СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

Фуриеов ред

Решени задачи:

1. Да се развие периодичниот сигнал $x(t) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$ во Фуриеов ред, и да се нацрта неговиот амплитуден и фазен спектар.

Решение:
Секој периодичен сигнал кој ги задоволува условите на Дирихле може да се развие во Фуриеов ред, односно да се прикаже во облик:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Со развивањето во Фуриеов ред, периодичниот сигнал се претставува како сума од имагинарни експоненцијални сигнали $e^{jk\omega_0 t}$, помножени со комплексните коефициенти a_k. Константата ω_0 е основна кружна фреквенција, еднаква на $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, каде T е основен период на периодичниот сигнал $x(t)$. Коефициените a_k се пресметуваат според формулата:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Одредување на Фуриеов ред на периодичен сигнал значи одредување на коефициентите a_k. За таа цел, потребно е прво да се одредат основниот период и основната кружна фреквенција на периодичниот сигнал.
Основниот период T на сигналот $x(t)$ е еднаков на НЗС на основните периоди на сигналите $\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$ и $\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$:

$$T = НЗС(T_1, T_2)$$

$$\frac{2\pi}{3}T_1 = 2\pi \Rightarrow T_1 = 3$$
$$\frac{5\pi}{3}T_2 = 2\pi \Rightarrow T_2 = \frac{6}{5}$$
$$T = НЗС\left(3, \frac{6}{5}\right) = 6$$

Основната кружна фреквенција е $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$.

Наместо да се пресметуваат коефициентите a_k според формулата, во случајов полесно е тие директно да се идентификуваат, бидејќи сигналот $x(t)$ е зададен како сума од сигнали кои можат да се претставаат со помош на имагинарните експоненцијални сигнали:

$$x(t) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) = 1 \cdot e^{-j0\frac{\pi}{3}t} + \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{3}t} + e^{-j\frac{2\pi}{3}t}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{5\pi}{3}t} - e^{-j\frac{5\pi}{3}t}\right)$$

$$x(t) = 1 \cdot e^{-j0\frac{\pi}{3}t} + \frac{1}{2}e^{j2\frac{\pi}{3}t} + \frac{1}{2}e^{-j2\frac{\pi}{3}t} + \frac{1}{2j}e^{j5\frac{\pi}{3}t} - \frac{1}{2j}e^{-j5\frac{\pi}{3}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\frac{\pi}{3}t}$$

Од последното равенство следи дека коефициентите од развојот во Фуриеов ред на сигналот $x(t)$ се :

$$a_0 = 1;\quad a_2 = \frac{1}{2};\quad a_{-2} = \frac{1}{2};\quad a_5 = \frac{1}{2j};\quad a_{-5} = -\frac{1}{2j};$$

Фреквенцискиот спектар на периодичниот сигнал е дефиниран со множеството коефициенти a_k кои еднозначно го определуваат периодичниот сигнал. Фреквенцискиот спектар е комплексен и е претставен со две дискретни функции од k, $k \in \mathbb{Z}$:

$|a_k|$ - го одредува амплитудниот спектар;

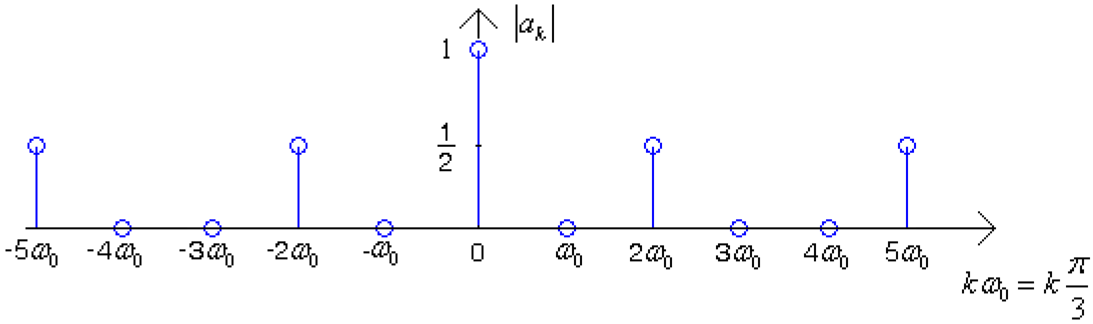
$\angle a_k$ - го одредува фазниот спектар;

Вредностите на овие две дискретни функции од k одговараат на вредностите на амплитудниот и фазниот спектар во точките $k\omega_0 = k\frac{\pi}{3}$.

