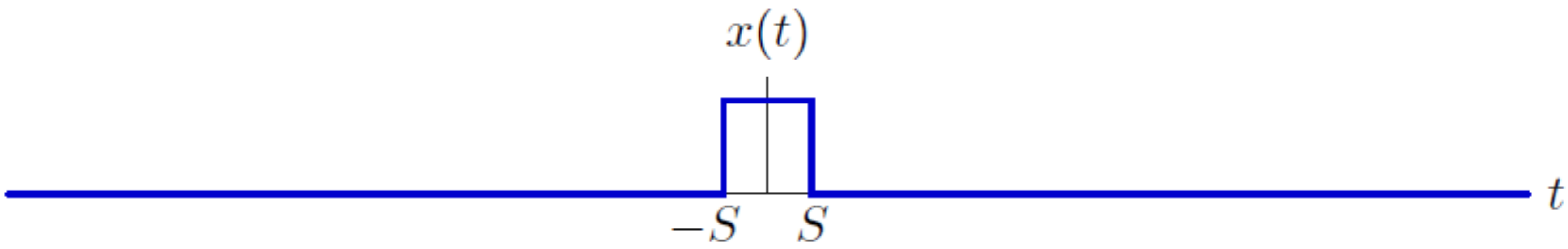
Фуриеова трансформација

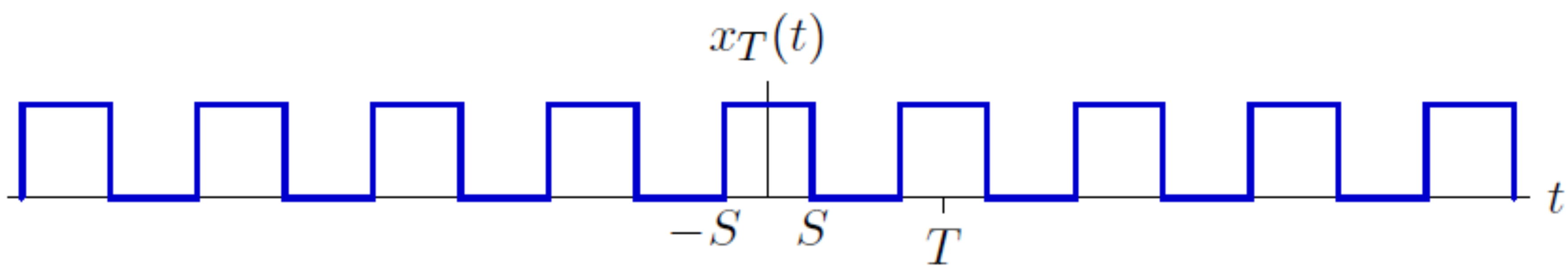
- Фуриеов ред
  - Презентација на периодични сигнали како линеарна комбинација на комплексни експоненцијални функции
  - Едноставно одредување на одзив кај LTI ситеми (презентација на системите како филтри)
- Се однесува само на периодични сигнали
- Што со апериодични сигнали?
  - Фуриеова трансформација

Фуриеова трансформација

- Апериодичен сигнал може да се разгледува како периодичен сигнал со $T \to \infty$
- Нека $x(t)$ е апериодичен сигнал



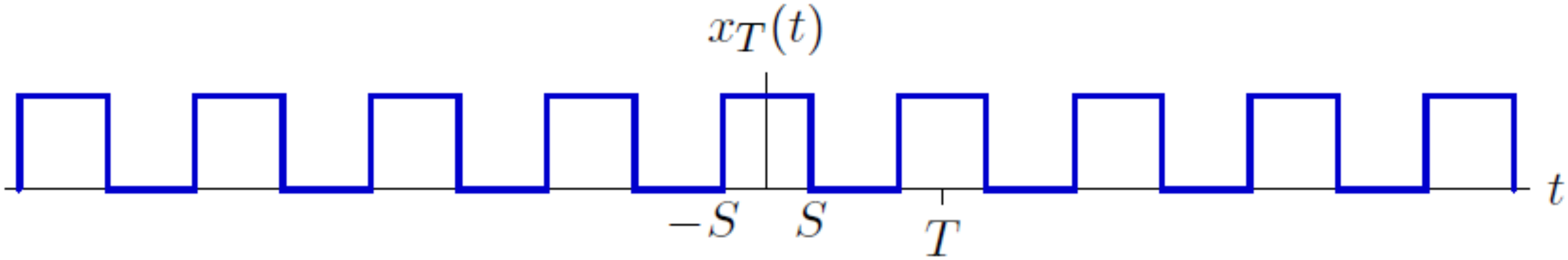
- Периодично повторување $x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t+kT)$



$$x(t) = \lim_{T \to \infty} x_T(t)$$

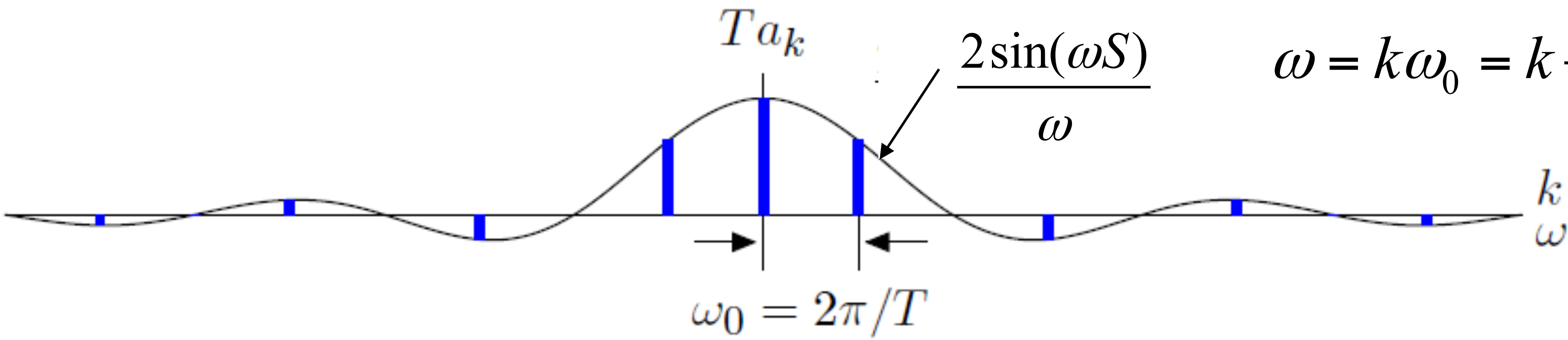
Фуриеова трансформација

- Фуриеов ред на сигналот $x_T(t)$



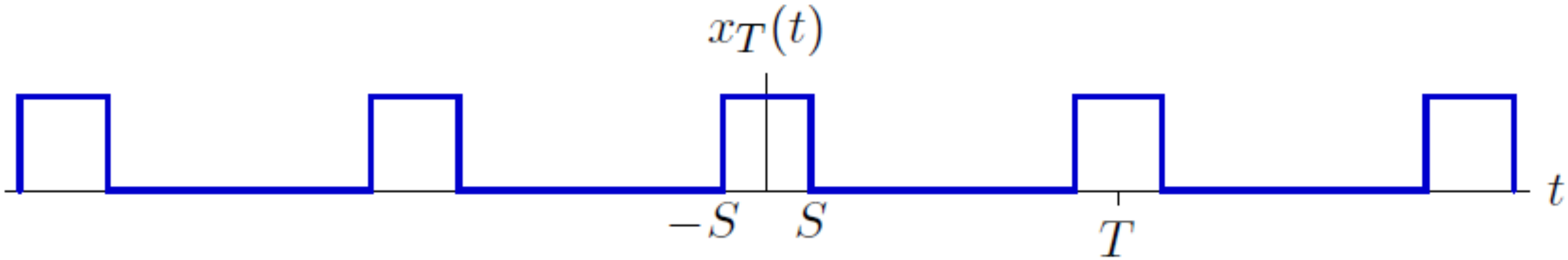
$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_{-S}^{S} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \ldots = \frac{\sin(\frac{2\pi k}{T}S)}{k\pi} = \frac{2}{T}\frac{\sin(\omega S)}{\omega}$$

