Дискретни системи: линеарна конволуција

- Секој LTI систем е комплетно окарактеризиран со својот импулсен одзив.

- Линеарна конволуција: форсираниот одзив на произволен влезен сигнал (екситација) претставува линеарна конволуција на импулсниот одзив на системот и влезниот сигнал

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}h[k]x[n-k] \qquad n=0,1,2\ldots$$

  – Се означува на следниот начин:

$$y[n]=h[n]*x[n]$$

- Со линеарна конволуција се пресметува форсиран одзив

Дискретни системи: линеарна конволуција

- Линеарна конволуција: Матрична интерпретација

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}h[k]x[n-k] \qquad n=0,1,2\ldots$$

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & 0 & 0 \\ x[1] & x[0] & 0 \\ x[2] & x[1] & x[0] \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ \ldots \end{bmatrix}$$

- Должината на конволуцијата на низите со должина N и M е $N+M$-1

Дискретни системи: преносна функција

- Ако на изразот кој претставува линеарна конволуција побараме Z-трансформација од левата и десната страна ќе имаме

$$Y(z) = Z\{h[n] * x[n]\} = H(z)X(z)$$

каде $X(z)$, $Y(z)$ и $H(z)$ се Z-трансформации на влезниот сигнал, излезниот сигнал и импулсниот одзив респективно.

Дискретни системи: преносна функција

- Преносната функција претставува однос на Z-трансформацијата на излезниот и Z-трансформацијата на влезниот сигнал.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- Преносната функција и импулсниот одзив сосема рамноправно го опишуваат дискретниот систем, таа во доменот на комплексната променлива z, а тој во временски домен nT. Тие се поврзани со

$$H(z) = Z\{h[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$ z трансформација на форсираниот одзив

Дискретни системи: диференцна равенка

- Преносната функција е дробнорационална:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{p-1} z^{-p+1} + b_p z^{-p}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{q-1} z^{-q+1} + a_q z^{-q}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{q-1} z^{-q+1} + a_q z^{-q}) Y(z)$$

$$= (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{p-1} z^{-p+1} + b_p z^{-p}) X(z)$$

- Инверзната Z-трансформација ја дава врската помеѓу влезниот и излезниот сигнал во форма на *рекурзивна диференцна равенка*

$$y[n] = \sum_{i=0}^{p} b_i x[n-i] - \sum_{i=i}^{q} a_i y[n-i]$$

- Дробнорационална преносна функција $\Rightarrow$ рекурзивна диференцна равенка $\Rightarrow$ бесконечно траење на импулсниот одзив (IIR дискретен систем)

Дискретни системи: диференцна равенка

- Преносната функција е полином:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{p-1} z^{-p+1} + b_p z^{-p} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- Инверзната Z-трансформација ја дава врската помеѓу влезниот и излезниот сигнал во форма на нерекурзивна диференцна равенка:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{p} b_i x[n-i]$$

- Преносна функција полином $\Rightarrow$ нерекурзивна диференцна равенка $\Rightarrow$ конечно траење на импулсниот одзив (FIR дискретен систем)

Со диференцна равенка се пресметува комплетниот одзив

Дискретни системи: диференцна равенка

- Пример: LTI систем е дефиниран со следната диференцна равенка

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+\frac{1}{3}x[n-1]$$

  – Со примена на Z трансформација на двете страни и користејќи ги својствата на линеарност и поместување во време добиваме

$$Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

$$Y(z)=X(z)\left[\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right] \qquad H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\left[\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]=\left[\frac{z+\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{2}}\right]$$

Дискретни системи: диференцна равенка

- Задача за решавање на час: Дискретен систем е претставен со неговата диференцна равенка

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] + 3x[n] - \frac{3}{4}x[n-1]$$

а) Да се определи неговата преносна функција

б) Да се нацрта пол-нула дијаграмот

в) Да се одредат сите можни области на конвергенција

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3 - \frac{3}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z^2\left(3 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)}{z^2\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right)} = \frac{3z^2 - \frac{3}{4}z}{z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}} = \frac{3z\left(z - \frac{1}{4}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{4}\right)}$$

Дискретни системи: каузалност

$$H(z) = Z\{h[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

- Дискретен линеарен систем е каузален ако и само ако областа на конвергенција на неговата преносна функција е надворешност на круг
- Ако $H(z)$ е дробно-рационална функција, системот е каузален доколку областа на конвергенција е надворешноста на круг со радиус еднаков на најголемиот по модул пол и $z = \infty$ мора да влезе во областа на конвергенција
  - Еквиваленто на: степенот на полиномот во броителот не е поголем од степенот на полиномот во именителот

Дискретни системи: стабилност

- Дискретен линеарен систем е стабилен ако за секое n и за секој по модул ограничен влезен сигнал излезниот сигнал е исто така ограничен по модул

- Условот за стабилност:
  – $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$ (во временски домен)
  – Еквивалентно со $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h[n] z^{-n} \right| < \infty$$ за $|z| = 1$

  – Системот $H(z)$ е стабилен ако неговата област на конвергенција го содржи единичниот круг (во z доменот)

Дискретни системи: стабилност

- **FIR** дискретните системи **се секогаш стабилни.**
  (Условот за стабилност е секогаш исполнет поради конечниот импулсен одзив)

