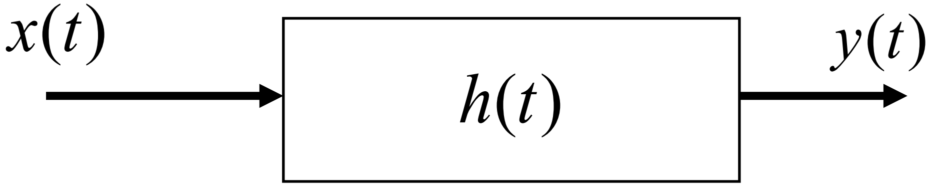
Лапласова трансформација и LTI системи

- LTI систем:



$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{LT} Y(s) = H(s)X(s)$$

- $H(s)$ **преносна функција** на системот
- Дефинирана е за систем во релаксирана состојба (како и импулсниот одзив)
- Доколку ROC на $H(s)$ ја содржи имагинарната оска

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$$

претставува фреквенциска карактеристика на системот

Лапласова трансформација и LTI системи

- Каузалност
- Каузален LTI систем, $h(t) = 0$ за $t < 0$,
- Според тоа, ROC на преносната функција на каузален LTI систем е во десната полурамнина.
- Дали важи обратно?
- За систем со **дробно рационална преносна функција**, барањето за каузалност на системот е еквивалентно со барањето ROC да биде полурамнина десно од најголемиот пол.

Лапласова трансформација и LTI системи

- Каузалност
- Примери: а) $h(t) = e^{-t}u(t)$ — каузален

  $$H(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1.$$ ROC десна полурамнина

- б) $h(t) = e^{-|t|}$ — двостран

  $$H(s) = \frac{-2}{s^2-1}, \quad -1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1.$$ ROC лента

- в) $$H(s) = \frac{e^s}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1.$$ ROC десна полурамнина

  $h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$ — не е каузален

Лапласова трансформација и LTI системи

- Стабилност
- LTI систем е стабилен доколку неговиот импулсен одзив е апсолутно интеграбилна функција, т.е постои Фуриеова трансформација
- LTI систем е стабилен ако и само ако ROC на неговата преносна функција $H(s)$ ја вклучува $j\omega$-оска [т.е. Re{s}=0]
- Каузален систем со дробно-рационална преносна функција $H(s)$ е стабилен ако и само ако сите полови на $H(s)$ лежат во левата полурамнина на s-рамнината (половите имаат негативни реални делови).

Лапласова трансформација и LTI системи

- Задача за вежбање: Кој од следните импулсни одзиви одговара на LTI стабилен систем со преносна функција

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

$$h(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(t)$$

$$\boxed{h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)}$$

$$h(t) = -\left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(-t)$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- LTI системи дефинирани со линеарни диференцијални равенки со константни коефициенти

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

- Со примена на ЛТ на двете страни на равенката, и користејќи ги особините на линеарност и диференцирање во временски домен, се добива

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s)$$

- Односно преносната функција е

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+3)}$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- LTI системи дефинирани со линеарни дифренцијални равенки со константни коефициенти
- Генерално

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- Со примена на ЛТ на двете страни на равенката, и користејќи ги особините на линеарност и диференцирање во временски домен, се добива

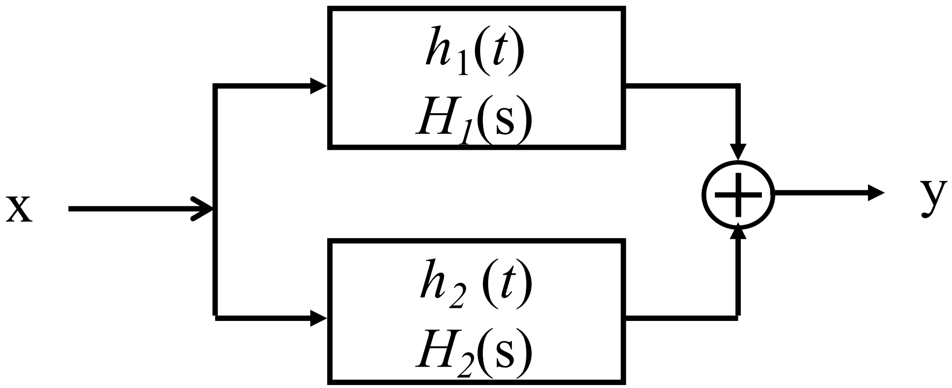
$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right) X(s)$$