$$\omega = k\omega_0 = k\frac{2\pi}{T}$$

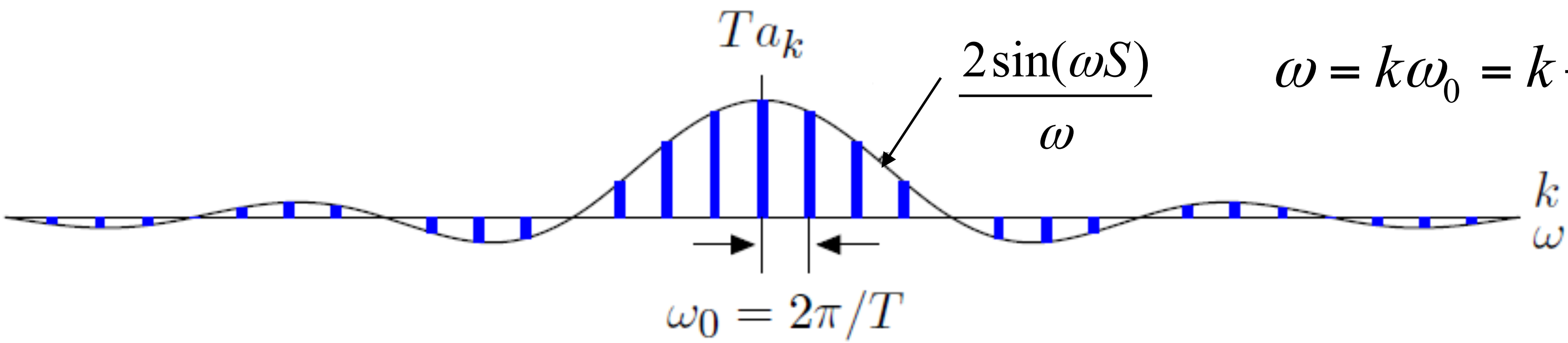


Фуриеова трансформација

- Фуриеов ред на сигналот $x_T(t)$



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-S}^{S} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt = \ldots = \frac{\sin(\frac{2\pi k}{T}S)}{k\pi} = \frac{2}{T}\frac{\sin(\omega S)}{\omega}$$



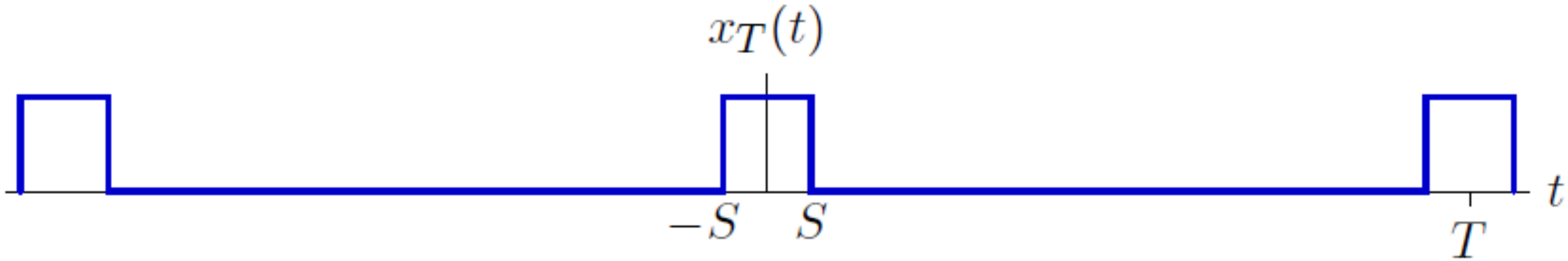
$$\omega = k\omega_0 = k\frac{2\pi}{T}$$

Фуриеова трансформација

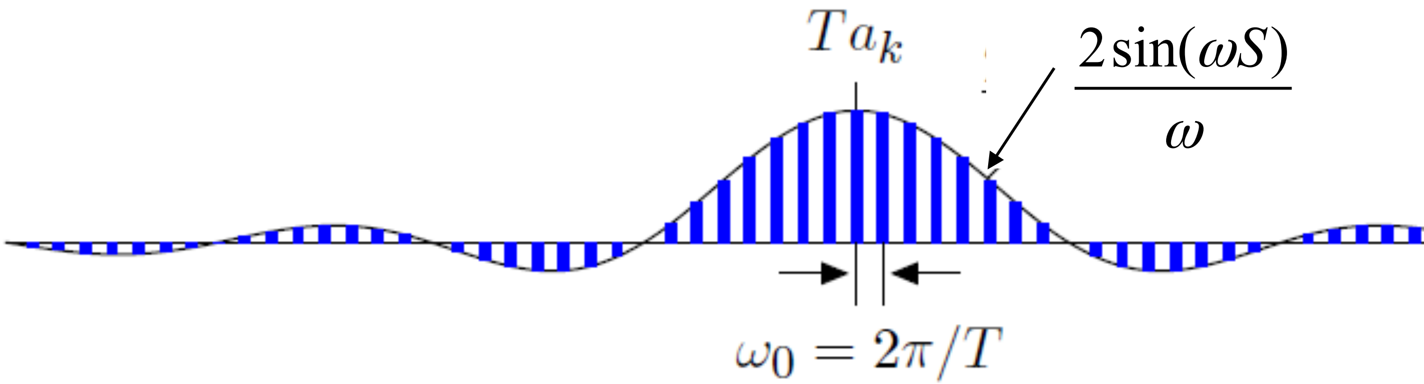
- Фуриеов ред на сигналот $x_T(t)$
- Обликот на сигналот $a_k T = 2\dfrac{\sin(\omega S)}{\omega}$ не зависи од перодот T
- Од вредноста на периодот T зависи густината на примероците
- Ако T се зголеми два пати тоа ќе значи дека ќе се појави уште по еден примерок помеѓу секои два

Фуриеова трансформација

- Фуриеов ред на сигналот $x_T(t)$



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-S}^{S} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt = \ldots = \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{T}S\right)}{k\pi} = \frac{2}{T}\frac{\sin(\omega S)}{\omega}$$



$$\omega = k\omega_0 = k\frac{2\pi}{T}$$

Фуриеова трансформација

- Фуриеов ред на сигналот $x_T(t)$
- Тенденцијата на зголемување на периодот на периодичниот сигнал ќе води до “згуснување”на фреквенцискиот спектар на сигналот

