1. СИГНАЛИ

Секоја величина која носи одредена информација (енергија) претставува сигнал. Сигналите може да се опишат математички со помош на функции.

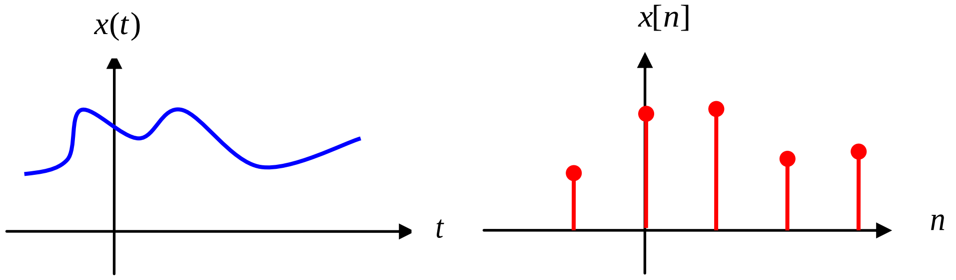
1.1. Класификација на сигналите

Можни се повеќе различни класификации на сигналите. Ние ќе споменеме само дел од нив, оние кои се важни за концептот на овој основен курс

1.1.1 Аналогни и Дискретни сигнали

Можат да бидат **аналогни (CT):** струја во електрично коло, траекторија на вселенски брод, EKG сигнал, говорен сигнал ...

Можат да бидат **дискретни (DT):** DNA базна низа, пиксели на дигитална слика, број на пораст на население на секои четири години ...



Слика 1. Аналоген (лево) и дискретен (десно) сигнал

Повеќето сигнали во физичкиот свет по својата природа се CT сигнали: Напонот, струјата, притисокот, темепературата, брзината... Кај овие сигнали независно променливата величина прима **континуирани вредности**.

За аналогните сигнали ќе го усвоиме следниот начин на означување:

$x(t)$ - аналоген сигнал, t - независна променлива ($t \in \Re$)

Дискретните сигнали можат по својата природа да бидат дискретни, но може да се добијат и од CT сигналите со нивно униформно дискретизирање (земање примероци). Кај нив за разлика од CT сигналите, независно променливата величина прима (само) **целобројни вредности.** За дискретните сигнали ќе ги усвоиме следните ознаки :

$x[n]$ - дискретен сигнал, n - независно променлива ($n \in \mathbb{Z}$)

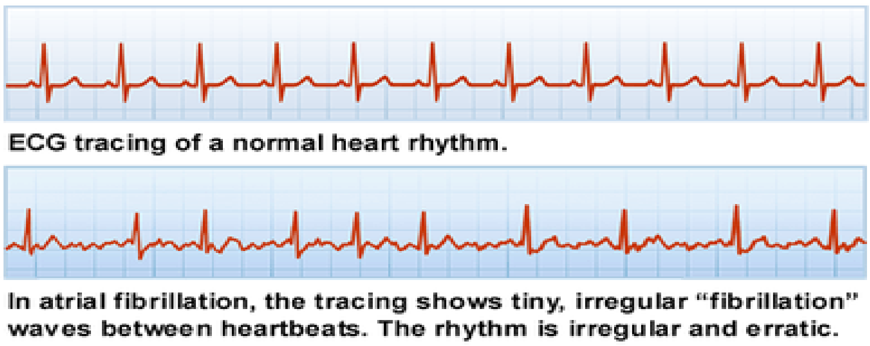
Од особена важност е да се посочи дека системите за процесирање на аналогните сигнали и оние за процесирање на дигиталните сигнали битно се разликуваат по својата природа, што наметнува употреба (изучување) на различни алатки за процесирање на сигналите.

