Временско-фреквенциска карактеризација

- Амплитуден и фазен спектар
- Амплитудна/фазна карактеристика
- Линеарна фаза
- Групно доцнење
- Идеални филтри
- Неидеални филтри

Фреквенциски спектар

- Фуриеова трансформација

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$X(j\omega)$ претставува декомпозиција на сигналот $x(t)$ како ”сума” на комплексни експоненцијални функции на различни фреквенции

Фреквенциски спектар

- Фреквенциски спектар

$$X(j\omega) = \left|X(j\omega)\right| e^{j\angle X(j\omega)}$$

- **Амплитудниот спектар** $\left|X(j\omega)\right|$ содржи информација за релативните амплитуди на комплексните експоненцијални сигнали кои го формираат $x(t)$
- **Фазниот спектар** $\angle X(j\omega)$ не влијае на амплитудата на поедините фреквенциски компоненти; напротив, обезбедува информации во врска со релативните фази на експоненцијалните функции дадени со $e^{j\angle X(j\omega)}$
- Фазниот спектар има влијание на временските карактеристики на сигналот и тогаш кога амплитудниот спектар е непроменет

Фреквенциски спектар

- Фазен спектар

  Фазниот спектар има влијание на временските карактеристики на сигналот

- Во одредени апликации, фазните изобличувања можат да бидат важни, додека во други апликации не

  Пример: аудио сигнал $x(t)$

$$FT\{x(-t)\} = X(-j\omega) = \left|X(j\omega)\right| e^{-j\angle X(j\omega)}$$

Амплитудниот спектар на превртениот сигнал (аудио сигналот се слуша наназад) има ист амплитуден спектар но се разликува во фаза со оригиналнниот сигнал.

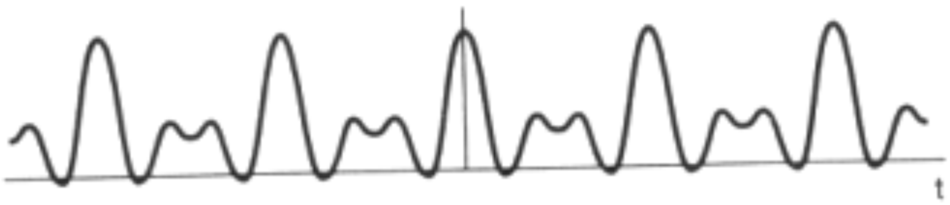
=> Очигледно е дека во овој случај промената на фазата има големо влијание на сигналот во временски домен

Фреквенциски спектар

- **Фазен спектар**

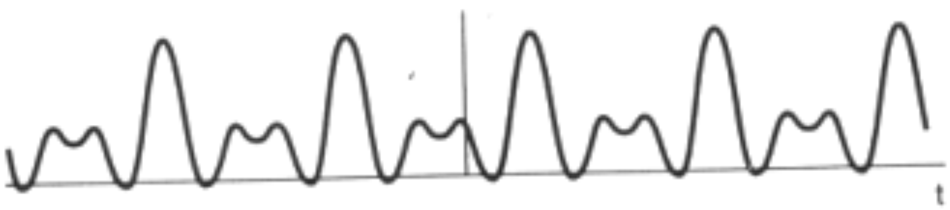
  Пример Линеарна комбинација на простопериодични сигнали

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t + \phi_1) + \cos(4\pi t + \phi_2) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t + \phi_3)$$



(a)

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$$



(b)

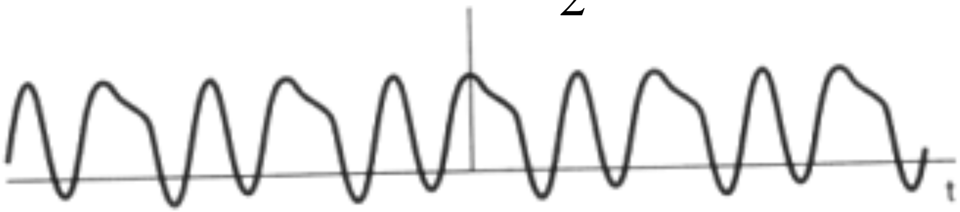
$$\phi_1 = 4rad; \phi_2 = 8rad; \phi_3 = 12rad$$

Фреквенциски спектар

- Фазен спектар

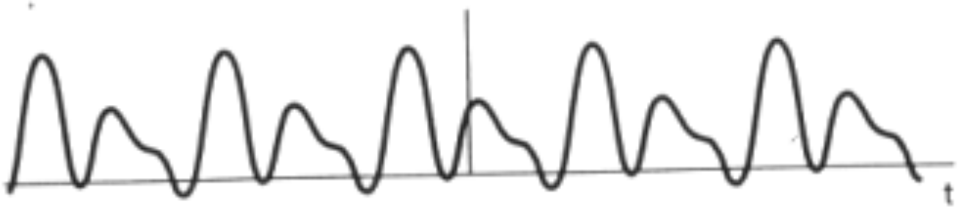
  Пример Линеарна комбинација на простопериодични сигнали

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t + \phi_1) + \cos(4\pi t + \phi_2) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t + \phi_3)$$



(c)

$$\phi_1 = 6rad; \phi_2 = -2.7rad; \phi_3 = 0.93rad$$



(d)

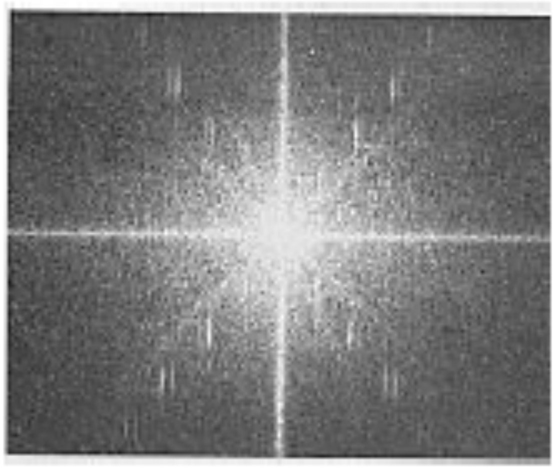
$$\phi_1 = 1.2rad; \phi_2 = 4.1rad; \phi_3 = -7.02rad$$

