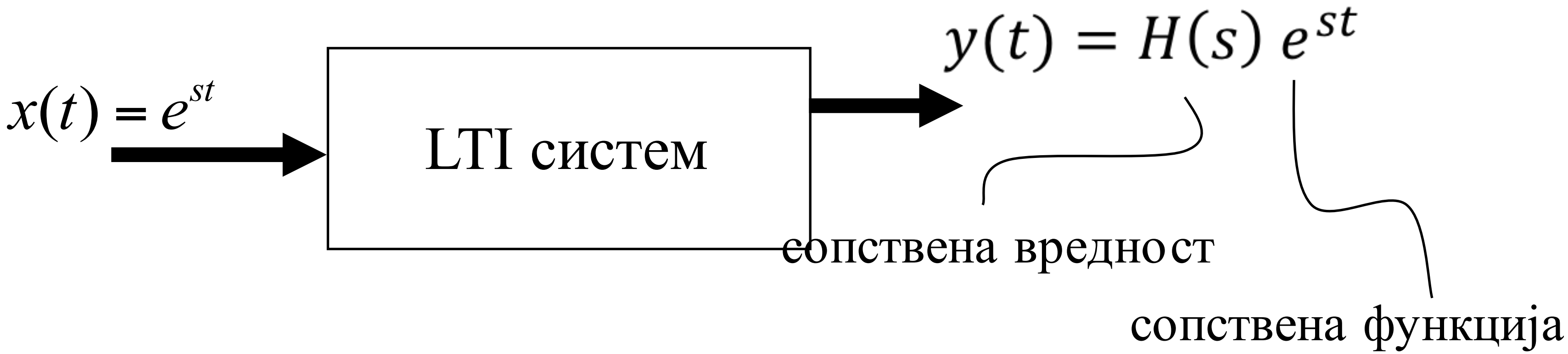
Фуриеови редови и LTI системи

- Фреквенциска карактеристика



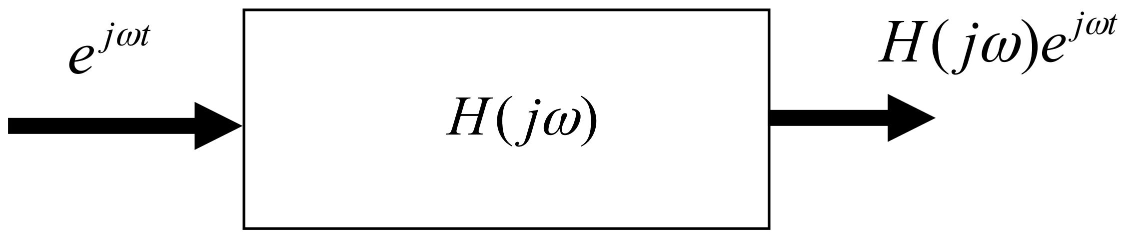
$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Фреквенциска карактеристика
- Ќе разгледуваме случај кога $\Re\{s\} = 0 \quad s = j\omega$

$$H(s)\big|_{s=j\omega} = \boxed{H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt}$$

постанува комплексна функција од реална променлива ω



Фуриеови редови и LTI системи

- Фреквенциска карактеристика

  – Амплитудна карактеристика $A(\omega) = \left|H(j\omega)\right|$

  – Фазна карактеристика $\phi(\omega) = \angle H(j\omega)$

Фуриеови редови и LTI системи

- Систем опишан со диференцијална равенка

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^m - 1} + \ldots + b_m x(t)$$

  – Одзив на простопериодичен влезен сигнал ќе биде простопериодичен сигнал со ист период како и влезниот сигнал (тој е сопствена функција на системот)
  – Влезниот сигнал е периодичен и како таков постои за секое $t \in (-\infty, \infty)$ што значи дека за конечно *t* одзивот на системот ќе ја содржи само **принудната компонента**, преодната ќе биде исчезната
  – Принудната компонента е иста со партикуларното решение па таа мора да ја задоволува диференцијалната равенка

