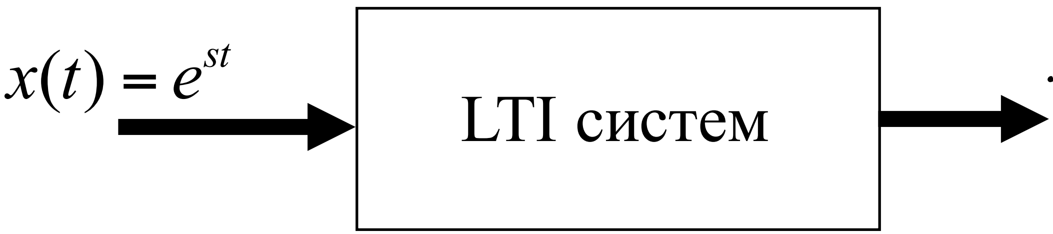
- Лапласова трансформација
  - Мотивација и дефиниција
- Област на конвергенција
- Инверзна Лапласова трансформација
- Особини на Лапласова трансформација
- Лапласова трансформација и LTI системи

Лапласова трансформација

- CT LTI систем



$$y(t) = \underbrace{H(s)}_{\text{собствена вредност}}\,\underbrace{e^{st}}_{\text{собствена функција}}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

$$y(t) = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = H(s)e^{st}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Лапласова трансформација

- Лапласова трансформација

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \quad (\text{каде } s = \sigma + j\omega)}$$

  – Лапласовиот трансформационен пар се означува

$$x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s).$$

- Врска меѓу Лапласова и Фуриеова трансформација

  – Кога $\sigma = 0, s = j\omega$

  Лапласовата трансформација поминува во Фуриеова

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad (\text{со } s = 0 + j\omega)$$

Лапласова трансформација

- Лапласова трансформација може да постои и доколу Фуриеова не постои.

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt \quad (\text{со} \quad s=\sigma+j\omega)$$

  – За $s=\sigma+j\omega,\quad X(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$

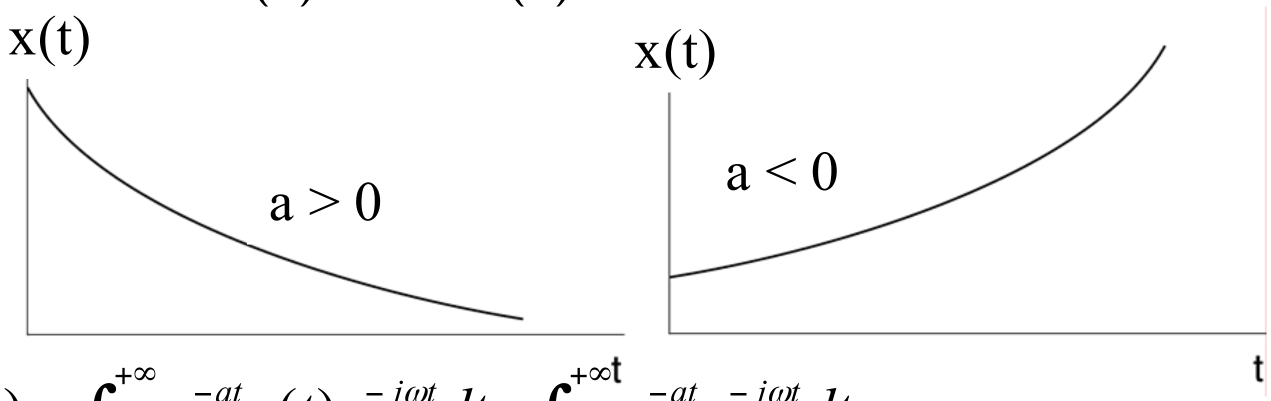
потребна е апсолутна интеграбилност

$$X(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)e^{-\sigma t}]\,e^{-j\omega t}dt$$

  – Ова е Фуриеова трансформација на $x(t)e^{-\sigma t}$

Лапласова трансформација

- Пример 1 $x(t) = e^{-at}u(t)$



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$= \left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{-(a+j\omega)}[e^{-(a+j\omega)\infty} - 1]$$

$$= \frac{1}{(a+j\omega)}, \quad \text{за } a > 0$$

За $a < 0$, Фуриеова трансформација не постои

Лапласова трансформација

- Пример 2 $x(t) = e^{-at}u(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt \qquad \text{со } s = \sigma + j\omega$$

$$X(\sigma + j\omega) = \left.\frac{e^{-(a+\sigma+j\omega)t}}{-(a+\sigma+j\omega)}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{-(a+\sigma+j\omega)}\left[e^{-(a+\sigma+j\omega)\infty} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{(a+\sigma+j\omega)}, \quad a+\sigma > 0, \quad \mathrm{Re}\{s\} = \sigma > -a$$

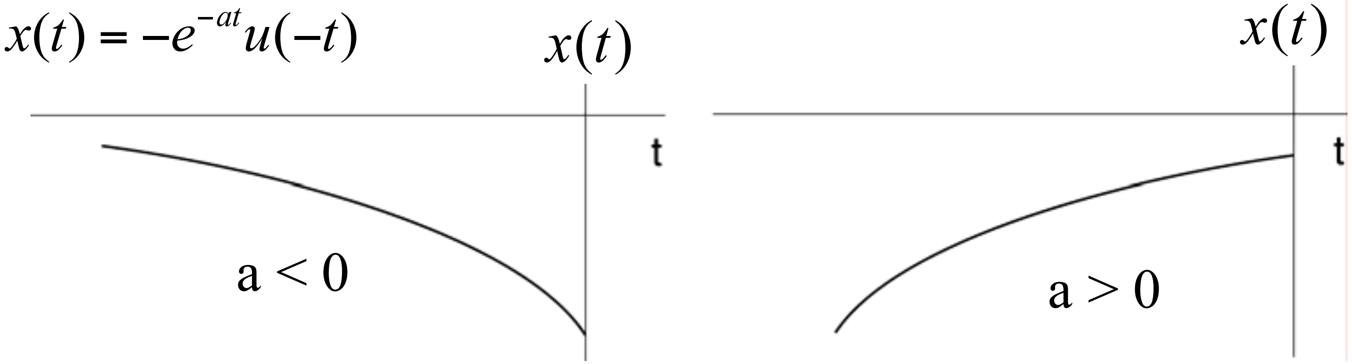
$$\boxed{e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a}$$