- **IIR каузални** дискретните системи **се стабилни** само тогаш кога **сите полови на преносната функција на системот имаат модули помали од 1 (се наоѓаат во внатрешноста на единичната кружница)**

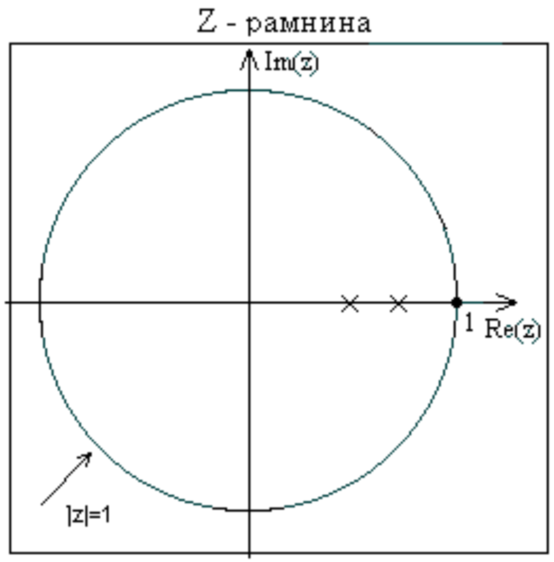
- **IIR антикаузални** дискретните системи **се стабилни** само тогаш кога **сите полови на преносната функција на системот имаат модули поголеми од 1 (се наоѓаат надвор од единичната кружница)**

Дискретни системи: стабилност

- **Пример:** $$H(z) = \frac{1}{(z-0.5)(z-0.75)}, \quad |z| > 0.75$$

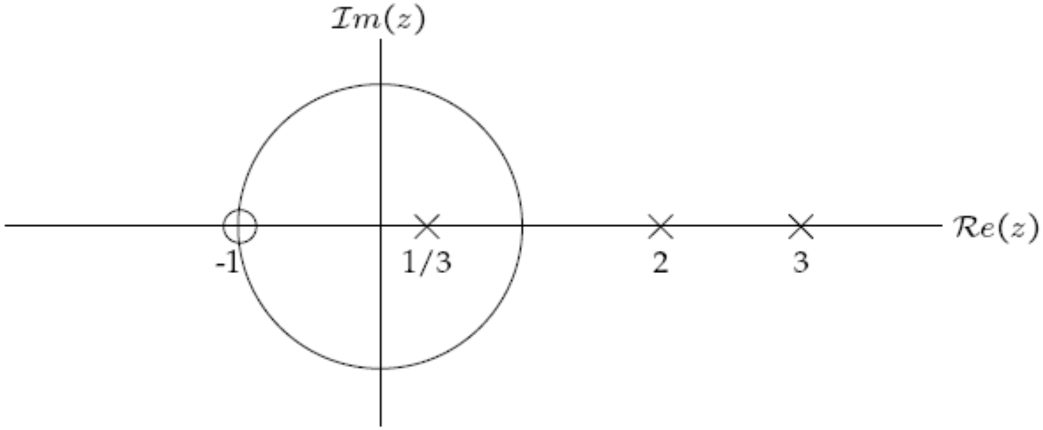
- **Каузалност?**
- Област на конвергенција $|z| > 0.75$
  - Системот е каузален

- **Стабилност?**
- Областа на конвергенција го содржи единичниот круг
  - Системот е стабилен



Дискретни системи: стабилност

- Задача за решавање на час: Пол-нула дијаграмот на z-трансформацијата на сигналот $x[n]$ е прикажан на сликата



Дали овој пол-нула дијаграм може да се поврзе со сигнал кој е истовремено каузален и стабилен?

Ако да, која е областа на конвергенција?

Ако не, да се одреди областа на конвергенција, така да системот биде стабилен.

Компоненти на одзивот

- Форсиран одзив: Одзив (излезен сигнал) на систем во кој делува **влезен сигнал** кога системот е во **релаксирана состојба**
  - Се добива како решение на диференцна равенка со **почетни услови нула**.
- Слободен одзив: Одзив (излезен сигнал) на систем во кој не делува влезен сигнал, а одзивот е резултат на состојба на меморијата различна од нула.
  - Се добива како решение на **хомогената** диференцна равенка со **почетни услови различни од нула**

Компоненти на одзивот

- Комплетен одзив: Одзив на систем во кој делува **влезен сигнал** и кој не е во **релаксирана состојба**

  – Се добива како решение на **нехомогената** диференцна равенка со **почетни услови различни од нула**.

Компоненти на одзивот

- Диференцна равенка

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

експлицитно решение

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$

за дадени $x[n]$ и $y[n_0\text{-}1]$, $y[n_0\text{-}2]$,…, $y[n_0\text{-}N]$,

- Се пресметува $y[n_0]$,
- Потоа $y[n_0+1]$, итн...

рекурзивна равенка

Компоненти на одзивот

- Диференцна равенка

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Специјален случај, кога $N = 0$, имаме нерекурзивна равенка

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k],\ \text{конволуциска сума}$$

Импулсниот одзив на системот се добива кога $x[n] = \delta[n]$

$$y[n] = h[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} \delta[n-k] = \frac{b_n}{a_0},\ 0 \le n \le M,\ h[n] = 0 \text{ за други } n.$$

Ова се нарекува систем со конечен импулсен одзив (FIR - finite impulse response)

Компоненти на одзивот

- Задача за решавање на час: LTI систем е опишан со следната диференцна равенка

$$y[n-1]+2y[n]=x[n]$$

а) Да се одреди слободниот одзив на системот ако $y[-1]=2$.