Фуриеови редови и LTI системи

- Простопериодичен сигнал
  - Влезен сигнал $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \theta) = \Re\{Xe^{j\theta}e^{j\omega_0 t}\} = \Re\{\underline{X}e^{j\omega_0 t}\}$
  - Излезниот ќе биде $y(t) = \Re\{\underline{X}H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}\} = \Re\{\underline{Y}e^{j\omega_0 t}\}$
  - каде $H(s)\big|_{s=j\omega_0} = H(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega_0 t}dt$

$$x(t) = \Re\{\underline{X}e^{j\omega_0 t}\} \longrightarrow \boxed{H(j\omega_0)} \longrightarrow y(t) = \Re\{\underline{X}H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}\}$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Систем опишан со диференцијална равенка

$$x(t) = \Re\{\underline{X}e^{j\omega_0 t}\} = \Re\{Xe^{j\theta}e^{j\omega_0 t}\} = X\cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$y(t) = \Re\{\underline{X}H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}\} = \Re\{\underline{Y}e^{j\omega_0 t}\}$$

$$x(t) = \Re\{\underline{X}e^{j\omega_0 t}\} \longrightarrow \boxed{H(j\omega_0)} \longrightarrow \begin{aligned} y(t) &= \Re\{\underline{X}H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}\} \\ &= \Re\{\underline{Y}e^{j\omega_0 t}\} \end{aligned}$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Систем опишан со диференцијална равенка

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^m - 1} + \ldots + b_m x(t)$$

Ги заменуваме влезниот сигнал и одзивот во диференцијалната равенка

$$\Re\{(j\omega_0)^n \underline{Y} e^{j\omega_0 t} + a_1 (j\omega_0)^{n-1} \underline{Y} e^{j\omega_0 t} + a_2 (j\omega_0)^{n-2} \underline{Y} e^{j\omega_0 t} + \ldots + a_n \underline{Y} e^{j\omega_0 t}\} =$$

$$\Re\{b_0 (j\omega_0)^m \underline{X} e^{j\omega_0 t} + b_1 (j\omega_0)^{m-1} \underline{X} e^{j\omega_0 t} + b_2 (j\omega_0)^{m-2} \underline{X} e^{j\omega_0 t} + \ldots + b_m \underline{X} e^{j\omega_0 t}\}$$

$$\Re\{\underline{Y}[(j\omega_0)^n + a_1 (j\omega_0)^{n-1} + a_2 (j\omega_0)^{n-2} + \ldots + a_n] e^{j\omega_0 t}\} =$$

$$\Re\{\underline{X}[b_0 (j\omega_0)^m + b_1 (j\omega_0)^{m-1} + b_2 (j\omega_0)^{m-2} + \ldots + b_m] e^{j\omega_0 t}\}$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Систем опишан со диференцијална равенка

$$\underline{X}[(j\omega_0)^n + a_1(j\omega_0)^{n-1} + a_2(j\omega_0)^{n-2} + \ldots + a_n] =$$
$$\underline{Y}[b_0(j\omega_0)^m + b_1(j\omega_0)^{m-1} + b_2(j\omega_0)^{m-2} + \ldots + b_m]$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \frac{b_0(j\omega_0)^m + b_1(j\omega_0)^{m-1} + b_2(j\omega_0)^{m-2} + \ldots + b_m}{(j\omega_0)^n + a_1(j\omega_0)^{n-1} + a_2(j\omega_0)^{n-2} + \ldots + a_n}$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Систем опишан со диференцијална равенка

$$H(j\omega_0) = \frac{b_0(j\omega_0)^m + b_1(j\omega_0)^{m-1} + b_2(j\omega_0)^{m-2} + \ldots + b_m}{(j\omega_0)^n + a_1(j\omega_0)^{n-1} + a_2(j\omega_0)^{n-2} + \ldots + a_n}$$