за $a = 0, \quad x(t) = u(t), \quad \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$

за $a < 0$, LT постои доколку $\Re e\{s\} > -a$, и покрај тоа што FT не постои

Лапласова трансформација

- Пример 3 $x(t) = -e^{-at}u(-t)$



$$X(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-at}e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}$$

$$= -\left.\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+a}\left[1 - e^{(s+a)\infty}\right].$$

за конвергенција треба $\mathrm{Re}\{s+a\} < 0$, или $\mathrm{Re}\{s\} < -a$.

$$\boxed{-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -a}$$

Лапласова трансформација

- Пример

$$e^{-at}u(t) \stackrel{LT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a.$$

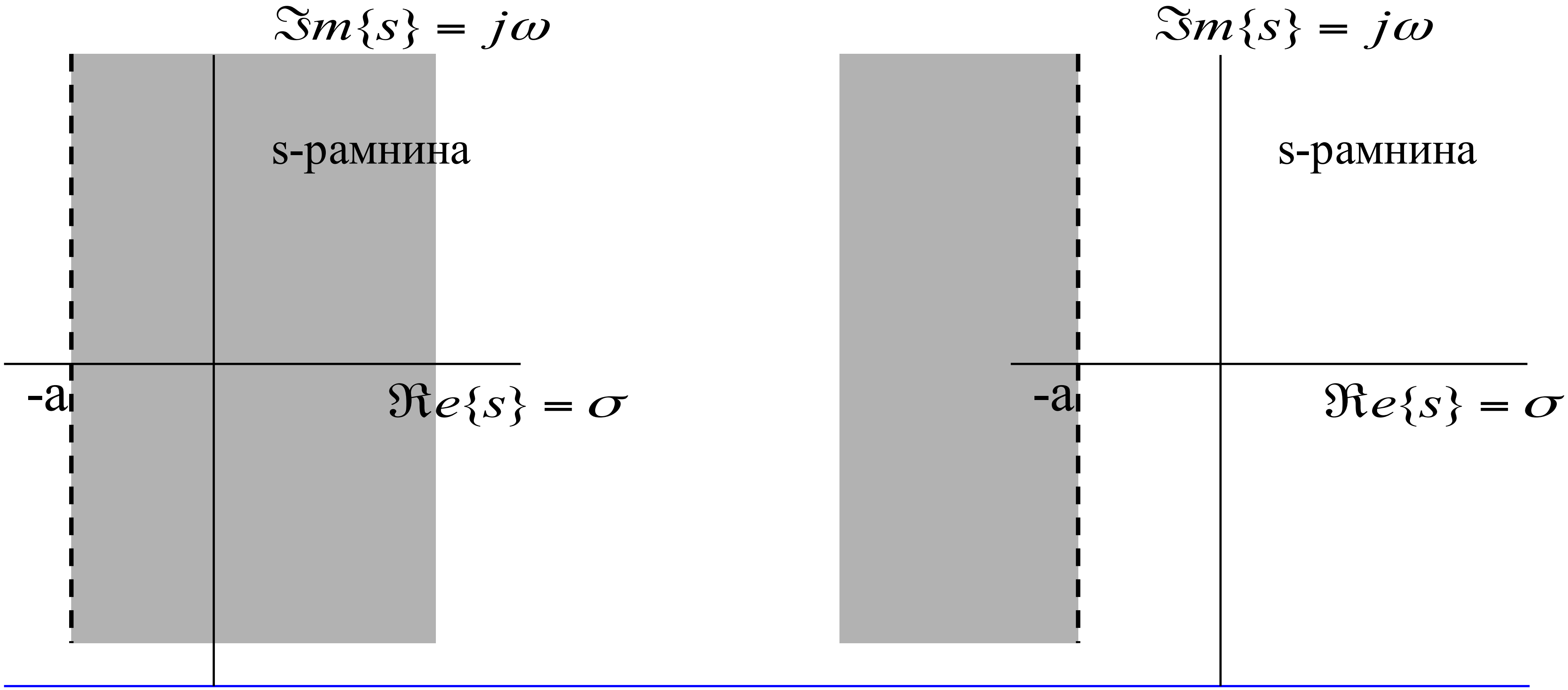
$$-e^{-at}u(-t) \stackrel{LT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -a.$$

- Лапласовите трансформации на двата сигнала се исти.
- Се разликуваат единствено во множеството вредности на *s* за кои овие Лапласови трансформации постојат (интегралите конвергираат)
- Овие вредности на *s* ја дефинираат *областа на ковергенција* (ROC-Region of Convergence) на Лапласовата трансформација
- Основна разлика со FT: Потребни се X(*s*) и ROC за еднозначно одредување на *x*(*t*)

Лапласова трансформација

- Пример

$x(t) = e^{-at}u(t)$ $\qquad\qquad$ $x(t) = -e^{-at}u(-t)$



Лапласова трансформација

- Пример 4 $x(t) = 3e^{2t}u(t) - 2e^{-t}u(t).$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a.$$

$$3e^{2t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{3}{s-2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 2.$$

$$2e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{2}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1.$$

- Множество на вредности на $\mathrm{Re}\{s\}$ за кои ЛТ на двата члена конвергира е $\mathrm{Re}\{s\} > 2.$

$$X(s) = \frac{3}{(s-2)} - \frac{2}{(s+1)} = \frac{s+7}{(s+2)(s+1)} = \frac{s+7}{s^2-s-2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 2.$$

