9. АНАЛИЗА НА LTI СИСТЕМИ СО ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Одзивот $y(t)$ во LTI систем претставува конволуција помеѓу импулсниот одзив на ситемот $h(t)$ и влезниот сигнал $x(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Ако побараме Лапласова трансформација од оваа конволуција ќе имаме

$$LT\{y(t)\} = LT\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right\}$$

што понатаму постанува

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right\}e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-(t-\tau)}d(t-\tau) = X(s)H(s)$$

<u>Што ова практично значи од аспект на одредување на одзивот?</u>

Лапласовата трансформација на одзивот е производ од Лапласовите слики на влезниот сигнал и на импулсниот одзив:

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

Лапласовата трансформација на импулсниот одзив на системот претставува **преносна функција на ситемот.**

Дефинирана е како однос на Лапласовите трансформации на излезниот и влезниот сигнал

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Овде треба да се потенцира дека:

- $H(s) = LT\{h(t)\}$ сосема рамноправно го опишува системот како и импулсниот одзив
- $H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ е дробнорационалана функција од променливата s.
- Дефинирана е за систем во релаксирана состојба.

Секој стабилен LTI систем има импулсен одзив за кој важи

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$$

што претставува услов за постоење на фреквенциска карактеристика на ситемот.
Постоењето на фреквенциска карактеристика на системот значи дека $j\omega$ оската лежи во ROC на $H(s)$.

Секој LTI систем има импулсен одзив кој е каузален сигнал. Тоа значи дека ROC на $H(s)$ е десно од полот со најмал модул.
Двете последни сознанија водат до следниот заклучок:

- Сите полови на фреквенциската карактеристика на стабилен LTI систем лежат во левата полурамнина на s рамнината (имаат $\sigma < 0$)

9.1 Унилатерална Лапласова трансформација

Ќе потенцираме два важни факти кои се однесуваат на LTI системите:

- Овие системи се опишани со линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти чие решавање подразбира познавање на почетните услови(вредностите на излезниот сигнал и неговите изводи во моментот $t = 0$)
- Импулниот одзив на овие системи е каузален сигнал.

Со оглед на последниот факт наместо билатерална за нивна анализа се користи унилатерална Лапласова трансформација

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

Таа се разликува од билатералната по долната граница, $t = 0_-$.Корисно е да се забележи дека сите Диракови импулси содржани во $x(t)$ се вклучени во пресметувањето.

Нека ги одредиме оригиналите на следните Лапласови слики така да тие бидат каузални сигнали

<u>Пример 1</u>

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

каде $A = \lim_{s \to -1} H(s)(s+1) = 1$ и $B = \lim_{s \to -2} H(s)(s+2) = -1$

Од таблица добиваме

$$h(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)s(t)$$

<u>Пример 2</u>

$$H(s) = \frac{s^2 - 3}{s+2}$$

$$H(s) = -2 + s + \frac{1}{s+2}$$

$$h(t) = -2\delta(t) + \frac{d\delta}{dt} + e^{-2t}s(t)$$

Сите наведени особини за Билаералананата Лаплсова трансформација ќе важат и за унилатералната освен една - особината за диференцирање која ќе има изменета форма.

Диференцирање:

$$LT\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = sX(s) - x(0\_)$$

$$LT\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - \sum_{n=0}^{n-1} s^{n-1}\left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_{t=0_-}$$

За случај на Унилатералната Лапласова трансформација ќе важат и следните две тереми:

- ***Теорема за почетна вредност на сигналот:***

$$x(0_+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

- ***Теорема за крајна вредност на сигналот:***

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

9.2 Системи опишани со линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти

Диференцијалната равенка која ги поврзува влезниот сигнал $x(t)$ и излезниот сигнал $y(t)$ кај еден LTI систем е во општ случај од типот

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_n y(t) = b_0\frac{d^m x}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1}x}{dt^m - 1} + ...b_m x(t)$$

Ако побараме Лапласова трансформација

$$LT\left\{\frac{d^n y}{dt^n} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}}\right\} = LT\left\{\sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^{m-k}y}{dt^{m-k}}\right\}$$

Користејки ги нејзините особини, под претпоставка дека сите почетни услови потребни за нејзино решавање се нула, добиваме

$$\left\{s^n + \sum_{k=1}^{n} a_k s^{n-k}\right\} Y(s) = \sum_{k=0}^{m} b_k s^{m-k} X(s)$$

што води до врската помеѓу диференцијалната равенка и преносната функција на системот:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^{m-k}}{s^n + \sum_{k=1}^{n} a_k s^{n-k}}$$

Основна нејзина карактеристика е дека е таа дробнорационалана функција од s и дека кога е таа карактеристика на стабилен и каузален систем сите нејзини полови лежат во десната полурамнина.