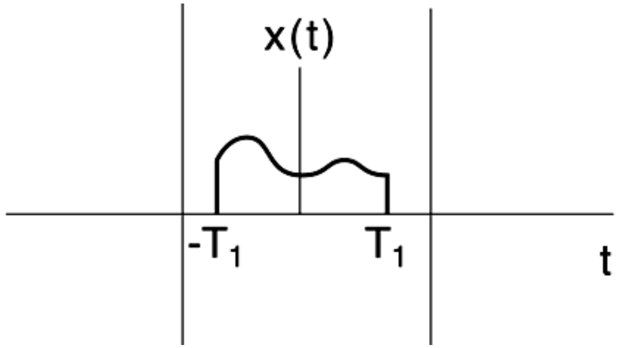
краен резултат на тој граничен процес:

- Сигналот ќе помине во **апериодичен** кога $T \to \infty$

- Дискретното множество на точки $k\omega_0$ за кои беше дефиниран фреквенцискиот спектар ќе помине во **континуирано** множество ω

Фуриеова трансформација

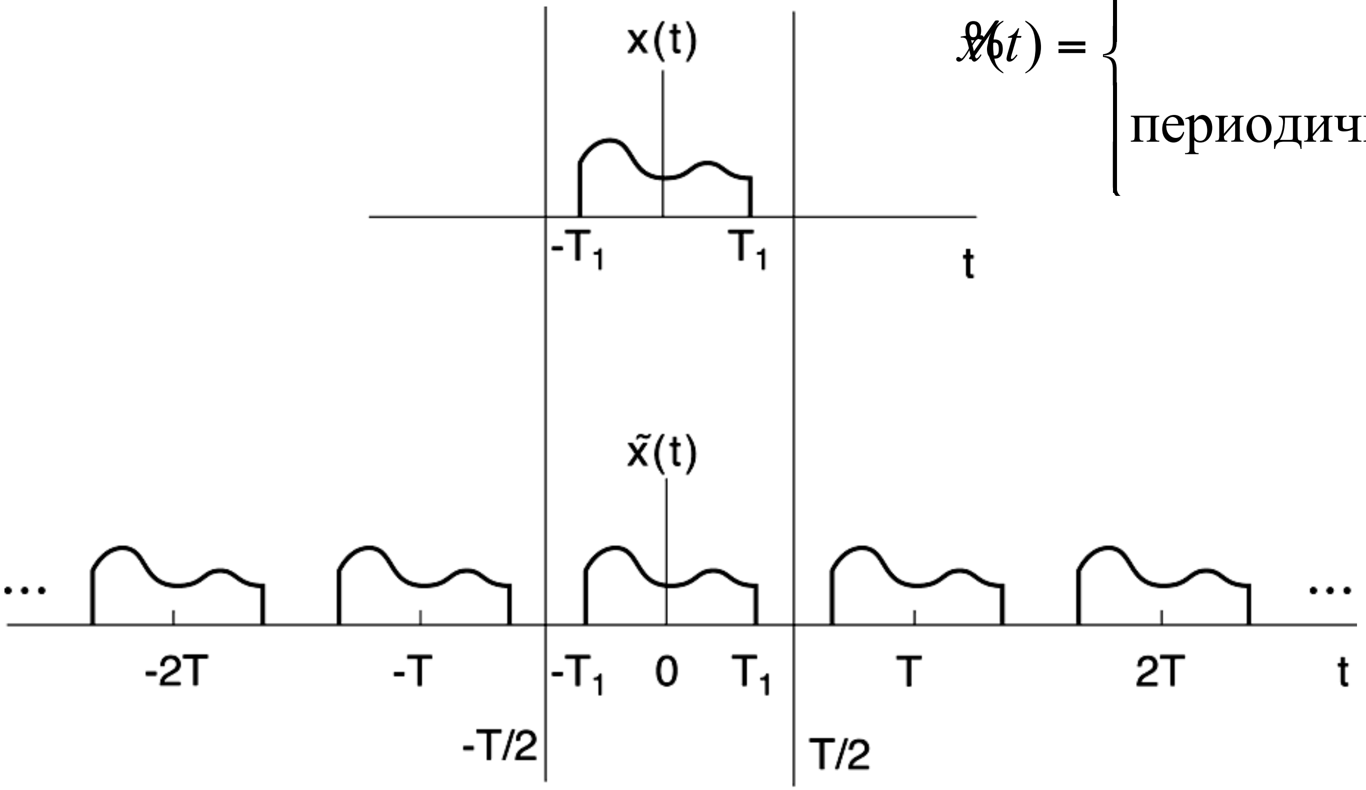
- Изведување....



Фуриеова трансформација

- Изведување....

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ \text{периодична} & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$



за $T \to \infty$, $\tilde{x}(t) = x(t)$ за секое t

Фуриеова трансформација

- Изведување....

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

- Бидејќи $\tilde{x}(t) = x(t)$, за $|t| < T/2$, и бидејќи $x(t) = 0$, за $|t| > T/2$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Фуриеова трансформација

- Изведување....

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

  – дефинирајќи ја анвелопата $X(j\omega)$ на Ta_k како

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

  за коефициентите a_k добиваме $a_k = \dfrac{1}{T}X(jk\omega_0)$

  – така, $\tilde{x}(t)$ може да се изрази на следниот начин

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T}X(jk\omega_0)}_{a_k}\, e^{jk\omega_0}$$

Фуриеова трансформација

- Изведување....

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T} X(jk\omega_0)}_{a_k} e^{jk\omega_0}$$

$$2\pi / T = \omega_0 \qquad \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$$T \to \infty, \quad \tilde{x}(t) \to x(t)$$

$$T \to \infty, \quad \omega_0 \to 0 \qquad \sum \omega_0 \to \int d\omega$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}}$$

инверзна Фуриеова трансформација (израз за синтеза)

Фуриеова трансформација (израз за анализа)

Фуриеов трансформационен пар

Фуриеова трансформација

- Фуриеова трансформација

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

- $X(j\omega)$ **Фреквенциски спектар** на $x(t)$
  - Алтернативна форма на претставување на сигналот во зависност од нова променлива ω (фреквенција)

$\left|X(j\omega)\right|$ **Амплитуден спектар**

$\angle X(j\omega)$ **Фазен спектар**

Фуриеова трансформација

- Конвергенција...
- За сигналот да има дефинирано Фуриеова трансформација тој мора да ги задоволува условите на Dirihlet:

  – Апсолутна интеграбилност

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty$$

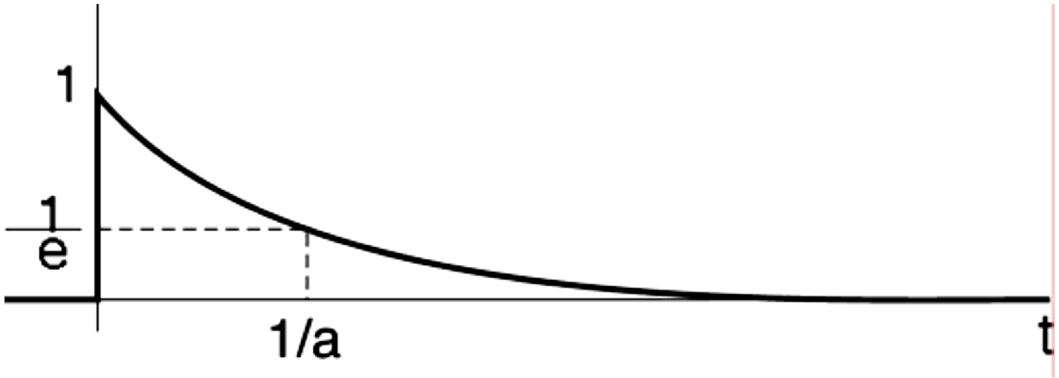
  – Конечен број на екстреми
  – Конечен број на прекини

во областа на дефиниција.