Лапласова трансформација

- Пример $x(t) = 3e^{2t}u(t) - 2e^{-t}u(t).$ $\mathrm{X(s)} = \dfrac{s+7}{s^2 - s - 2}, \quad \mathrm{Re}\{\mathrm{s}\} > 2.$

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Корени на $N(s)$ = нули на $X(s)$

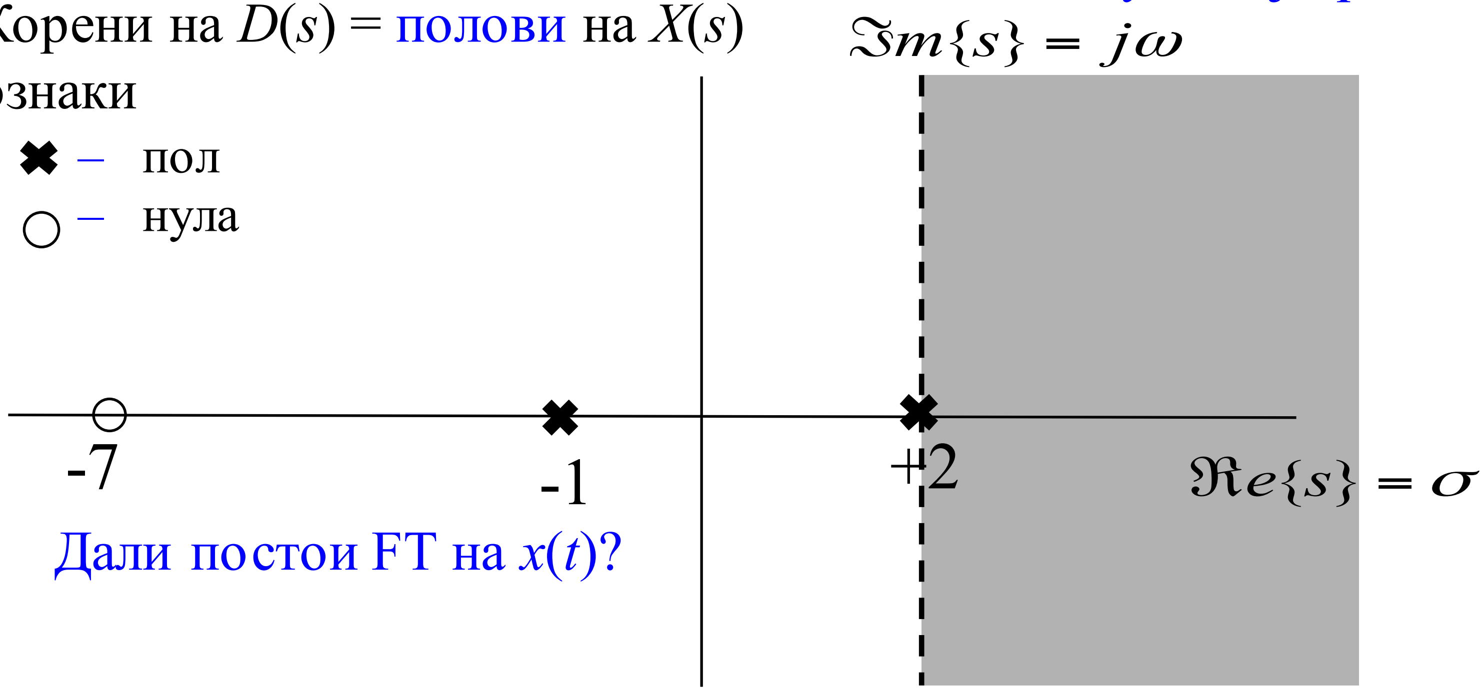
Корени на $D(s)$ = полови на $X(s)$

ознаки

✖ – пол

○ – нула

пол-нула дијаграм



- Дали постои FT на $x(t)$?

Област на конвергенција

- **ROC може да има неколку различни форми**

1) ROC се состои од прави паралелни на $j\omega$ -оската во s-рамнината (т.е. ROC зависи само од σ).

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)e^{-st}\right|dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)e^{-\sigma t}\right|dt < \infty \text{ зависи само од } \sigma = \Re e\{s\}$$

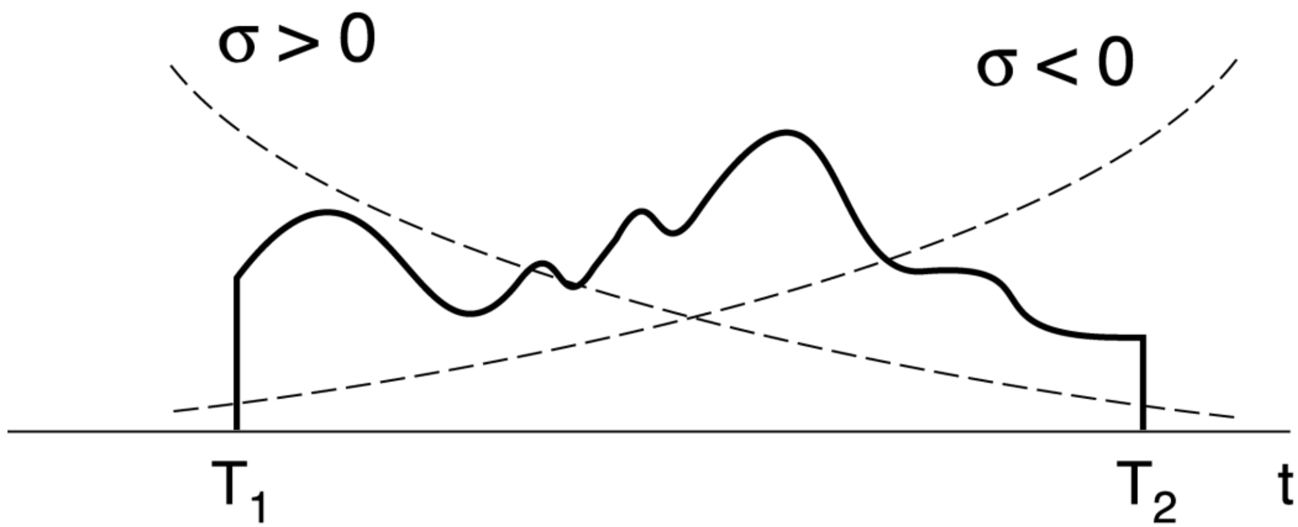
2) Ако $X(s)$ е рационална функција, тогаш ROC не содржи ниту еден пол.