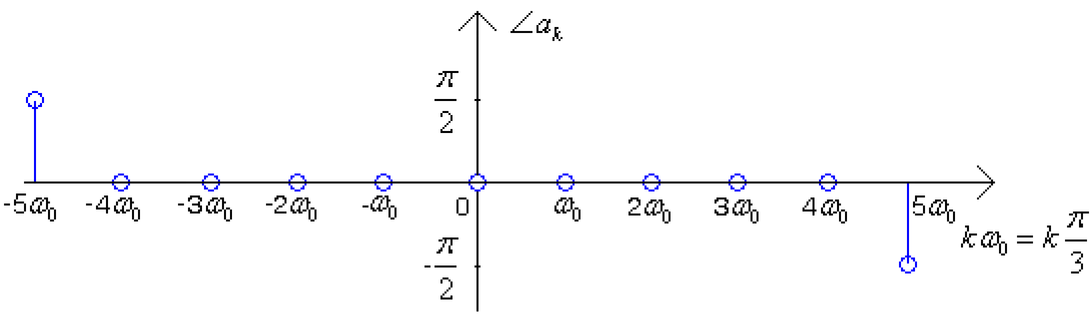
$$|a_0| = 1,\ |a_2| = |a_{-2}| = |a_5| = |a_{-5}| = \frac{1}{2};$$

$$\angle a_0 = \angle a_2 = \angle a_{-2} = 0,\ \angle a_5 = -\frac{\pi}{2},\ \angle a_{-5} = \frac{\pi}{2}$$

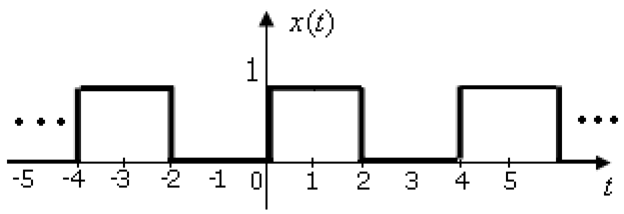
Значи, амплитудниот спектар на сигналот $x(t)$ е:



Фазниот спектар на сигналот $x(t)$ е:



2. Да се развие во Фуриеов ред периодичниот сигнал $x(t)$ и да се скицира неговиот амплитуден и фазен спектар.



<u>Решение:</u>

Од сликата се гледа дека основниот период на сигналот $x(t)$ е $T=4$, основната кружна фреквенција е $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$. Коефициентите од развојот во Фуриеов ред се:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{4}\int_0^4 x(t)\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt = \frac{1}{4}\int_0^2 1\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt = \left.\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}t}}{-4jk\frac{\pi}{2}}\right|_0^2 = \frac{1}{2jk\pi}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}0} - e^{-jk\frac{\pi}{2}2}\right) =$$

$$\frac{1}{2jk\pi}\left(1-e^{-jk\pi}\right) = \frac{1}{2jk\pi}e^{-jk\frac{\pi}{2}}\left(e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}\cdot\frac{\left(e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right)}{2j} = \frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right),\quad k\in\mathbb{Z}$$

Развојот на сигналот $x(t)$ има бесконечно многу членови. Во продолжение се одредени само коефициентите за $k\in[-5,5]$, и за тие вредности е скициран амплитудниот и фазниот спектар.