б) Да се одреди форсираниот одзив на системот ако $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

в) Да се одреди одзивот на системот за $n \geq 0$, ако $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ и ако $y[-1]=2$

$$y_s[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$y_f[n]=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Дискретни системи: принуден одзив

- Форсиран одзив $\{y[n]\}$ на влезен сигнал $\{x[n]\}$ применет за $n=0$

$$y[nT] = Z^{-1}\left\{X(z)H(z)\right\} = \underbrace{y_t[nT]}_{\text{одзив од половите на } H(z)} + \underbrace{y_p[nT]}_{\text{одзив од половите на } X(z)}$$

- Компонента од одзивот $y_t[n]$ наречена **преоден одзив** потекнува од половите на $H(z)$. Ако системот е стабилен, има тенденција на исчезнување кога $nT \to \infty$

- Компонента на одзивот $y_p[n]$ која потекнува од половите на влезниот сигнал е наречена **принуден одзив.** Зависи од траењето и обликот на влезниот сигнал.

Дискретни системи: фреквенциска к-ка

$\{x[n] = \exp(jn\omega T), n = 0,1,2,\ldots\}$ е применет на влезот на стабилен LTI систем со преносна функција $H(z)$

Z трансформација на одзивот е

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z)\frac{1}{1-e^{j\omega T}z^{-1}} = \frac{zH(z)}{z-e^{j\omega T}}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{H(z)}{z-e^{j\omega T}} = \frac{K}{z-e^{j\omega T}} + G(z)$$

G(z) е ф-ција чии полови се половите на H(z)

K е остаток на Y(z)/z во полот z=exp(*jwT)*

$$Y(z) = \frac{zH(e^{j\omega T})}{z-e^{j\omega T}} + zG(z)$$

$$y[nT] = H(e^{j\omega T})e^{jn\omega T} + Z^{-1}\{zG(z)\}$$

Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- Ако $\{x[n] = \exp(jn\omega T), n = 0,1,2,\ldots\}$ е применет на влезот на стабилен LTI систем со преносна функција $H(z)$ во $n = -\infty$ тогаш за секое конечно n одзивот ке има само принудна компонента

$$\boxed{\{y[nT]\} = H(e^{j\omega T})\{e^{jn\omega T}\}}$$

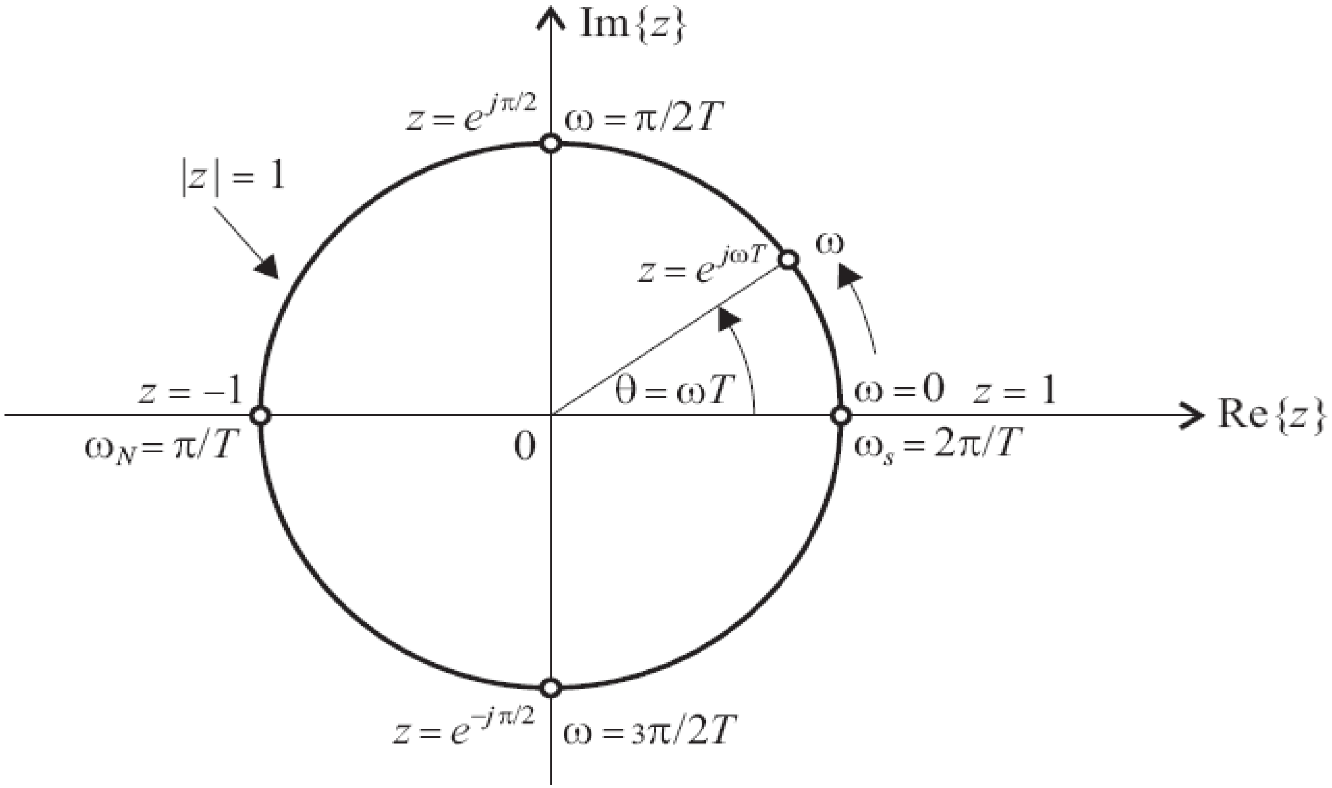
- Преносната функција на системот $H(z)$ за вредности на променливата z на единичната кружница претставува **фреквенциска карактеристика на системот**

