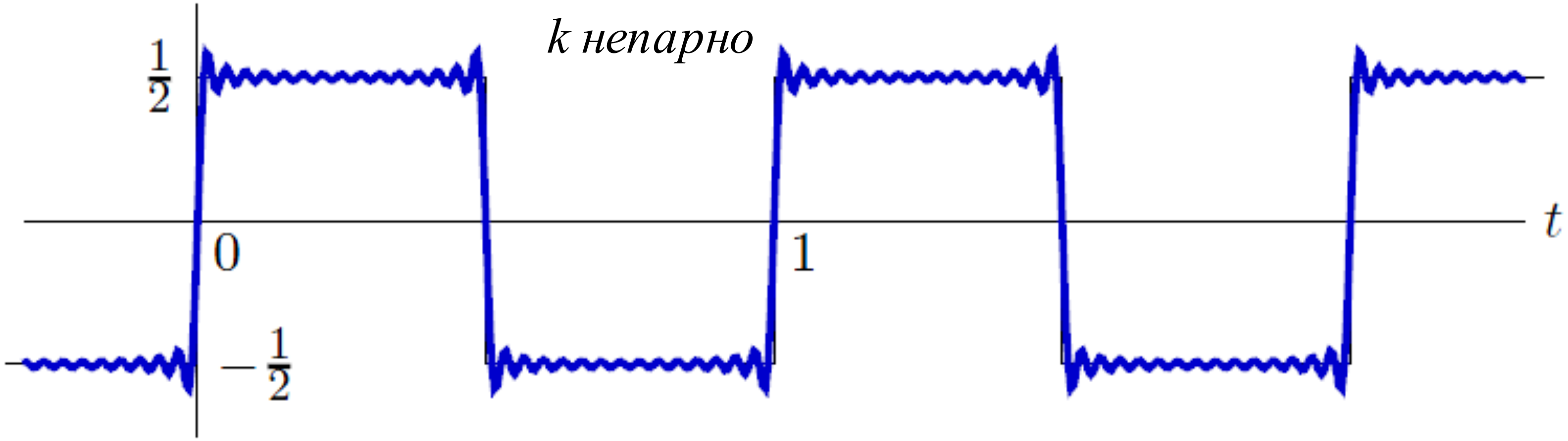
Gibbs-ов ефект

$$\sum_{\substack{k=-19 \\ k \text{ непарно}}}^{19} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



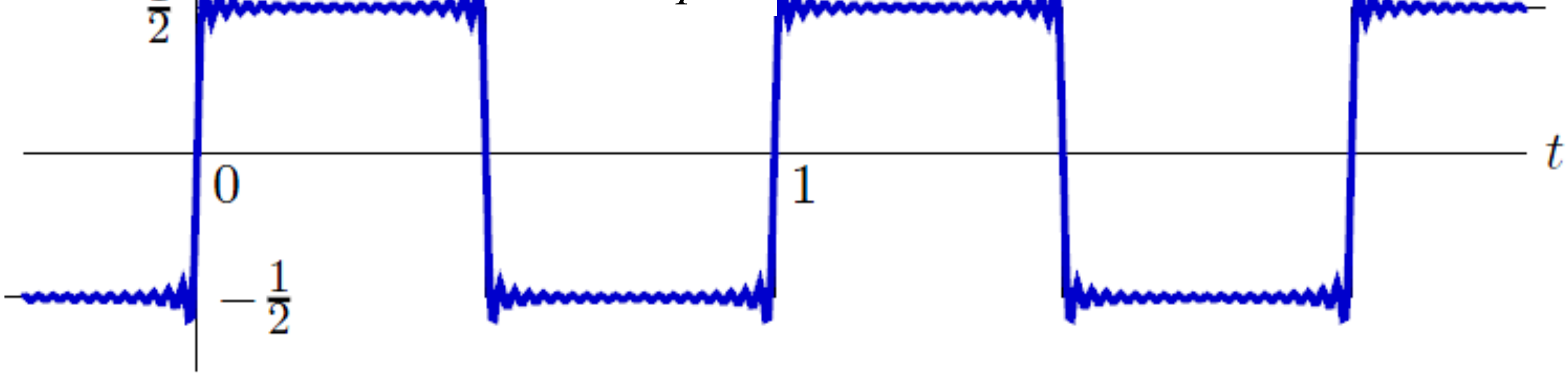
Gibbs-ов ефект

$$\sum_{\substack{k=-29 \\ k \text{ непарно}}}^{29} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi k t}$$



Gibbs-ов ефект

$$\sum_{\substack{k=-39 \\ k \text{ непарно}}}^{39} \frac{1}{jk\pi} e^{j2\pi kt}$$



Својства на Фуриеов ред

- Фуриеов пар

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

израз за синтеза

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$

израз за анализа

Својства на Фуриеов ред

- Линеарност

Нека $x(t)$ и $y(t)$ се два периодични сигнала со период T.

$$x(t) \Leftrightarrow a_k$$

$$y(t) \Leftrightarrow b_k,$$

каде $\Leftrightarrow$ означува Фуриеов пар.