- Односно преносната функција е

$$H(s) = \frac{\left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right)}{\left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right)}$$

Лапласова трансформација и LTI системи

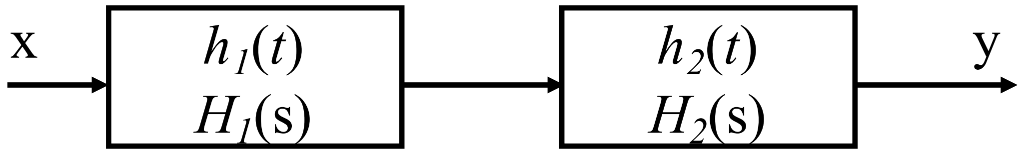
- Поврзување на системи
  - Паралелна врска



$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

  - Сериска врска

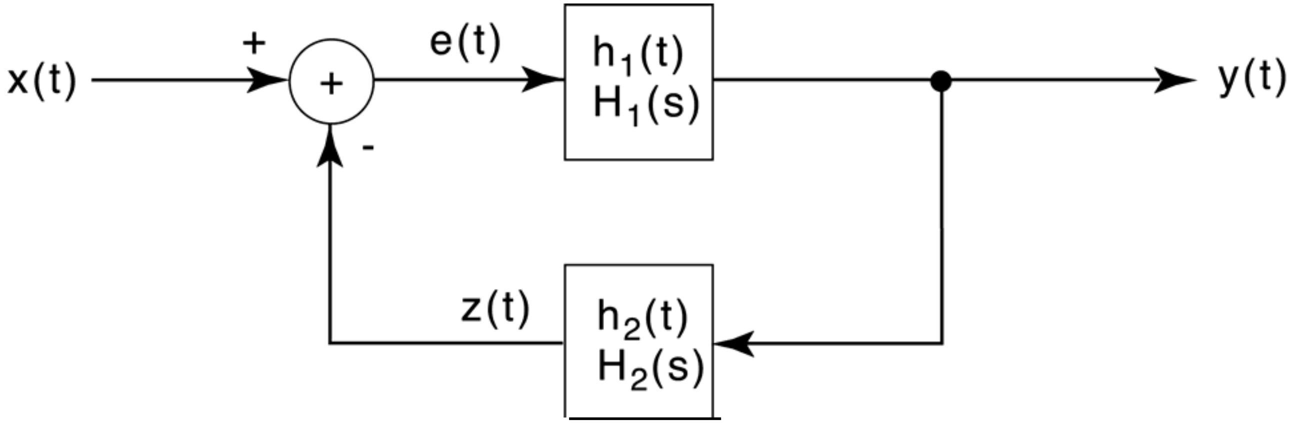


$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Поврзување на системи
  - Повратна врска



$$Y(s) = H_1(s)E(s), \quad E(s) = X(s) - Z(s) \qquad Z(s) = H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) - H_2(s)Y(s)]$$