$$a_k = \frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_0 = \frac{e^{-j0\frac{\pi}{2}}}{0\pi}\sin\left(0\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(0\frac{\pi}{2}\right)}{0\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2};\quad |a_0| = \frac{1}{2},\quad \angle a_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-j}{\pi};\quad |a_0| = \frac{1}{\pi},\quad \angle a_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_2 = \frac{e^{-j2\frac{\pi}{2}}}{2\pi}\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{2\pi}0 = 0;\quad |a_0| = 0,\quad \angle a_0 = 0$$

$$a_3 = \frac{e^{-j3\frac{\pi}{2}}}{3\pi}\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) = \frac{j}{3\pi}(-1);\quad |a_0| = \frac{1}{3\pi},\quad \angle a_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_4 = \frac{e^{-j4\frac{\pi}{2}}}{4\pi}\sin\left(4\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4\pi}0 = 0;\quad |a_0| = 0,\quad \angle a_0 = 0$$

$$a_5 = \frac{e^{-j5\frac{\pi}{2}}}{5\pi}\sin\left(5\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-j}{5\pi}1;\quad |a_0| = \frac{1}{5\pi},\quad \angle a_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Бидејќи сигналот $x(t)$ е реален, важи релацијата $a_{-k} = a_k^*$:

$$a_{-1} = a_1^* = \left(\frac{-j}{\pi}\right)^* = \frac{j}{\pi};\quad |a_{-1}| = \frac{1}{\pi},\quad \angle a_1 = \frac{\pi}{2}$$

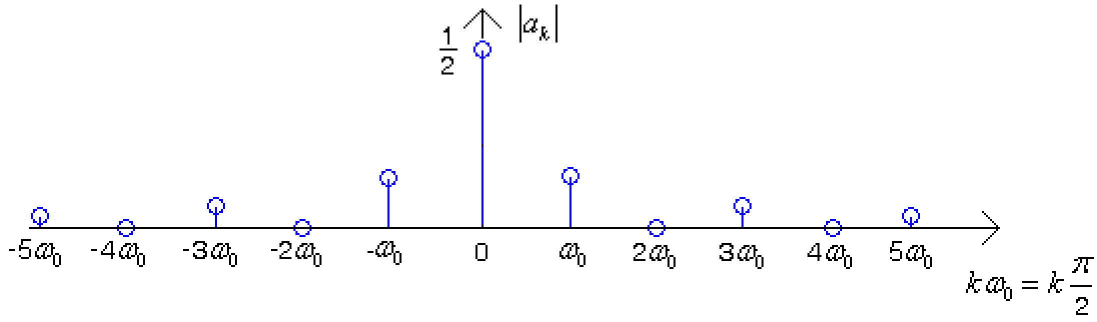
$$a_{-2} = a_2^* = 0;\quad |a_{-2}| = 0,\quad \angle a_{-2} = 0$$

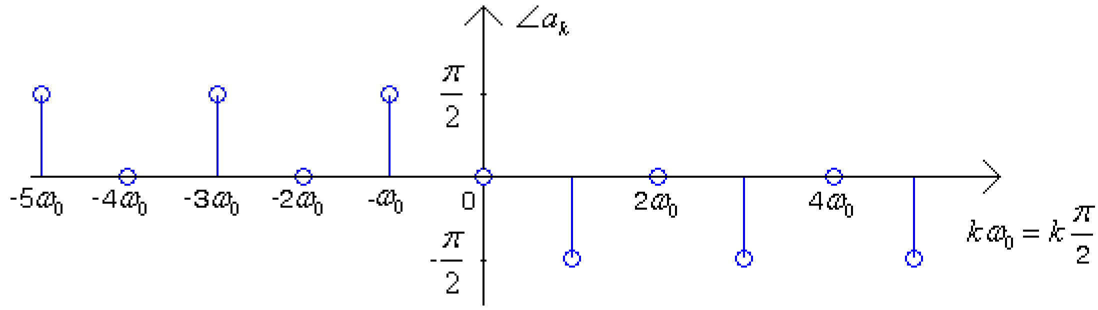
$$a_{-3} = a_3^* = \left(\frac{-j}{3\pi}\right)^* = \frac{j}{3\pi};\quad |a_{-3}| = \frac{1}{3\pi},\quad \angle a_{-3} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_{-4} = a_4^* = 0;\quad |a_{-4}| = 0,\quad \angle a_{-4} = 0$$

$$a_{-5} = a_5^* = \left(\frac{-j}{5\pi}\right)^* = \frac{j}{5\pi};\quad |a_{-5}| = \frac{1}{5\pi},\quad \angle a_{-5} = \frac{\pi}{2}$$