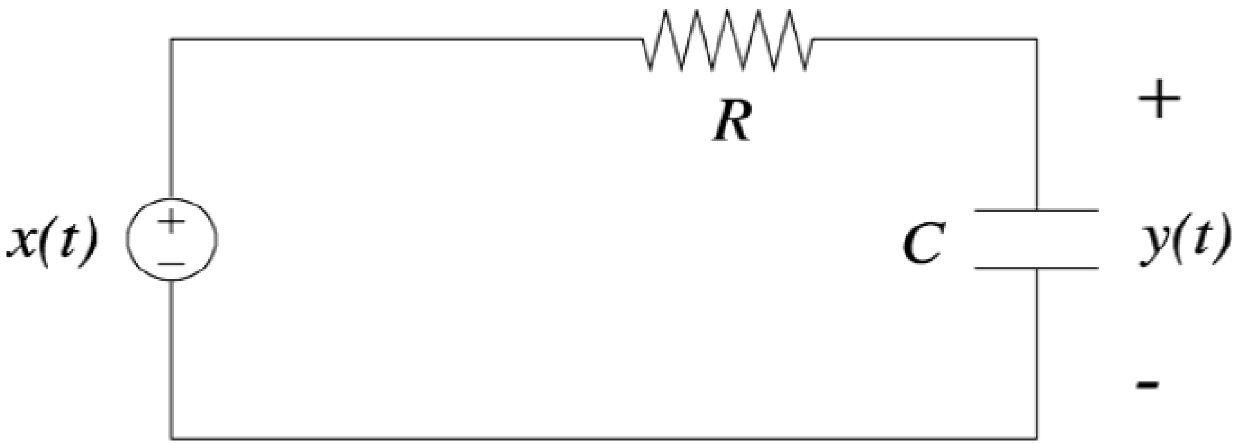
$$H(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}}$$

- $H(j\omega_0)$ претставува вредност на фреквенциската карактеристика $H(j\omega)$ во точката $j\omega_0$

- Претставува однос на два комплексни броја $\underline{X}$ и $\underline{Y}$ наречени **комплексни претставници**

Фуриеови редови и LTI системи

- Пример



$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

$$x(t) = \Re\{\underline{X}e^{j\omega_0 t}\} = \Re\{Xe^{j\theta}e^{j\omega_0 t}\} = X\cos(\omega_0 t + \theta)$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Пример

$$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{RC}x(t)$$

$$H(j\omega)=\frac{1/(RC)}{j\omega+1/(RC)}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

$$\omega_0=1rad/\sec \qquad \underline{X}=2e^{j\pi/2} \qquad R=1\Omega, \quad C=1F$$

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j1}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}$$

$$y(t)=\Re\{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}2e^{j\pi/2}e^{jt}\}=\sqrt{2}\cos(t+\pi/4)$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Одзив на периодичен сигнал

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k = \int_0^T x(t) e^{-j\omega_0 t} dt$$

$$x_k(t) = a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad y_k(t) = H(jk\omega_0) a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$H(jk\omega_0) = H(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Пример

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\omega_0 t - \frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_0 t + \frac{2}{5\pi}\cos 5\omega_0 t + \dots$$

$$H(j\omega) = \frac{1/(RC)}{j\omega + 1/(RC)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$\omega = k\omega_0$$

$$H(jk\omega_0) = \frac{1}{1 + jk\omega_0 RC} = \frac{1}{1 + jk}$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Приме $$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\omega_0 t - \frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_0 t + \frac{2}{5\pi}\cos 5\omega_0 t + \dots$$

$$H(jk\omega_0) = \frac{1}{1 + jk\omega_0 RC} = \frac{1}{1 + jk} \qquad R = 1\Omega, C = 1F, \qquad \omega_0 = 1 rad/sec$$

$$H(0) = 1,$$

$$H(j1) = \frac{1}{1+j} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4}$$

$$H(j2) = \frac{1}{1+j2} = \frac{\sqrt{5}}{5} e^{-j arctg(2)}$$

$$H(j3) = \frac{1}{1+j3} = \frac{\sqrt{10}}{10} e^{-j arctg(3)} \dots$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos(\omega_0 t - \pi/4) - \frac{2\sqrt{10}}{30\pi}\cos(3\omega_0 t - arctg 3) + \dots$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Фреквенциски спектар на периодичен сигнал

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k=\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Множеството на коефициенти a_k кои еднозначно го определуваат сигналот го дефинираат **Фреквенцискиот спектар** на периодичниот сигнал

$$a_k=|a_k|e^{j\arg a_k}$$

– $|a_k|$ **амплитуден спектар**

– $\angle a_k=\arg a_k$ **фазен спектар**

Фуриеови редови и LTI системи

- Фреквенциски спектар на периодичен сигнал

- Особини

  Фреквенцискиот спектар на периодичните сигнали е **дискретен** (дефиниран само за дискретни вредности на ω оската, во точките $k\omega_{0,}$)

  За реални сигнали амплитудниот спектар е **парен**, а фазниот **непарен**.