Која било линеарна комбинација на овие сигнали ќе биде исто така периодична со периода T.

$$z(t) = Ax(t) + By(t).$$

$$z(t) \Leftrightarrow c_k,$$

каде $c_k = Aa_k + Bb_k$

Својства на Фуриеов ред

- Поместување

Со поместување на сигналот, не се менува неговиот период T.

$$y(t) = x(t-t_0).$$

$$x(t) \Leftrightarrow a_k,$$

$$y(t) \Leftrightarrow b_k,$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(t-t_0)e^{-jk\omega_0 t}dt.$$

со замена $\tau = t - t_0$, каде τ е повторно во интервал од еден период T, имаме:

$$\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0(\tau+t_0)}d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0}\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_0}a_k = e^{-jk\frac{2\pi}{T}t_0}a_k,$$

$$\boxed{y(t) = x(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0}a_k = e^{-jk\frac{2\pi}{T}t_0}a_k}$$

Својства на Фуриеов ред

- Превртен сигнал

Периодот на превртениот сигнал останува ист

$$y(t) = x(-t).$$

$$x(t) \Leftrightarrow a_k,$$

$$y(t) \Leftrightarrow b_k,$$

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}$$

со замена $k = -m$, имаме:

$$y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$$

$$\Rightarrow b_k = a_{-k}.$$

Својства на Фуриеов ред

- Превртен сигнал

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &\Leftrightarrow a_k, \\ x(-t) &\Leftrightarrow a_{-k}. \end{aligned}}$$

  – парен сигнал

$$x(-t) = x(t)$$

$$a_{-k} = a_k$$

  – непарен сигнал

$$x(-t) = -x(t)$$

$$a_{-k} = -a_k$$

Својства на Фуриеов ред

- Скалирање (множење со константа)

Се менува периодот на сигналот.

Ако $x(t)$ е периодичен со T и основна фреквенција $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$,

тогаш $x(\alpha t)$ е периодичен со период $\dfrac{T}{\alpha}$, и

основна фреквенција $\alpha\omega_0$.

Фуриеовите коефициенти остануваат исти

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

Својства на Фуриеов ред

- Множење

$$x(t) \Leftrightarrow a_k,$$

$$y(t) \Leftrightarrow b_{k,}$$

$$x(t)y(t) \Leftrightarrow h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}.$$

Множење во временски домен е еднакво на конволуција во фреквенциски домен

Својства на Фуриеов ред

- Диференцирање

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(jk\omega_0 a_k \right) e^{jk\omega_0 t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &\Leftrightarrow a_k, \\ \frac{dx(t)}{dt} &\Leftrightarrow jk\omega_0 a_k. \end{aligned}}$$

Својства на Фуриеов ред

- Коњугирање и коњугирана симетрија

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}, \text{ замена на } k \text{ со } -k,$$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) \Leftrightarrow a_k,$$