- ***Резултантниот сигнал е различен за различни фази***

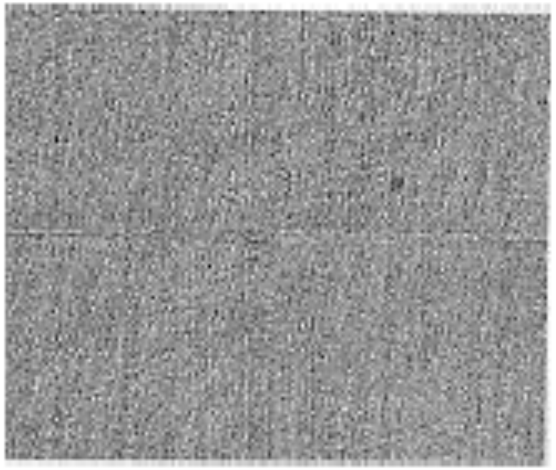
Фреквенциски спектар

- Фазен спектар

Оригинална слика



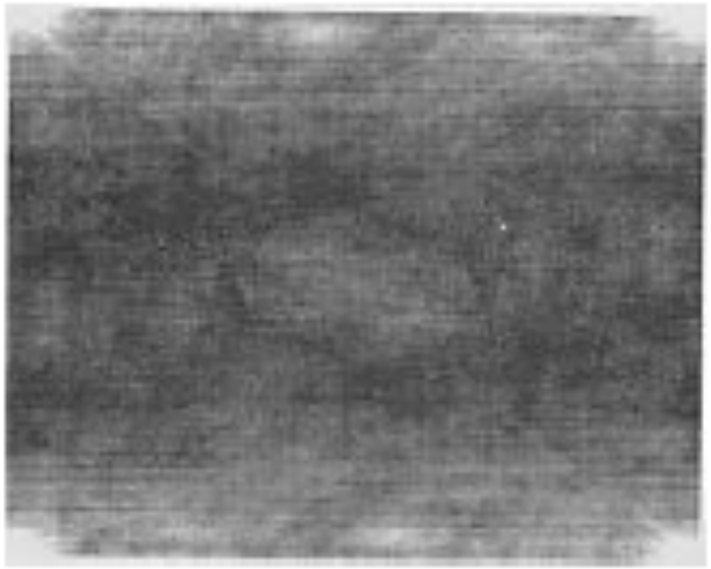
амплитуден спектар



фазен спектар

Фреквенциски спектар

- Фазен спектар

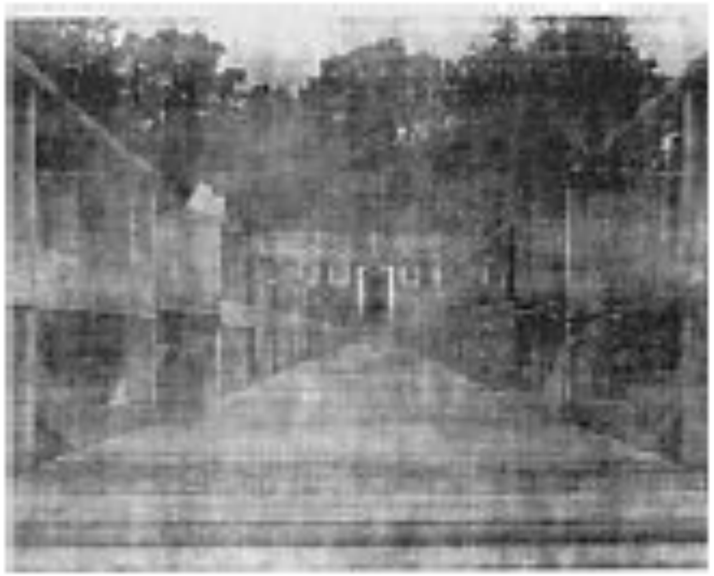


Инверзна Фуриеова трансформација со фазен спектар = 0 и со сочуван амплитуден спектар

Инверзна Фуриеова трансформација со амплитуден спектар = 1, и со сочуван фазен спектар

Фреквенциски спектар

- Фазен спектар



Инверзна Фуриеова трансформација со оригиналниот фазен спектар и со амплитуден спектар од сосема друга слика

Слика чиј што амплитуден спектар е искористен во претходниот пример

Фреквенциска карактеристика

- Фреквенциска карактеристика

$$y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

Ефект на системот врз влезниот сигнал: промена на комплексните амплитуди на секоја фреквенциска компонента на сигналот.

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)|$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega)$$

$|H(j\omega)|$ претставува **добивка** на системот

$\angle H(j\omega)$ претставува **фазно поместување** на системот

Фазна карактеристика

- Линеарна фаза

Линеарна фаза одговара на константно доцнење на сигналот во временски домен, а значи дека аголот на фреквенциската карактеристика се менува линеарно како функција од ω.

Пример

Ако $H(j\omega) = e^{-j\omega T}$, тогаш , $|H(j\omega)| = 1$ и $\angle H(j\omega) = -\omega T$

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega T} X(j\omega)$$

$$y(t) = x(t - T)$$

- Линеарна фаза $\Leftrightarrow$ едноставно поместување во време, *нема* изобличување
- Нелинеарна фаза $\Leftrightarrow$ изобличување и поместување во време

Фазна карактеристика

- Линеарна фаза

- Секоја експоненцијална функција има како реален и имагинарен дел простопериодични функции

- Доцнење во време на целиот сигнал $x(t)$ за t_0, значи дека секоја експоненцијална функција (од кои е составен сигналот) ќе биде задоцнета во *време* за t_0. Меѓутоа, нивното *фазно поместување* е *различно*.

- На пример, да го разгледаме сигналот $x_c(t) = \cos(\omega t)$.
  Поместување во време води до $x_c(t - t_0) = \cos(\omega\ (t - t_0)) = \cos(\omega t - \theta)$, каде $\theta = \omega t_0$ е *фазно поместување* на сигналот.

