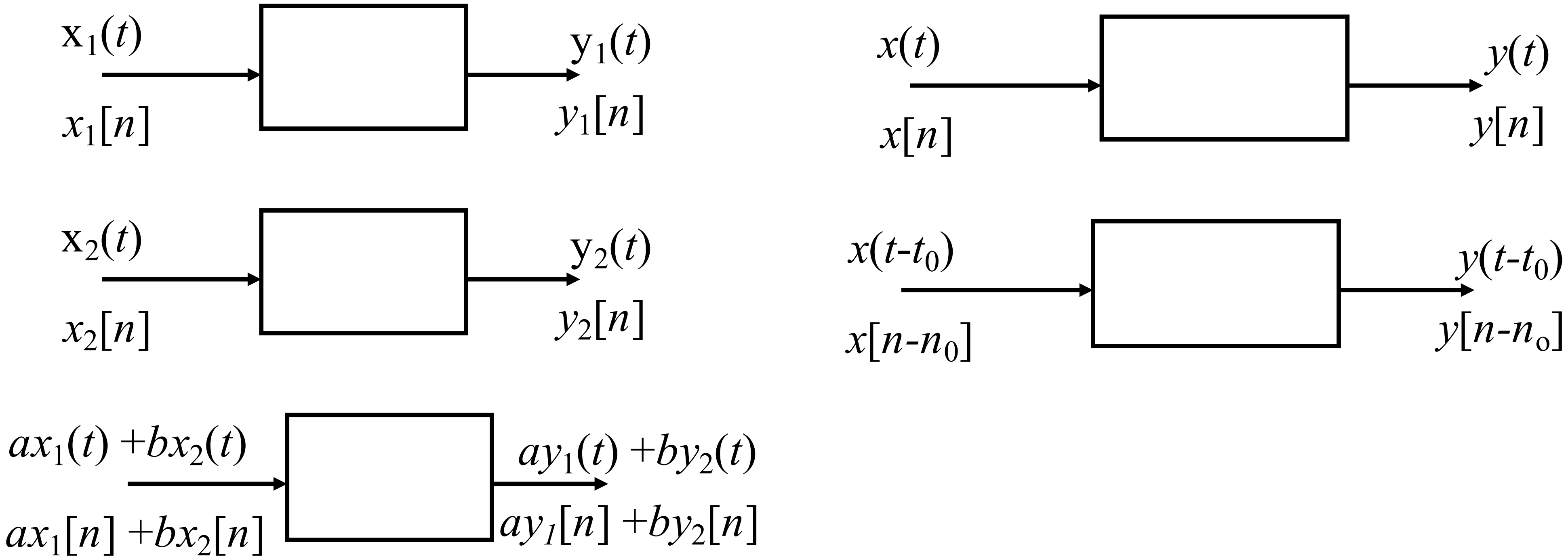
Линеарни временски непроменливи системи (LTI)

- Две фундаментални својства
  - Линеарност
  - Перманентност

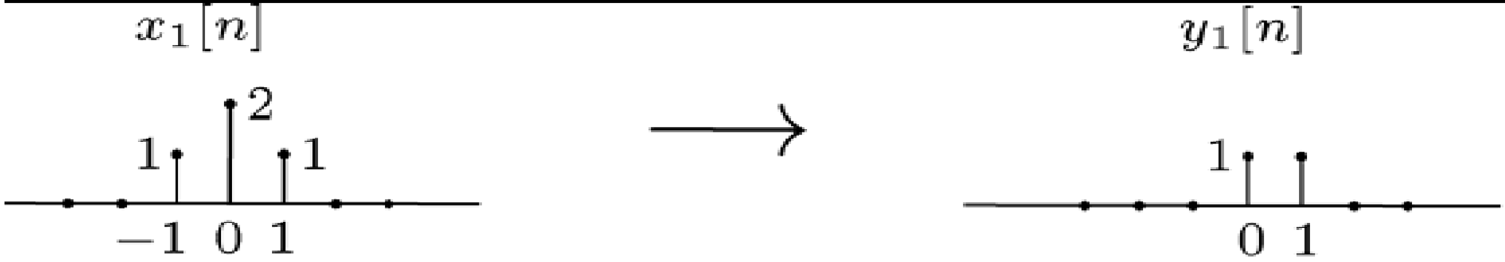


Линеарни временски непроменливи системи (LTI)

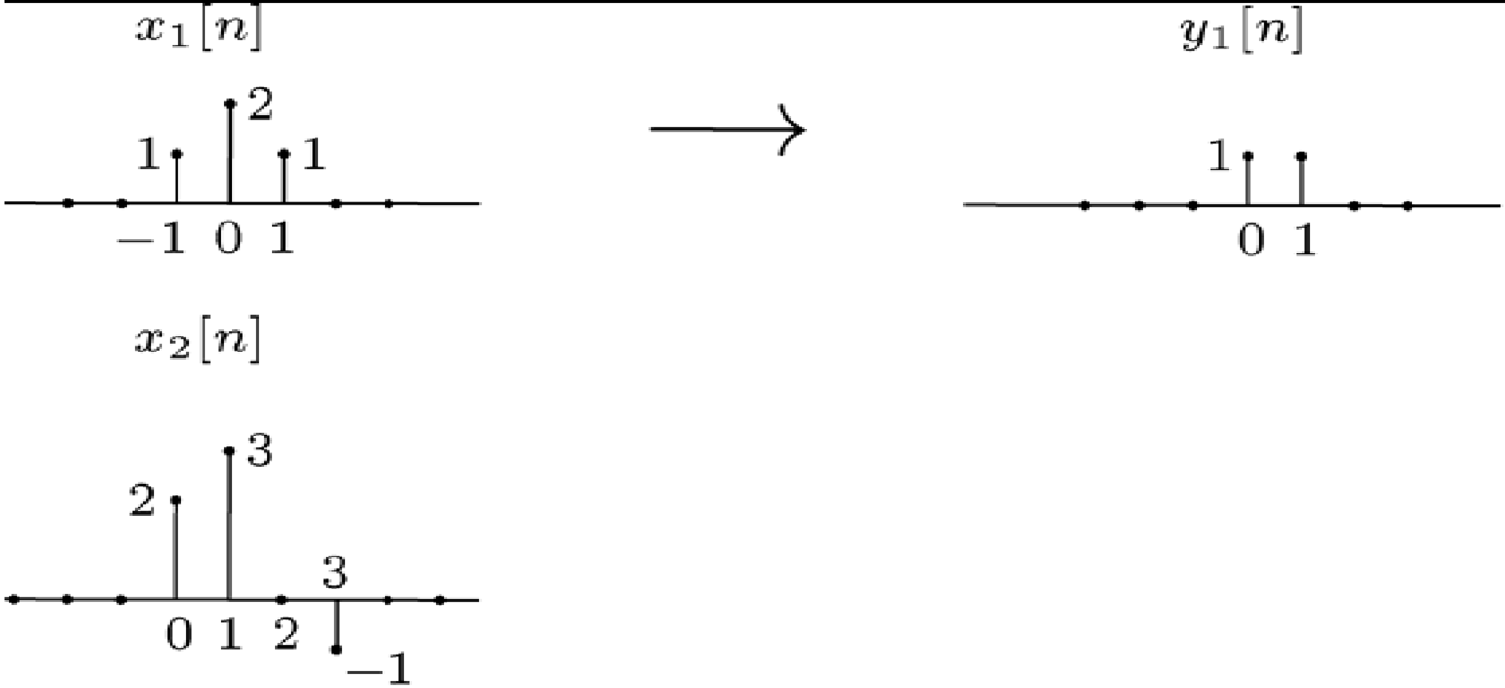
- Две фундаментални својства
  - Линеарност
  - Перманентност