Половите се добиваат за D(s) = 0

$$\Rightarrow X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \infty \qquad \text{не конвергира}$$

Област на конвергенција

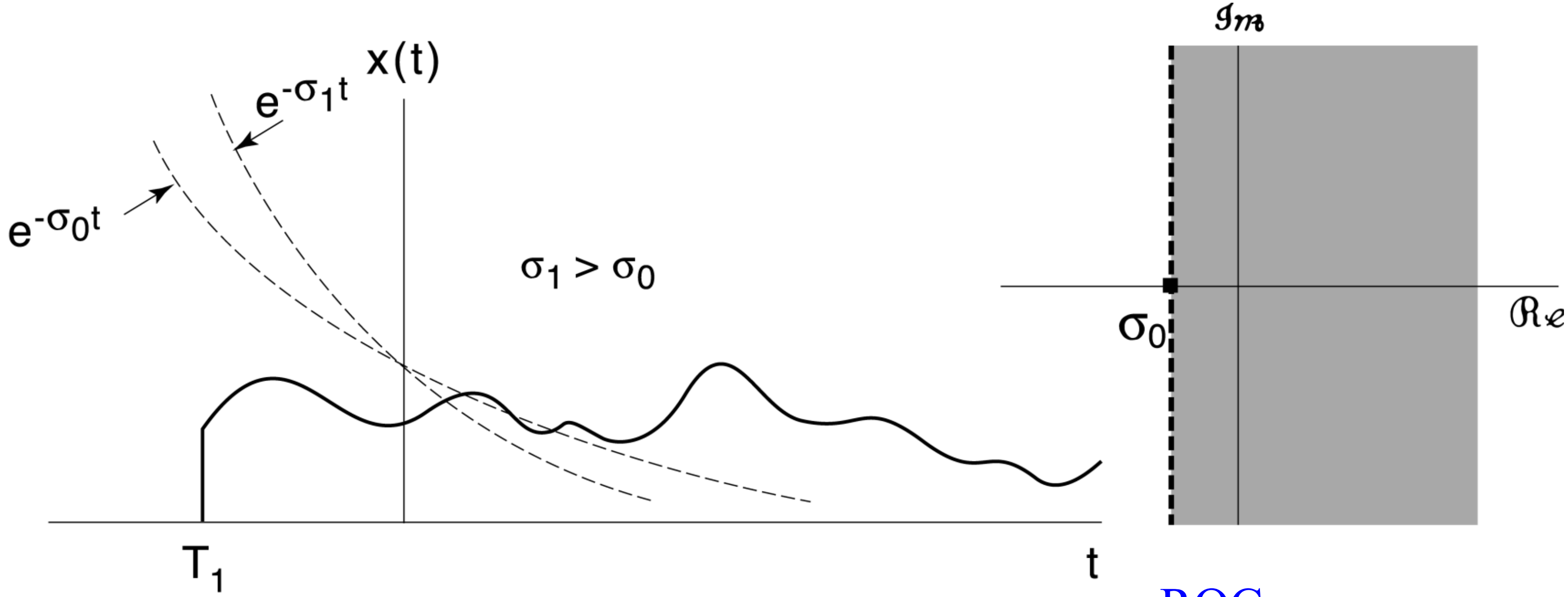
3) Ако $x(t)$ е со конечно траење и ако е апсолутно интеграбилна, тогаш ROC е целата s-рамнина.



$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt=\underbrace{\int_{T_1}^{T_2} x(t)e^{-st}dt}_{\text{Конечен интервал на интегралење}}<\infty \quad \text{ако} \quad \int_{T_1}^{T_2}\left|x(t)\right|dt<\infty$$