Во овој курс во фокус ќе бидат **аналогните сигнали и системи.**

1.1.2 Еднодимензионални и повеќедимензионални сигнали

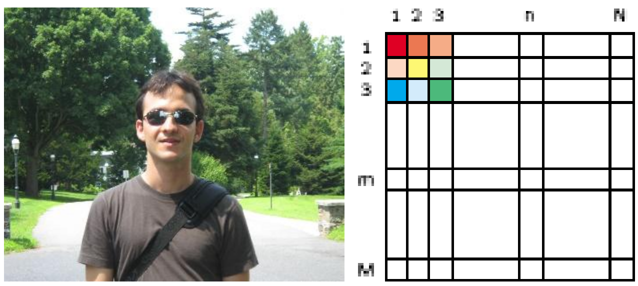
Математички сигналите се опишуваат со функции од една или повеќе наезависно променливи величини. Набљудувани од овој аспект тие можат да бидат **еднодимензионални (1-D)**, зависат од една независно променлива величина, **дводимензионални (2-D)**, зависат од две независно променливи величини,...**N-димензионални (N–D).**

На сликата е прикажан сигнал кој ја прикажува електричната активност на срцето во функција од времето снимена со електроди поставени на површината на градите-EKG сигнал (за нормален срцев ритам и пореметен срцев ритам). Овој сигнал е пример за 1-D сигнал.



Слика 2. Пример за еднодимензионален сигнал

На Слика 3 е прикажана фотографија, а до неа нејзина DT претстава. Фотографијата се состои од 302x435 елементи (пиксели) од кои секој е претставен со три броја (R,G,B) со кои се претставува (кодира) бојата. Така, сигналот е претставен со векторот $c[n,m]$ каде n и m се независно променливи кои ја одредуваат локацијата на пикселите, а c е вектор на бојата претставен со три броја (R,G,B) (црвена, зелена, сина). Овој сигнал е пример за 2-D сигнал.



Слика 3. Пример за дводимензионален сигнал

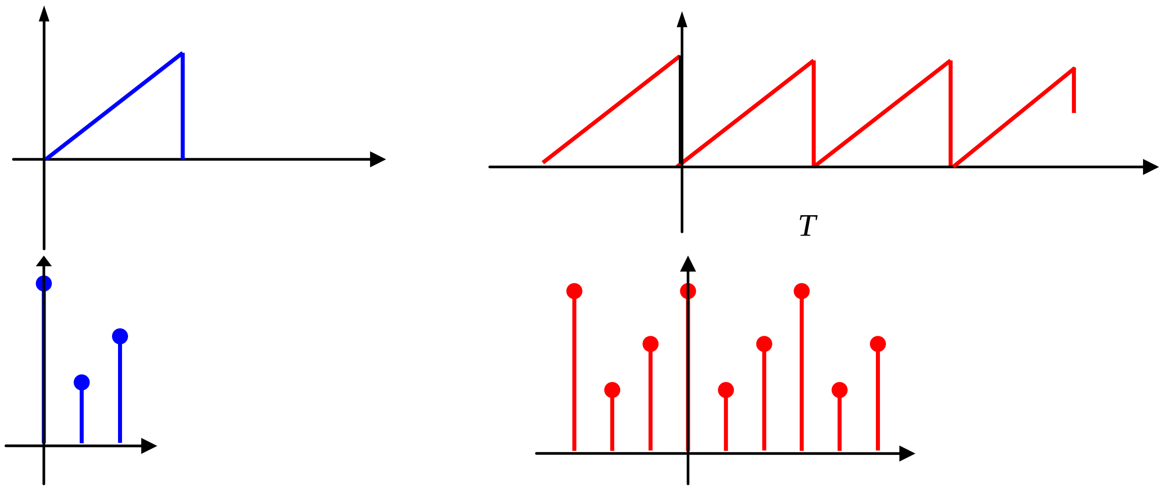
Во овој курс во фокус ќе бидат 1-D сигнали со независно променлива која, поради погодност, ја нарекуваме **време,** иако во некои одредени апликации таа нема да претставува време.

1.1.3 Периодични сигнали

Сигналот е **периодичен** ако неговото поместување по апцисната оска за T позиции (за CT) односно за N позиции (за DT) не го менува сигналот, односно важи:

$$x(t) = x(t+T) \qquad \text{и} \qquad x[n] = x[n+N]$$

Најмалата вредност за T односно N за која горните равенки важат претставува **основен период**.