Филтрирање

- Промена на релативните амплитуди на фреквенциските компоненти.
- Потполно елиминирање на некои фреквенциски компоненти
- LTI системи кои имаат за цел да го менуваат фреквенцискиот спектар на влезниот сигнал се познати како *филтри за појачување*.
- Системи кои пропуштаат само одредени фреквенциски компоненти од спектарот на влезниот сигнал се наречени *селективни филтри*

Филтри за појачување

- Типична примена аудио систем
  - Овие филтри му овозможуваат на слушателот да ја менуваат енергијата на нискофреквенциските компоненти (басовите) и на високофреквенциските компоненти.

- Диференцијатор

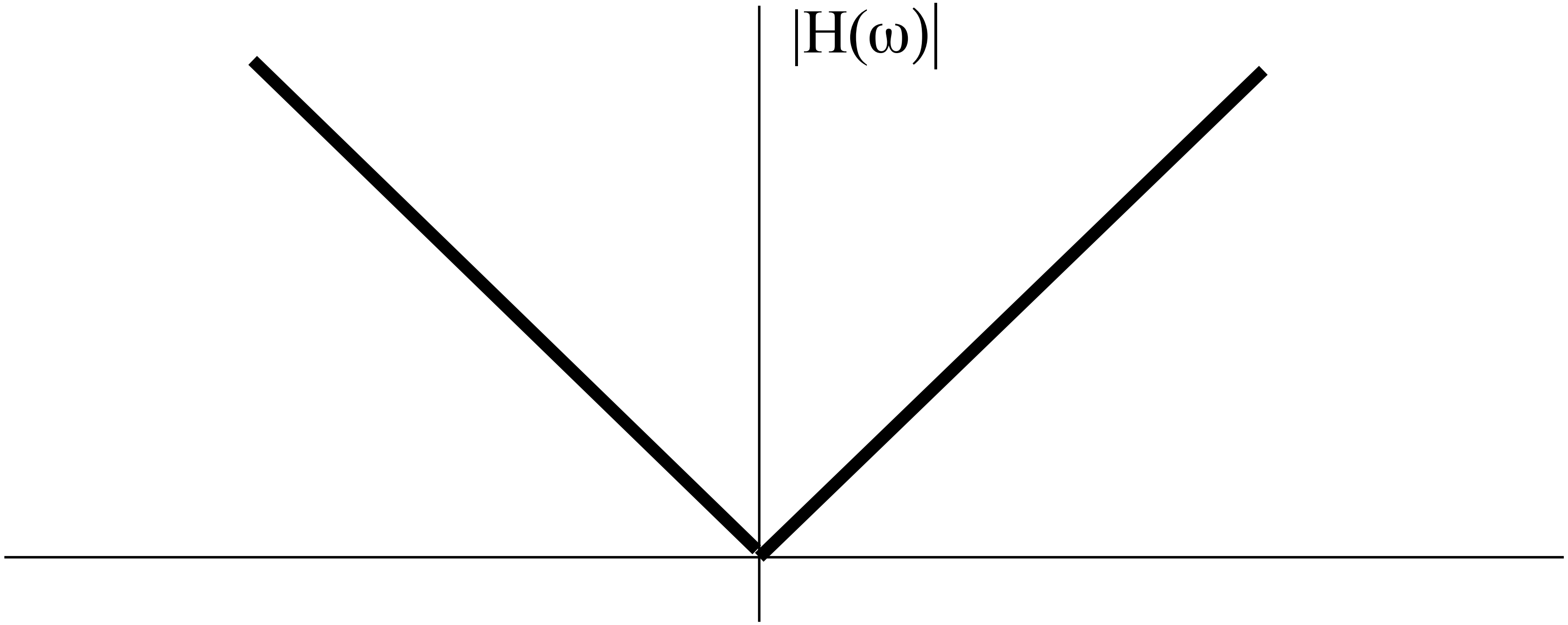
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(t) = e^{j\omega t} \qquad y(t) = j\omega e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = j\omega$$