$$\boxed{H(e^{j\omega T}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega T}}}$$

  - периодична функција од ω со период $\omega_s = 2\pi/T$

Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- Нормализирана кружна фреквенција $\theta = \omega T = \dfrac{2\pi\omega}{\omega_s}$



Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- модулот на фреквенциската карактеристика

$$\left|H(e^{j\omega T})\right| = A(\theta)$$

е **амплитудна карактеристика** на дискретниот систем

- аголот на фреквенциската карактеристика

$$\angle H(e^{j\omega T}) = \phi(\theta)$$

е **фазна карактеристика**

- кога коефициентите на фреквенциската карактеристика се реални тогаш **амплитудната карактеристика е парна**, а **фазната карактеристика непарна** функција од

Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- Одредување на фреквенциската карактеристика: аналитички
  - Во изразот за H(z) се заменува $z = e^{j\omega T}$ и се пресметува модулот и аголот на фреквенциската карактеристика

пример: за преносната функција

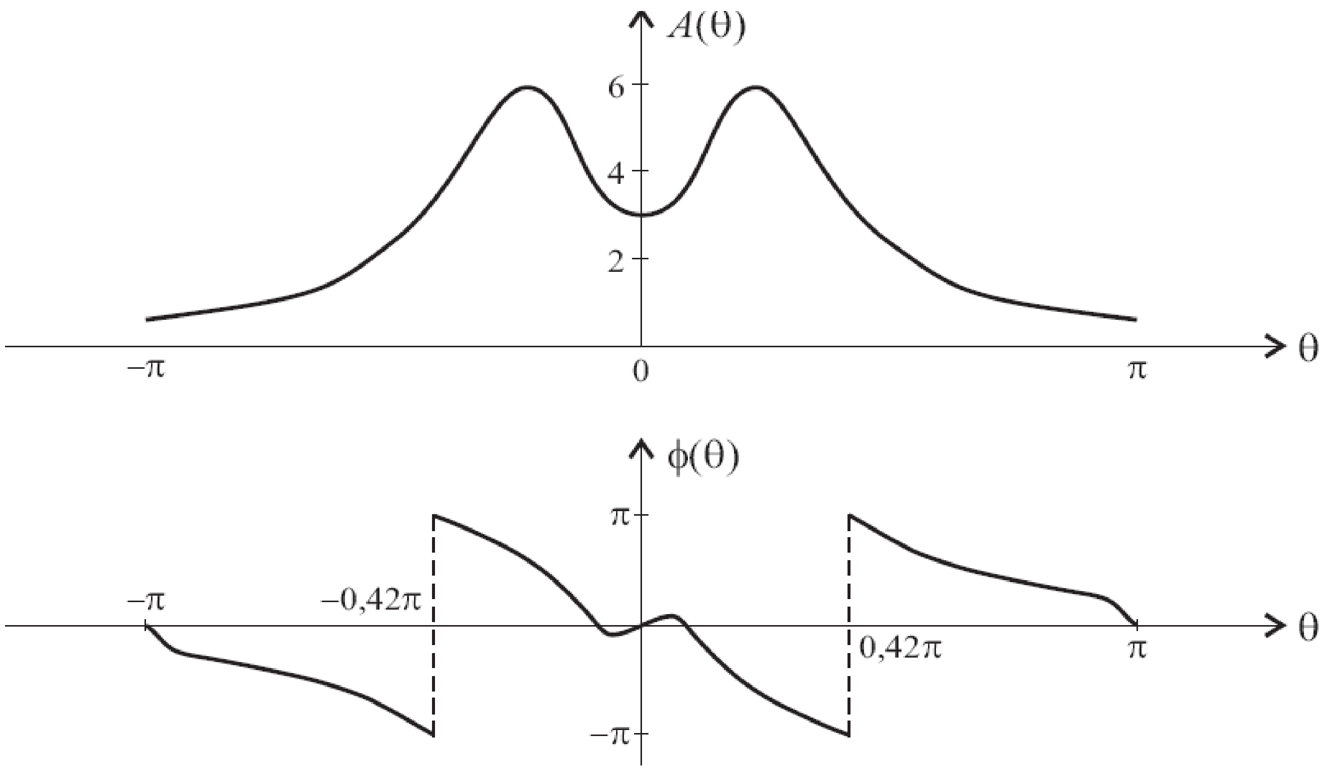
$$H(z) = \frac{z^2 + 1{,}5z - 1}{z^2 - z + 0{,}5}$$