Област на конвергенција

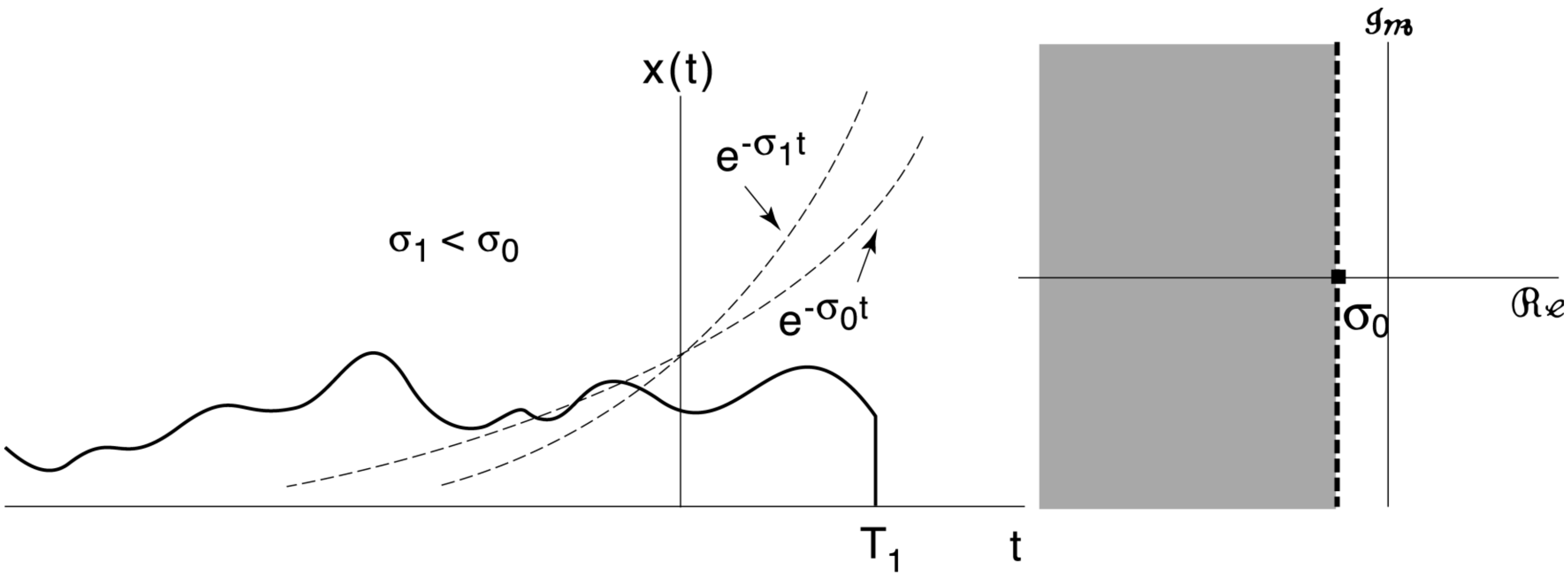
4) Ако $x(t)$ е "десен" сигнал (т.е. ако е нула *пред* некој момент $t=T$), и ако $Re(s) = \sigma_o$ е во ROC, тогаш сите вредности на s за кои $Re(s) > \sigma_o$ се исто така во ROC.



ROC: десна полурамнина

Област на конвергенција

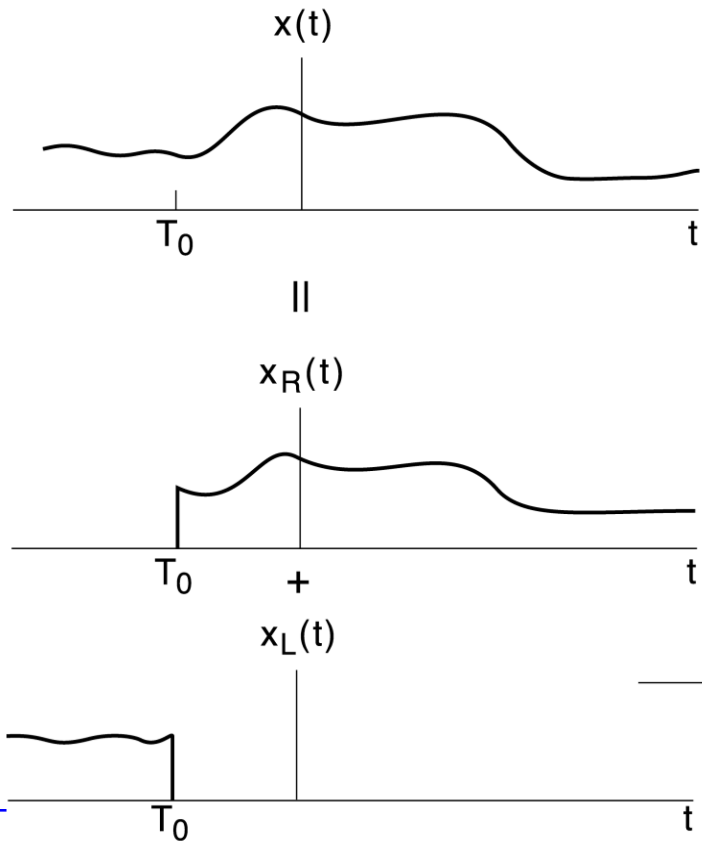
5) Ако $x(t)$ "лев" сигнал (т.е. ако е нула *по* некој момент $t = T$), и ако $Re(s) = \sigma_o$ е во ROC, тогаш сите вредности на s за кои $Re(s) < \sigma_o$ се исто така во ROC.