- Основна карактеристика: Ако го знаеме одзивот на LTI системот на одредени влезни сигнали, ние фактички го знаеме одзивот на *голем број* сигнали

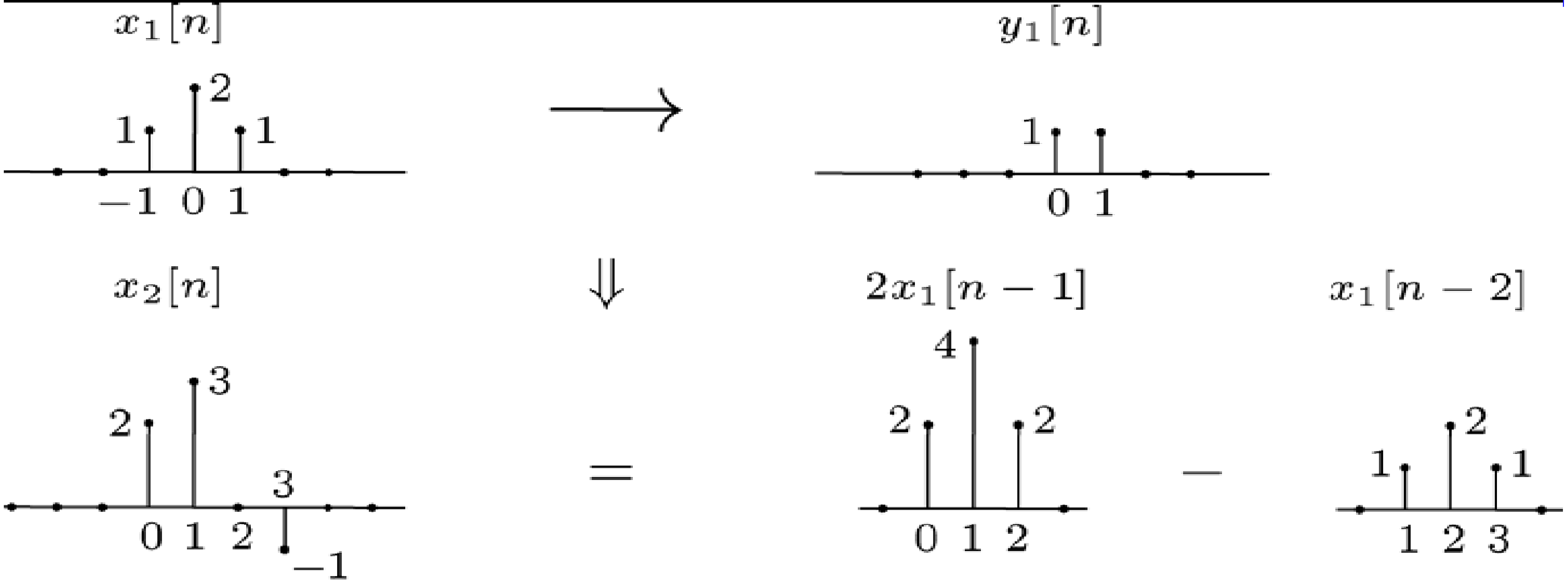
Линеарни временски непроменливи системи (LTI)