Фуриеова трансформација

- Пример

$$\boxed{x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0}$$



$$X(j\omega) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^\infty e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^\infty$$

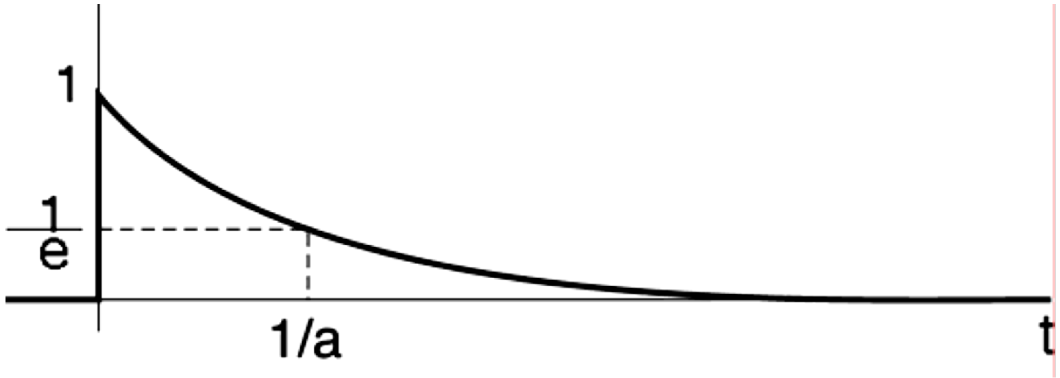
$$\boxed{X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}, \quad a > 0}$$

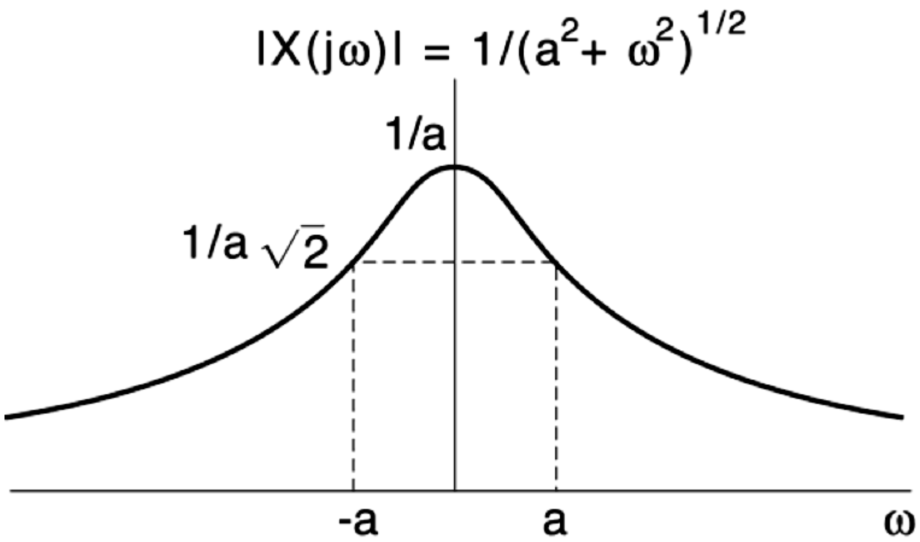
$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}, \quad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Фуриеова трансформација