со $z = \exp(j\theta) = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ фреквенциската к-ка е

$$H(e^{j\theta}) = \frac{(\cos(2\theta) + 1{,}5\cos(\theta) - 1) + j(\sin(2\theta) + 1{,}5\sin(\theta))}{(\cos(2\theta) - \cos(\theta) + 0{,}5) + j(\sin(2\theta) - \sin(\theta))}$$

Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- Одредување на фреквенциската карактеристика: аналитички



Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- Одредување на фреквенциската карактеристика: графички

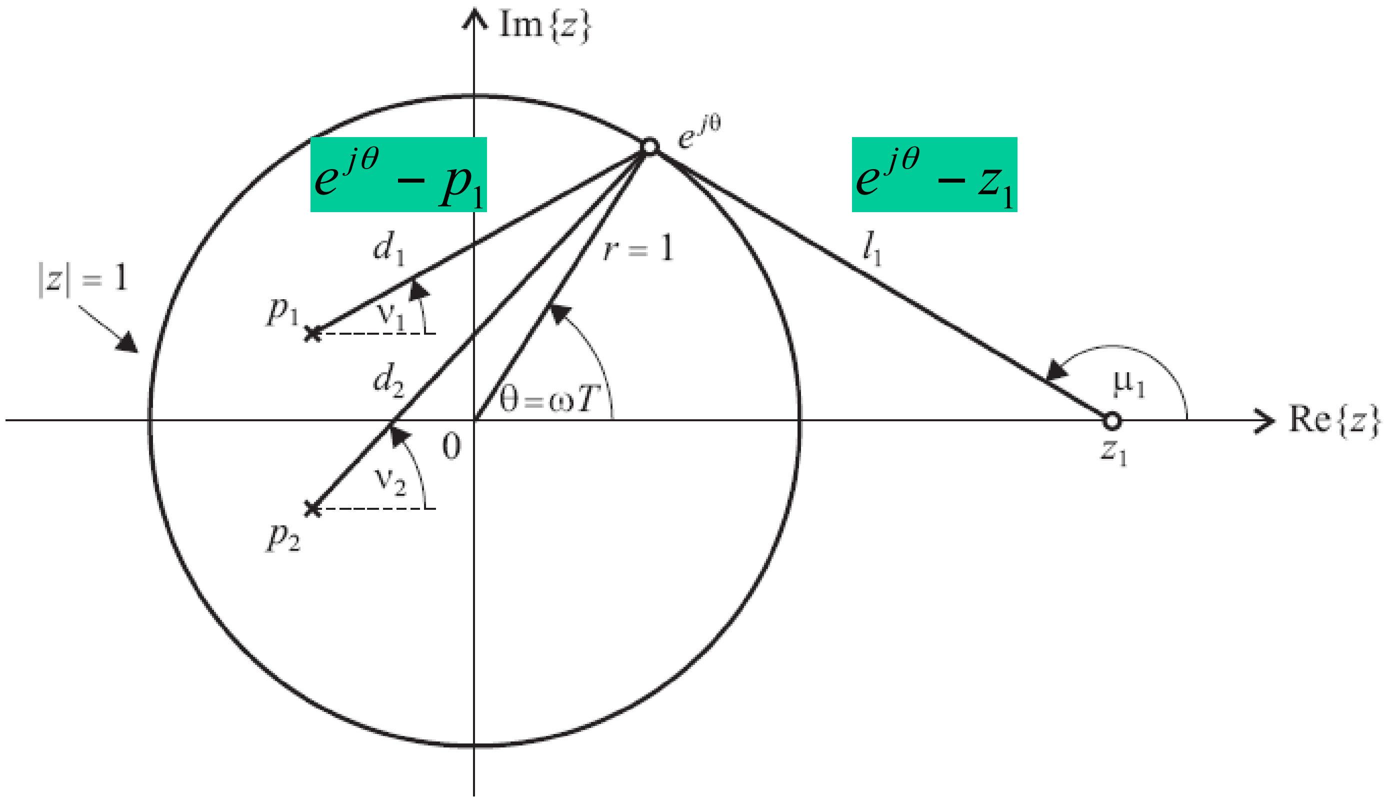
$$H(z) = K\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_P)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_Q)}$$

Фреквенциската карактеристика е

$$H(e^{j\theta}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\theta}} = K\frac{(e^{j\theta}-z_1)(e^{j\theta}-z_2)\cdots(e^{j\theta}-z_P)}{(e^{j\theta}-p_1)(e^{j\theta}-p_2)\cdots(e^{j\theta}-p_Q)}$$

Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- Одредување на фреквенциската карактеристика: графички



Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- Одредување на фреквенциската карактеристика: графички

$$H(e^{j\theta}) = K\frac{l_1 e^{j\mu_1} l_2 e^{j\mu_2}\cdots l_P e^{j\mu_P}}{d_1 e^{j\nu_1} d_2 e^{j\nu_2}\cdots d_Q e^{j\nu_Q}}$$

- Амплитудната карактеристика

$$A(\theta) = K\frac{l_1 l_2\cdots l_P}{d_1 d_2\cdots d_Q}$$

- Фазната карактеристика

$$\phi(\theta) = \begin{cases} \mu_1+\mu_2+\cdots\mu_P-(\nu_1+\nu_2+\cdots\nu_Q) & K>0 \\ \mu_1+\mu_2+\cdots\mu_P-(\nu_1+\nu_2+\cdots\nu_Q)+\pi & K<0 \end{cases}$$

Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- Пример Дискретен систем е претставен со неговата диф равенка. Да се скицира неговата амплитудна карактеристика.