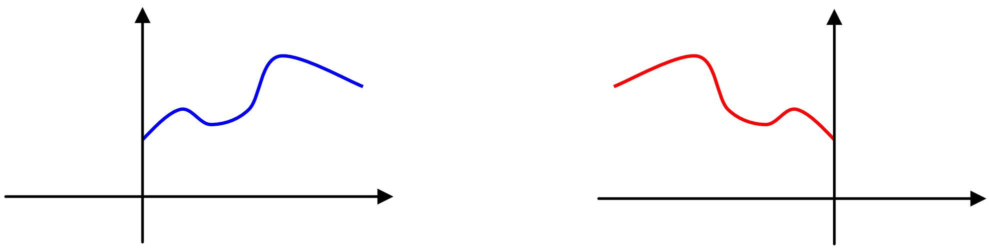
Слика 4. Пример за апериодичен (лево) и периодичен (десно) сигнал

1.1.4 *Каузални и антикаузални сигнали*

- **Каузален** е сигналот кој е дефиниран само за вредности на независно променливата $t \geq 0$ односно $n \geq 0$ и е нула за $t < 0$ односно $n < 0$.

- **Антикаузален** е сигналот кој е дефиниран само за вредности на независно променливата $t < 0$ односно $n < 0$ и е нула за $t \geq 0$ односно $n \geq 0$.

- **Двостран** е сигналот кој е сума од каузален и антикаузален сигнал.



Слика 5. Пример за каузален (лево) и антикаузален (десно) сигнал

1.1.5 *Парни и непарни сигнали*

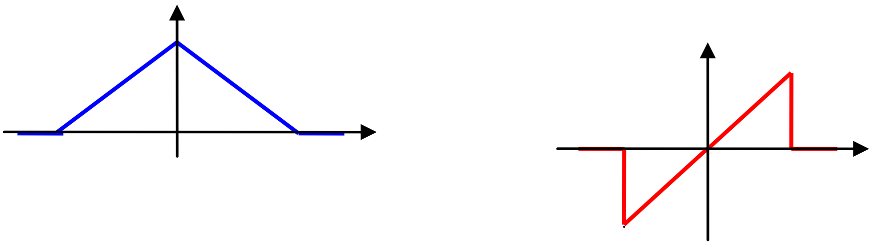
- Сигналот е **парен** ако $x(t) = x(-t)$ односно $x[n] = x[-n]$.
- Сигналот е **непарен** ако $x(t) = -x(-t)$ односно $x[n] = -x[-n]$.

Секој сигнал кој не е ниту парен ниту непарен е сума од парен дел и непарен дел:

$$x(t) = x_p(t) + x_n(t) \quad \text{и} \quad x[n] = x_p[n] + x_n[n]$$

Каде што $x_p(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2}$ и $x_n(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$

Односно $x_p[n] = \dfrac{x[n] + x[-n]}{2}$ и $x_n[n] = \dfrac{x[n] - x[-n]}{2}$



Слика 6. Пример за парен (лево) и непарен (десно) сигнал

1.2. Енергија и средна моќност на сигнал

Во најголем број случаи сигналите се поврзани со некои физички феномени. Во некои апликации, но не во сите, сигналите се претставници на величини кои носат моќност и енергија во физичкиот ситем. На пример, тоа е случај со напонот и струјата во електричното коло. Од тие причини овде ќе се потсетиме на дефинициите за моќност и енергија при тоа водејќи сметка дека сигналите можат да бидат аналогни и дискретни, но и реални и комплексни.