Филтри за појачување

- Диференцијатор
- Подобрување на брзите промени/варијации кај даден сигнал односно подобрување на ивиците кај сликите

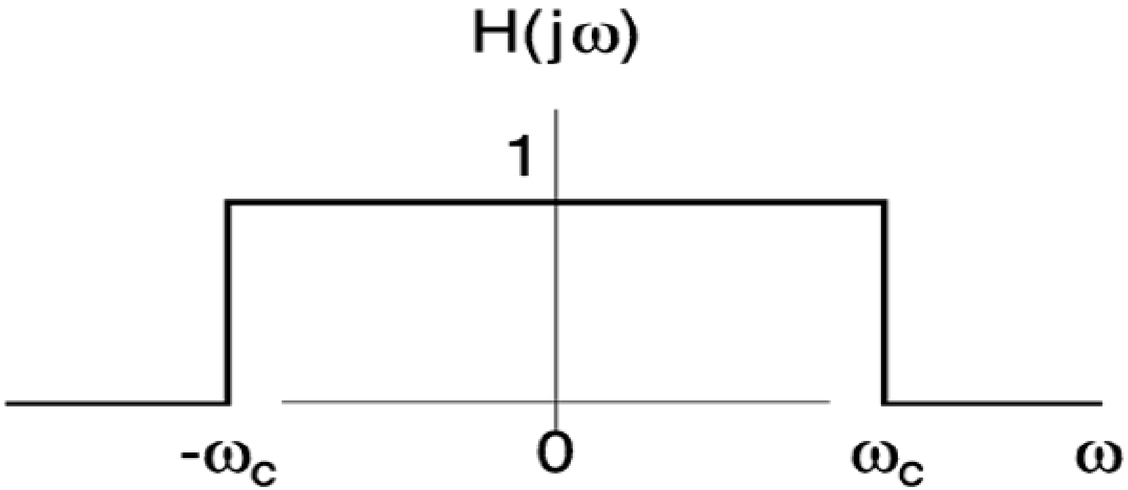


Селективни филтри

- Имаат за цел да селектираат одреден опсег на фреквенции и да отфрлаат друг опсег од фреквенцискиот спектар на сигналот
  - Карактеристична примена: Отстранување на шум

Селективни филтри

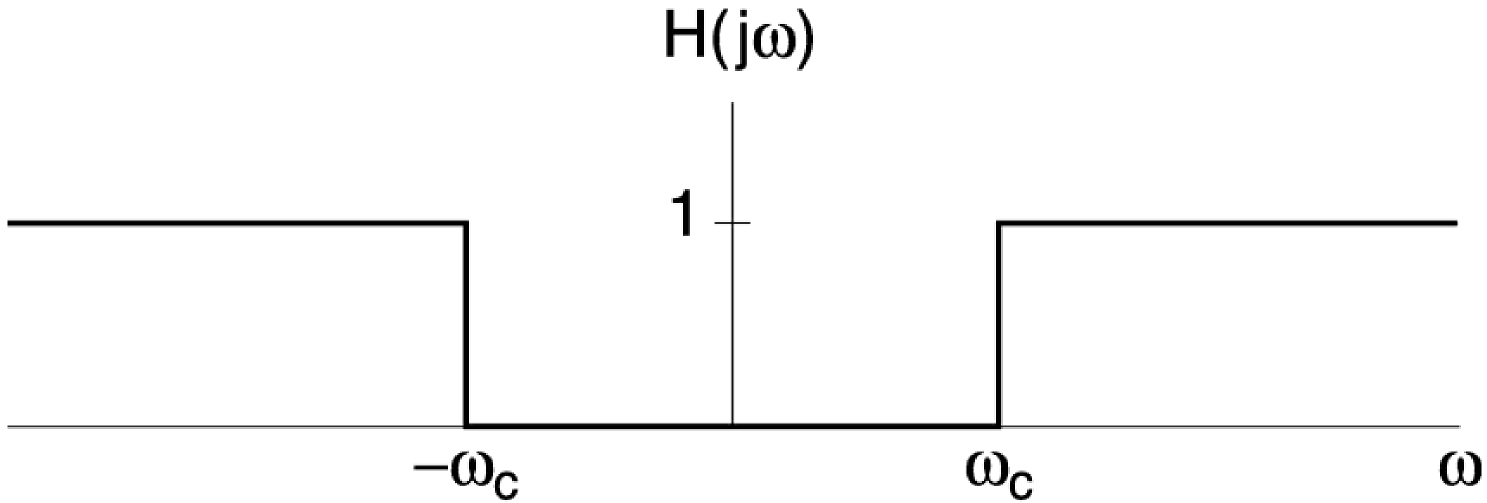
- Фреквенциска карактеристика на нископропусен филтер