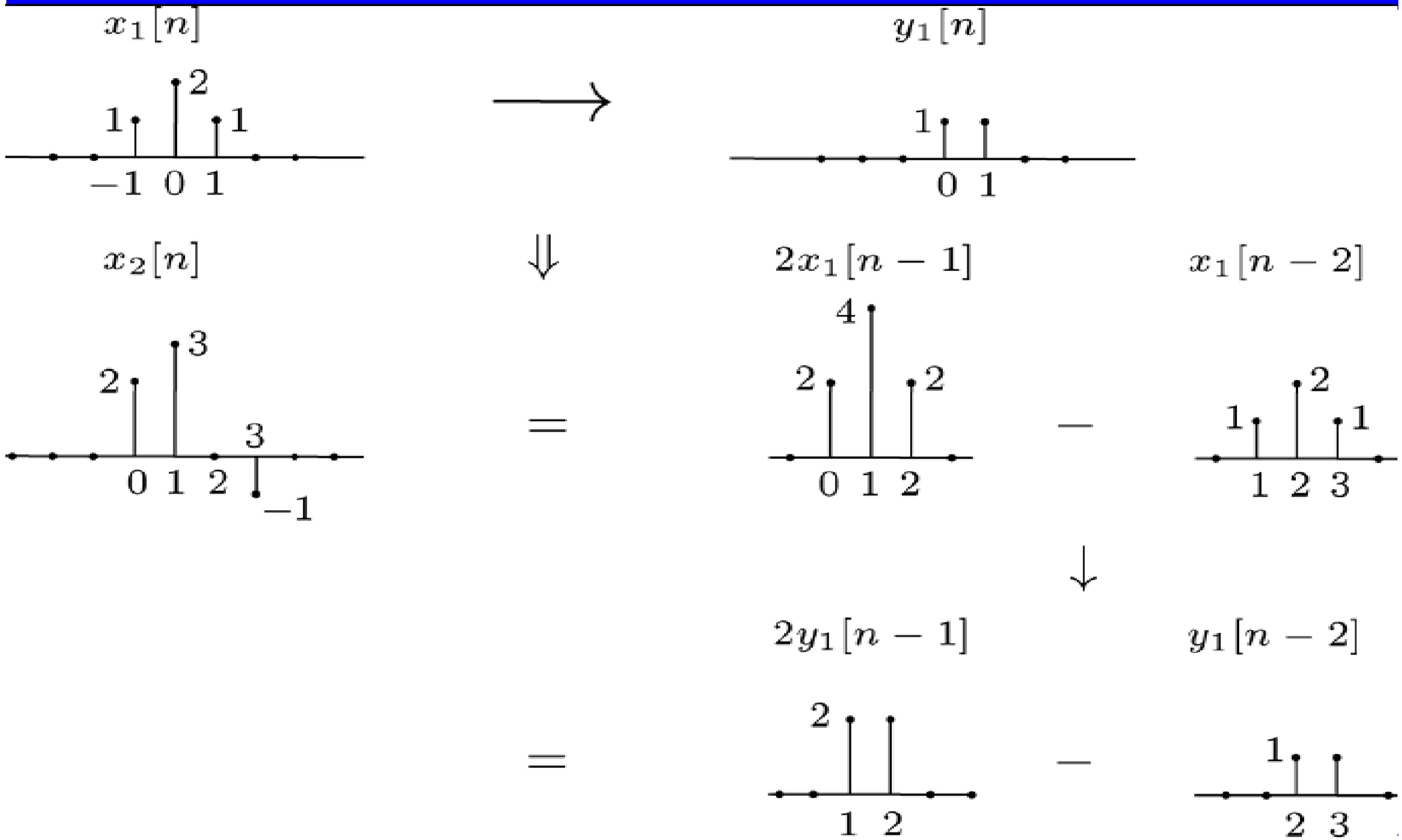
Линеарни временски непроменливи системи (LTI)



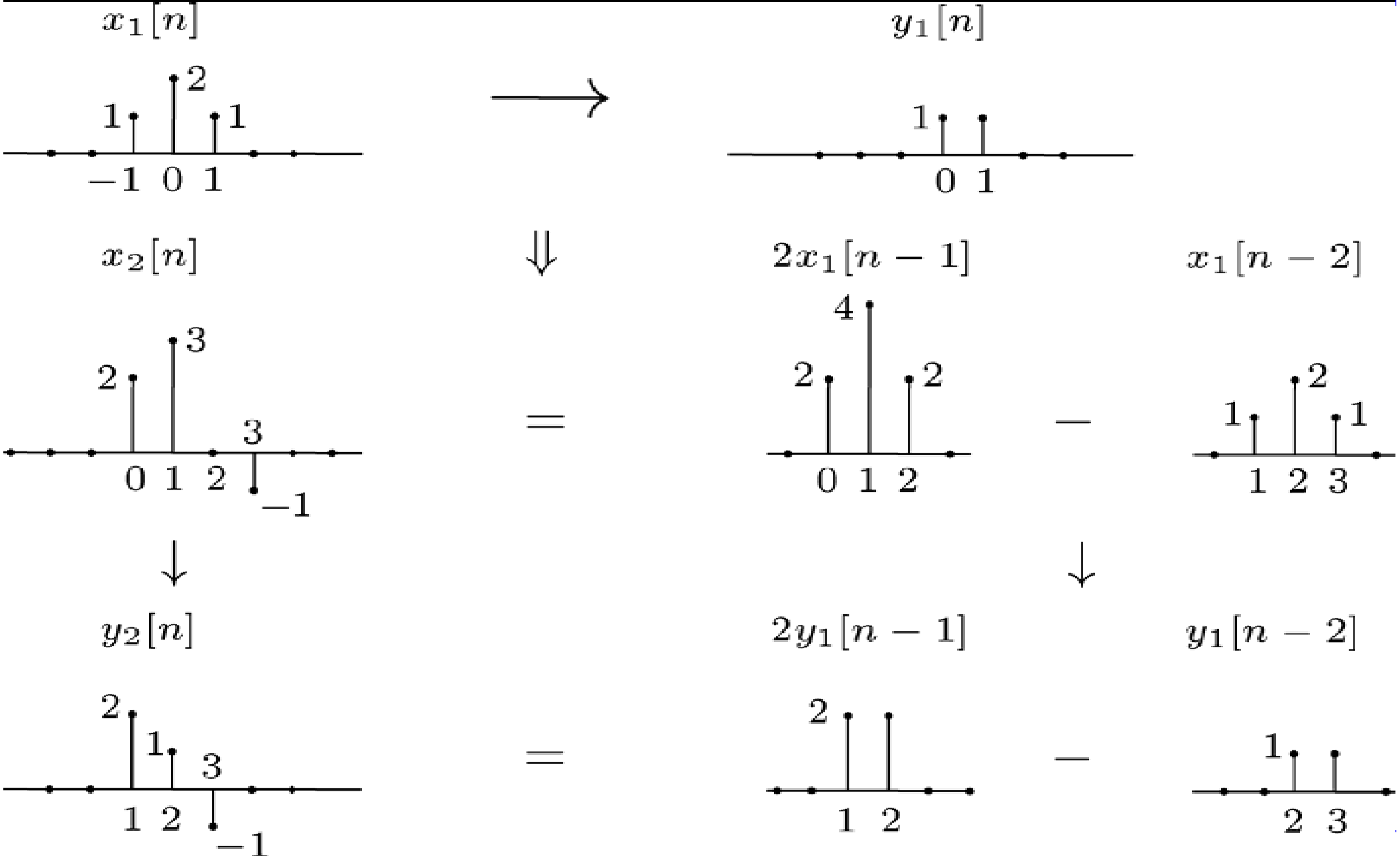
Линеарни временски непроменливи системи (LTI)



Линеарни временски непроменливи системи (LTI)



Линеарни временски непроменливи системи (LTI)