1.2.1 Енергија на аналоген сигнал

… $x(t)$ во интервал $(t_{1,}t_2)$ е дефинирана со интегралот:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt$$

1.2.2 Енергија на дискретен сигнал

… $x[n]$ во интервал $(n_{1,}n_2)$ е дефинирана со сумата

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

1.2.3 Вкупна енергија на сигналот

$$E_\infty = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt \quad \text{и} \quad E_\infty = \lim_{N \to \infty} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2$$

1.2.4 Средна моќност на сигналот

$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt \quad \text{и} \quad P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2$$

Од аспект на нивната енергија и моќност можни се следните класи на сигнали:

1. $E_\infty < \infty, \quad P_\infty = 0$

Навистина, за енергијата на сигналот да биде конечна потеребен услов е неговата средна моќност да биде 0.

2. $E_\infty \to \infty, \quad P_\infty > 0$

Ако средната моќност на сигналот е поголема од нула, тогаш сигурно според дефиицијата вкупната енергија на сигналот нема да биде конечна.

3. $E_\infty \to \infty, \quad P_\infty \to \infty$

Ако средната моќност на сигналот не е конечна, тогаш и вкупната енергија на сигналот нема да биде конечна.

Примери:

1. *Сигналот* $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 0 & t = \text{друго} \end{cases}$

е сигнал со енергија која е конечна и средна моѓност која е 0.

2. *сигналот* $x[n] = 4$ *има бесконечна енергија и средна моѓност 16.*

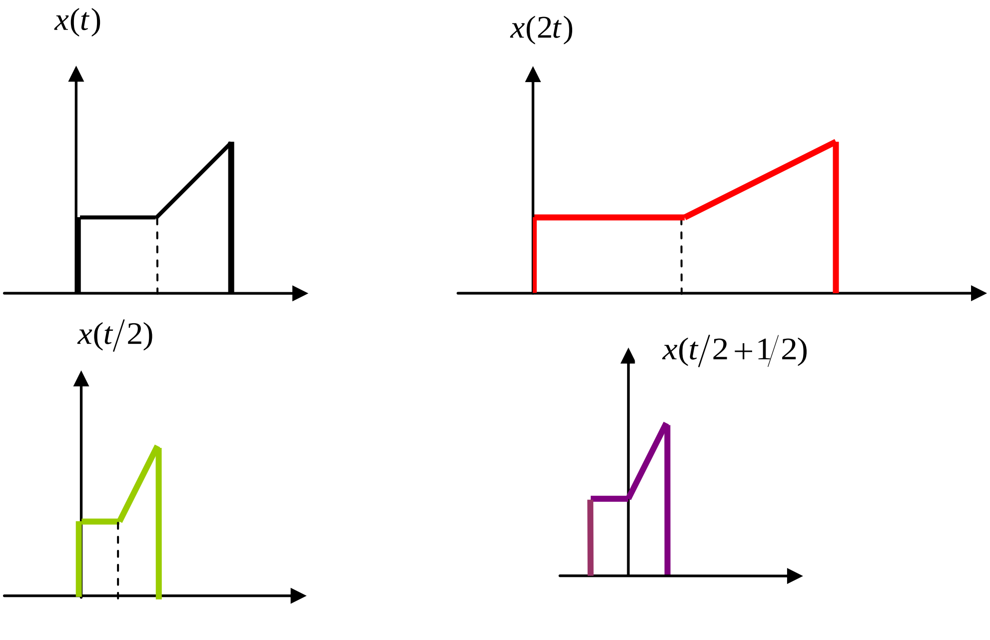
3. *сигналот* $x(t) = t$ *е пример на сигнал кој има и средна моќност и енергија кои се бесконечни.*

1.3. Трансформации на независно променливата

Во многу апликации од интерес е да се знаат ефектите кои ќе ги предизвика трансформацијата на независно променливата. Тоа е случај кога на даден сигнал $x(t)$ се сака да му се даде форма $x(\alpha t + \beta)$, каде α и β се реални броеви, при тоа обликот на сигналот да не се промени.