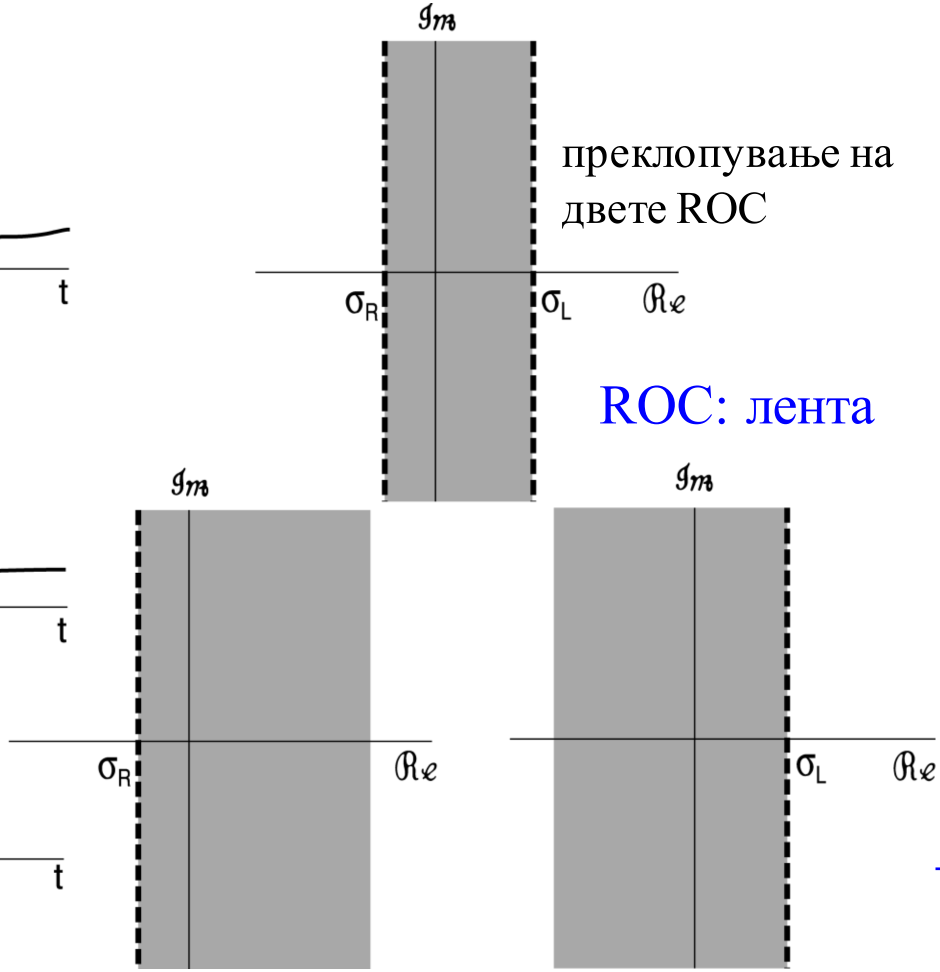


ROC: лева полурамнина

Област на конвергенција

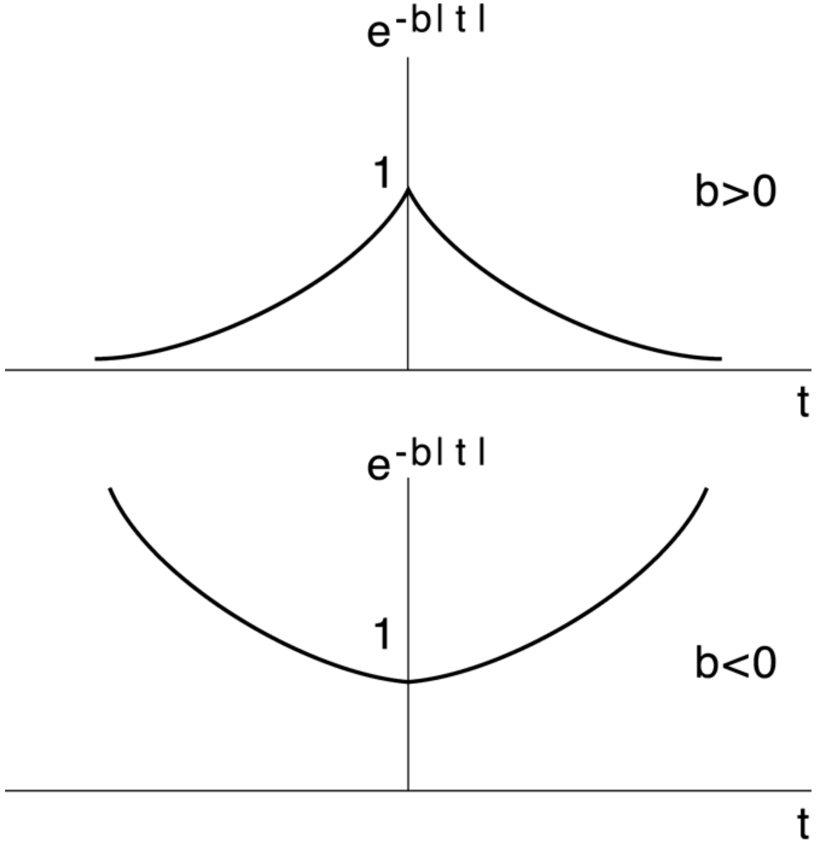
6) Ако $x(t)$ е двостран сигнал и ако правата $Re(s) = \sigma_o$ е во ROC, тогаш ROC се состои од лента во s-рамнината која ја вклучува правата $Re(s) = \sigma_o$.





Област на конвергенција

- Пример 5: $x(t) = e^{-b|t|}$



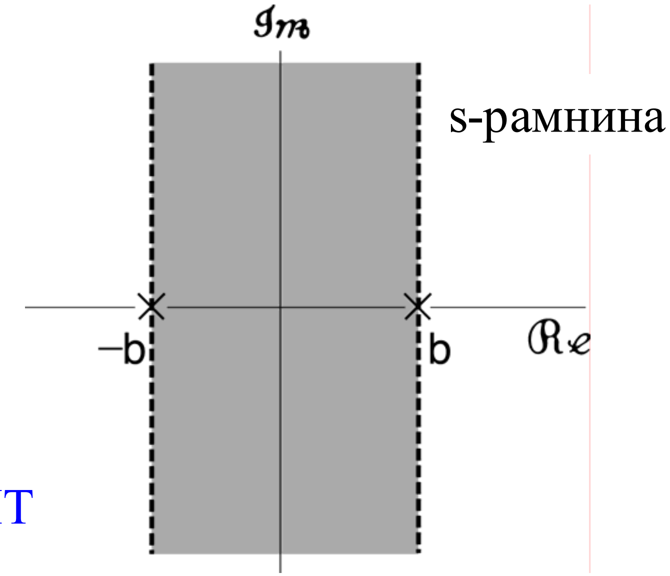
Област на конвергенција

- Пример 5: $x(t) = e^{bt}u(-t) + e^{-bt}u(t)$

$$e^{bt}u(-t) \Downarrow -\frac{1}{s-b}, \Re e\{s\} < b \qquad e^{-bt}u(t) \Downarrow \frac{1}{s+b}, \Re e\{s\} > -b$$