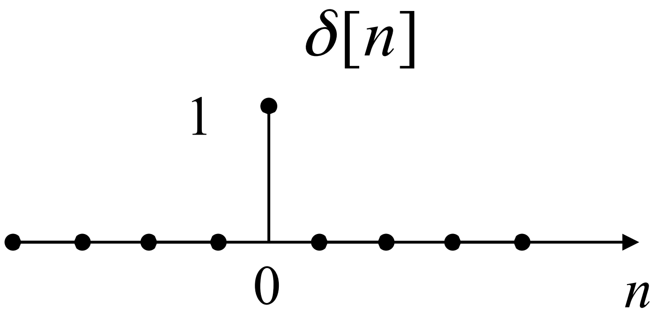
Линеарни временски непроменливи системи (LTI)

- Во оригиналниот (временски) домен LTI системите се опишани со
  - Импулсен одзив
  - Диференцијална равенка кај аналогни системи односно диференцна равенка кај дискретни системи

- Излезниот сигнал се пресметува со
  - Конволуција
  - Решавање на диференцијална равенка кај аналогни системи односно диференцна равенка кај дискретни системи

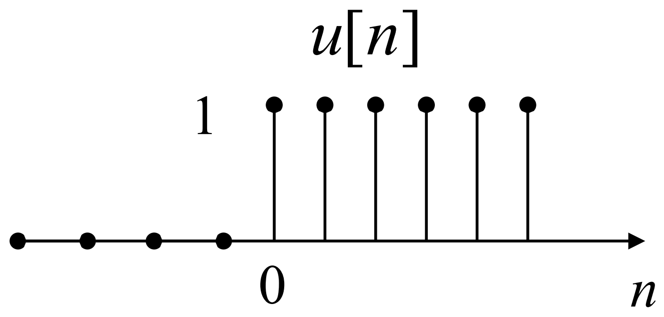
Импулсен одзив

- Импулсен одзив $h[n]$ (дискретни системи) е одзив на систем (во релаксирана состојба) на чиј влез е применет единичен импулс



Индиционен одзив

- Индиционен одзив $a[n]$ (дискретни системи) е одзив на систем (во релаксирана состојба) на чиј влез е применет единичен скок



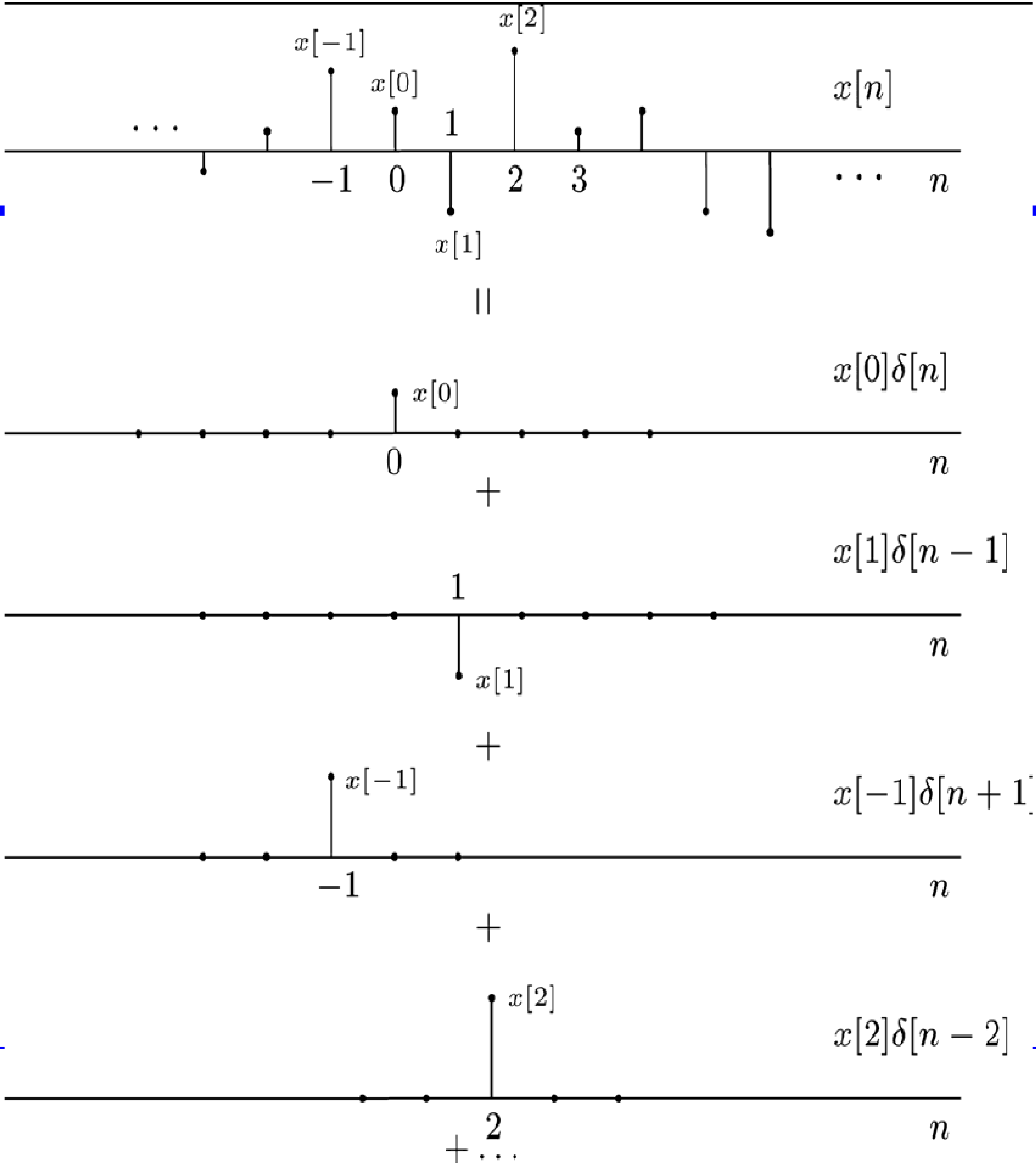
Одзив на произволен влезен сигнал

- Одзив на произволен влезен сигнал
  - Декомпозиција на влезниот сигнал како линеарна комбинација на базични сигнали
  - Избор на базичните сигнали таков да лесно може да се пресмета одзивот