  - ω_c – гранична фреквенција

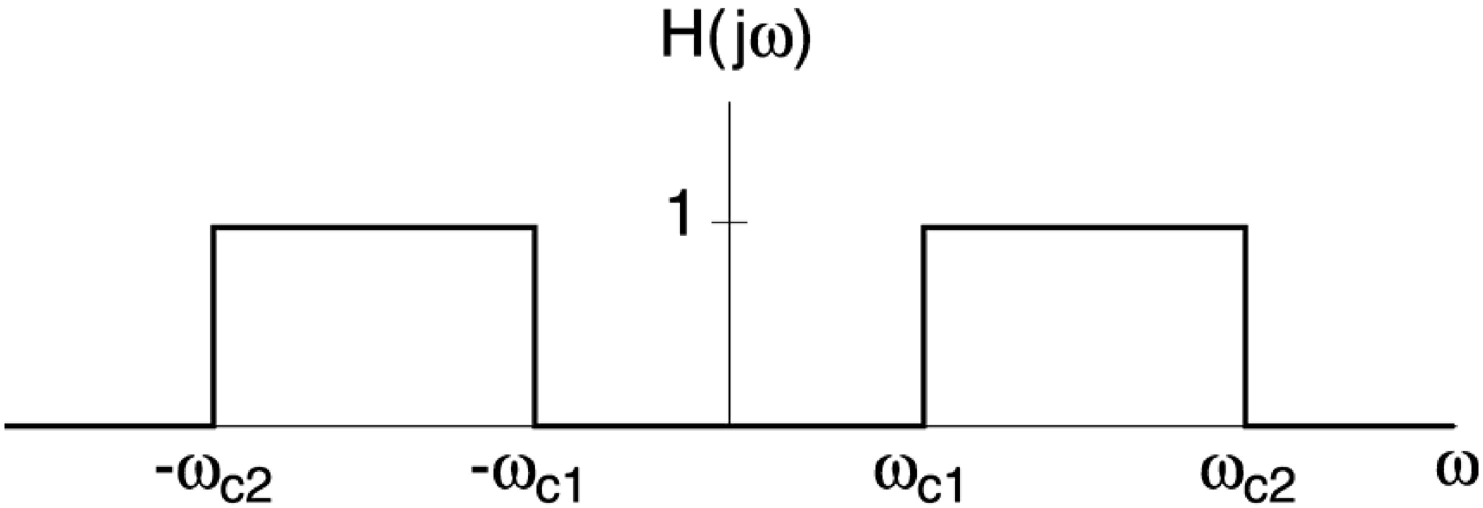
Селективни филтри

- Фреквенциска карактеристика на високопропусен филтер



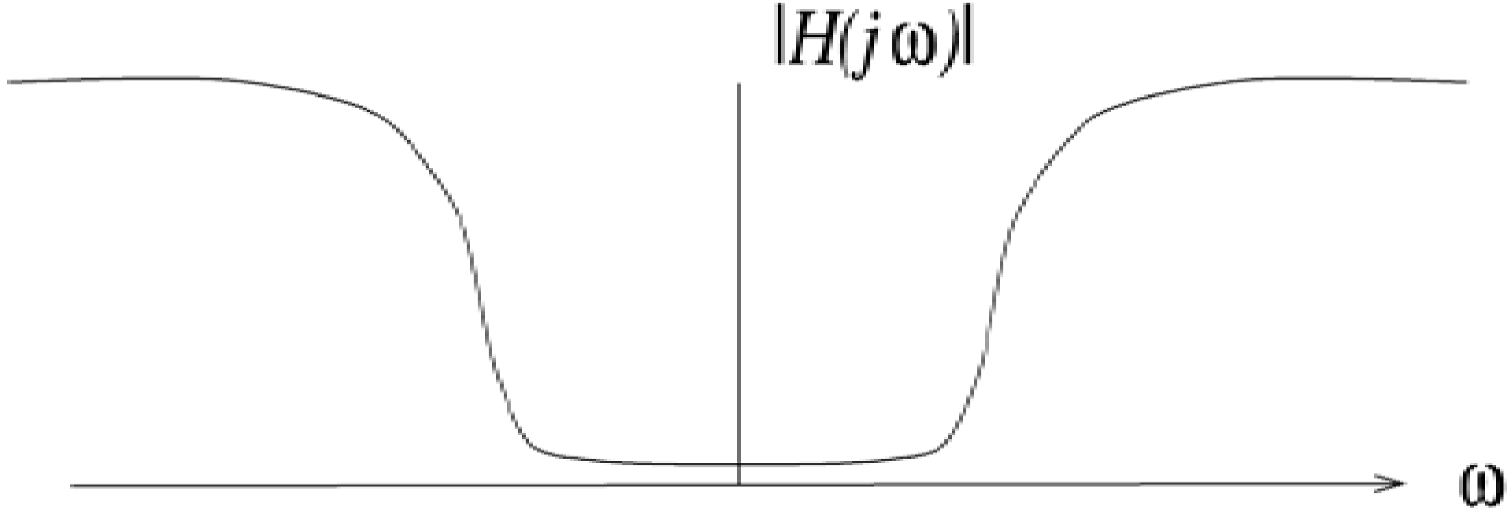
Селективни филтри

- Фреквенциска карактеристика на филтер пропусник на опсег



Селективни филтри

- реален



Фуриеови редови и LTI системи

- Пример
  - Да се одреди излезниот сигнал на LTI систем со фреквенциска карактеристика

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le 3\pi \\ 0 & |\omega| > 3\pi \end{cases}$$

ако на влез се примени сигналот

$$x(t) = \frac{1}{2} + 2\cos 2\pi t + \sin 4\pi t$$

$$H(0) = 1,$$

$$H(j2\pi) = 1$$

$$H(j4\pi) = 0$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + 2\cos 2\pi t$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Задача за вежбање
  - Да се одреди излезниот сигнал на LTI систем со импулсен одзив

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

ако на влез се примени сигналот

$$x(t) = \frac{1}{2} + 2\cos 2\pi t + \sin 4\pi t$$

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$= -\frac{1}{1+j\omega} e^{-\tau} e^{-j\omega\tau}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{1+j\omega}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Задача за вежбање
  - Каузален LTI систем е опишан со следната диф. равенка

$$\frac{dy}{dt} + 4y(t) = x(t)$$

  - Да се одреди Фуриеовиот ред на излезниот сигнал ако влезниот сигнал е $\cos 2\pi t$

$$x(t) = e^{j\omega t}, \qquad y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t},$$

$$j\omega H(j\omega)e^{j\omega t} + 4H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 4}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0)a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Фуриеови редови и LTI системи

- Задача за вежбање

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}H(jk\omega_0)a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\cos 2\pi t \rightarrow \omega = 2\pi$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$b_k = a_k H(jk\omega_0)$$

$$\Rightarrow b_1 = a_1 H(j\omega_0) = \frac{1}{2}\frac{1}{4+j2\pi}$$

$$b_{-1} = a_{-1}H(-j2\pi) = \frac{1}{2}\frac{1}{4-j2\pi}$$