  – Се преклопуваат ако $b > 0$:

$$X(s) = \frac{-2b}{s^2 + b^2}, \qquad -b < \mathrm{Re}\{s\} < b$$



  – Што ако $b < 0$?
  – Нема преклопување => не постои ЛТ

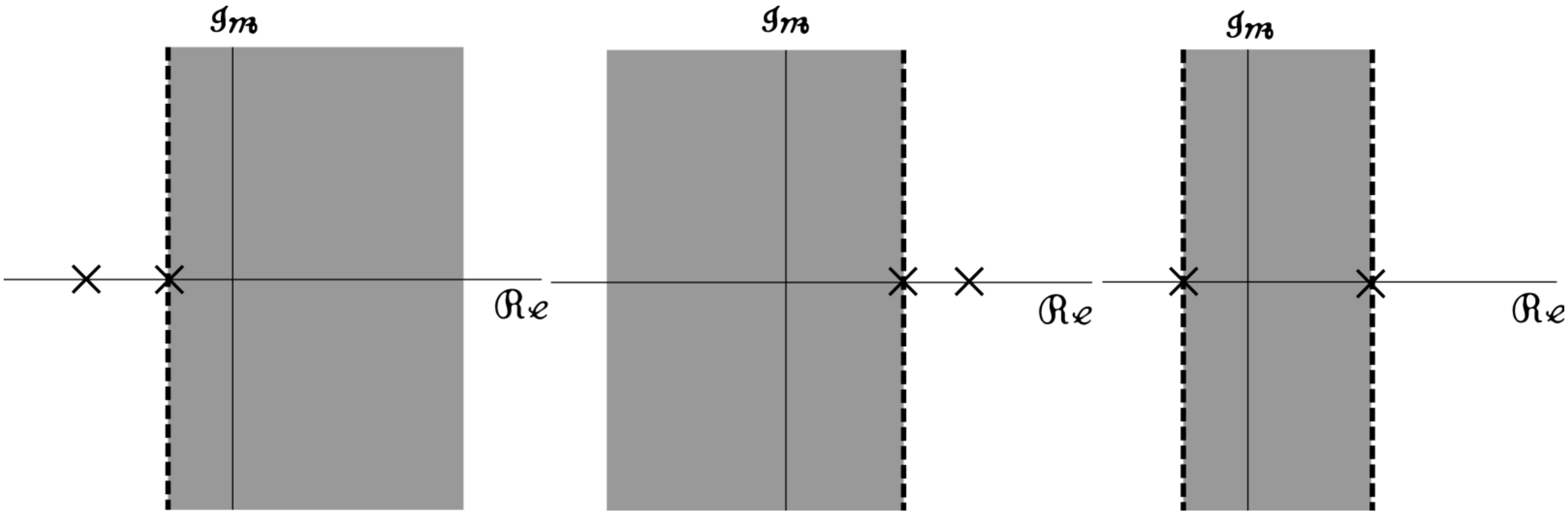
Област на конвергенција

7) Ако $X(s)$ е рационална функција, тогаш нејзината ROC е ограничена со два пола или се простира до бесконечност. Дополнително, ROC не содржи полови

8) Нека $X(s)$ е рационална функција, тогаш

(а) Ако $x(t)$ е "десен" сигнал, ROC е десно од најголемиот пол

(б) Ако $x(t)$ е "лев" сигнал, ROC е лево од најмалиот пол.

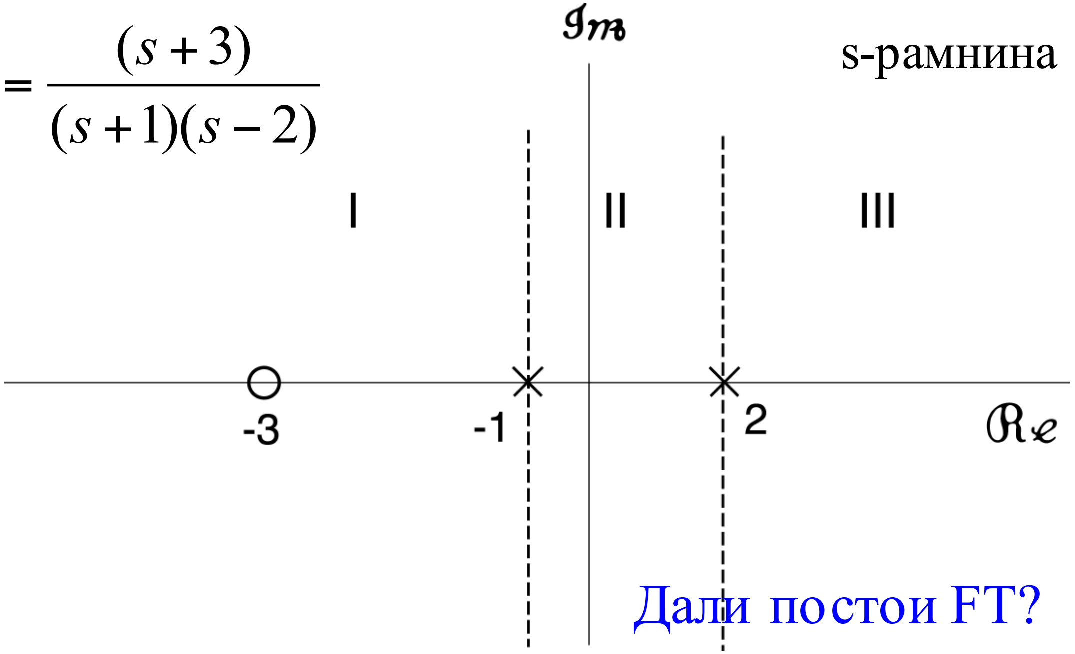


Област на конвергенција

Ако ROC на $X(s)$ ја вклучува $j\omega$ -оската, тогаш FT на $x(t)$ постои.

- **Пример 6**

$$X(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s-2)}$$



Дали постои FT?

