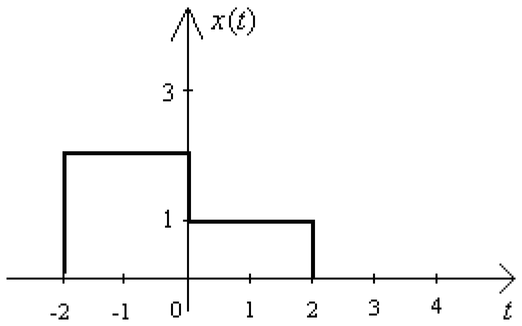
СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

Сигнали

Решени задачи:

1. Да се одреди сигналот $x(-2t-3)$, ако сигналот $x(t)$ е:



Решение:

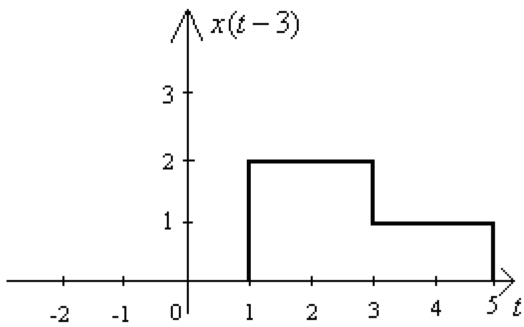
Сигналот $x(t)$ е аналоген сигнал, дефиниран на континуираното множество на независната променлива t. Во задачата треба да се изврши трансформација на независната променлива t, за да се одреди сигналот $x(-2t-3)$. Гледаме дека сигналот $x(-2t-3)$ во однос на сигналот $x(t)$ е:

- скалиран со фактор 2 (независната променлива t е помножена со 2);
- инвертиран (независната променлива t е помножена со -1);
- поместен за Δt=-3;

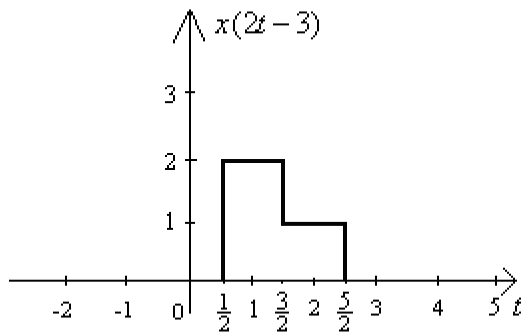
За да се одреди сигналот $x(-2t-3)$, редоследот на трансформациите врз независната променлива што треба да се извршат е:

1. Поместување;
2. Скалирање со фактор поголем од нула;
3. Инвертирање;

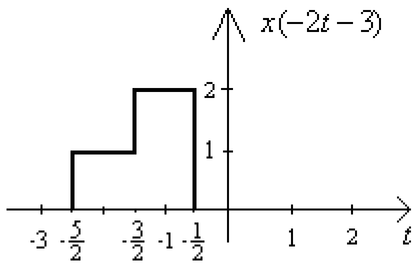
Значи, прва трансформација на независната променлива е поместувањето, па прво го одредуваме сигналот $x(t-3)$. Бидејќи поместувањето Δt=-3 е негативно, сигналот го поместуваме во десно за вредност $|\Delta t| = 3$:



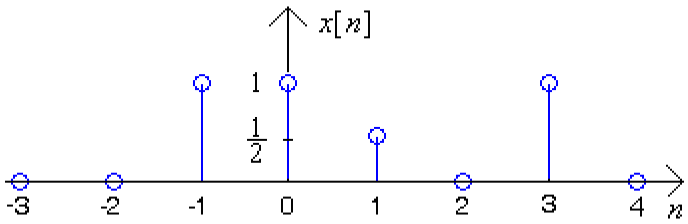
Потоа, следи втората трансформација, скалирање со фактор 2, за да го одредиме сигналот $x(2t-3)$. Скалирање со фактор поголем од еден претставува компресија на сигналот (за факторот на скалирање) во однос на t оската:



Последната трансформација, инвертирање, со која се добива бараниот сигнал $x(-2t-3)$, претставува инвертирање на сигналот $x(2t-3)$ во однос на ординатната оска:



2. Да се одреди сигналот $x[2n+1]$, ако сигналот $x[n]$ е:



Решение:

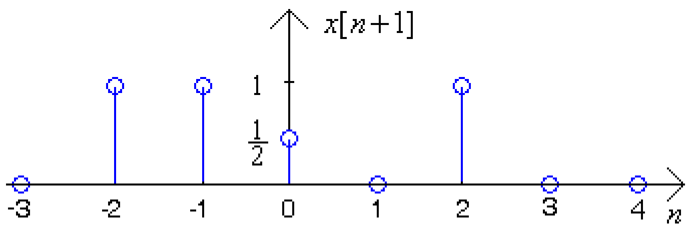
Сигналот $x[n]$ е дискретен сигнал, дефиниран за дискретеното множество на независната променлива n. Во задачата треба да се изврши трансформација на независната променлива n, за да се одреди сигналот $x[2n+1]$. Гледаме дека сигналот $x[2n+1]$ во однос на сигналот $x[n]$ е:

- скалиран со фактор 2 (независната променлива n е помножена со 2);
- поместен за $\Delta n = 1$;

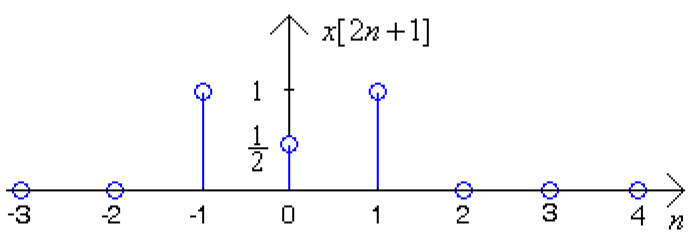
За да се одреди сигналот $x[2n+1]$, редоследот на трансформациите врз независната променлива што треба да се извршат е:

1. Поместување;
2. Скалирање со фактор поголем од нула;

Прво, се одредува сигналот $x[n+1]$. Поместувањето Δn е позитивно, па сигналот $x[n]$ се поместува за еден во лево:

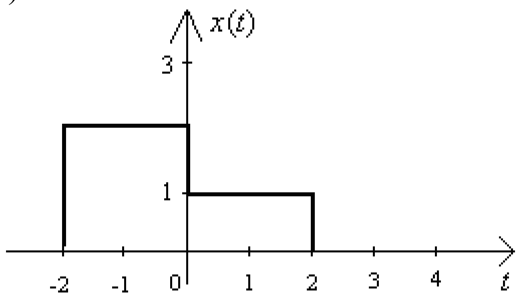


Конечниот сигнал $x[2n+1]$ се добива со скалирање на сигналот $x[n+1]$ со фактор 2. Слично како и во претходниот пример со аналоген сигнал, и овде скалирањето со фактор поголем од еден претставува компресија на сигналот $x[n+1]$ во однос на n оската, со тоа што примероците од $x[n+1]$ кои што се наоѓаат на непарни позиции се губат бидејќи независната променлива n зема само целобројни вредности:

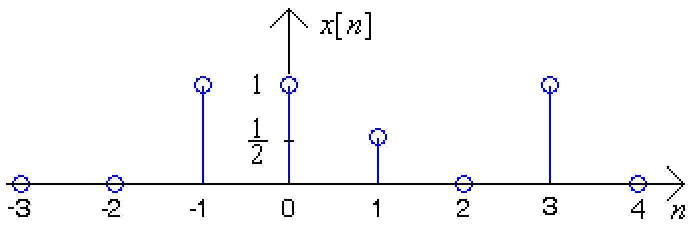


3. Да се одреди парниот и непарниот дел на следните сигнали:

а)



б)