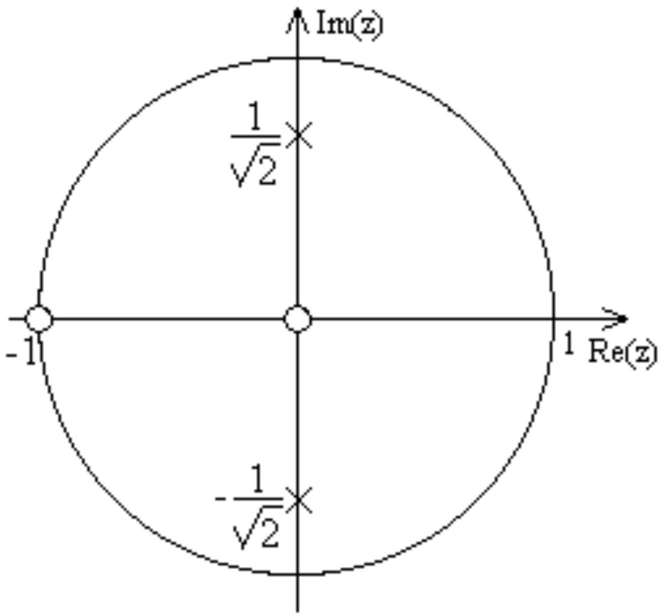
$$y[n] = -\frac{1}{2}y[n-2] + x[n] + x[n-1]$$

Преносната функција на системот е

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{2}} = \frac{z(z+1)}{(z - j\frac{1}{\sqrt{2}})(z + j\frac{1}{\sqrt{2}})}$$

Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- Пример $$H(z) = \frac{z(z+1)}{(z - j\frac{1}{\sqrt{2}})(z + j\frac{1}{\sqrt{2}})}$$



Дискретни системи: фреквенциска к-ка

$$\omega T = 0$$

$$\left|H(e^{j0})\right| = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{c}||\vec{d}|}$$

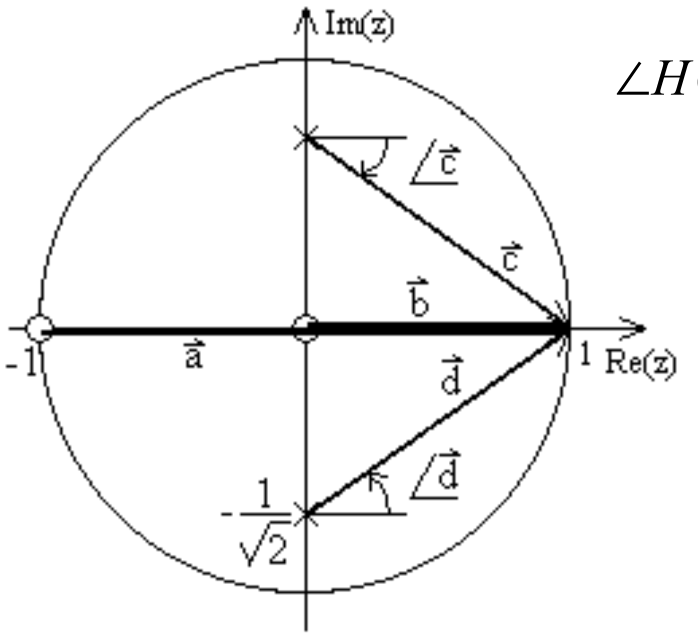
$$|\vec{a}| = 2$$

$$|\vec{b}| = 1$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\left|H(e^{j0})\right| = \frac{4}{3} = 1.33$$



$$\angle H(e^{j0}) = \angle\vec{a} + \angle\vec{b} - \angle\vec{c} - \angle\vec{d}$$

$$\angle\vec{a} = 0$$

$$\angle\vec{b} = 0$$

$$\angle\vec{c} = -arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\angle\vec{d} = -\angle\vec{c}$$

$$\angle H(e^{j0}) = 0$$

Дискретни системи: фреквенциска к-ка

$$\omega T = \frac{\pi}{4}$$

$$\left| H(e^{j\frac{\pi}{4}}) \right| = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{c}||\vec{d}|}$$

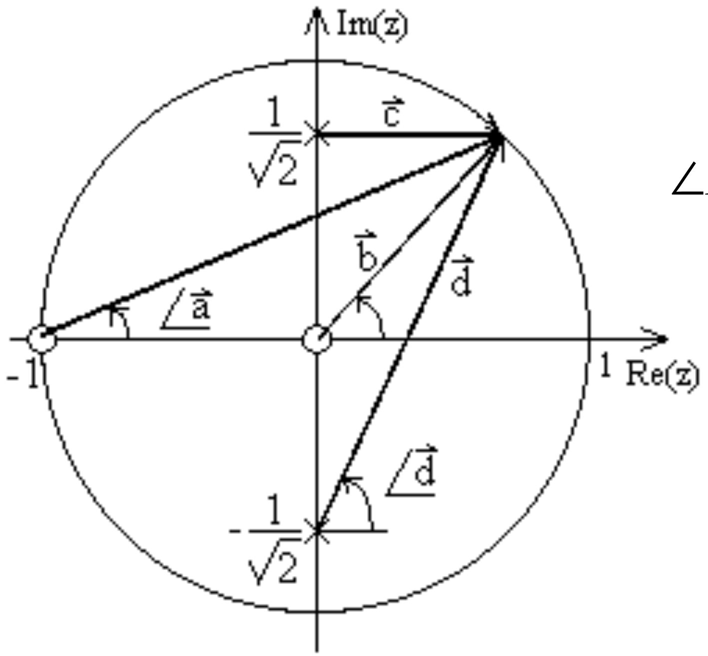
$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} = 1.85$$