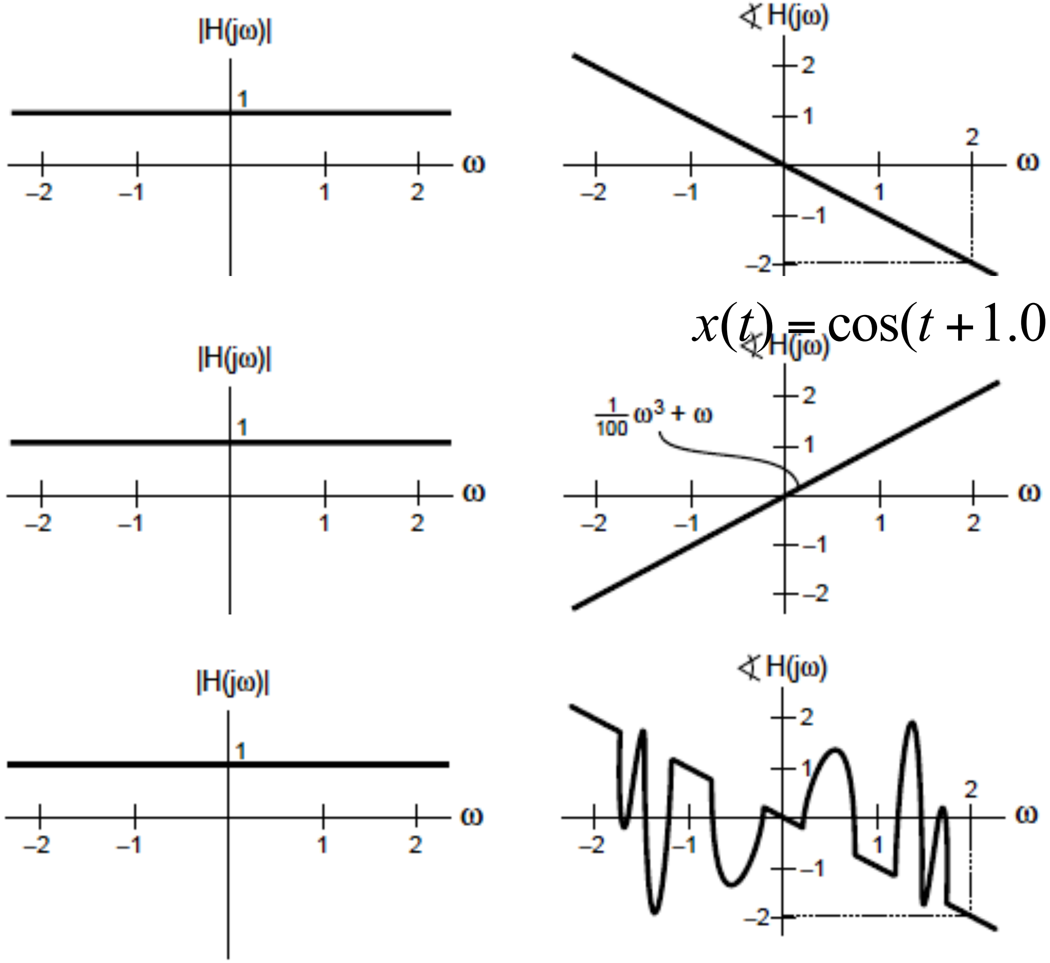
  Треба да се забележи дека фазното поместување е пропорционално на фреквенцијата на простопериодичната функција.

  Значи, константно поместување во време одговара на поголемо фазно поместување за високите фреквенции отколку за ниските.

Фазна карактеристика

- Линеарна фаза
  – Стр… …ıа на
    доц…
- Пример…

$$x(t) = \cos(t) + \cos(2t)$$



$$x(t) = x(t-1)$$

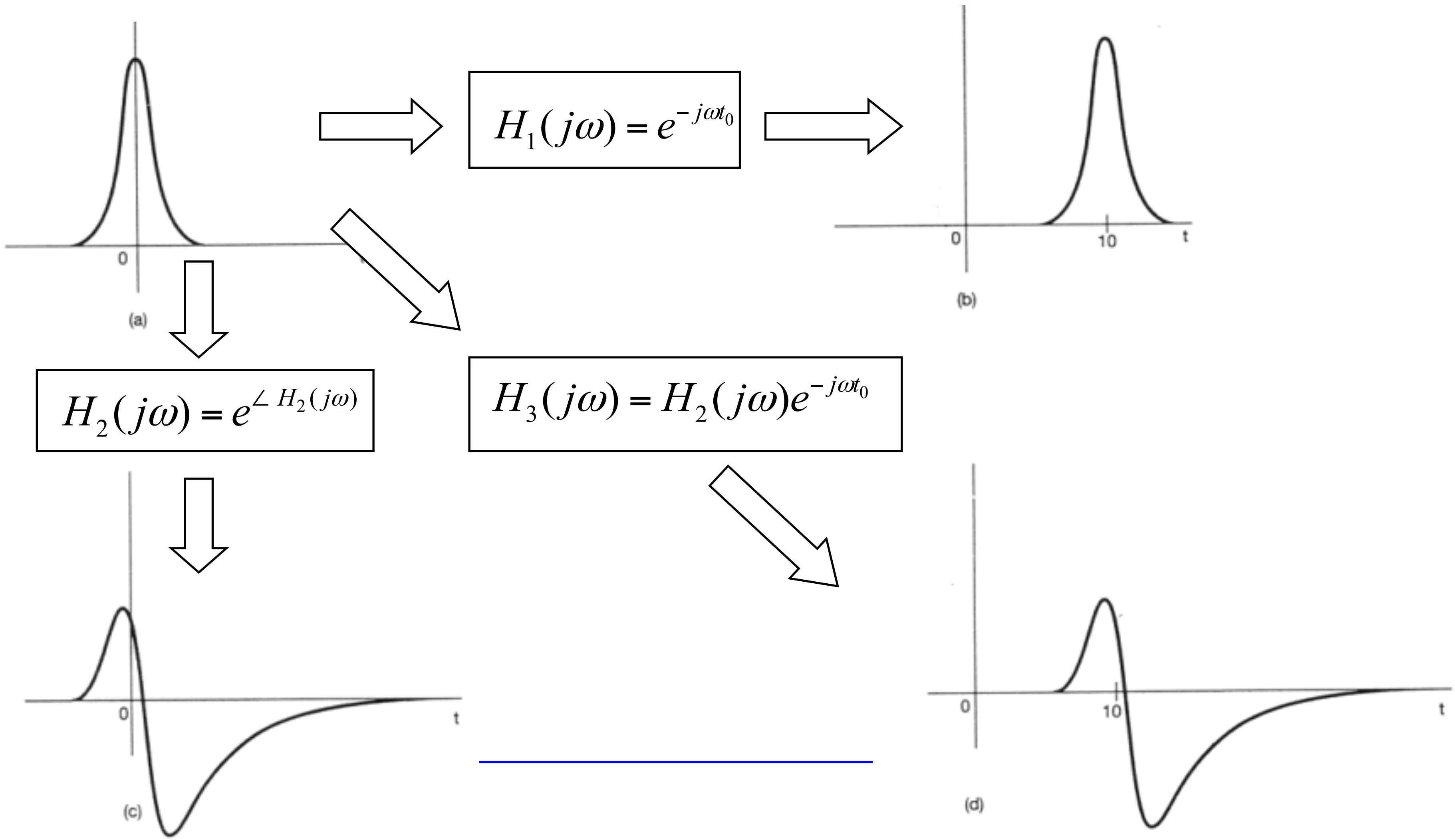
$$x(t) = \cos(t+1.01) + \cos[2(t+1.04)]$$