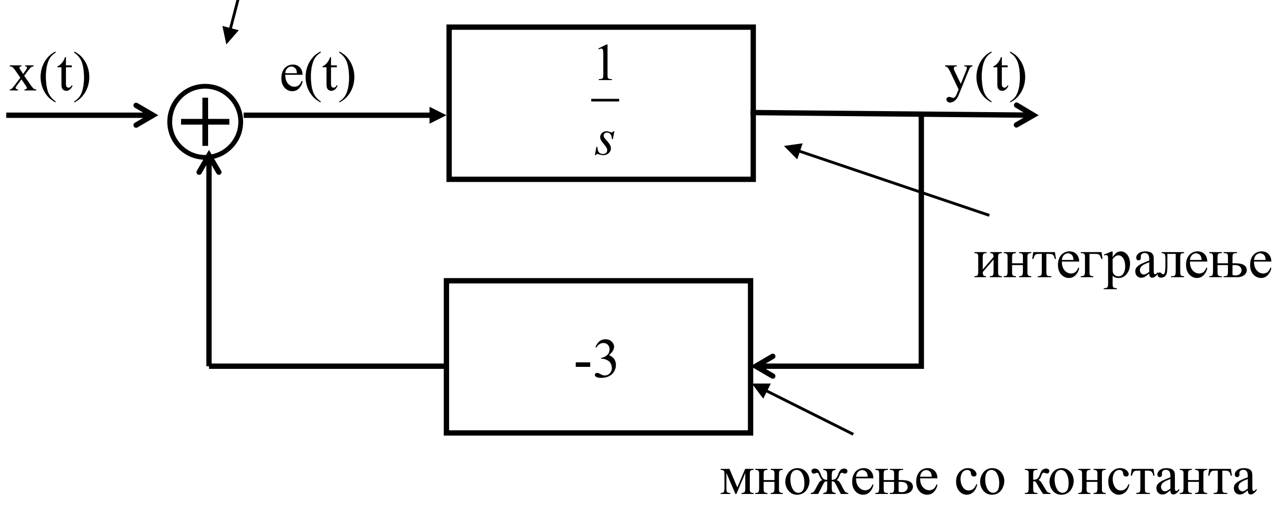
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Репрезентација на LTI системи со блок дијаграми
- Систем од прв ред

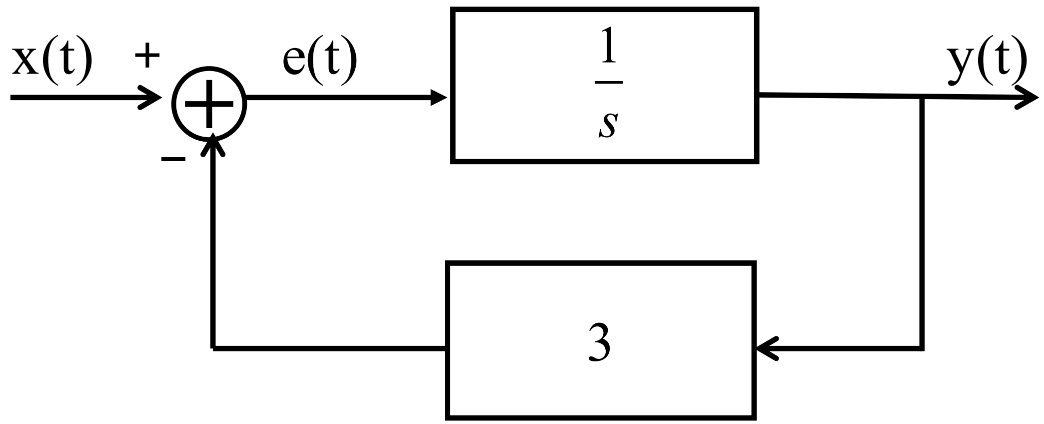
$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$