- Сигналот линерно ќе се “компресира” кога е $\alpha > 1$ или ќе се “рашири” кога е $\alpha < 1$.
- Кога е $\alpha < 0$ сигналот ќе биде инвертиран во време ($\alpha = -1$ дава инверзен сигнал, сигнал кој е ротиран хоризонтално за 180 степени).
- Кога е $\beta \neq 0$ сигналот е поместен за β позиции, лево кога е $\beta > 0$, односно десно кога е $\beta < 0$.

На следната слика се илустерирани промените на сигналот $x(t)$ предизвикани од трансформација на независно променливата.



Слика 7. Трансформација на независно променливата

1.4. Некои посебни сигнали

Некои сигнали се од посебна важност затоа што тие се “градбени блокови” за претставување на голем дел од останатите сигнали. Значајни фамилии на сигнали-градбени блокови се: **реалните експоненцијални сигнали**, **комплексните експоненцијални сигнали** и **Дираковиот импулс** односно **единичниот импулс** како и **Единичната(Хевисјдовата) функција** односо **единичниот скок**. Во текстот што следи ќе ги разгледаме прво нивните аналогни, а потоа и нивните дискретни верзии.

1.4.1. Експоненцијален (СТ) сигнал

Најпрво ќе ги разгледуваме аналогните сигнали (СТ) од овој облик.

$$x(t) = Xe^{st} \quad \text{каде} \quad X \in \Re, \text{ а } \quad s = \sigma + j\omega$$

Во зависност од вредноста на констатантата s можни се три случаи:

- **Реален експоненцијален сигнал**

... е реалниот сигнал од облик $x(t) = Xe^{\sigma t}$, $(j\omega = 0)$. Во зависност од вредноста на константата σ тој може да конвергира $(\sigma < 0)$ или да дивергира $(\sigma > 0)$.

- **Имагинарен експоненцијален сигнал - простопериодичен сигнал**

... е сигналот $x(t) = Xe^{j\omega t}$, $(\sigma = 0)$. Тој е периодичен со **основен период** $T = 2\pi/\omega$ и **основна кружна фреквенција** $\omega = 2\pi/T$.

Навистина: $x(t) = Xe^{j\omega t} = Xe^{j\omega(t+2\pi/\omega)} = x(t+T)$.

$Xe^{j\omega t} = X\cos\omega t + jX\sin\omega t$ → **Овој сигнал е линеарна комбинација од два периодични сигнали со ист период .**

Сигналот $X\cos\omega t = \Re(Xe^{j\omega t})$ ќе го нарекуваме **простопериодичен сигнал.** Како што подоцна ќе се увериме, овој сигнал игра голема улога во анализата на системите.

Самиот тој е пак линеарна комбинација од два експоненцијални сигнали. Од :

$$Xe^{j\omega t} = X\cos\omega t + jX\sin\omega t \quad \text{и} \quad Xe^{-j\omega t} = X\cos\omega t - jX\sin\omega t$$

следи:

$$X\cos\omega t = \frac{X}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

Овде е важно да се забележи дека со зголемување на периодот T на сигналот неговата кружна фреквенција ω се намалува.

Вкупната енергија на овој сигнал е:

$$E_\infty \to \infty$$

а средната моќност е:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|e^{j\omega t}\right|^2 dt = 1$$