$$x(t) = x(t-1)$$

во општ случај
внесува големо
изобличување

Фазна карактеристика

- Нелинеарна фаза



Фазна карактеристика

- Се пропусен систем (All-pass system)

  ги пропушта сите фреквенции, односно нема филтрирање на фреквенции

  Како во претходниот пример, каде: $|H(j\omega)| = 1$

$$H(j\omega) = e^{-j\omega\alpha}$$

или

$$H(j\omega) = \frac{\alpha - j\omega}{\alpha + j\omega} \qquad |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\alpha^2 + \omega^2}} = 1$$

Карактеристиките на ваквиот систем се комплетно дефинирани со фазната карактеристика

Фазна карактеристика

- **Групно доцнење**
- Мерка за негативната стрмнина на $\angle H(j\omega)$ што одговара на поместување во време како функција од фреквенција. Дефинирано е со следната релација:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\{\angle H(j\omega)\}$$

- На пример, кај линеарна фаза: $\angle H(j\omega) = -\omega T$, значи дека имаме константно доцнење од T за сите фреквенции
- Меѓутоа, кога фазната карактеристика на системот е *нелинеарна*, однесувањето на системот тешко може да интерпретира:
- Системите со нелинеарна фаза внесуваат изобличувања

Фазна карактеристика

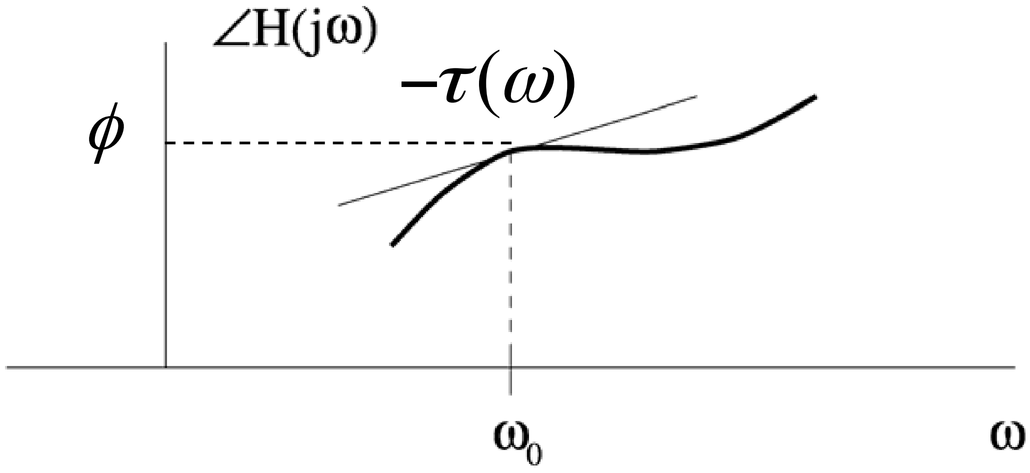
- **Групно доцнење**
- Од интерес е кога влезниот сигнал е со тесен фреквенциски спектар. Во тој случај, нелинеарната фазна к-ка може да се апроксимира како линеарна фаза. Претходниот пример го илустрира ова.
- Поконкретно, ако фреквенцискиот спектар е тесен и концентриран околу некоја фреквенција $\omega = \omega_0$, $\angle\angle H(j\omega)$ во овој опсег на фреквенции може да се апроксимира со тангентата на $\angle H(j\omega)$ во $\omega = \omega_0$. Според тоа, системот врши поместување на влезниот сигнал за онолку колку што е стрмнината во $\omega = \omega_0$,

$$\tau(\omega_0) = -\frac{d}{d\omega}\left\{\angle H(j\omega)\right\}\Big|_{\omega=\omega_0}$$

- Бидејќи, $\tau(\omega_0)$ покажува за колку *групата* фреквенции околу ω_0 се *задоцнети*, $\tau(\omega)$ се нарекува "групно доцнење"

Фазна карактеристика

- **Апроксимација на групното доцнење**



$$\angle H(j\omega_0) \cong -\phi - \tau(\omega_0)\omega$$

каде стрмнината, $\tau(\omega)$, зависи од фреквенцијата ω.

$$\boxed{Y(j\omega) \cong X(j\omega)\left|H(j\omega)\right|e^{-j\phi}e^{-j\tau(\omega)\omega}}$$

Фазна карактеристика

- **Пример:** Да се одреди групното доцнење на системот

$$H(j\omega) = 1 + j\omega$$

Дали системот е со линеарна фаза?