$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - 3y(t)$$

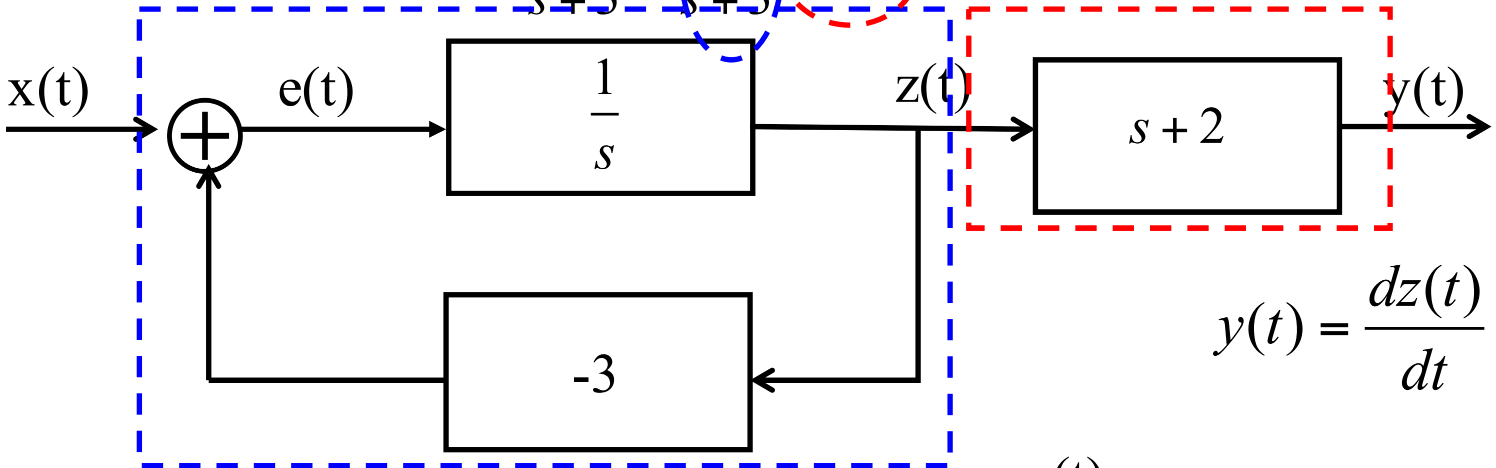
$$e(t) = x(t) - 3y(t)$$



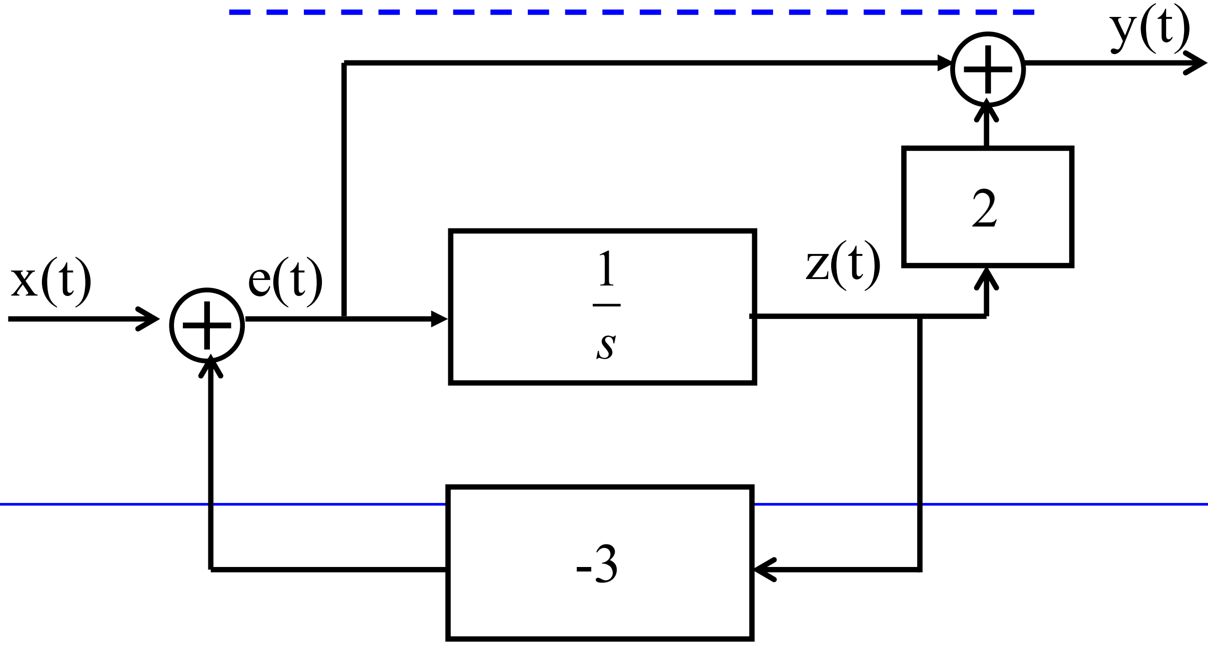
$$H(s) = \frac{1}{s+3} = \frac{1/s}{1+3/s}$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Блок дијаграми $$H(s) = \frac{s+2}{s+3} = \frac{1}{s+3}(s+2)$$