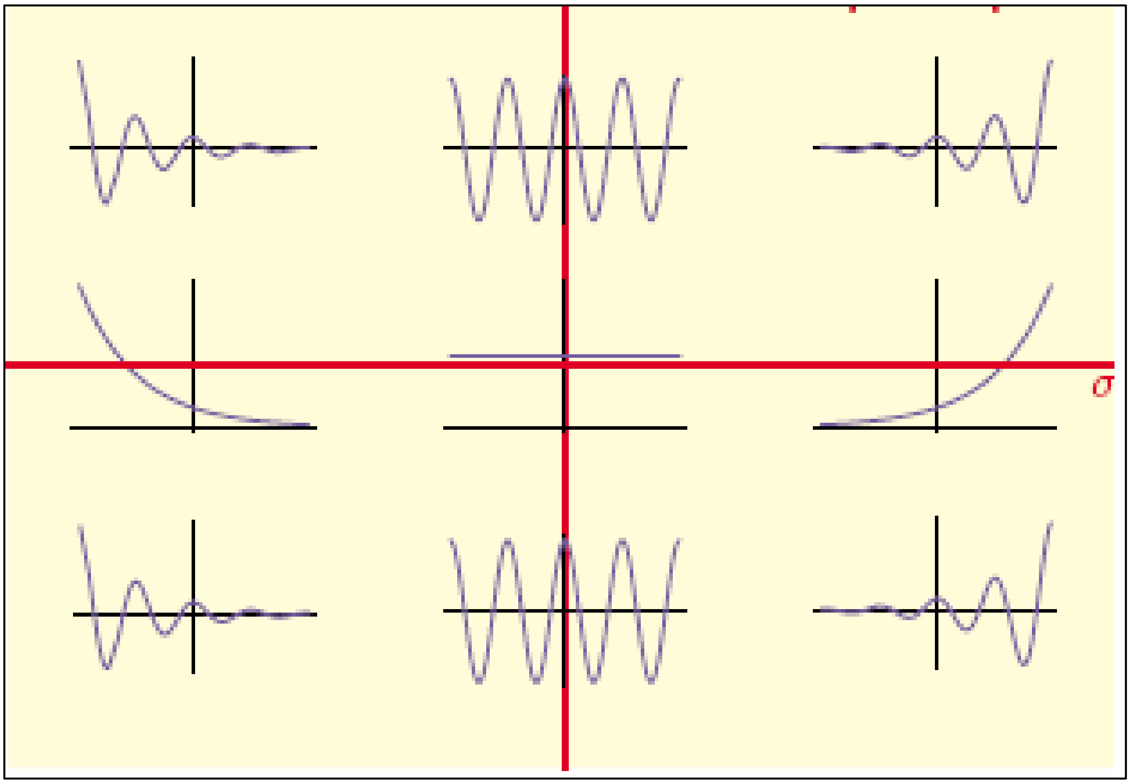
- **Комплексен експоненцијален сигнал**

… е експоненцијален сигнал кај кој константата во експонентот е комплексен број:

$$x(t) = Xe^{(\sigma + j\omega)t}$$

Сигналот $\Re(Xe^{(\sigma + j\omega)t}) = Xe^{\sigma t}\cos\omega t$ е **пригушен простопериодичен сигнал**.
“Пригушувањењто” е последица на множење на сигналот со реален експненцијален сигнал.

На следната слика се прикажани сите предходно наведени експоненцијални сигнали добиени за сите можни вредности на константата s.



$j\omega > 0$
$\sigma > 0$

$j\omega = 0$
$\sigma > 0$

$j\omega < 0$
$\sigma > 0$

Слика 8. Експоненцијални сигнали

1.4.2 <u>Експоненцијален (DT) сигнал</u>

Претставник на дискретната верзија на овој сигнал е сигналот:

$$x[n] = z^n \text{ каде } z \in \mathbb{C} \text{ а } z = |z|e^{j\omega}.$$

- **Реален експоненцијален (DT) сигнал**

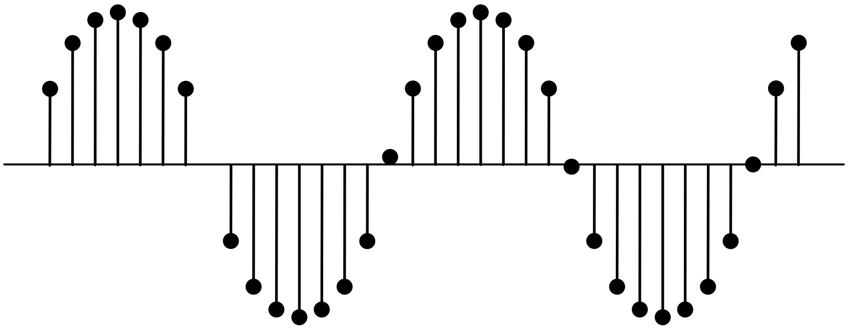
Кога константата $\omega = 0$ тогаш $z \in \Re$ и сигналот е реален експоненцијален сигнал. Ако е $z > 1$ се работи за сигнал кој расте, а ако е $z < 1$ за сигнал кој опаѓа.