▪ ROC: III	$x(t)$ е десен сигнал	НЕ
▪ ROC: I	$x(t)$ е лев сигнал	НЕ
▪ ROC: II	$x(t)$ двостран сигнал	ДА

Област на конвергенција

- Задача за вежбање: Да се нацрта пол-нула дијаграмот на функцијата

$$X(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$$

Да се одредат сите можни ROC на X(s) и да се дефинира типот на сигналот за секоја ROC

Инверзна Лапласова трансформација

- Лапласова трансформација

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad \text{за } s = \sigma + j\omega \text{ во ROC}$$

$$= \mathrm{FT}\left\{x(t)e^{-\sigma t}\right\}$$

- Инверзна FT за фиксно σ

$$x(t)e^{-\sigma t} = FT^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{+\sigma t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}d\omega$$

Инверзна Лапласова трансформација

- Инверзна FT за фиксно σ

$$\Rightarrow x(t) = e^{+\sigma t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}d\omega$$

$s = \sigma + j\omega, \quad ds = jd\omega$ (бидејќи σ е константа)

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds}$$

Инверзна Лапласова трансформација

- Инверзна Лапласова Трансформација
- За **прави дробно рационални функции**, (редот на полиномот во именителот поголем од редот на полиномот во броителот) се врши разложување на прости дробно рационални функции (таблични ЛТ)

$$X(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{s + a_i}$$

Инверзна Лапласова трансформација

- Пример 7

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{A}{(s+1)} - \frac{B}{(s+2)}$$

$$A = 1, \quad B = -1$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}, \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

Инверзна Лапласова трансформација

- Пример 7

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1.$$

$$-e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{LT} -\frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

$$e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1.$$

каузален сигнал

Инверзна Лапласова трансформација

- Пример 8

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2},\quad \mathrm{Re}\{s\}<-2$$

$$-e^{-t}u(-t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s+1},\quad \mathrm{Re}\{s\}<-1.$$

$$-e^{-2t}u(-t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s+2},\quad \mathrm{Re}\{s\}<-2$$

$$-e^{-t}u(-t)+e^{-2t}u(-t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2},\quad \mathrm{Re}\{s\}<-2$$

$$[-e^{-t}+e^{-2t}]u(-t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{(s+1)(s+2)},\quad \mathrm{Re}\{s\}<-2.$$

антикаузален сигнал

Инверзна Лапласова трансформација

- Пример 9

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}, \quad -2 < \mathrm{Re}\{s\} < -1$$

$$-e^{-t}u(-t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -1.$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

$$-e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}, \quad -2 < \mathrm{Re}\{s\} < -1.$$

$$-e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad -2 < \mathrm{Re}\{s\} < -1.$$

двостран сигнал

Својства

- Линеарност
- Поместување во време
- Поместување во s-домен
- Скалирање во време
- Коњугација
- Конволуција
- Диференцирање во временски домен
- Диференцирање во s домен
- Инегралење во временски домен
- Теореми за почетна и крајна вредност на сигналот

Својства

- Голем број на слични својства како Фуриеова трансформација, но за Лапласова трансформација потребно е да се специфицира и влијанието на ROC

- Линеарност

$$x_1(t) \xleftrightarrow{LT} X_1(s) \quad \text{со ROC означен со } R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{LT} X_2(s) \quad \text{со ROC означен со } R_2$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{LT} aX_1(s) + bX_2(s) \quad \text{со ROC еднаков на } R_1 \bigcap R_2.$$

Својства

$$x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s), \quad \text{со ROC} = \text{R},$$

- Поместување во време

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{LT} e^{-st_0} X(s), \quad \text{со ROC} = \text{R}.$$

- Поместување во s домен

$$\mathrm{e}^{\mathrm{s}_0 t} x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s-s_0), \quad \text{со ROC} = \text{R} + \text{Re}\{\text{s}_0\}.$$

- Скалирање во време

$$x(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{со ROC} = \frac{R}{a}.$$

- Коњугирање

$$x^*(t) \xleftrightarrow{LT} X^*(s^*), \quad \text{со ROC} = \text{R}.$$

Својства

- Конволуција

$x_1(t) \xleftrightarrow{LT} X_1(s)$ со ROC дефиниран со R_1

$x_2(t) \xleftrightarrow{LT} X_2(s)$ со ROC дефиниран со R_2

$\boxed{x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{LT} X_1(s)X_2(s)}$ со ROC еднаков на $R_1 \bigcap R_2$.

Својства

$$x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s), \quad \text{со ROC} = \text{R},$$

- Диференцирање во време

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} sX(s), \qquad \text{со ROC} = \text{R}.$$

- Диференцирање во s домен

$$-tx(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{dX(s)}{ds}, \quad \text{со ROC} = \text{R}$$

- Интегралење во време

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s} X(s), \quad \text{со ROC} = \text{R} \bigcap \{\text{Re}\{s\} > 0\}.$$

Својства

- Теорема за почетна вредност

  Ако $x(t) = 0$ за $t < 0$ и нема импулси или дисконтинуитети од повисок ред во $t = 0$, тогаш

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

- Теорема за крајна вредност

  Ако $x(t) = 0$ за $t < 0$ и $x(t)$ има конечна гранична вредност за $t \to \infty$, тогаш

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Својства

- Задача за вежбање: Со користење на особините на Лапласова трансформација да се најде

  а) Лапласова трансформација на сигналот $te^{-at}u(t)$

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{LT} -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a.$$

  б) сигналот $x(t)$ ако е позната неговата ЛТ $X(s) = \dfrac{e^{3s}}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2.$

$$\frac{e^{-sT}}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2 \quad \xleftrightarrow{LT} \quad e^{-2t}u(t)\Big|_{t=t-T}$$

$$T = -3$$

$$\frac{e^{3s}}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2 \quad \xleftrightarrow{LT} \quad e^{-2(t+3)}u(t+3)$$