$$y(t) = \frac{dz(t)}{dt} + 2z(t)$$

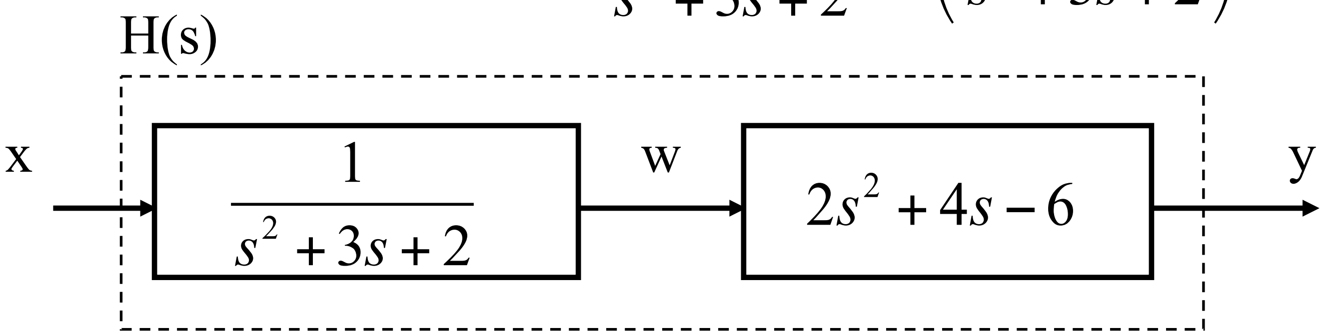


$$y(t) = e(t) + 2z(t)$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Блок дијаграми
- Систем од втор ред

$$H(s)=\frac{2s^2+4s-6}{s^2+3s+2}=\left(\frac{1}{s^2+3s+2}\right)\left(2s^2+4s-6\right)$$



$$W(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}X(s)$$

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2}+3\frac{dw(t)}{dt}+2w(t)=x(t)$$

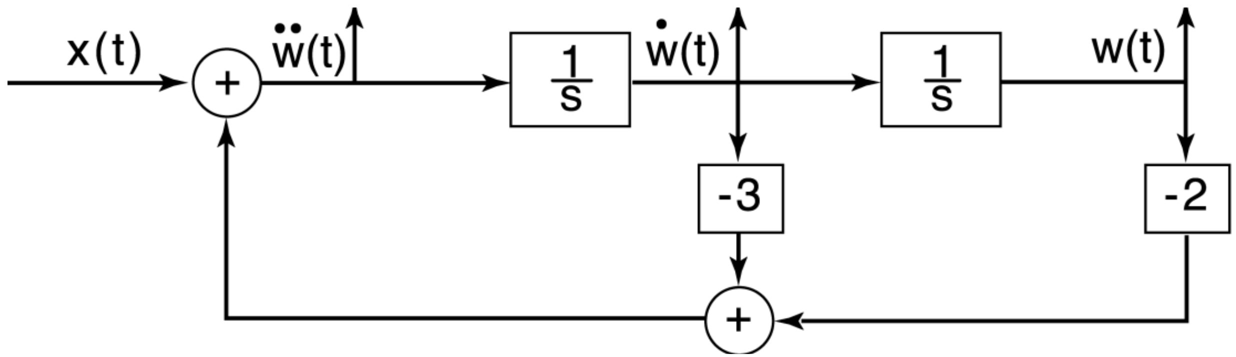
$$\frac{d^2w(t)}{dt^2}=x(t)-3\frac{dw(t)}{dt}-2w(t)$$

$$Y(s)=\left(2s^2+4s-6\right)W(s)$$

$$y(t)=2\frac{d^2w(t)}{dt^2}+4\frac{dw(t)}{dt}-6w(t)$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Блок дијаграми
- Директна форма $$\frac{d^2w(t)}{dt^2} = x(t) - 3\frac{dw(t)}{dt} - 2w(t)$$