$$|\vec{b}| = 1$$

$$|\vec{c}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\left| H(e^{j\frac{\pi}{4}}) \right| = 1.65$$



$$\angle H(e^{j0}) = \angle\vec{a} + \angle\vec{b} - \angle\vec{c} - \angle\vec{d}$$

$$\angle\vec{a} = 22.5^\circ$$

$$\angle\vec{b} = 45^\circ$$

$$\angle\vec{c} = 0^\circ$$

$$\angle\vec{d} = 63.4^\circ$$

$$\angle H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = 4^\circ$$

Дискретни системи: фреквенциска к-ка

:

$$\omega T = \frac{\pi}{2}$$

$$\left|H(e^{j\frac{\pi}{2}})\right| = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{c}||\vec{d}|}$$

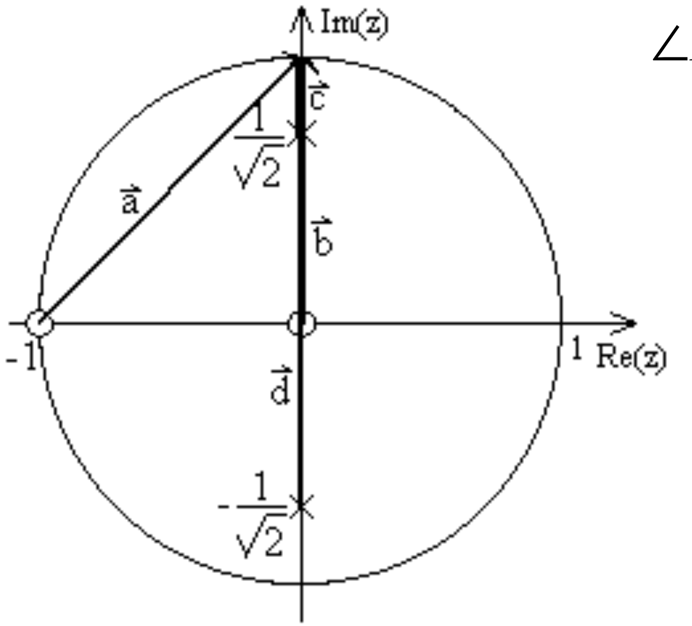
$$|\vec{a}| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = 1$$

$$|\vec{c}| = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\vec{d}| = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left|H(e^{j\frac{\pi}{2}})\right| = 2.83$$



$$\angle H(e^{j0}) = \angle\vec{a} + \angle\vec{b} - \angle\vec{c} - \angle\vec{d}$$

