# LTI Системи опишани со линеарна диференцијална равенка

- Фреквенциска карактеристика:

**Фуриеова трансформација на импулсниот одзив**

$$H(j\omega) = FT\left\{h(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

$\left|H(j\omega)\right|$ **амплитудна карактеристика**

$\angle H(j\omega)$ **фазна карактеристика**

# LTI Системи опишани со линеарна диференцијална равенка

- Фреквенциска карактеристика:

**Фуриеова трансформација на импулсниот одзив**

$$H(j\omega) = FT\left\{h(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

- Услов за нејзино постоење
  - Ако се работи за **стабилен систем** (еден од трите услови на Dirichlet)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)\right| dt < \infty$$

фреквенциската к-ка е дефинирана

# LTI Системи опишани со линеарна диференцијална равенка

- Фреквенциска карактеристика: одредување
  - Врска помеѓу влезниот и излезниот сигнал кај LTI систем

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

  - Нека побараме Фуриеова трансформација од двете страни на диференцијалната равенка

$$FT\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y}{dt^k}\right\} = FT\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x}{dt^k}\right\}$$

  - користејки ги особините за линеарност и диференцирање добиваме

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \xleftrightarrow{FT} (j\omega)^k X(j\omega)$$

# LTI Системи опишани со линеарна диференцијална равенка

- Фреквенциска карактеристика: одредување

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}}_{H(j\omega)} X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

# LTI Системи опишани со линеарна диференцијална равенка

- Фреквенциска карактеристика

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

  - Дробно-рационална функција од ($j\omega$)
  - Истите коефициенти од диференцијалната равенка
  - => фреквенциската карактеристика на системот може да се добие директно од диференцијалната равенка.

  - Корените на полиномот во броителот се **нули**, а корените во именителот се **полови** на фреквенциската карактеристика

# LTI Системи опишани со линеарна диференцијална равенка

- Фреквенциска карактеристика
  - Пример: LTI систем е опишан со диф. равенка

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t), \quad a > 0$$

  - Неговата фреквенциска карактеристика ќе биде

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

  - Импулсниот одзив на системот е

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

# LTI Системи опишани со линеарна диференцијална равенка

- Фреквенциска карактеристика
  - Пример: LTI систем е опишан со диф. равенка

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t),$$

  - Неговата фреквенциска карактеристика ќе биде

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3}$$

  - Инверзна FT: разложување на прости дробно-рационални функции

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega)+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$$

# LTI Системи опишани со линеарна диференцијална равенка

- Фреквенциска карактеристика

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)}$$

Со разложување на прости дробно-рационални функции....

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 3}$$

инверзна FT

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-3t} u(t)$$

# LTI Системи опишани со линеарна диференцијална равенка

- Одредување на одзив
  - Пример: Влезен сигнал на системот од претходниот пример $x(t) = e^{-t}u(t)$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \left[\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}\right]\left[\frac{1}{j\omega+1}\right]$$

$$= \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}$$

$$Y(j\omega) = \frac{A_{11}}{j\omega+1} + \frac{A_{12}}{(j\omega+1)^2} + \frac{A_{21}}{j\omega+3}$$

$$Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{j\omega+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega+1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{j\omega+3} \qquad y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t)$$

# LTI Системи опишани со линеарна диференцијална равенка

- Задача за вежбање
  - Пример: Сигналот $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$ е излезен сигнал на LTI систем со импулсен одзив

$$h(t) = e^{-3t}u(t)$$

  - Да се одреди влезниот сигнал $x(t)$.

# LTI Системи опишани со линеарна диференцијална равенка

- Задача за вежбање
  - Пример: Да се најде Фуриеова трансформација на сигналот

    $$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

  - Сигналот $x(t)$ е влезен сигнал на каузален LTI систем со фреквенциска карактеристика

    $$H(j\omega) = \frac{j\omega}{1 - e^{-j\omega}}$$

  - Да се одреди излезниот сигнал $y(t)$