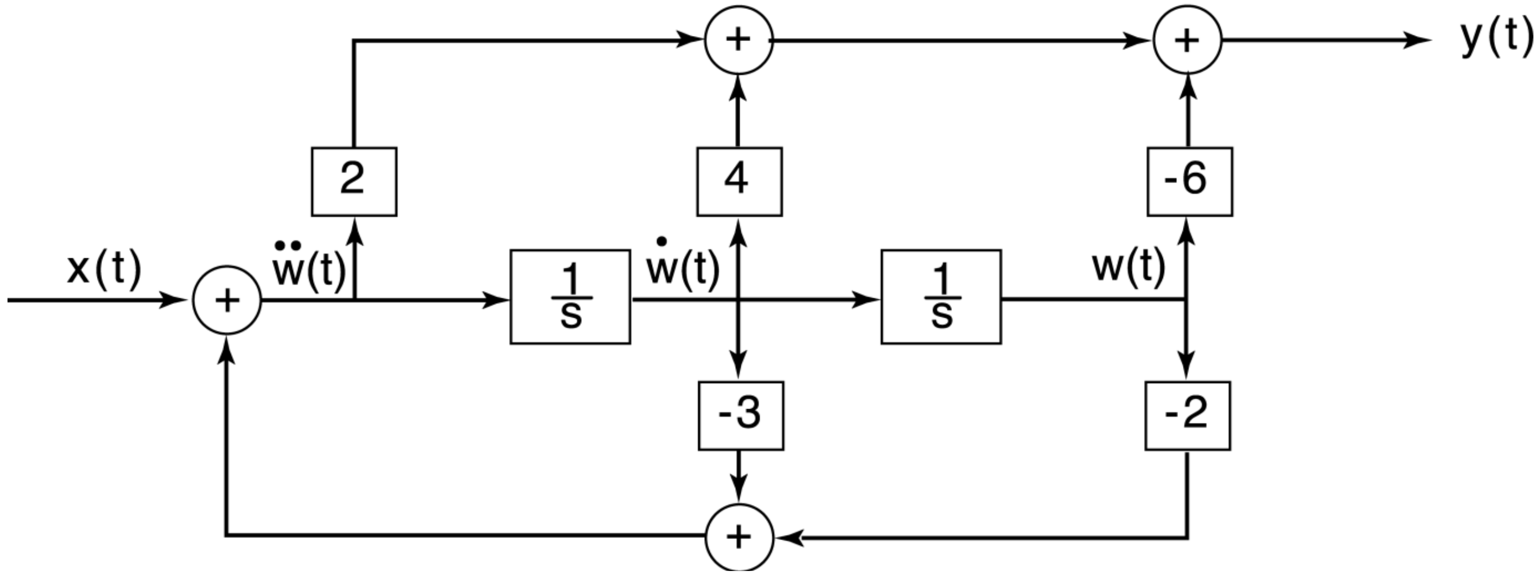


Лапласова трансформација и LTI системи

- Блок дијаграми
- Директна форма

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} = x(t) - 3\frac{dw(t)}{dt} - 2w(t)$$