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\left\{\angle H(j\omega)\right\}$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\arctan\left\{X(\omega)\right\}\right) = \frac{1}{1+X^2(\omega)} \cdot \frac{d}{d\omega}\left(X(\omega)\right)$$

$$\angle H(j\omega) = \arctan\left\{\frac{\operatorname{Im}\{H(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{H(j\omega)\}}\right\}$$

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\left\{\arctan(\omega)\right\} = -\frac{1}{1+\omega^2}$$

Системот не е со линеарна фаза

Амплитудна/фазна карактеристика

- **Логаритамски дијаграми на амплитудната и фазната карактеристика**

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t)$$

$$\left|Y(j\omega)\right| = \left|H(j\omega)\right|\left|X(j\omega)\right|$$

$$\log\left|Y(j\omega)\right| = \log\left|H(j\omega)\right| + \log\left|X(j\omega)\right|$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega)$$

  – Каскада на системи: собирање на нивните фреквенциски к-ки

$$\longrightarrow \boxed{H_1(j\omega)} \longrightarrow \boxed{H_2(j\omega)} \longrightarrow$$

$$\log\left|H(j\omega)\right| = \log\left|H_1(j\omega)\right| + \log\left|H_2(j\omega)\right|$$

$$\angle H(j\omega) = \angle H_1(j\omega) + \angle H_2(j\omega)$$

Амплитудна/фазна карактеристика

- **Логаритамски дијаграми на амплитудната и фазната карактеристика**
- **За реални сигнали и системи**

$$\left.\begin{aligned}|H(-j\omega)| &= |H(j\omega)| \\ \angle H(-j\omega) &= -\angle H(j\omega)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Се црта за } \omega \geq 0$$

- **Се изразува во единици децибели (dB)** $\quad 20\log_{10}|H(j\omega)|$

$$|H(j\omega)| = 1 \quad \rightarrow \quad 0\text{dB}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad : \ 3\text{dB}$$

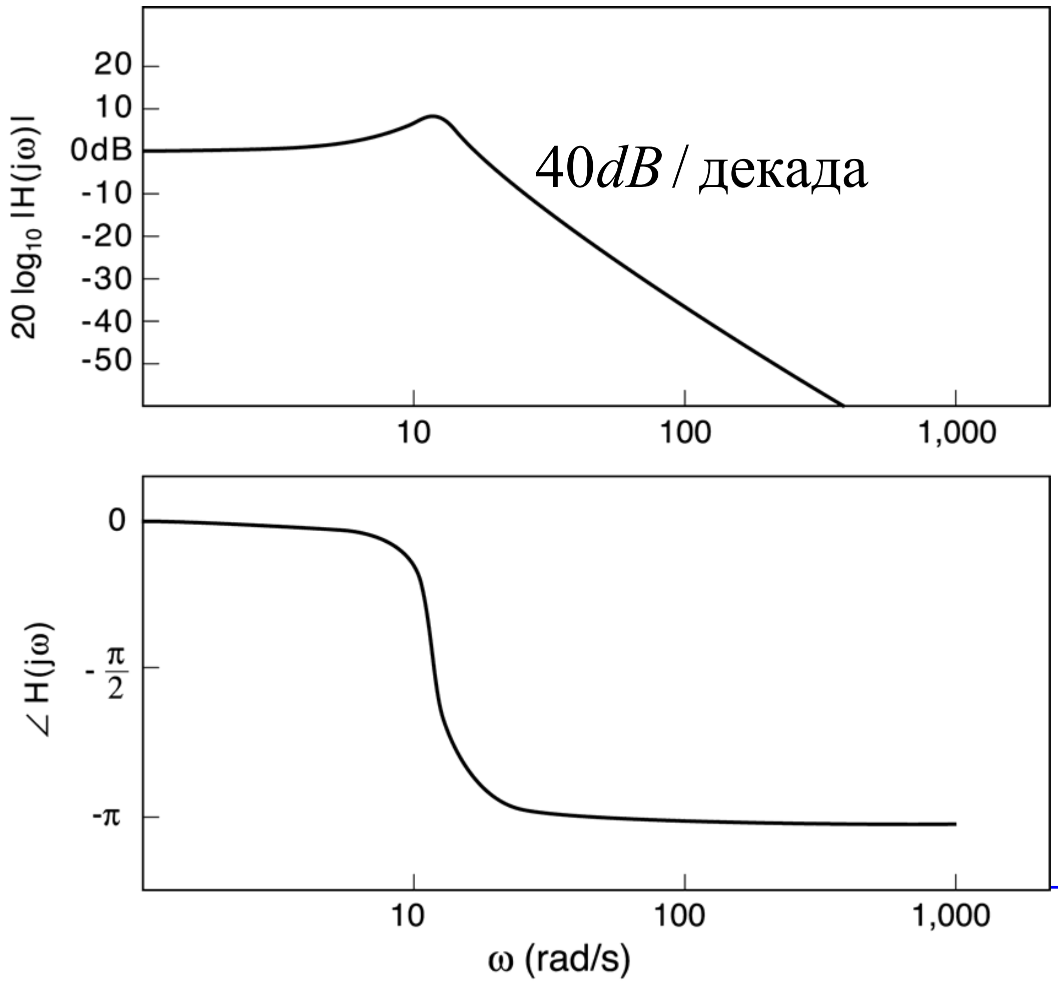
$$|H(j\omega)| = 2 \quad \rightarrow \quad : \ 6\text{dB}$$