<u>Решение:</u>

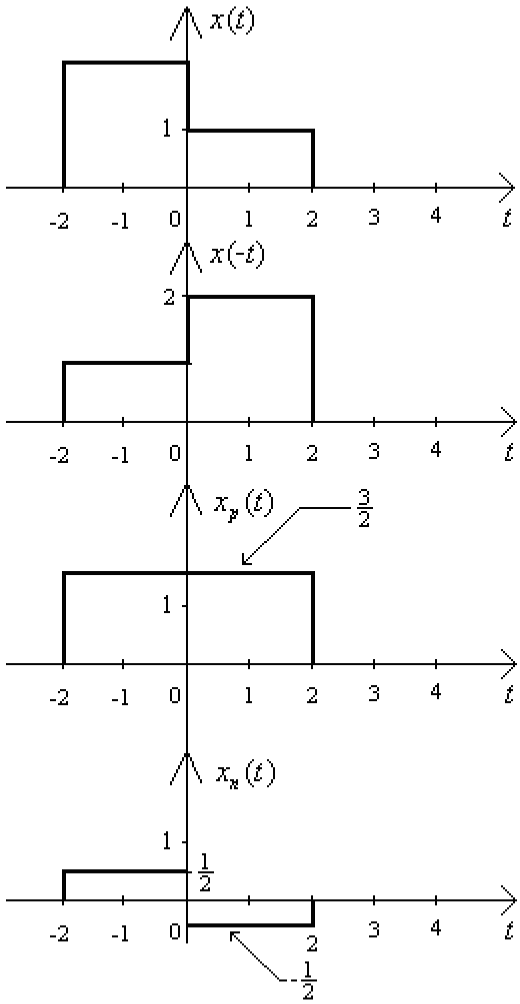
а) Секој аналоген сигнал $x(t)$ може да се претстави како збир од еден парен и еден непарен сигнал, $x_p(t)$ и $x_n(t)$: $x(t) = x_p(t) + x_n(t)$. Парниот дел се пресметува според формулата:

$$x_p(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

непарниот дел според формулата:

$$x_n(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

Сигналите $x(-t)$, $x_p(t)$ и $x_n(t)$ се одредуваат графички:



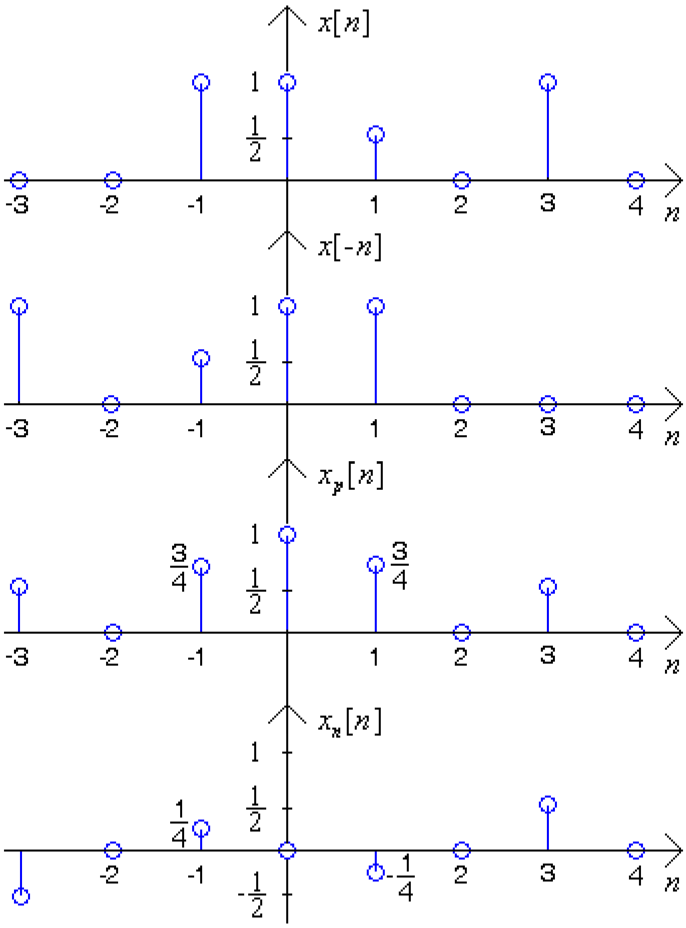
б) Секој дискретен сигнал $x[n]$ може да се претстави како збир од еден парен и еден непарен сигнал, $x_p[n]$ и $x_n[n]$: $x[n] = x_p[n] + x_n[n]$. Парниот дел се пресметува според формулата:

$$x_p[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x[-n]\}$$

непарниот дел според формулата:

$$x_n[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x[-n]\}$$

Сигналите $x[-n]$, $x_p[n]$ и $x_n[n]$ се одредуваат графички:



4. Да се одреди дали следните сигнали се периодични, и ако се периодични да се одреди основниот период:

а) $x(t)=3\cos(4t+2)$ б) $x(t)=e^{j(\pi t-1)}$ в) $x[n]=\sin\left(\frac{6\pi}{7}n+1\right)$ г) $x[n]=\sin\left(\frac{n}{4}+1\right)$

<u>Решение:</u>

а) Аналогниот сигнал $x(t)$ е периодичен ако го исполнува условот $x(t)=x(t+T)$, T е реален број. Вредноста T е период на периодичниот сигнал $x(t)$, а најмалата вредност T_0 која го исполнува условот $x(t)=x(t+T_0)$ е основен период. Во случајов, $x(t)$ е аналоген косинусен периодичен сигнал чиј основен период се одредува на следниот начин:

$$x(t)=x(t+T)$$
$$3\cos(4t+2)=3\cos(4(t+T)+2)$$
$$3\cos(4t+2)=3\cos(4t+4T+2)$$

За функцијата cos(x), важи cos(x)=cos(x+$2k\pi$), k е цел број, значи во овој случај ќе важи:

$$4T=2k\pi$$

$T = \frac{\pi}{2}k$, k е цел број. Основниот период се добива за k=1: $T_0 = \frac{\pi}{2}$.

б) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$

$$e^{j(\pi t-1)} = e^{j(\pi(t+T)-1)}$$
$$e^{j(\pi t-1)} = e^{j(\pi t+\pi T-1)}$$
$$e^{j(\pi t-1)} = e^{j(\pi t-1)} \cdot e^{j\pi T}$$
$$e^{j\pi T} = 1$$
$$\cos \pi T + j \sin \pi T = 1$$

Последното равенство е задоволено за вредности на $\pi T = 2k\pi$, односно за $T = 2k$. Основниот период се добива за за k=1: $T_0 = 2$.

в) Сигналот $x[n] = \sin\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right)$ е дискретен сигнал. Дискретниот сигнал $x[n]$ е периодичен ако го исполнува условот $x[n] = x[n+N]$, N е цел број. Вредноста N е период на периодичниот сигнал $x[n]$, а најмалата вредност N_0 која го исполнува условот $x[n] = x[n+N_0]$ е основен период. Функцијата $\sin(n)$, кадешто n е дискретна променлива, немора да е периодична поради фактот што периодот N мора да биде цел број.

$$\sin\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right) = \sin\left(\frac{6\pi}{7}(n+N) + 1\right)$$
$$\sin\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right) = \sin\left(\frac{6\pi}{7}n + \frac{6\pi}{7}N + 1\right)$$
$$\frac{6\pi}{7}N = 2k\pi \text{ , } k \text{ е цел број}$$
$$N = \frac{7}{6}2k = \frac{7}{3}k$$

Основниот период се добива за најмалата позитивна вредност на k за којашто N е цел број. Значи:
$k = 3, \quad \Rightarrow \quad N_0 = 7$.

г) $x[n] = \sin\left(\frac{n}{4} + 1\right)$

$$\sin\left(\frac{n}{4} + 1\right) = \sin\left(\frac{(n+N)}{4} + 1\right)$$
$$\sin\left(\frac{n}{4} + 1\right) = \sin\left(\frac{n}{4} + \frac{N}{4} + 1\right)$$
$$\frac{N}{4} = 2k\pi$$
$$N = 8k\pi \text{ , } k \text{ е цел број}$$

Од последното равенство се гледа дека не постои цел број k за кој што N ќе биде цел број, што значи дека дискретниот сигнал $x[n] = \sin\left(\frac{n}{4} + 1\right)$ не е периодичен.