$$y(t) = 2\frac{d^2w(t)}{dt^2} + 4\frac{dw(t)}{dt} - 6w(t)$$

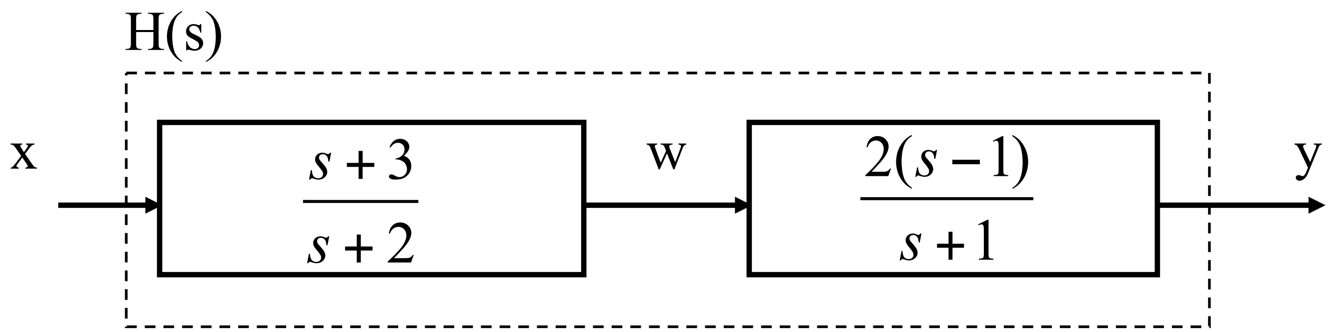


Лапласова трансформација и LTI системи

- Блок дијаграми
- Каскадна форма

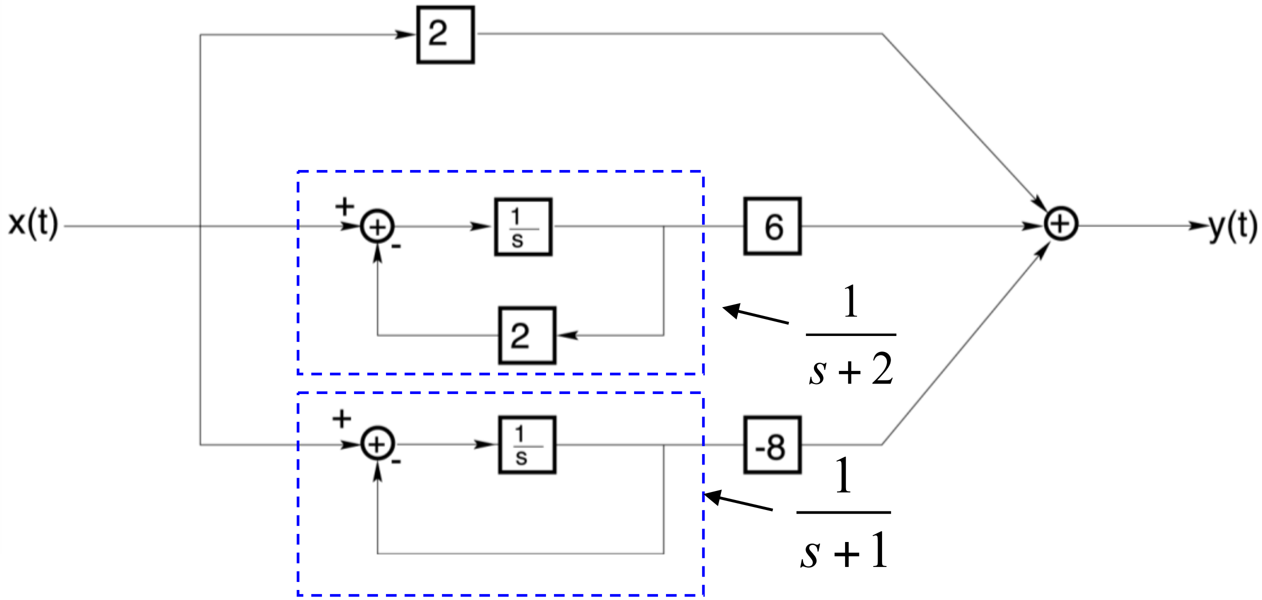
$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}$$

$$H(s) = \left[\frac{2(s-1)}{s+2}\right]\left[\frac{s+3}{s+1}\right] = \left[\frac{s+3}{s+2}\right]\left[\frac{2(s-1)}{s+1}\right]$$



Лапласова трансформација и LTI системи

- Блок дијаграми
- Паралелна форма $H(s)=\dfrac{2s^2+4s-6}{s^2+3s+2} = 2+\dfrac{6}{s+2}-\dfrac{8}{s+1}$



- Заклучок: постојат повеќе различни начини за претставување на систем со дадена преносна функција

Лапласова трансформација и LTI системи

- Задача за вежбање: $$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{5}{2}\frac{dy(t)}{dt}-\frac{3}{2}y(t)=x(t)$$

а) да се одреди преносната функција на системот

б) да се нацрта една реализација на овој систем

$$H(s)=\frac{1}{s^2+\frac{5}{2}s-\frac{3}{2}}=\frac{-\frac{2}{7}}{s+3}+\frac{\frac{2}{7}}{s-\frac{1}{2}}$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Унилатерална Лапласова трансформација

$$X(s)=\int_{0_-}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt \qquad (\text{каде } s=\sigma+j\omega)$$

- Разлика со билатералната
- 0_- значи дека доколку $x(t)$ има Диракови импулси или дисконтинуитети во $t = 0$ и тие се вклучени во интегралот
- Ако $x(t) = 0$ за $t < 0$, двете трансформации се исти
- Унилатерална ЛТ на $x(t)$ = билатерална ЛТ на $x(t)u(t)$
- Ако $x(t)$ е импулсен одзив на каузален LTI систем,

$$\mathrm{BLT}\{x(t)\}=\mathrm{ULT}\{x(t)\}$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Унилатерална Лапласова трансформација
- Пример $$x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$$
- Билатерална Лапласова трансформација