$$|H(j\omega)| = 10 \quad \rightarrow \quad : \ 20\text{dB}$$

$$|H(j\omega)| = 100 \quad \rightarrow \quad : \ 40\text{dB}$$

Амплитудна/фазна карактеристика

- **Типична лог фреквенциска карактеристика за систем од втор ред**

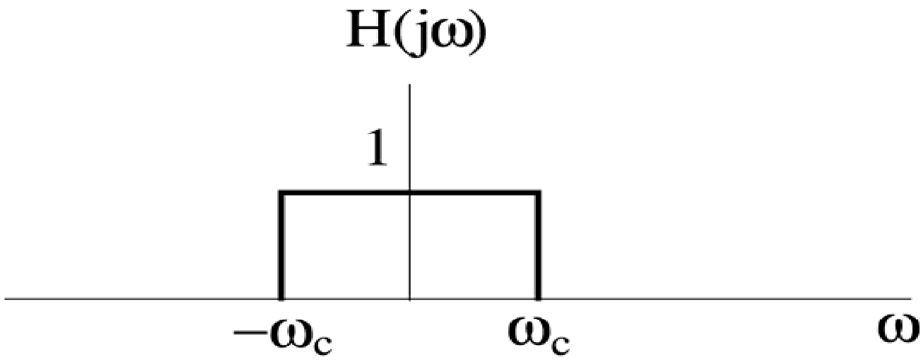


Поголем динамички опсег на фреквенциската к-ка

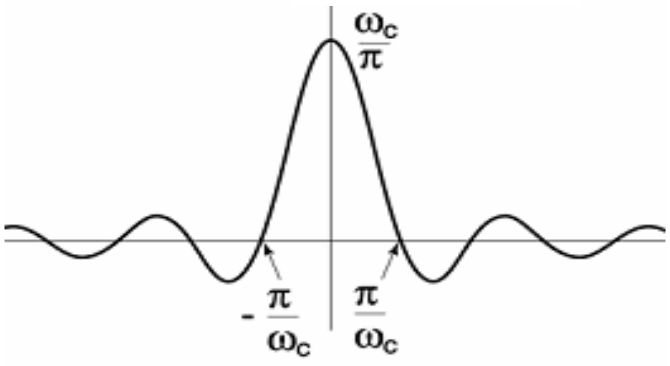
Добивање на фреквенциската к-ка со помош на асимптоти

Карактеристики на идеални филтри

- **Идеален нископропусен филтер**



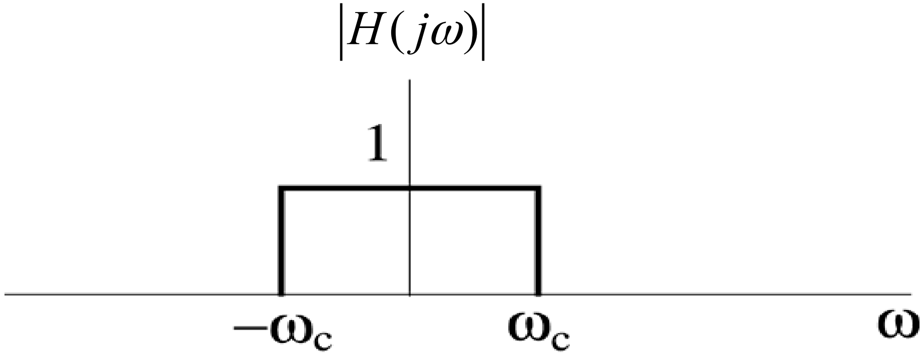
$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$



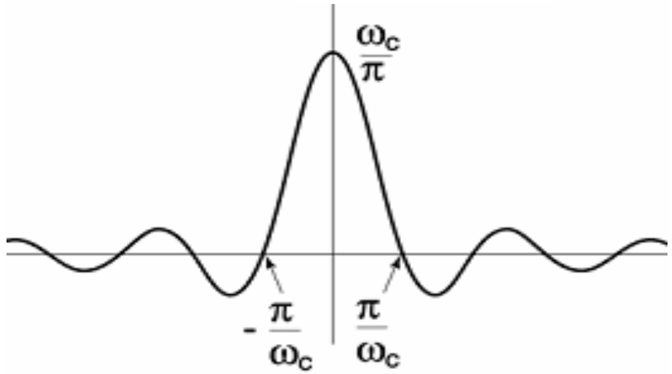
- Совршена селективност
- Дополнително, има нулта фазна карактеристика, што значи нема фазни изобличувања
- Ширината на пропусното подрачје на $H(j\omega)$ е пропорционално со ω_c, додека ширината на главното крило на импулсниот одзив е пропорционално со $1/\ \omega_c$