Одредувањето на одзивот подразбира решавање на диференцијалната равенка. Лапласовата трансформација претставува ефикасна алатка за оваа намена. Ќе ги разгледаме двата посебни решенија за случај кога почетниите услови за нејзиното решавање се нула и кога се различни од нула.

Ако диференцијалната равенка е придружена со **почетни услови нула**:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_n y(t) = b_0\frac{d^m x}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1}x}{dt^m - 1} + ...b_m x(t)$$

$$y(0_-)=0;\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0_-}=0;.....;\left(\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)_{t=0_-}=0$$

користејки ги особините на Лапласовата трансформација, доаѓаме до следната алгебарска релација помеѓу Лапласовата слика на одзивот и екситацијата

$$\left\{s^n+\sum_{k=1}^{n}a_k s^{n-k}\right\}Y(s)=\sum_{k=0}^{m}b_k s^{m-k}X(s)$$

Јасно е дека последната релација е добиена со едноставна замена на изводите со s на содветен степен и временските функции со нивните Лапласови слики.

За излезниот сигнал се добива:

$$y(t)=LT^{-1}\{H(s)X(s)\}$$

Имајки го во предвид фактот дека почетните услови за решавање на диференцијалната равенка беа нула што од аспект на системот значи дека е тој во релаксирана состојба, излезниот сигнал-одзивот е резултат само на делување на влезниот сигнал. Овој одзв претставува **форсиран одзив** на системот.

Ако диференцијалната равенка е придружена со **почетни услови различни од нула**:

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+...+a_n y(t)=b_0\frac{d^m x}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}x}{dt^m-1}+...b_m x(t)$$

$$y(0_-)\neq 0;\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0_-}\neq 0;.....;\left(\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)_{t=0_-}\neq 0$$

користејки ги особините на Лапласовата трансформација, доаѓаме до следната алгебарска релација помеѓу Лапласовата слика на одзивот и екситацијата

$$\left\{s^n+\sum_{k=1}^{n}a_k s^{n-k}\right\}Y(s)-\sum_{k=0}^{n-1}p_k(s)\left(\frac{d^k y}{dt^k}\right)_{t=0_-}=\sum_{k=0}^{m}b_k s^{m-k}X(s)$$

која се разликува од онаа во предходниот случај.

Така добиваме дека излезниот сигнал во овој случај ќе се состои од две компоненти

$$y(t)=LT^{-1}\left\{\frac{\sum_{k=0}^{m}b_k s^{m-k}X(s)}{\left\{s^n+\sum_{k=1}^{n}a_k s^{n-k}\right\}}+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}p_k(s)\left(\frac{d^k y}{dt^k}\right)_{t=0_-}}{\left\{s^n+\sum_{k=1}^{n}a_k s^{n-k}\right\}}\right\}=H(s)X(s)+\frac{\sum_{k=0}^{n-1}p_k(s)\left(\frac{d^k y}{dt^k}\right)_{t=0_-}}{\left\{s^n+\sum_{k=1}^{n}a_k s^{n-k}\right\}}$$

Првата компонента е иста како и онаа во предходниот случај. Таа го рефлектира само делувањето на влезниот сигнал (форсиран одзив) . Втората компонента пак го рефлектира уделот на почетните услови во формирањето на излезниот сигнал(слободен одзив). Според тоа решението на диференцијалната равенка во овој случај но го дава **комплетниот одзив на системот.**

Пример

$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y(t)=x(t)$ *е диференцијалната равенка со која е дефиниран еден LTI систем.*

Да се одреди излезниот сигнал $y(t)$ *ако*

a) *Системот е во релаксирана состојба*
b) *Системот има почетна состојба дадена со следните почетни услови:*

$$y(o_{-}) = \alpha; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0_{-}} = \beta$$

a) $$LT\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t)\right\} = LT\{x(t)\}$$

$$\left\{s^2 + 3s + 2\right\}Y(s) = X(s)$$

$$y(t) = LT^{-1}\left\{\frac{X(s)}{s^2 + 3s + 2}\right\}$$

b) $$\left\{s^2 + 3s + 2\right\}Y(s) - (s+1)y(0) - \left\{\frac{dy}{dt}\right\}_{t=0_{-}} = X(s)$$

$$y(t) = LT^{-1}\left\{\overbrace{\frac{X(s)}{s^2 + 3s + 2}}^{\text{форсиран}} + \overbrace{\frac{(s+1)y(0_{-}) + \left(dy/dt\right)_{t=0_{-}}}{s^2 + 3s + 2}}^{\text{слободен}}\right\}$$