$$X(s) = \frac{e^{s}}{s+a} \quad \Re e\{s\} > -a$$

- Унилатерална Лапласова трансформација

$$X(s) = \int_{0_-}^{+\infty} e^{-a(t+1)}u(t+1)e^{-st}dt = \int_{0_-}^{+\infty} e^{-a}e^{-t(s+a)}dt$$

$$= e^{-a}\frac{1}{s+a}, \quad \text{за } \Re\mathrm{e}\{\mathrm{s}\} > -a$$

$$X(s) = ULT\{x(t)u(t)\}$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Својства на Унилатерална Лапласова трансформација
- Најголем број од својствата (линеарност, поместување во s-домен, скалирање, коњугација ..) исти како кај билатералната ЛТ
- ROC на секоја УЛТ е десната полурамнина
- На пример, ROC на дробно рационална УЛТ е секогаш десно од најголемиот пол
- Теоремите за крајна и почетна вредност се всушност дефинирани како кај УЛТ
- Конволуција: Ако $x_1(t)= x_2(t)= 0$ за $t < 0$, во тој случај

$$\boxed{x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{ULT} X_1(s)X_2(s)}$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Својства на Унилатерална Лапласова трансформација
- Диференцирање во време

$$x(t) \xleftrightarrow{ULT} X(s)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{ULT} sX(s) - x(0_-)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} \xleftrightarrow{ULT} s(\overbrace{sX(s) - x(0_-)}^{ULT\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)}) - \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{0_-}$$

$$\xleftrightarrow{ULT} s^2X(s) - sx(0_-) - \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{0_-}$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Основна употреба на УЛТ: решавање на диференцијална равенка со почетни услови различни од нула
- Пример $$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

$$\text{со}\quad y(0_-)=\beta,\quad \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)_{0_-}=\gamma,\quad x(t)=\alpha u(t)$$

- Ако се примени ULT

$$\underbrace{(s^2Y(s)-\beta s-\gamma)}_{ULT\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)}+\underbrace{(sY(s)-\beta)}_{ULT\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)}+2Y(s)=X(s)=\frac{\alpha}{s}$$

$$Y(s)=\underbrace{\frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)}+\frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}}_{\text{слободен одзив }(x(t)\ =0)}+\underbrace{\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}}_{\text{форсиран одзив (почетни услови = 0)}}$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Пример
- Форсиран одзив $y(0\_) = 0, \quad \left(\dfrac{dy(t)}{dt}\right)_{0\_} = 0 \quad (\beta = 0, \gamma = 0)$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} X(s) = \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}$$

- Слободен одзив ($x(t)$=0) $\quad Y(s) = \dfrac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \dfrac{\gamma}{(s+1)(s+2)}$
- На пример, за $x(t) = 0, \quad y(0\_) = 1, \quad \left(\dfrac{dy(t)}{dt}\right)_{0\_} = 0 \quad (\beta = 1, \gamma = 0)$

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

$$y(t) = \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Пример
- Форсиран одзив $y(0\_)=0,\quad \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)_{0\_}=0 \quad (\beta=0, \gamma=0)$

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}X(s)=\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}$$

- Слободен одзив ($x(t)$=0) $\quad Y(s)=\frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)}+\frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}$
- На пример, за $x(t)=2u(t),\quad y(0\_)=3,\quad \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)_{0\_}=-5 \quad (\beta=3, \gamma=-5, \alpha=2)$

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+2}$$

$$y(t)=\left(1-e^{-t}+3e^{-2t}\right)u(t)$$

Лапласова трансформација и LTI системи

- Задача за вежбање: $$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{5}{2}\frac{dy(t)}{dt} - \frac{3}{2} y(t) = x(t)$$

а) да се одреди преносната функција на системот

б) да се одреди импулсниот одзив ако системот е стабилен

в) да се нацрта една реализација на овој систем

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{5}{2}s - \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{2}{7}}{s+3} + \frac{\frac{2}{7}}{s - \frac{1}{2}}$$

- За стабилен систем: $j\omega$ оската лежи во областа на конвергенција => ROC: -3 < Re{s} <1/2

$$h(t) = -\frac{2}{7}e^{-3t}u(t) - \frac{2}{7}e^{\frac{1}{2}t}u(-t)$$