Карактеристики на идеални филтри

- **Идеален нископропусен филтер**

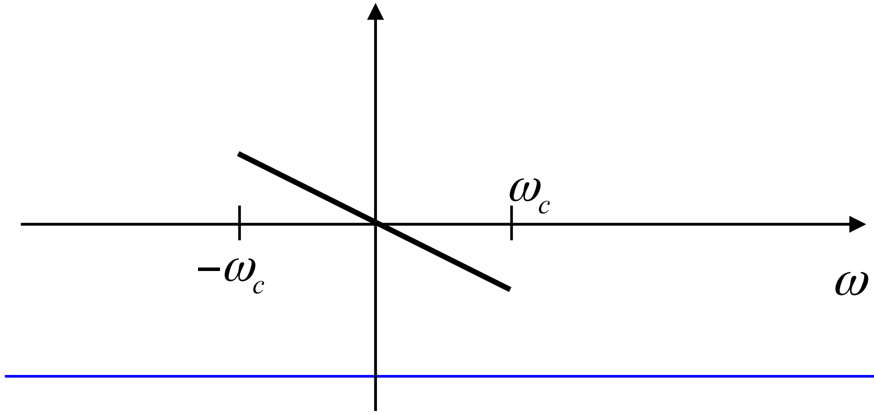


$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

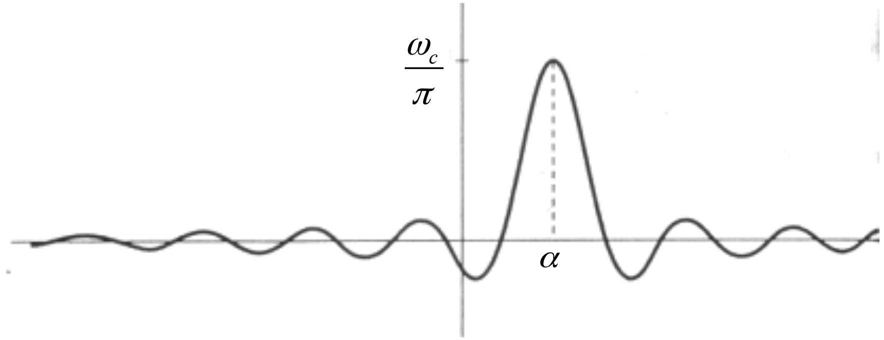


  – Линеарна фазна карактеристика ќе воведе доцнење во импулсниот одзив

$$\angle H(j\omega) = -\alpha\omega$$



$$h(t-\alpha)$$

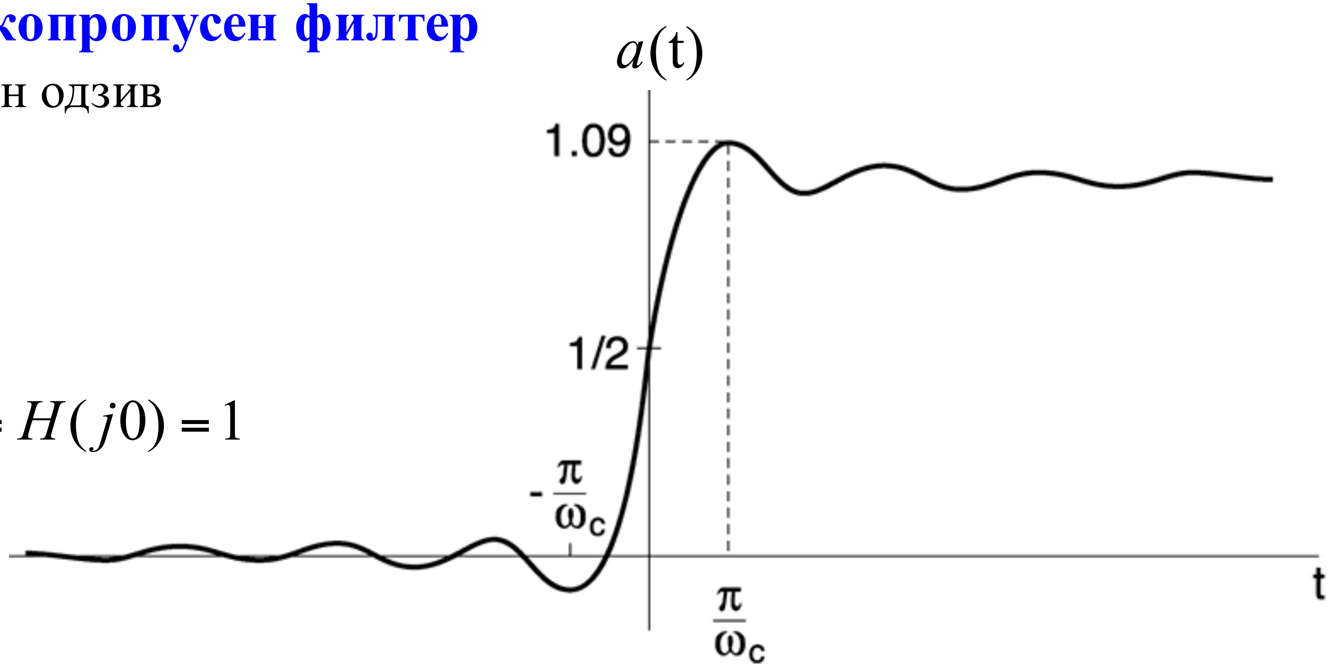


Карактеристики на идеални филтри

- **Идеален нископропусен филтер**
  – Индиционен одзив

$$a(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

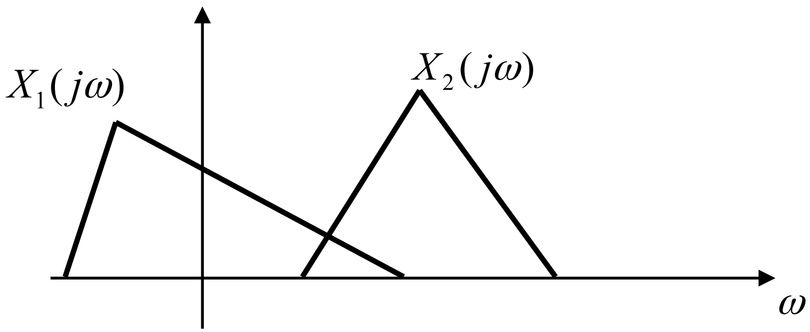
$$a(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = H(j0) = 1$$



  – Индиционият одзив ја надминува својата крајна вредност и осцилира
  – **Ефект на звонење**
  – **Времето на растење** е инверзно пропорционално на ширината на преодното подрачје

Карактеристики на неидеални филтри

- **Неидеален нископропусен филтер**
- Во одреден број апликации, потребно е да се филтрираат сигнали чии што спектри се покопуваат