- Кај LTI системи
  - Линеарна комбинација од задоцнети единични импулси води до конволуција (суперпозициска сума)
  - Линеарна комбинација од комплексни експоненцијални функции води до Фуриеова анализа

Одзив на произволен влезен сигнал

- Стратегија: Претставување на дискретен систем преку единични импулси


x[−1]
x[2]
x[0]
x[n]
1
−1
0
2
3
n
x[1]
x[0]δ[n]
x[0]
0
n
x[1]δ[n − 1]
1
x[1]
n
x[−1]
x[−1]δ[n + 1]
−1
n
x[2]
x[2]δ[n − 2]
2
n

Одзив на произволен влезен сигнал

- Стратегија: Претставување на дискретен систем преку единечни импулси

$$x[n] = \cdots x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] \cdots$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{коефициенти}} \underbrace{\delta[n-k]}_{\text{базични сигнали}}$$

Одзив на произволен влезен сигнал

- Нека претпоставиме дека системот е линеарен, и нека

$$\delta[n-k] \rightarrow h_k[n]$$

Од суперпозиција

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

Одзив на произволен влезен сигнал

- Сега нека претпоставиме дека системот е линеарен и перманентен, со импулсен одзив $h[n]$

од перманентност

$$\delta[n-k] \rightarrow h[n-k]$$

од LTI

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

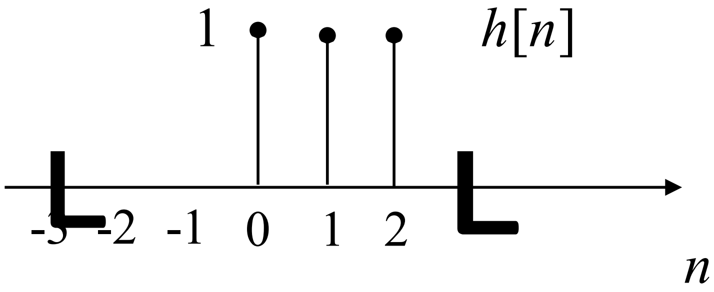
Одзив на произволен влезен сигнал

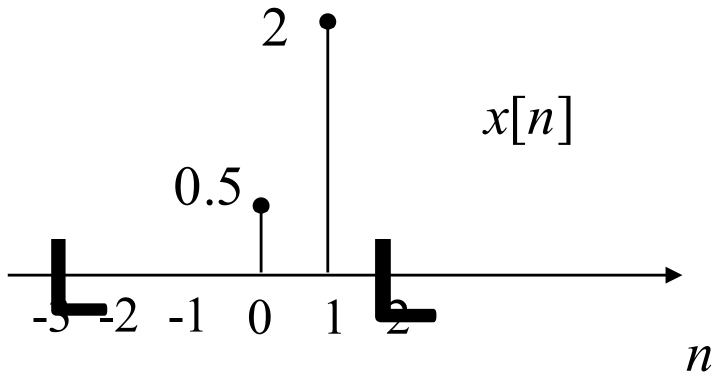
- Конволуција (суперозициска сума)

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Конволуција

- Пример



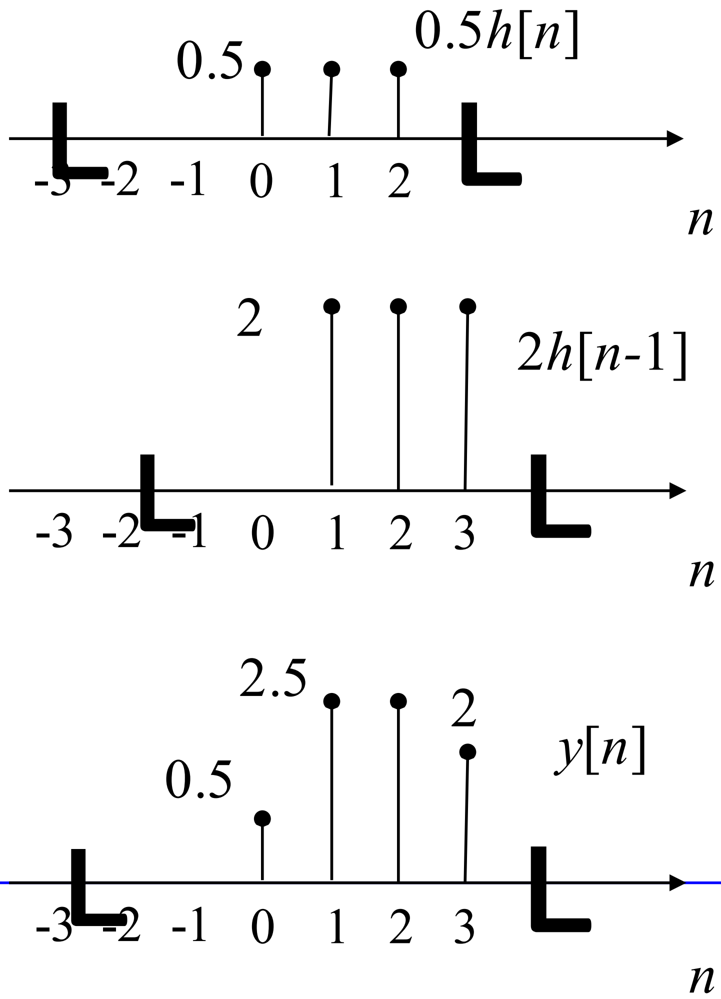


$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1]$$

$$= 0.5h[n] + 2h[n-1]$$

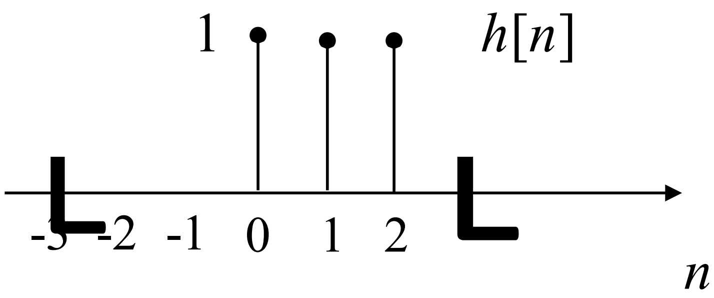
Конволуција

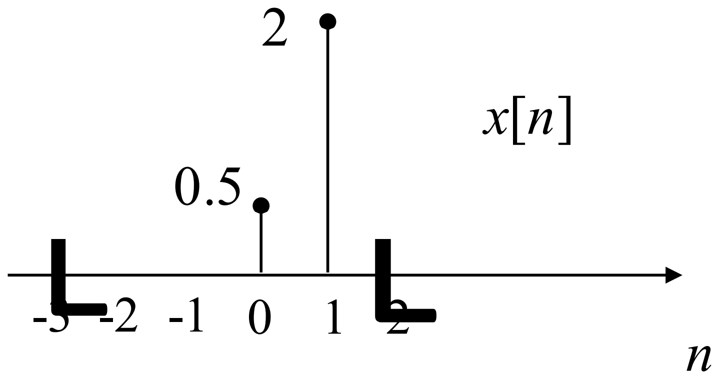
- Пример $y[n] = 0.5h[n] + 2h[n-1]$



Конволуција

- Пример





$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Конволуција

- Постапка....