$$\angle\vec{a} = 45^\circ$$

$$\angle\vec{b} = 90^\circ$$

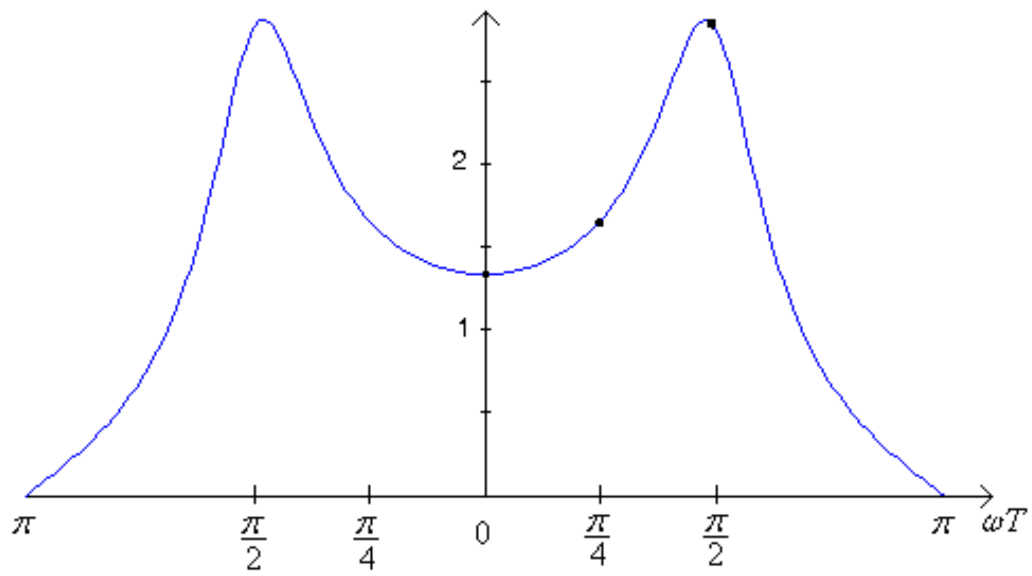
$$\angle\vec{c} = 90^\circ$$

$$\angle\vec{d} = 90^\circ$$

$$\angle H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = -45^\circ$$

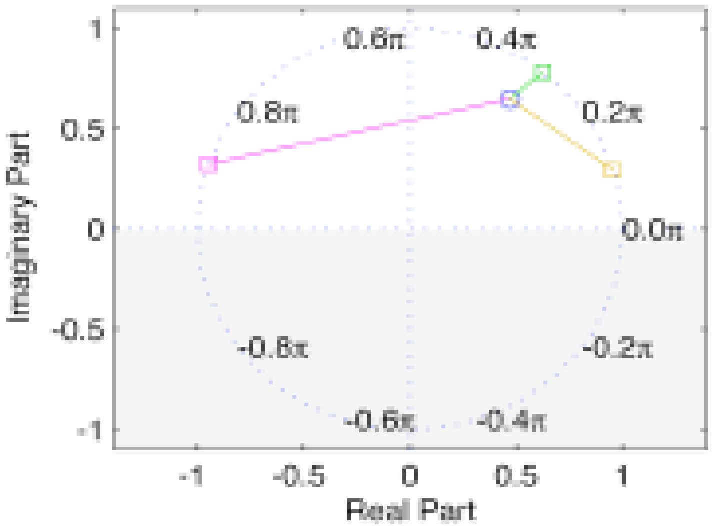
Дискретни системи: фреквенциска к-ка

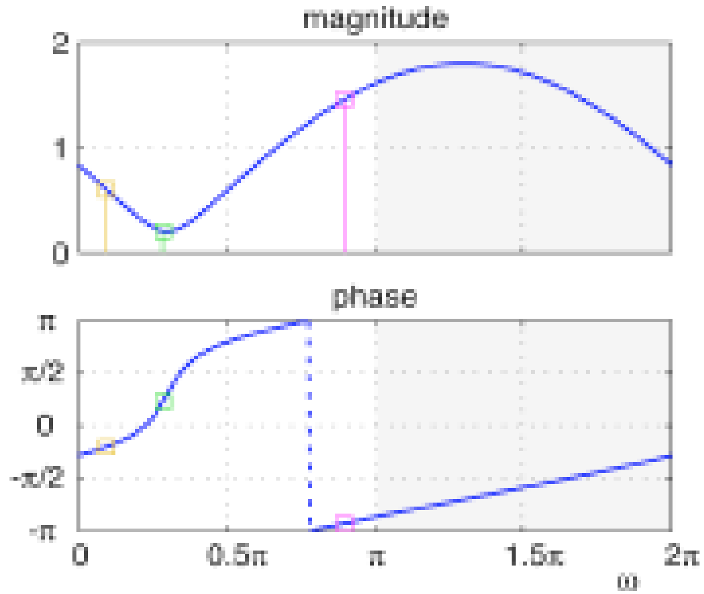
Амлитудната карактеристика



Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- Влијание на полови и нули на фреквенциската карактеристика
  - влијание од нула





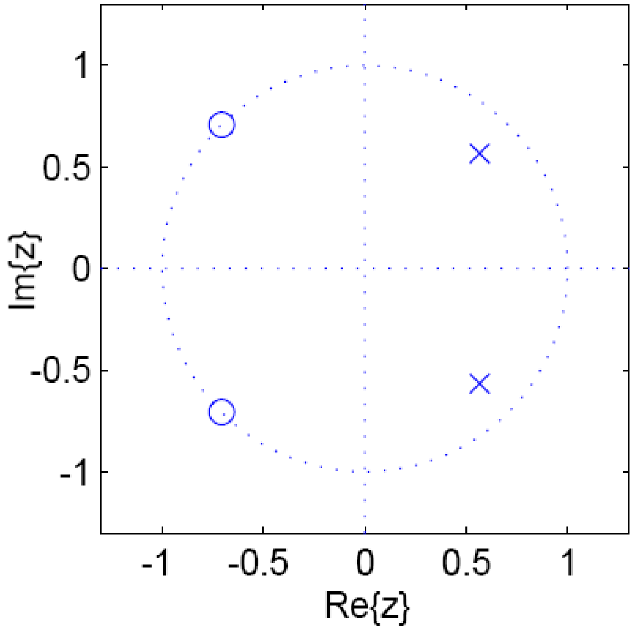
  - влијание од пол?
  - Пол нула ДЕМО

Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- **Графичката постапка јасно ја истакнува зависноста на фреквенциската карактеристика од локацијата на нулите и половите на преносната функција во z-рамнината**
  - Секој пол или нула на $H(z)$ има најголемо влијание на фреквенциската карактеристика во фреквенциското подрачје кое одговара на најблискиот дел од единичната кружница до тој пол или нула.
  - Влијанието на полот и нулата се поизразени кога полот или нулата се поблиску до единичната кружница
  - Пол (нула) со модул приближно 1 предизвикуваат локален максумум (минимум) за фреквенција на единичната кружница најблиску до полот (нулата).
  - Секој пол (нула) на $H(z)$ на единичната кружница значи бесконечна вредност (вредност нула) на амплитудната карактеристика и дисконтинуитет од $-\pi$ rad (π rad) на фазната карактеристика.

Дискретни системи: фреквенциска к-ка

- Задача за решавање на час:
  - Да се нацрта амплитудната к-ка на системот чиј што пол-нула дијаграм е



  - Да се одреди принудниот одзив на системот ако влезниот сигнал е

$$x[n] = 2\cos(3\pi n/4)$$