Амплитудниот и фазниот спектар на $x(t)$ за фреквенции во опсегот $\omega \in [-5\omega_0, 5\omega_0] \Leftrightarrow \omega \in [-5\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}]$ се:



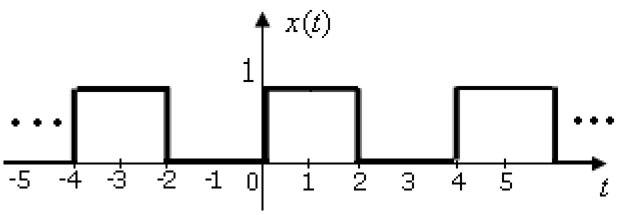


3. Да се одреди одзивот на LTI систем со фреквенциска карактеристика:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \le 4 \\ 1, & |\omega| > 4 \end{cases}$$

ако на влез се примени сигналот:

а) $x(t) = \cos(2t) + 3\sin(5t) + e^{j6t}$
б) сигналот прикажан на сликата: (истиот од претходната задача)



Решение:

а) Ако на влез од еден LTI систем се примени сигнал од облик $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, излезниот сигнал ќе биде $y(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

кадешто $H(j\omega_0)$ е вредност на фреквенциската карактеристика $H(j\omega)$ во точката $\omega = \omega_0$.
Во дадениот случај, ако влезниот сигнал се претстави преку имагинарни експоненцијални сигнали:

$$x(t) = \cos(2t) + 3\sin(5t) + e^{j6t} = \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t} + \frac{3}{2j}e^{j5t} - \frac{3}{2j}e^{-j5t} + e^{j6t}$$

излезниот сигнал ќе биде:

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{j2t}\cdot H(j2)+\frac{1}{2}e^{-j2t}\cdot H(-j2)+\frac{3}{2j}e^{j5t}\cdot H(j5)-\frac{3}{2j}e^{-j5t}\cdot H(-j5)+e^{j6t}\cdot H(j6)$$

Од изразот за фреквенцискатa карактеристика $H(j\omega)$ се добива дека е:

$$H(j2)=H(-j2)=0,\quad H(j5)=H(-j5)=H(j6)=1$$

излезниот сигнал е:

$$y(t)=3\sin(5t)+e^{j6t}$$

б) Според претходната задача, развојот на сигналот $x(t)$ во Фуриеов ред е:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\cdot e^{jk\frac{\pi}{2}t},\quad a_k=\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\cdot e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

значи $x(t)$ е сума од бесконечен број имагинарни експоненцијални сигнали $e^{jk\frac{\pi}{2}t}$, помножени со комплексните коефициенти $a_k=\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$.

Ако овој сигнал се примени на влезот од системот со фреквенциска карактеристика $H(j\omega)$ излезниот сигнал ќе биде:

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\cdot e^{jk\frac{\pi}{2}t}\cdot H(jk\frac{\pi}{2})$$

Останува уште да се одредат вредностите $H(jk\frac{\pi}{2})$, $k\in\mathbb{Z}$

Од изразот за $H(j\omega)$ се добива дека е:

$$H(jk\frac{\pi}{2})=\begin{cases}0, & |k|<3\\ 1, & |k|\geq 3\end{cases}$$

излезниот сигнал е:

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{-3}\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\cdot e^{jk\frac{\pi}{2}t}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\cdot e^{jk\frac{\pi}{2}t}=$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{e^{-j(-k)\frac{\pi}{2}}}{(-k)\pi}\sin\left((-k)\frac{\pi}{2}\right)\cdot e^{j(-k)\frac{\pi}{2}t}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\cdot e^{jk\frac{\pi}{2}t}=$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{2\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}\cdot\left(e^{jk\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}+e^{-jk\frac{\pi}{2}}\cdot e^{jk\frac{\pi}{2}t}\right)=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{2\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}\cdot\left(e^{-jk\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)}+e^{jk\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)}\right)=$$

$$y(t)=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{2\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}\cdot 2\cos\left(k\frac{\pi}{2}t-k\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{4\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}\cdot\cos\left(k\frac{\pi}{2}t-k\frac{\pi}{2}\right)$$