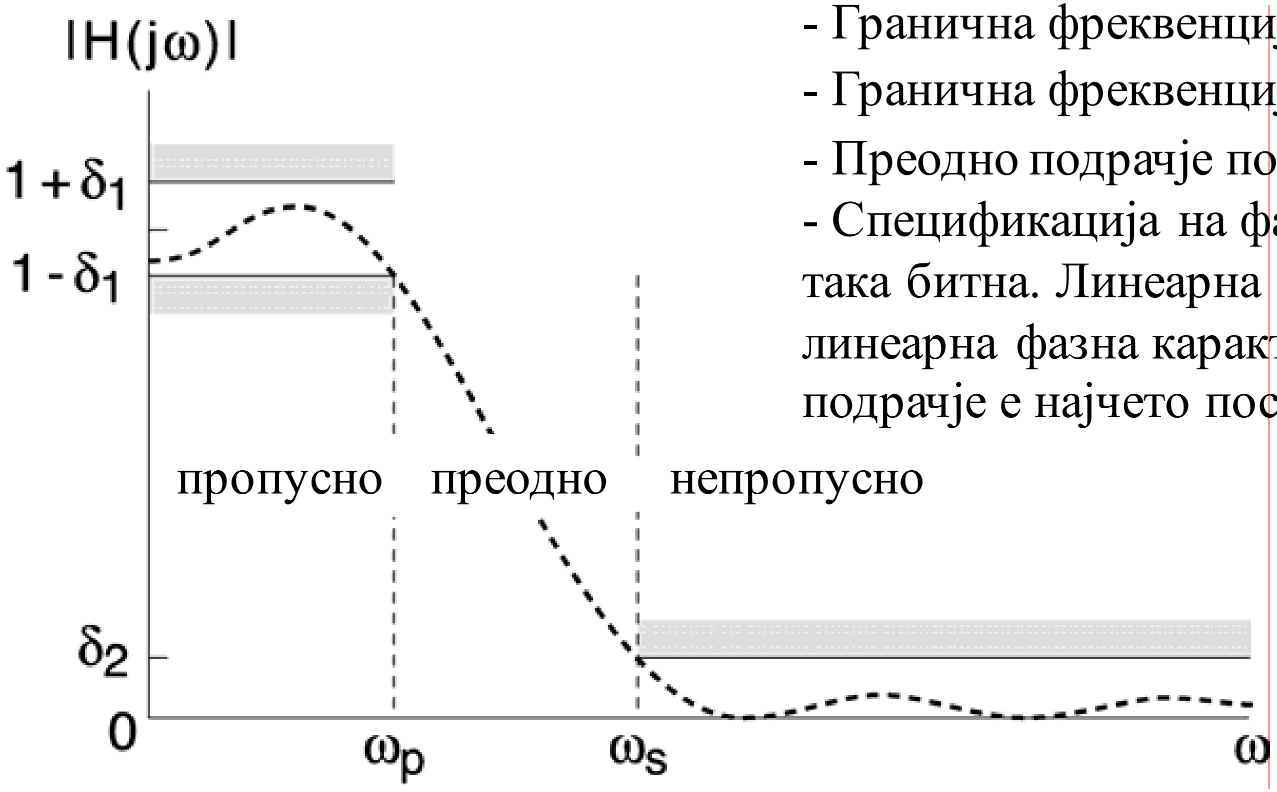


- Филтер со постепен преод од пропусно кон непропусно подрачје е генерално по погоден при филтрирање на сигнали чии што спектри се преклопуваат
- Секој реално остварлив систем е нужно каузален
- ***Неидеалните филтри се од поголемо значење при практична имплеметација***

Карактеристики на неидеални филтри

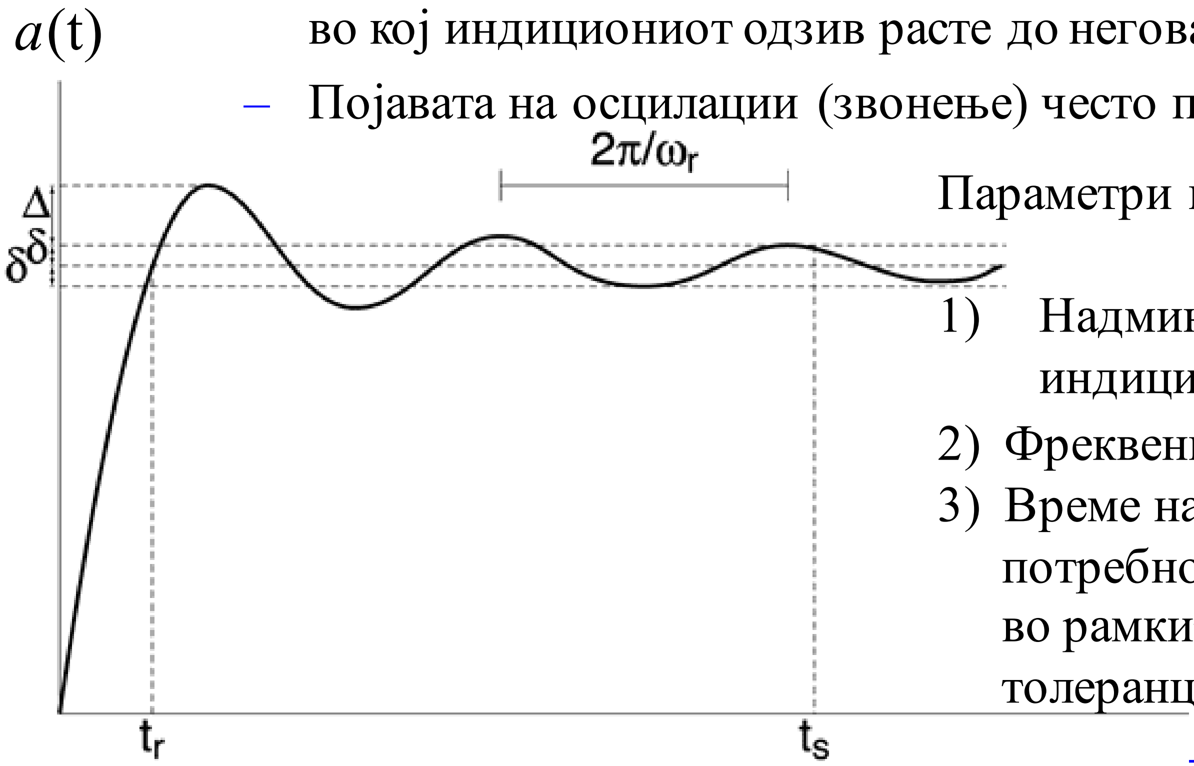
- **Неидеален нископропусен филтер**
  - Дијаграм на толеранција

- Отстапување во пропусно подрачје δ_1
- Отстапување во непропусно подрачје δ_2
- Гранична фреквенција на пропусно подрачје ω_p
- Гранична фреквенција на непропусно подрачје ω_s
- Преодно подрачје помеѓу ω_p и ω_s
- Спецификација на фазната карактеристика е исто така битна. Линеарна или приближно линеарна фазна карактеристика во пропусното подрачје е најчето посакувана



Карактеристики на неидеални филтри

- **Неидеален нископропусен филтер**
  - Во временски домен спецификациите обично се дефинирани на **индициониот одзив**
  - **Време на растење** t_r на индициониот одзив: временски интервал во кој индициониот одзив расте до неговата крајна вредност
  - Појавата на осцилации (звонење) често пати е исто така битно



Параметри кои го карактеризираат звонењето:

1) Надминување Δ на крајната вредност на индициониот одзив
2) Фреквенција на звонење ω_r
3) Време на заситување t_s , т.е време потребно индициониот одзив да дојде во рамките на специфицираните толеранции

Карактеристики на неидеални филтри

- **Неидеален нископропусен филтер**
  - Просто дробна-рационална фреквенциска карактеристика и реален импулсен одзив
  - Butterworth filter: Пошироко преодно подрачје и помало надминување и звонење
  - Elliptic filter: Потесно преодно подрачје и поголемо надминување и време на заситување