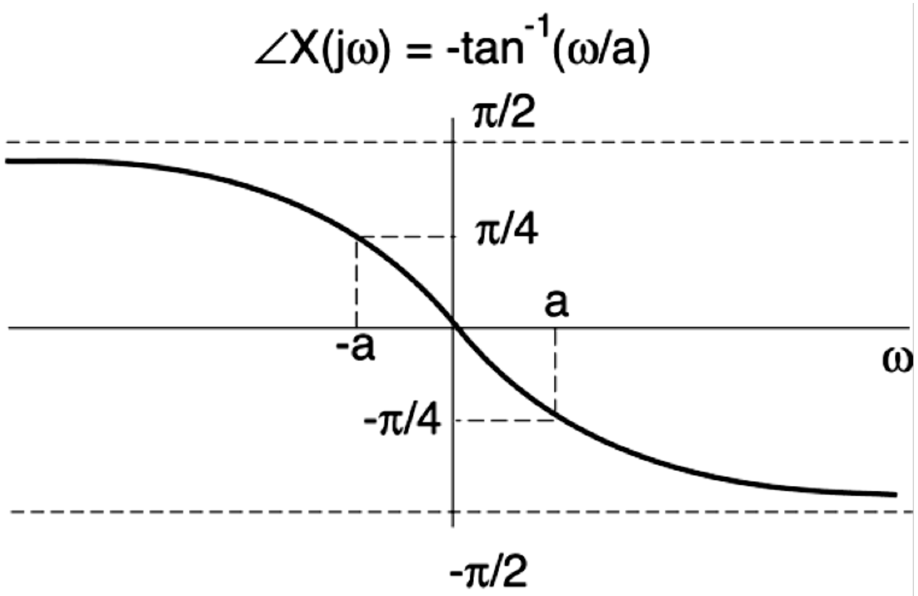
- Пример

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$





парна симетрија

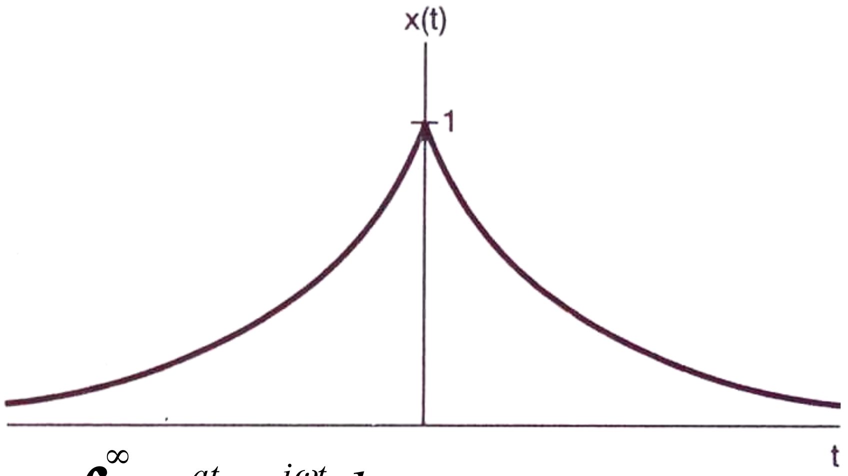


непарна симетрија

Фуриеова трансформација

- Пример

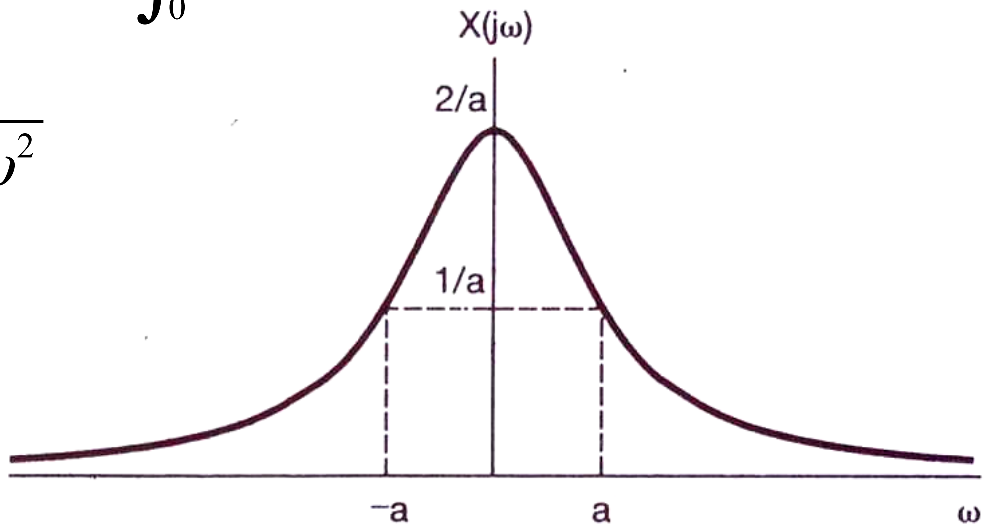
$$\boxed{x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0}$$



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\boxed{X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}}$$

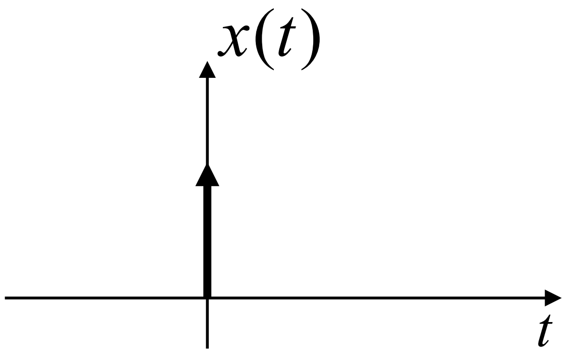


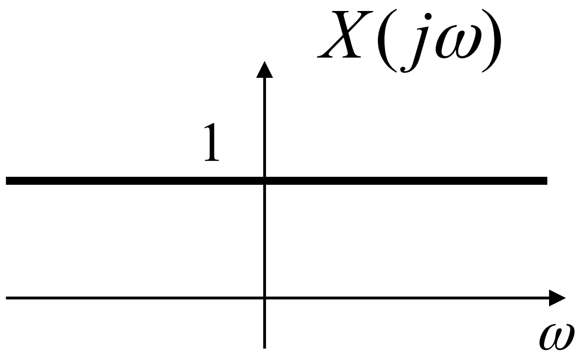
Фуриеова трансформација

- Пример

$$\boxed{x(t) = \delta(t)}$$

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1}$$



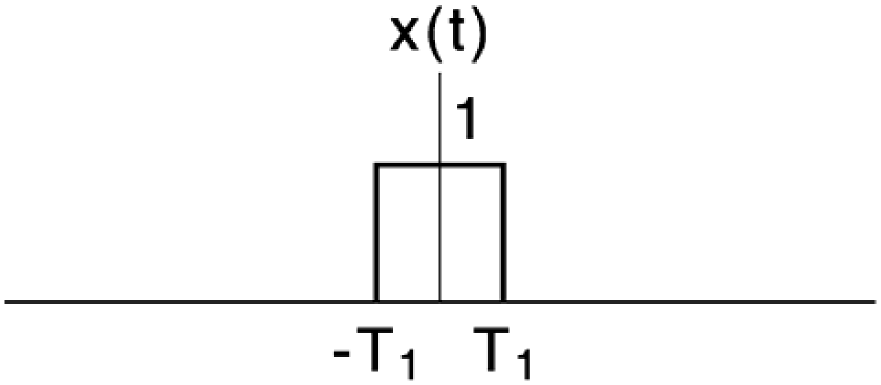


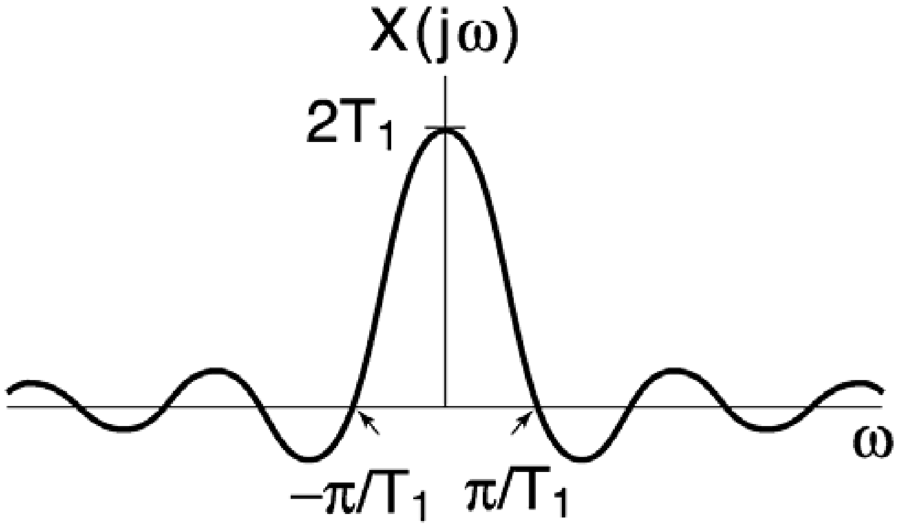
Дираков импулс – влијание на сите фреквенции

Фуриеова трансформација

- Пример $$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$$

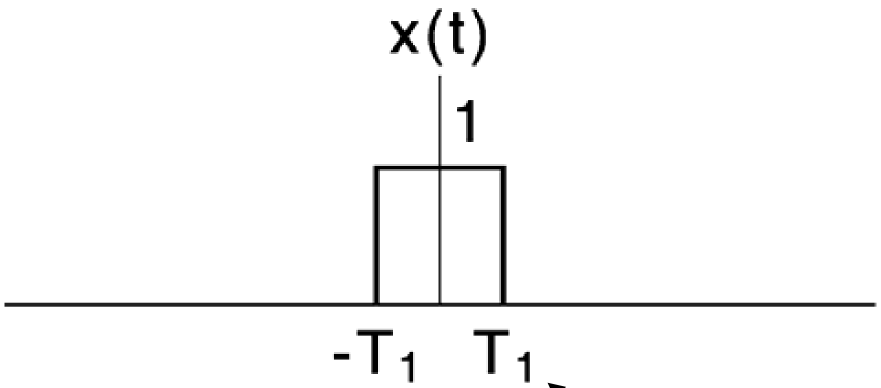
$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T} e^{-j\omega t} dt = 2\frac{\sin \omega T_1}{\omega}}$$