тогаш $x^*(t) \Leftrightarrow a_{-k}^*$

Својства на Фуриеов ред

- Коњугирање и коњугирана симетрија

$$x(t) \Leftrightarrow a_k,$$

тогаш $x^*(t) \Leftrightarrow a^*_{-k}$

Ако $x(t)$ е реален сигнал,

$x(t) = x^*(t).$

$a_{-k} = a_k^*$

Ако $x(t)$ е реален и парен,

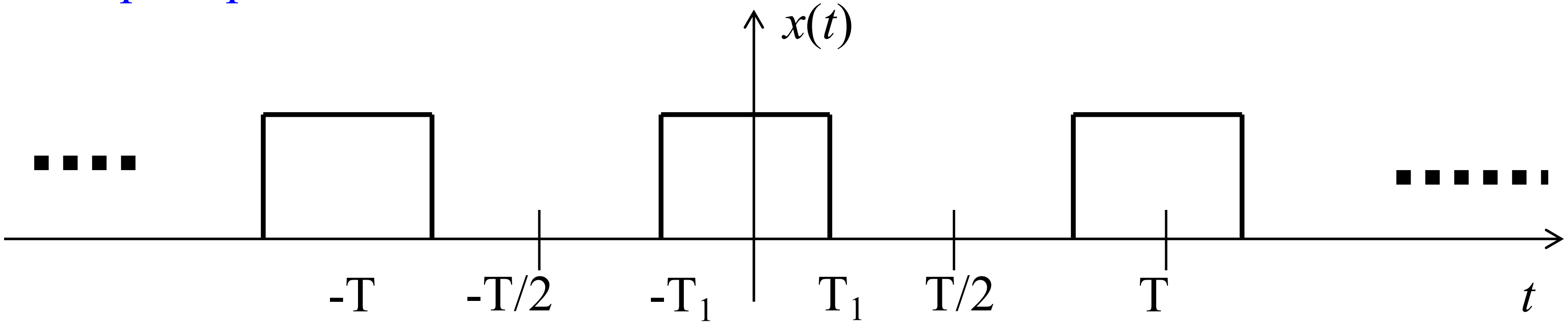
$a_k = a_{-k}$ (особина на превртен сигнал)

од $a_k^* = a_{-k} \Rightarrow a_k = a_k^*$

$\Rightarrow$ Фуриеовите коефициенти се реални и парни

Фуриеов ред

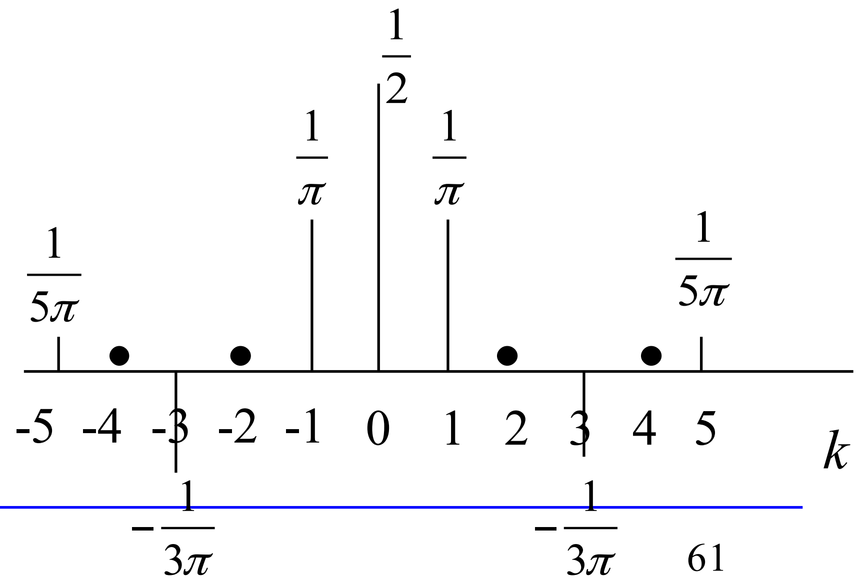
- Пример



$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$

- непарни хармоници
- a_κ реални
- $a_\kappa = a_{-\kappa}$ (симетрија)



Својства на Фуриеов ред

- Коњугирање и коњугирана симетрија

$$x(t) \Leftrightarrow a_k,$$

тогаш $x^*(t) \Leftrightarrow a^*_{-k}$

Ако $x(t)$ е реален сигнал,

$x(t) = x^*(t).$

$a_{-k} = a^*_k$

Ако $x(t)$ е реален и парен,

$a_k = a_{-k}$ (особина на превртен сигнал)