- **Имагинарен експоненцијален(DT) сигнал**

… е експоненцијален сигнал во кој $|z| = 1$, $x[n] = e^{j\omega n}$

Една негова алтренативна форма е $e^{j\omega n} = \cos\omega n + j\sin\omega n.$

Сигналот $\Re\left(e^{j\omega n}\right) = \cos\omega n$ е **простопериодичен дискретен сигнал.**



Слика 9. Простопериодичен дискретен сигнал

Постојат две важни разлики помеѓу дискретниот периодичен и аналогниот периодичен сигнал. Дискретниот сигнал е периодичен кога $e^{j\omega n} = e^{j\omega(n+N)}$ при што N, периодот на сигналот, мора да биде цел број. Тоа ќе се случи само кога е исполнет условот:

$$N = 2\pi/\omega$$

Сигналот ќе биде периодичен и кога е N дропка. Во тој случај неговиот период ќе биде мултипл од основниот период N .

Постои разлика во однесувањето на дискретниот простопериодичен сигнал кога ω се зголемува во однос на аналогната верзија на истиот сигнал. Додека менувањето на ω кај аналогниот простопериодичен сигнал не го менува обликот на сигналот, кај дискретниот сигнал тоа не е случај. Тоа го потврдува следниот пример:

$$Xe^{j(\omega+2\pi)n} = Xe^{j\omega n} \text{ затоа што } e^{j2\pi n} = 1,$$

но

$$Xe^{j(\omega+\pi)n} \neq Xe^{j\omega n} \text{ затоа што } e^{j\pi n} = (1)^n$$

па во овој случај сигналот осцилира менувајки го наизменично знакот на примероците.

- **Комплексен експоненцијален сигнал**

... е сигналот во кој $|z| \neq 1$. Комплексниот експоненцијален сигнал е даден како:

$$x[n] = (|z|e^{j\omega})^n = |z|^n e^{j\omega n}$$

Реалниот дел од овој комплексен сиганл $\Re(x[n])$ е **пригушен простопериодичен дискретен сигнал.**

<u>Зошто се важни експоненцијалните сигнали?</u>

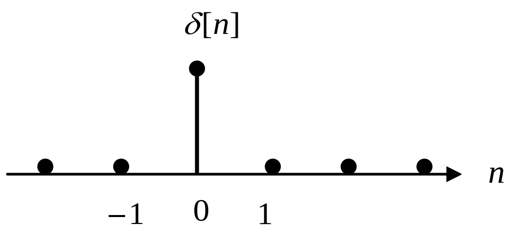
- Затао што скоро секој сигнал кој е од практичен интерес може да се претстави како суперпозиција (сума) од експоненцијални сигнали;
- Затоа што одзивот на LTI систем (ќе биде подоцна дефиниран) на влезен сигнал кој е експоненцијален сигнал може многу едноставно да биде одреден;

- Затоа што комплексните експоненцијални сигнали се сопстевени функции на карактеристичните одзиви на LTI системите.

1.4.3 Единичен (DT) импулс

Ќе го разгледаме прво дискретниот случај. Единичниот импулс е дефиниран на следен начин:

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

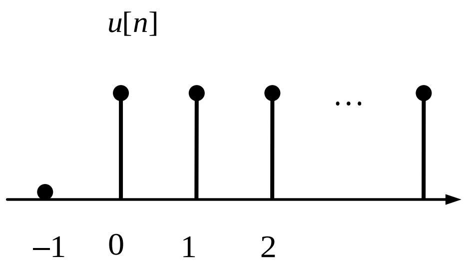


Слика 10. Единечен импулс

1.4.4 Единичен (DT) скок

Единичен скок го викаме следниот сигнал:

$$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



Слика 11. Единечен импулс

Овие два сигнали се поврзани помеѓу себе:

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[k] \quad \text{или} \quad u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

$\delta[n]$ преттавува **диференцијал** на $u[n]$ и $u[n-1]$.
$u[n]$ претставува **сума** од $\delta[n]$.