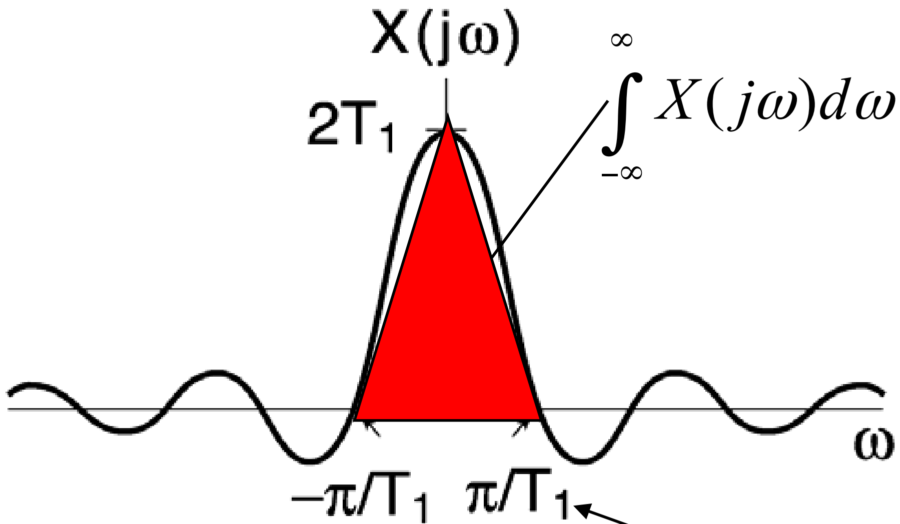




Фуриеова трансформација

- Пример





$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$$

$$X(j\omega)\big|_{\omega=0} = X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$$

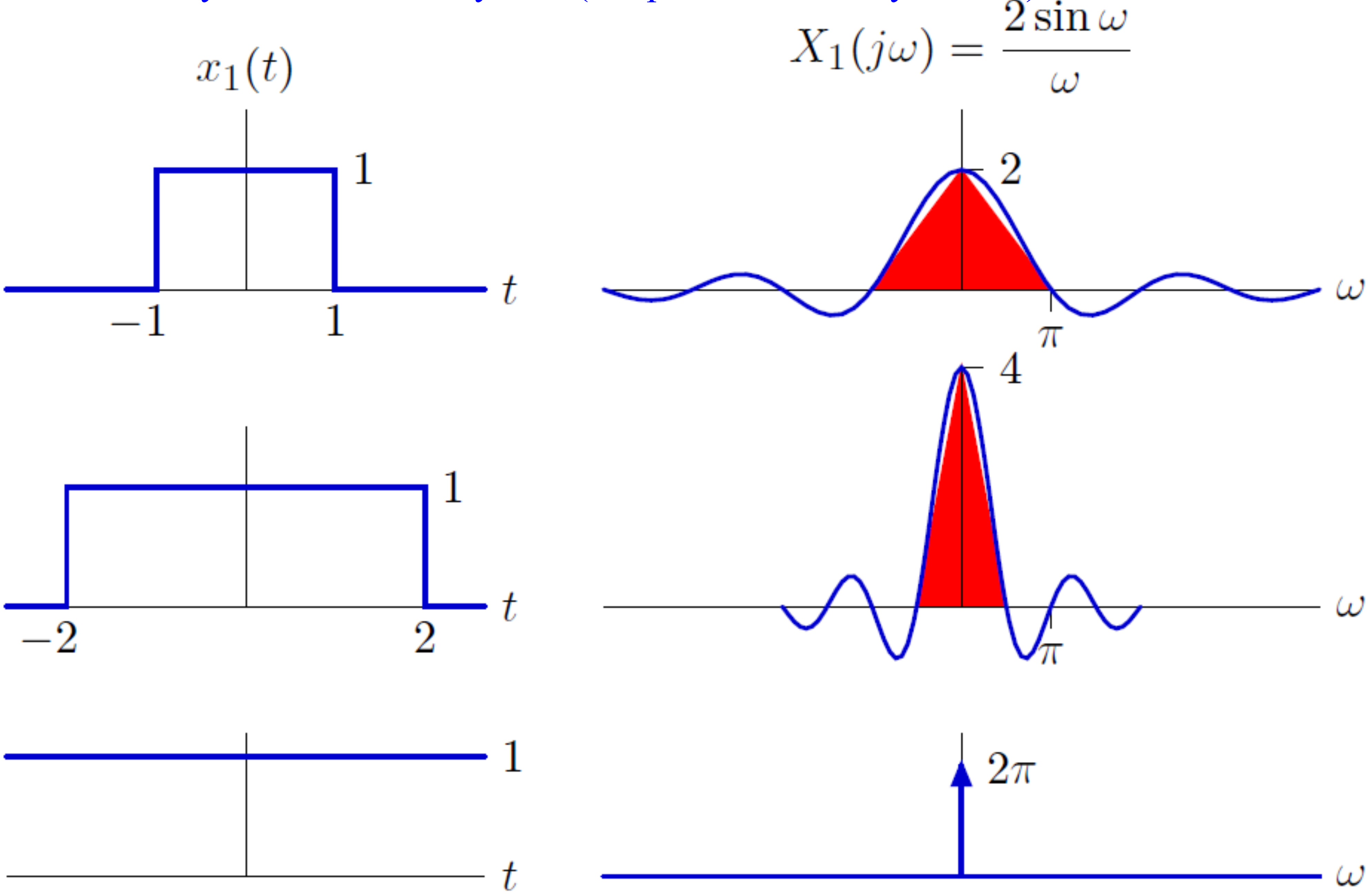
$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 2T_1$$

$$x(t)\big|_{t=0} = x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$$

$$x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega =$$

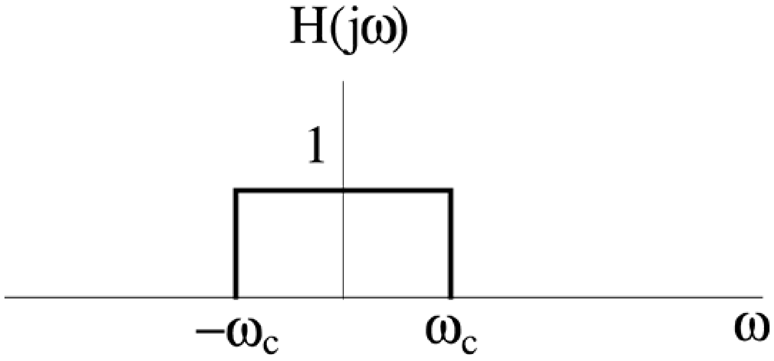
$$\frac{1}{2\pi}\times(\text{површина на триаголникот})$$

Проширување во временски значи стеснување во фреквенциски домен и зголемување на амплитудата (површината останува иста)