од $a^*_k = a_{-k} \Rightarrow a_k = a^*_k$

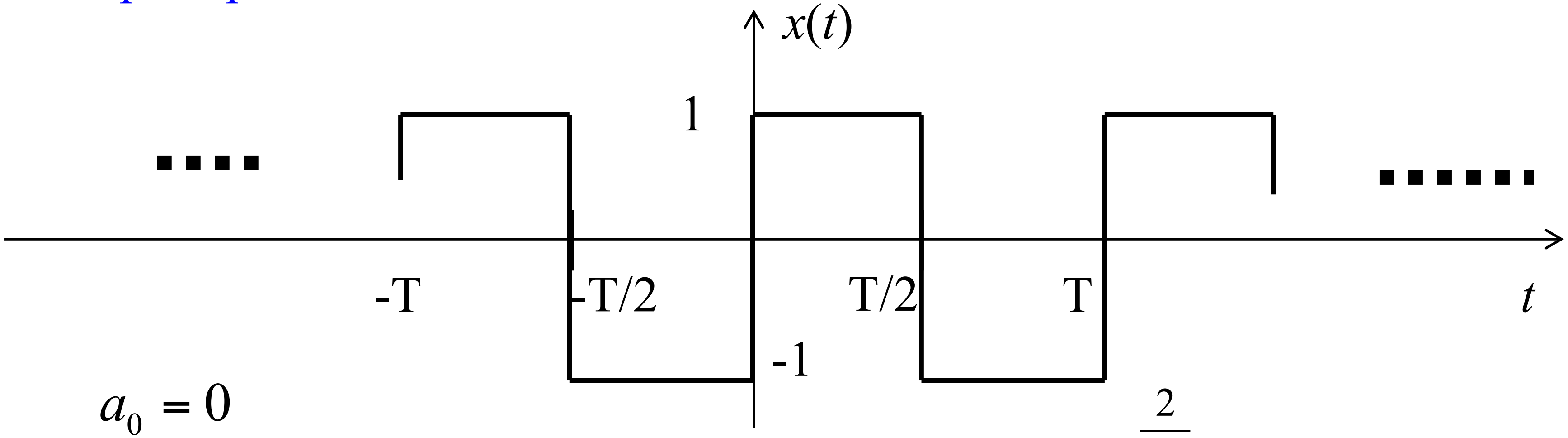
$\Rightarrow$ Фуриеовите коефициенти се реални и парни

Ако $x(t)$ е реален и непарен,

$\Rightarrow$ Фуриеовите коефициенти се имагинарни и непарни

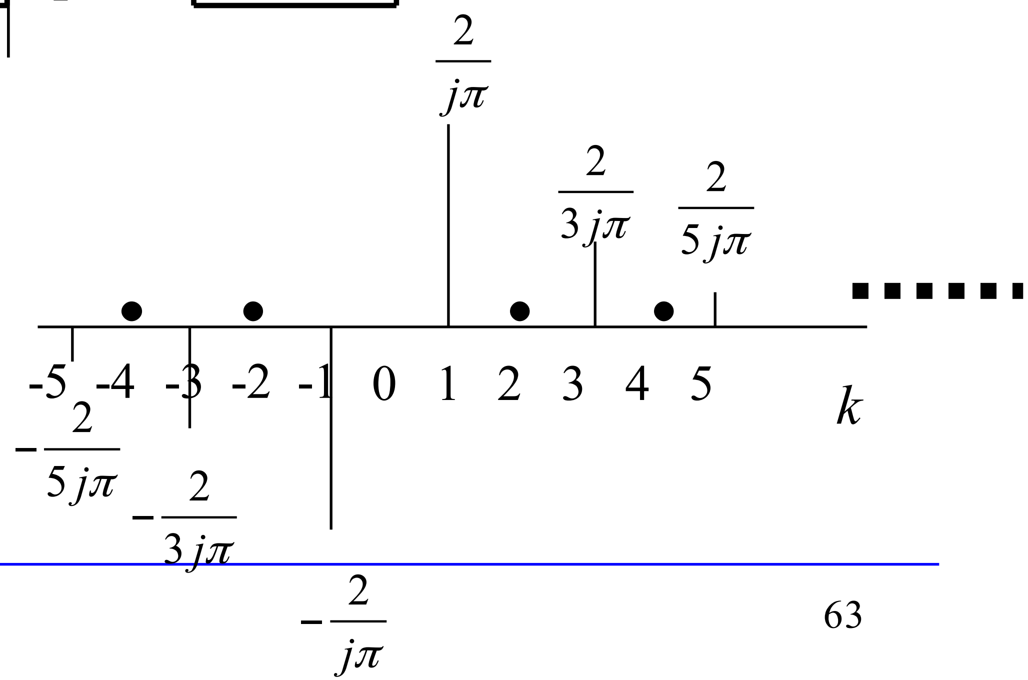
Фуриеов ред

- Пример



$$a_0 = 0$$

$$a_k = \frac{1}{jk\pi}\left\{1-(-1)^k\right\}, \quad k \neq 0$$



- непарни хармоници
- $a_к$ имагинарни
- $a_к = - a_{-к}$ (антисиметрија)

Својства на Фуриеов ред

- Парсевалов идентитет

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 .$$

– Средната моќност на периодичен сигнал е еднаква на сума од средните моќности на сите негови хармоници

$$\frac{1}{T}\int_T |a_k e^{jk\omega_0 t}|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_T |a_k|^2\,dt = |a_k|^2$$

средна моќност на k-ти хармоник

Својства на Фуриеов ред

- Пример: Коефициенти на Фуриеовиот ред на сигналот $x(t)$ се

$$a_k = \begin{cases} 2 & k = 0 \\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} & k \neq 0 \end{cases}$$

дали $x(t)$ е реален сигнал?

