СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

Фуриеова трансформација

Решени задачи:

1. Со користење на особините на Фуриеовата трансформација, да се одреди Фуриеовата трансформација на следните сигнали:

а) $x(t) = e^{-2t} \cdot u(t-2)$

б) $x(t) = e^{4t} \cdot u(-t)$

в) $x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-x} \cdot u(x)dx$

Решение:

а) Според таблицата на Фуриеова трансформација, $FT\left\{e^{-at} \cdot u(t)\right\} = \dfrac{1}{a+j\omega}$, $a > 0$. За да се определи Фуриеовата трансформација на сигналот $x(t)$, може да се искористи следната особина:

Ако $FT\{f(t)\} = F(j\omega)$, тогаш $FT\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$.

$x(t) = e^{-2t} \cdot u(t-2) = e^{-2t-4+4} \cdot u(t-2) = e^{-4} \cdot e^{-2(t-2)} \cdot u(t-2)$

Фуриеовата трансформација на сигналот $x(t)$ е:

$$X(j\omega) = e^{-4} \cdot FT\left\{e^{-2(t-2)} \cdot u(t-2)\right\} = e^{-4} \cdot e^{-j\omega 2} \cdot FT\left\{e^{-2t} \cdot u(t)\right\} = e^{-j2\omega-4} \cdot \frac{1}{2+j\omega} = \frac{e^{-j2\omega-4}}{2+j\omega}$$

б) За да се одреди Фуриеовата трансформација на сигналот $x(t)$, може да се искористи следната особина:

Ако $FT\{f(t)\} = F(j\omega)$, тогаш $FT\{f(-t)\} = F(-j\omega)$.

$x(t) = e^{4t} \cdot u(-t) = e^{-4(-t)} \cdot u(-t)$, $FT\left\{e^{-4t} \cdot u(t)\right\} = \dfrac{1}{4+j\omega}$, од каде следи:

$$X(j\omega) = \frac{1}{4-j\omega}$$

в) Една од особините на Фуриеовата трансформација е:

Ако $FT\{f(t)\} = F(j\omega)$, тогаш $FT\left\{\int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx\right\} = \dfrac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi \cdot F(j0) \cdot \delta(\omega)$.

Во случајов, сигналот $x(t)$ е: $x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-x} \cdot u(x)dx$. Според последната особина, ако Фуриеовата трансформација на сигналот $q(t) = e^{-t} \cdot u(t)$ е $Q(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega}$, тогаш, Фуриеовата трансформација на сигналот $x(t)$ е:

$$X(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{j\omega} + \pi \cdot Q(j0) \cdot \delta(\omega)$$

$Q(j0) = \dfrac{1}{1+j0} = 1$, па следи:

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)} + \pi \cdot \delta(\omega)$$

2. Фуриеовата трансформација на сигналот $x(t)$ е $X(j\omega)$. Да се изрази Фуриеовата трансформација на следните сигнали со помош на $X(j\omega)$.

а) $y(t)=\dfrac{d^2x(t-1)}{dt^2}$; б) $y(t)=x(3t-6)$; в) $y(t)=(t-1)\cdot x(t)$

Решение:

а) Една од особините на Фуриеовата трансформација е:

Ако $FT\{f(t)\}=F(j\omega)$, тогаш $FT\left\{\dfrac{df(t)}{dt}\right\}=j\omega\cdot F(j\omega)$.

Сигналот $y(t)$ е: $y(t)=\dfrac{d^2x(t-1)}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{dx(t-1)}{dt}\right\}$.

Неговата Фуриеова трансформација е:

$$Y(j\omega)=j\omega\cdot j\omega\cdot FT\{x(t-1)\}=j\omega\cdot j\omega\cdot e^{-j\omega}\cdot X(j\omega)=-\omega^2\cdot e^{-j\omega}\cdot X(j\omega)$$

б) За да се изрази $Y(j\omega)$ со помош на $X(j\omega)$, треба да се искористи особината на скалирање:

Ако $FT\{f(t)\}=F(j\omega)$, тогаш $FT\{f(at)\}=\dfrac{1}{|a|}F\left(j\dfrac{\omega}{a}\right)$, и особината на транслација. Транслацијата на *t*-оската е $t_0=2$: $y(t)=x(3t-6)=x(3(t-2))$, скалирањето е со фактор 3. Фуриеовата трансформација на $y(t)$ е:

$$Y(j\omega)=e^{-j2\omega}\cdot\frac{1}{3}\cdot X\left(j\frac{\omega}{3}\right)$$

в) За да се изрази $Y(j\omega)$ со помош на $X(j\omega)$, треба да се искористи особината ‘множење со *t*’:

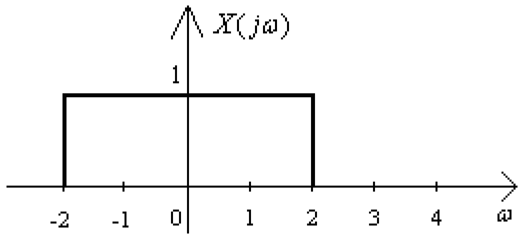
Ако $FT\{f(t)\}=F(j\omega)$, тогаш $FT\{t\cdot f(t)\}=j\cdot\dfrac{dF(j\omega)}{d\omega}$.

Сигналот $y(t)$ е: $y(t)=(t-1)\cdot x(t)=t\cdot x(t)-x(t)$

Неговата Фуриеова трансформација е:

$$Y(j\omega)=j\cdot\frac{dX(j\omega)}{d\omega}-X(j\omega)$$

3. Фуриеовата трансформација на сигналот $x(t)$ е $X(j\omega)$, прикажана на сликата. Да се одреди вкупната енергија на сигналот.



Решение:

Вкупната енергија на сигналот $x(t)$ е: $E=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt$.

Според Парсеваловиот идентитет, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2\,d\omega$, па следува дека вкупната енергија на сигналот $x(t)$ е:

$$E=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2}^{2}1\cdot d\omega=\frac{1}{2\pi}\big(2-(-2)\big)=\frac{2}{\pi}.$$

4. Фреквенциската карактеристика на еден каузален LTI систем е: $H(j\omega)=\dfrac{1}{2+j\omega}$. Да се одреди:

а) импулсниот одзив на системот;
б) дали системот е стабилен;
в) излезниот сигнал од системот ако на влез е применет сигналот: $x(t)=e^{-3t}\cdot u(t)$

<u>Решение:</u>
а) Фреквенциската карактеристика на системот, $H(j\omega)$, и неговиот импулсен одзив, $h(t)$, формираат Фуриеов трансформациски пар, па импулсниот одзив се добива со инверзна Фуриеова трансформација на $H(j\omega)$:

$$h(t)=FT^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=FT^{-1}\left\{\frac{1}{2+j\omega}\right\}=e^{-2t}\cdot u(t)$$

б) LTI системот е стабилен ако неговиот импулсен одзив е апсолутно интеграбилен:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-2t}\cdot u(t)\right|dt=\int_{0}^{\infty}\left|e^{-2t}\right|dt=\int_{0}^{\infty}e^{-2t}dt=\left.\frac{e^{-2t}}{-2}\right|_{0}^{\infty}=0-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}<\infty \;\Rightarrow\; \text{системот е стабилен.}$$

в) Фуриеовите трансформации на влезниот и излезниот сигнал од еден LTI систем се поврзани со релацијата: $Y(j\omega)=H(j\omega)\cdot X(j\omega)$, кадешто $H(j\omega)$ е фреквенциската карактеристика на системот. Излезниот сигнал, $y(t)$, може да се одреди на следниот начин:

$$y(t)=FT^{-1}\left\{Y(j\omega)\right\}=FT^{-1}\left\{H(j\omega)X(j\omega)\right\}$$

$$H(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega},\quad X(j\omega)=FT\left\{e^{-3t}\cdot u(t)\right\}=\frac{1}{3+j\omega}$$

$$Y(j\omega)=H(j\omega)\cdot X(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega}\cdot\frac{1}{3+j\omega}$$