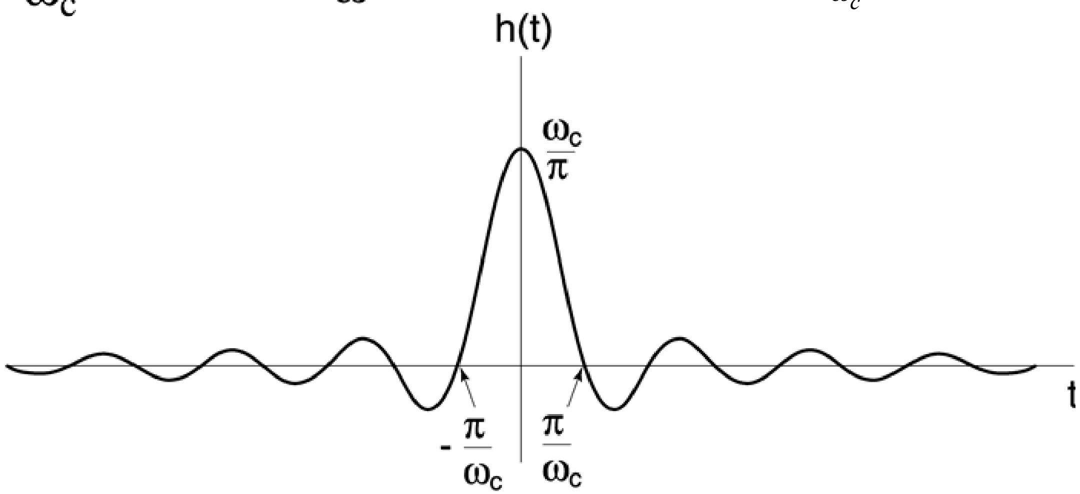
Фуриеова трансформација

- Инверзна Фуриеова трансформација, познато $H(j\omega)$ да се одреди $h(t)$



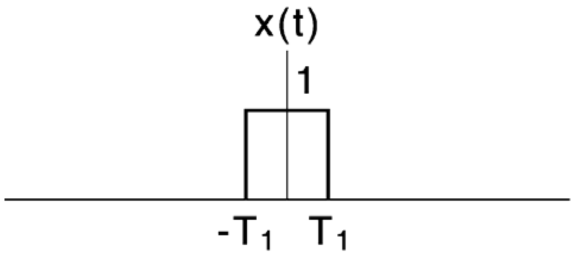
$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t}d\omega =$$

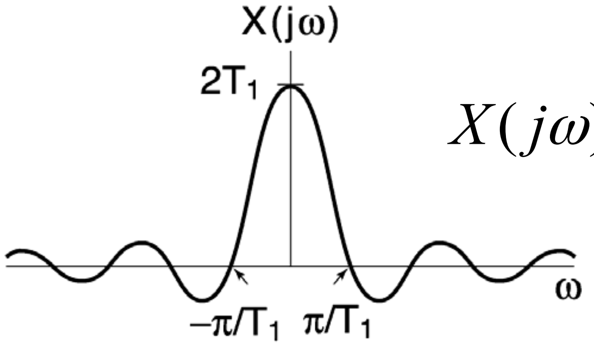
$$= \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\sin\omega_c t}{\pi t}$$



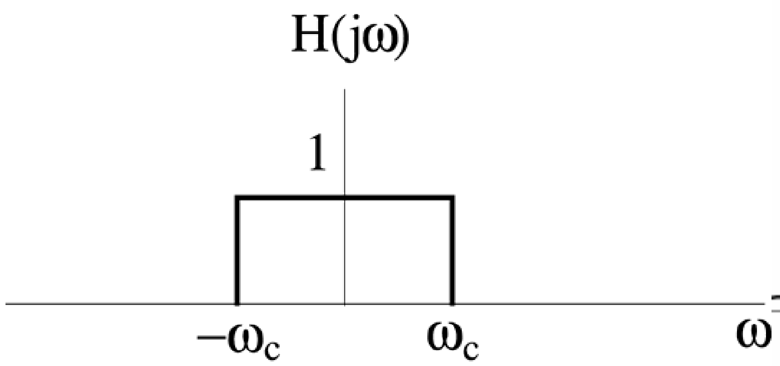
Фуриеова трансформација

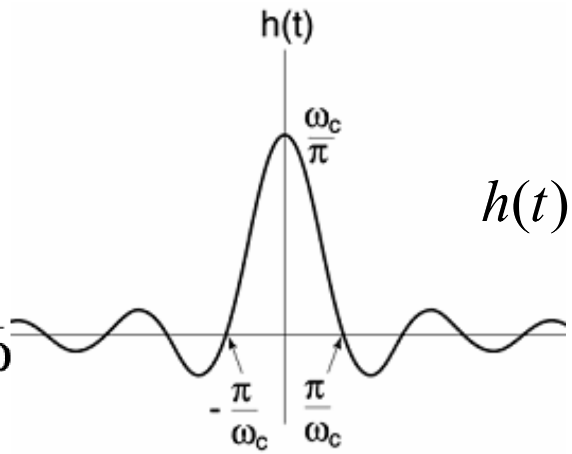
- Дуалност





$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T} e^{-j\omega t} dt = 2\frac{\sin \omega T_1}{\omega}$$





$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

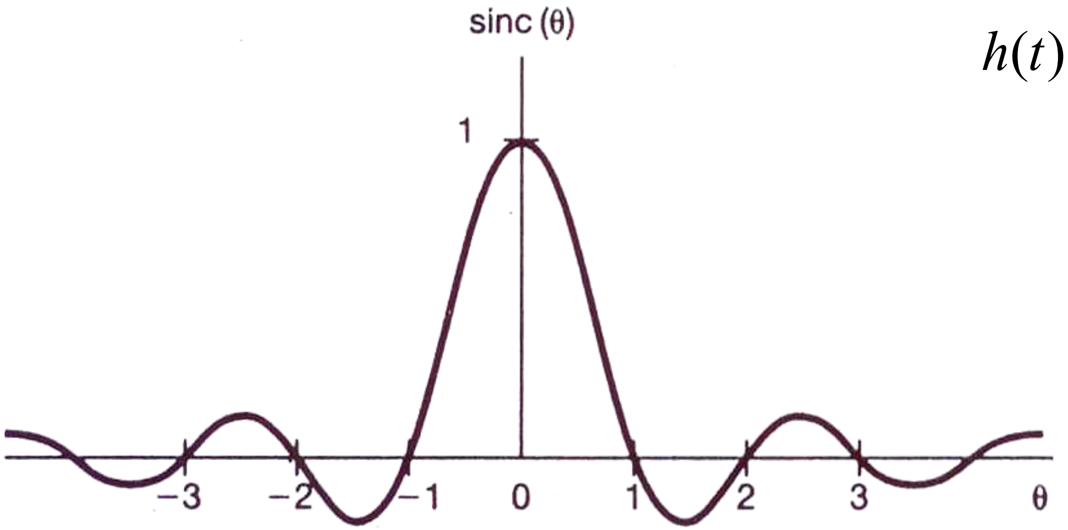
Фуриеова трансформација

- Sinc функција

$$\mathrm{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi\theta}{\pi\theta}$$

$$X(j\omega) = 2\frac{\sin \omega T_1}{\omega} = 2T_1 \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$