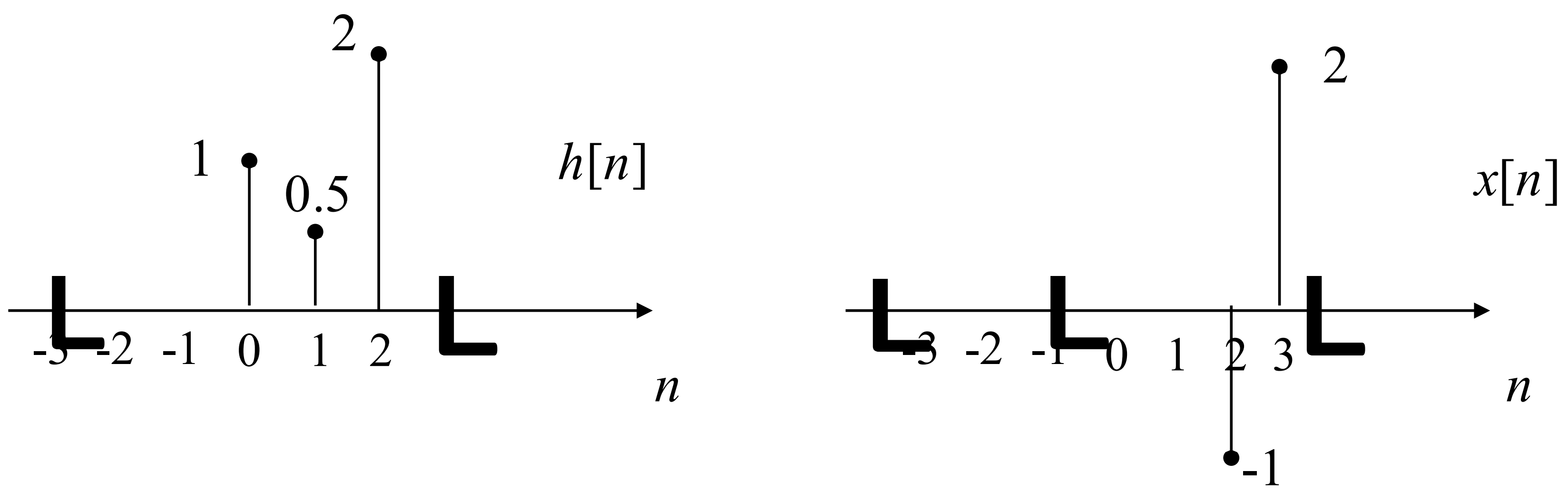
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$h[k]$ превртиe $h[-k]$ помести $h[n-k]$

множи $x[k]h[n-k]$ собери $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

Конволуција

- Задача за вежбање: Да се пресмета конволуција на следните два сигнала



Импулсен одзив

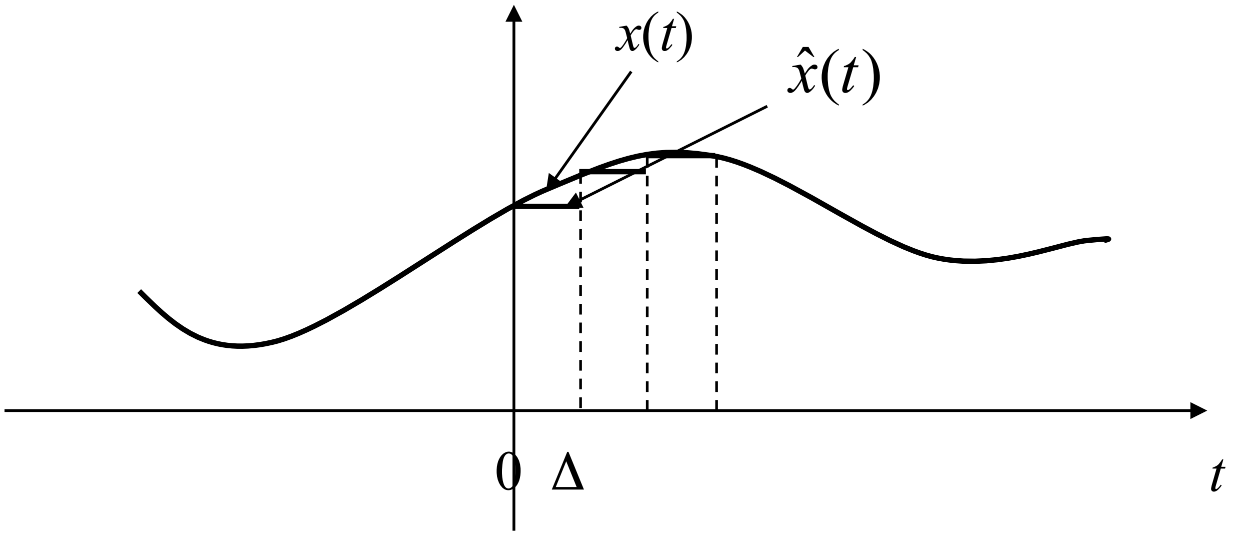
- Импулсен одзив (аналогни системи) е одзив на систем (во релаксирана состојба) на чиј влез е применет единичен импулс (Дираков импулс)

Индиционен одзив

- Индиционен одзив (аналогни системи) е одзив на систем во релаксирана состојба на чиј влез е применет единичен скок (Хевисајдова функција)