За да се одреди инверзна Фуриеова трансформација од $Y(j\omega)$, потребно е $Y(j\omega)$ да се разложи на прости дробно-рационални функции од $j\omega$:

$$Y(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega}\cdot\frac{1}{3+j\omega}=\frac{K_1}{2+j\omega}+\frac{K_2}{3+j\omega}$$

$$K_1=\lim_{j\omega\to-2}\big(Y(j\omega)(2+j\omega)\big)=\lim_{j\omega\to-2}\left(\frac{1}{3+j\omega}\right)=1$$

$$K_2=\lim_{j\omega\to-3}\big(Y(j\omega)(3+j\omega)\big)=\lim_{j\omega\to-3}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right)=-1$$

$$Y(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega}-\frac{1}{3+j\omega}$$

Од последниот израз, користејќи ја таблицата на Фуриеова трансформација, се добива:

$$y(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})\cdot u(t)$$

5. Влезниот и излезниот сигнал од еден каузален LTI систем се поврзани со следната диференцијална равенка: $\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$

Да се одреди:

а) фреквенциската карактеристика на системот;
б) индициониот одзив на системот;
в) излезниот сигнал од системот, ако на влез е применет сигналот $x(t)=e^{-2t}\cdot u(t)$;

Решение:

а) Фреквенциската карактеристика на системот е однос на Фуриеовите трансформации на излезниот и влезниот сигнал: $H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$. Ако се побара Фуриеова трансформација на диференцијалната равенка, и потоа се групираат члeновите по $X(j\omega)$ и $Y(j\omega)$, лесно се доаѓа до фреквенциската карактеристика:

$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)\ \ /\ \ FT$$
$$j\omega\cdot Y(j\omega)+Y(j\omega)=X(j\omega)$$
$$(j\omega+1)\cdot Y(j\omega)=X(j\omega)$$
$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{1}{1+j\omega}$$

б) Индициониот одзив може да се одреди решавајќи ја диференцијалната равенка при влезен сигнал $x(t)=u(t)$ и почетни услови еднакви на нула. Друг начин да се одреди индициониот одзив е преку импулсниот одзив, бидејќи тие се поврзани со релацијата:

$$a(t)=\int_{-\infty}^{t}h(x)dx$$

Импулсниот одзив на системот е инверзна Фуриеова трансформација на фреквенциската карактеристика:

$$h(t)=FT^{-1}\left\{H(j\omega)\right\}=FT^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega}\right\}=e^{-t}\cdot u(t)$$

Индициониот одзив е:

$$a(t)=\int_{-\infty}^{t}h(x)dx=\int_{-\infty}^{t}e^{-x}\cdot u(x)dx=\int_{0}^{t}e^{-x}dx=\left.\frac{e^{-x}}{-1}\right|_{o}^{t}=\frac{e^{-t}}{-1}-\frac{0}{-1}=1-e^{-t},\quad t>0$$
$$a(t)=(1-e^{-t})\cdot u(t)$$

в) Излезниот сигнал од системот, ако влезен сигнал е $x(t)=e^{-2t}\cdot u(t)$, може да се одреди на следниот начин:

$$y(t)=FT^{-1}\left\{Y(j\omega)\right\}=FT^{-1}\left\{H(j\omega)X(j\omega)\right\}$$
$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega},\ X(j\omega)=FT\left\{e^{-2t}\cdot u(t)\right\}=\frac{1}{2+j\omega}$$
$$Y(j\omega)=H(j\omega)\cdot X(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}\cdot\frac{1}{2+j\omega}$$

За да се одреди инверзна Фуриеова трансформација од $Y(j\omega)$, потребно е $Y(j\omega)$ да се разложи на прости дробно-рационални функции од $j\omega$:

$$Y(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}\cdot\frac{1}{2+j\omega}=\frac{K_1}{1+j\omega}+\frac{K_2}{2+j\omega}$$
$$K_1=\lim_{j\omega\to-1}\left(Y(j\omega)(1+j\omega)\right)=\lim_{j\omega\to-1}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right)=1$$
$$K_2=\lim_{j\omega\to-2}\left(Y(j\omega)(2+j\omega)\right)=\lim_{j\omega\to-2}\left(\frac{1}{1+j\omega}\right)=-1$$
$$Y(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}$$

Од последниот израз, користејќи ја таблицата на Фуриеова трансформација, се добива:

$$y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\cdot u(t)$$