Фуриеова трансформација

- Фуриеова трансформација на периодични сигнали

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

периодична во временски домен со фреквенција ω_o

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}$$

цела енергија концентрирана во една фреквенција ω_0

- Генерално

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)}$$

Фуриеова трансформација

- Фуриеова трансформација на периодични сигнали

- Фуриеова трансформација од **периодичен сигнал** е сума од поместени Диракови импулси во точките $k\omega_0$ на ω оската

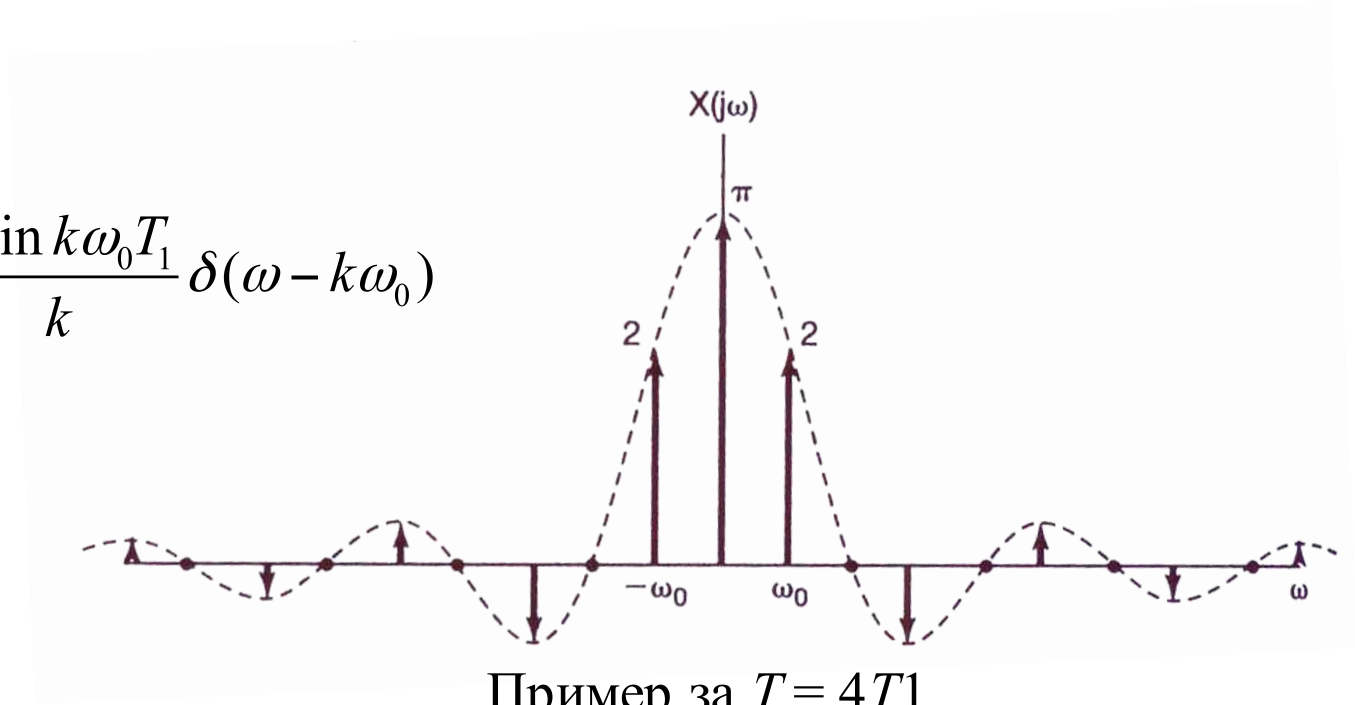
- Нивните амплитуди се еднакви на коефициентите од развојот на сигналот во Фуриеов ред помножени со 2π

Фуриеова трансформација

- Фуриеова трансформација на периодични сигнали
- Пример: периодична низа од правоаголни импулси $(T = 4T_1)$

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{\pi k}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$



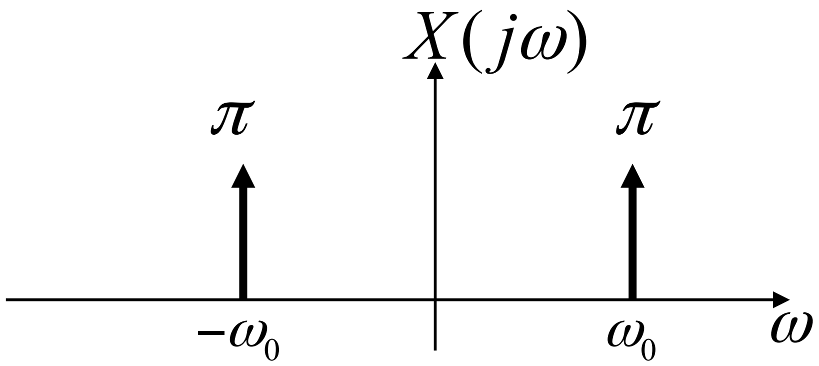
Пример за $T = 4T1$

Фуриеова трансформација

- Фуриеова трансформација на периодични сигнали
- Пример

$$x(t) = \cos\omega_0 t = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

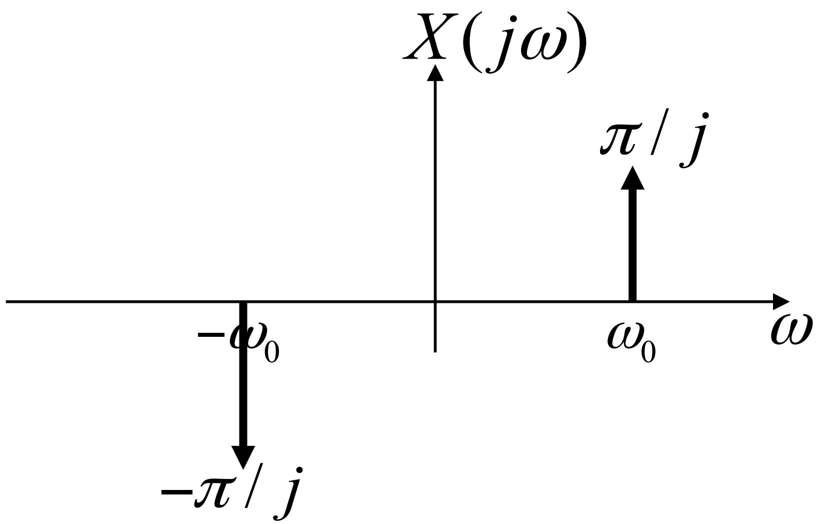


Фуриеова трансформација

- Фуриеова трансформација на периодични сигнали
- Пример

$$x(t) = \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j}\pi\delta(\omega - \omega_0) - \frac{1}{j}\pi\delta(\omega + \omega_0)$$



Фуриеова трансформација

- Фуриеова трансформација на периодични сигнали
- Пример

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x(t) \leftrightarrow a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

(период во t домен) T

$\Leftrightarrow$ (период во ω домен) $\frac{2\pi}{T}$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{2\pi a_k} \delta(\omega - \underbrace{\frac{k2\pi}{T}}_{k\omega_0})$$