Одзив на CT LTI систем

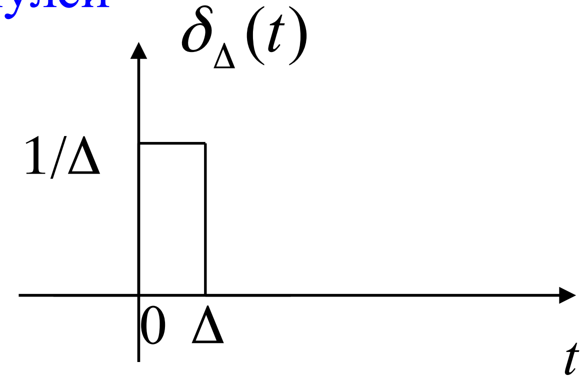
- Стратегија: Претставување на аналогни сигнали со помош на единични импулси



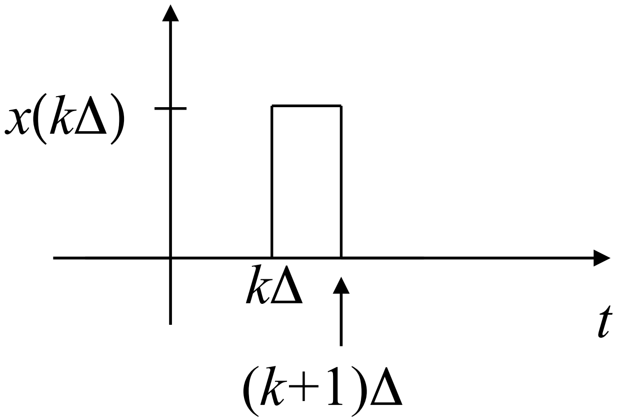
$$\hat{x}(t) = x(k\Delta), \quad k\Delta < t < (k+1)\Delta$$

Одзив на CT LTI систем

- Стратегија: Претставување на аналогни сигнали со помош на единични импулси



$\delta_\Delta(t)$ има површина 1



$$= x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

Одзив на CT LTI систем

- Стратегија: Претставување на аналогни сигнали со помош на единични импулси

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

во граничен случај кога $\Delta \rightarrow 0$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Одзив на CT LTI систем

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta \rightarrow \quad \hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

во граничен случај кога $\Delta \rightarrow 0$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \rightarrow \boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau}$$

конволуција (суперозициски интеграл)

Конволуција

- Постапка....

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$h(\tau)$ преврти $h(-\tau)$ помести $h(t-\tau)$

множи $x(\tau)h(t-\tau)$ интеграли $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

Конволуција

- Задача за вежбање: Да се пресмета конволуција на два правоаголни импулса со траење T_1 и T_2

Својства на LTI системи

- Својства на LTI системи

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

  – Комплетно дефинирани со нивниот импулсен одзив
  – Ова важи само за LTI системи

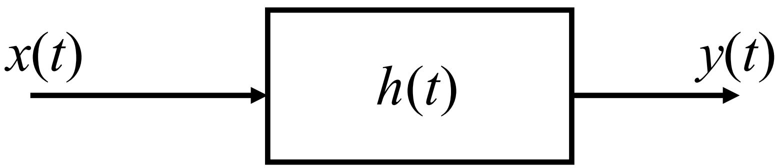
Својства на LTI системи

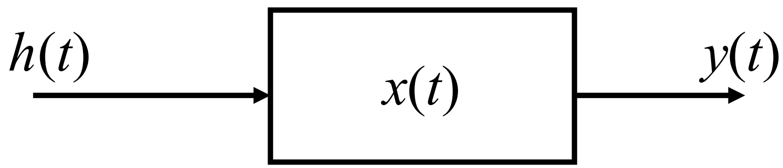
- Комутативност

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

  – Интерпретација кај LTI системи





Својства на LTI системи

- Дистрибутивност

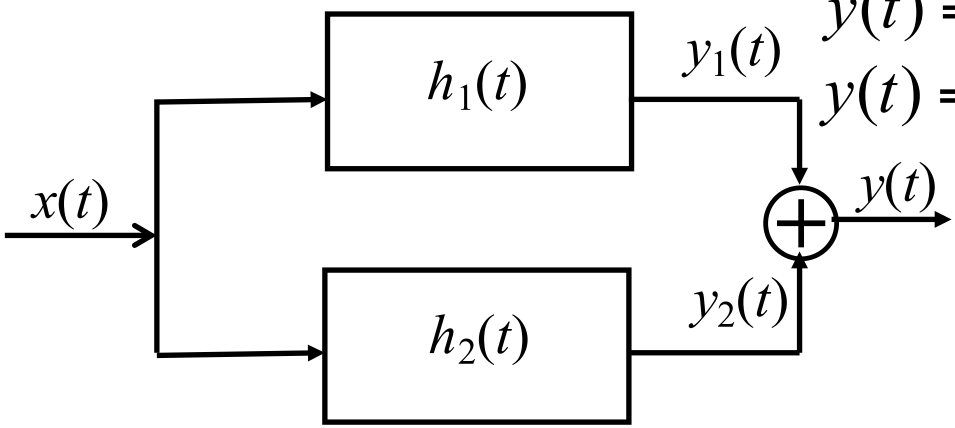
$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n]) = x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

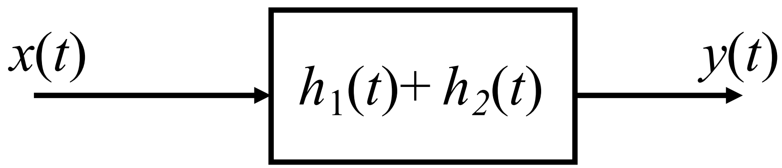
$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)] = x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

  – Интерпретација при поврзување на системи

$$y(t) = x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

$$y(t) = x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]$$





Својства на LTI системи

- Асоцијативно својство

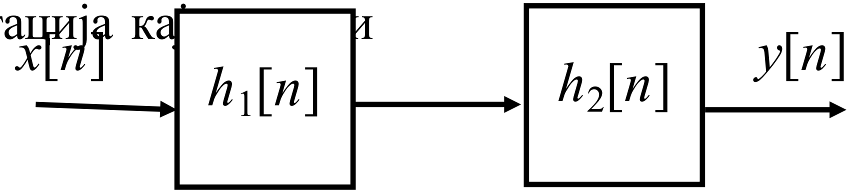
$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n]) = (x[n]*h_1[n])*h_2[n]$$

$$x(t)*[h_1(t)*h_2(t)] = [x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$$