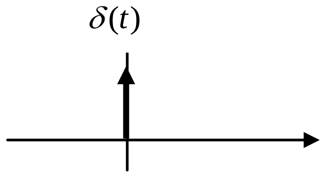
Една важна особина која е последица од дефиницијата на $\delta[n]$ е следната особина позната како **особина на одбирање**:

$$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$$

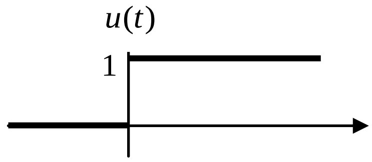
$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n]$$

1.4.5 Дираков импулс и Единичен(Хевисајдов) сигнал(CT)

Ќе издвоиме два сигнала од мноштвото можни сигнали затоа што тие се од посебна важност кога е во прашање процесирањето на аналогните сигнали. Додека Единичниот сигнал може да се претстави со Хевисајдова функција, Дираковиот импулс не може да биде математички претсавен со функција.



Слика 12. Дираков импулс

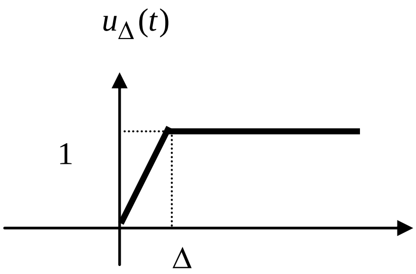


Слика 13. Хевисајдова фукнција

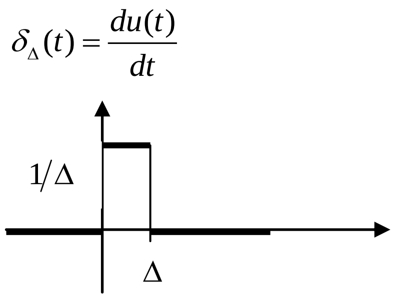
По аналогија со DT сигналите кај аналогните сигнали се очекува операцијата диференција да постане диференцирање, а операцијата сума интегрирање. Согласно со тоа ќе ги имаме следни релации кои ги поврзуваат овие два сигнали во аналогниот случај:

$$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

Првиот израз нема смисла бидејќи подразбира извод од функција која не е непрекината. Всушност се работи за сигнал кој не може да се претстави аналитички со функција. За да го надминеме овој проблем ќе се послужиме со една погодна апроксимација на Единичниот сигнал $u(t)$ со $u_\Delta(t)$ претставен на Слика 14.



Слика 14. Апроксимација на единечен скок



Слика 15. Апроксимација на Дираков импулс

$$u(t)=\lim_{\Delta\to 0}u_\Delta(t)=\begin{cases}1 & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)=1 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

Особината на одбирање постанува:

$$x(t)\delta_\Delta(t)\approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

$$\text{Ако}\quad \Delta\to 0 \quad x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$$

Ако се побара интеграл од двете страни на равенството во интервал кој ја опфаќа нулата (таму каде што е $\delta(t)$ различна од 0) особината на одбирање ја добива следната форма:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} x(0)\delta(t)dt = x(0)$$

Зошто единичниот скок и единичниот импулс односно Дираковиот импулс и Единичниот сигнал ги издвојуваме како посебни?

- **Затоа што голем дел од сигналите кој се од практичен интерес може да се претстават како суперпозиција (сума) од овие сигнали.**
- **Затоа што кога се аналогните сигнали во прашање тие овозможуваат дефинирање на извод на сигнал кој има прекини, а такви се многу од сигналите во реалниот свет**
- **Затоа што тие применети на влез од LTI системите произведуваат одзиви кои претставуваат карактеристика на системот во временски домен со чија помош можат да се добијат одзивите на било кој друг влезен сигнал**