дали $x(t)$ е парен сигнал?

Ако $x(t)$ е реален сигнал,

$x(t) = x^*(t)$.

$\Rightarrow a_{-k} = a_k^*$

$\boxed{\text{НЕ}}$

Ако $x(t)$ е парен

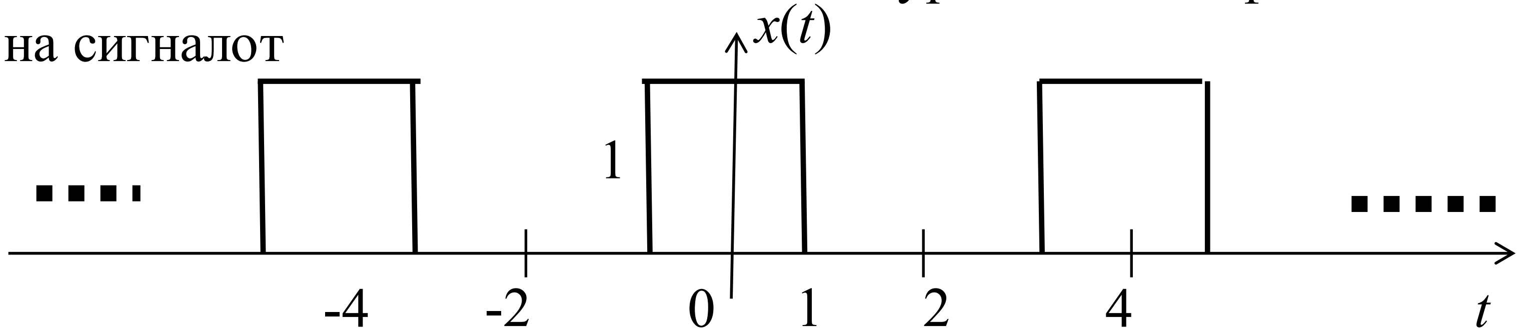
$x(-t) = x(t)$

$\Rightarrow a_{-k} = a_k$

$\boxed{\text{ДА}}$

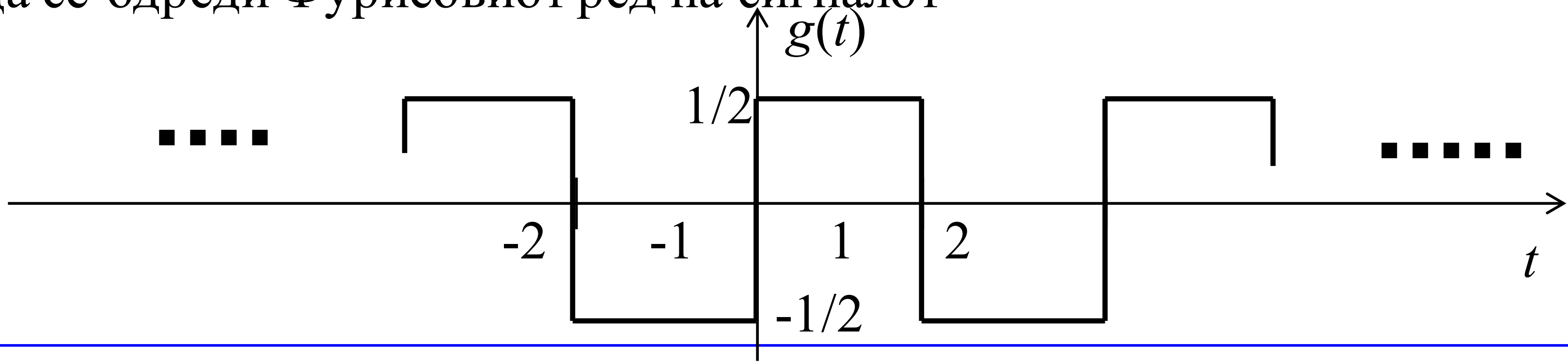
Својства на Фуриеов ред

- Задача за вежбање: Ако се познати Фуриеовите коефициенти на сигналот



$$a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_k = \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$

да се одреди Фуриеовиот ред на сигналот



Својства на Фуриеов ред

- Задача за вежбање $g(t) = x(t-1) - 1/2$
  - Коефициентите на сигналот $x(t-1)$

$$b_k = a_k e^{-jk\pi/2}$$

  - На константниот член -1/2

$$c_k = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & k = 0 \end{cases}$$

  - Од линеарност, коефициентите на $g(t) = x(t-1) - 1/2$

$$d_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2} & k \neq 0 \\ a_0 - \dfrac{1}{2} & k = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi k/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$