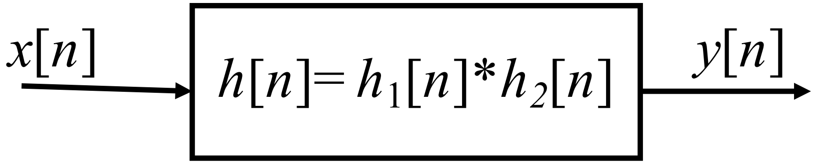
Својства на LTI системи

- Асоцијативно својство
  - Интерпретација ка и

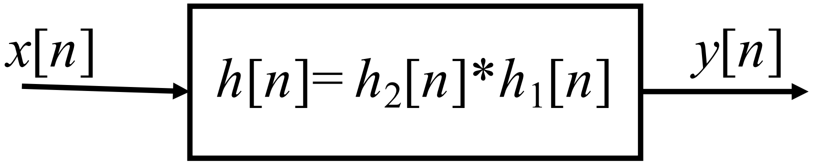
$$y[n] = w[n] * h_2[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

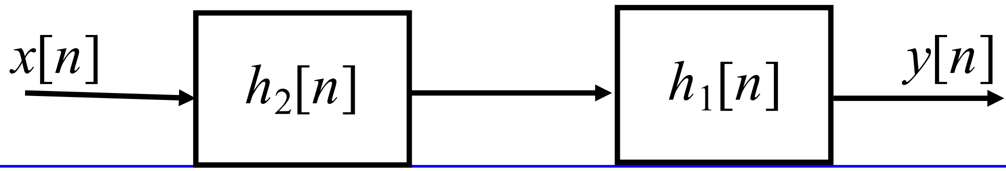


$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$



  - Во комбинација со комутативното својство





Кај LTI системи не е битен редоследот на системи во каскадата

Својства на LTI системи

- LTI системи со и без меморија
  - Систем е без меморија доколку излезниот сигнал во даден момент зависи само од влезниот сигнал во тој момент
  - Конволуција $$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

    задоволено само за $h[n]=0$ за $n\neq 0$ => систем без меморија

    тогаш $h[n]=K\delta[n]$ каде $K=h[0]$

    Излезниот сигнал е $y[n]=K\,x[n]$

Својства на LTI системи

- LTI системи со и без меморија
  - Излезниот сигнал е $y[n] = K\,x[n]$

за $K = 1$, $x[n] = x[n] * \delta[n]$

Односно $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$

слично за CT:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Својства на LTI системи

- Каузалност

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

ако $h[n] = 0$ за $n < 0 \Rightarrow$ системот е каузален

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Својства на LTI системи

- Каузалност

ако $h(t) = 0$ за $t < 0 \Rightarrow$ системот е каузален

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Својства на LTI системи

- Стабилност: секој ограничен влезен сигнал предизвикува ограничен излез

$$\left|x[n]\right| < B \quad \text{за секое } n$$

$$\left|y[n]\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right|$$

$$\left|y[n]\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h[k]\right|\left|x[n-k]\right|$$

$$\left|x[n-k]\right| < B \quad \text{за секое } n \text{ и } k$$

$$\left|y[n]\right| \leq B\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h[k]\right| \qquad \text{за секое } n$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h[k]\right| \leq \infty$$

Неопходен и доволен услов системот да биде стабилен

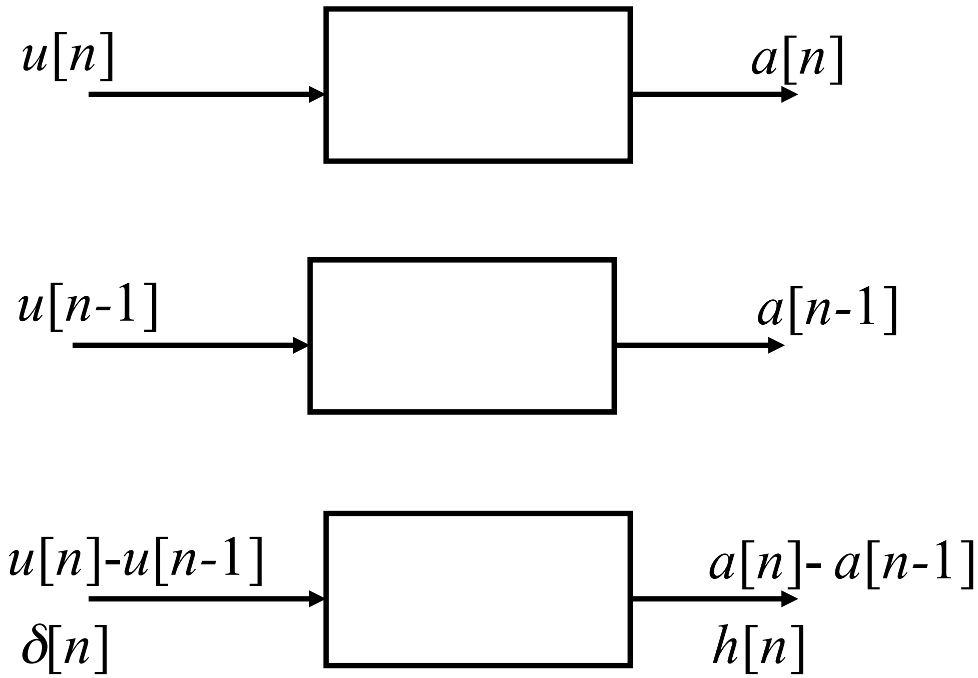
Својства на LTI системи

- Задача за вежбање: Дали системот со импулсен одзив

$$h[n] = 2^n u[3-n]$$

- е без меморија?
- е каузален?
- е стабилен?

Врска помеѓу $h[n]$ и $a[n]$



Врска помеѓу $h[n]$ и $a[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- Ако $x[n] = u[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k]$$

- Бидејќи $u[n-k] = 0$ за $n-k<0$ и $u[n-k] = 1$ за $n-k \geq 0$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \quad = a[n]$$

Врска помеѓу $h(t)$ и $a(t)$

$$h(t) = \frac{da(t)}{dt}$$

$$a(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$