Диференцијални равенки

1. Да се решат следниве диференцијални равенки со раздвоиви променливи

а) $xdx + ydy = 0$ Реш. $\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c$

б) $y' = -\frac{y}{x-1}$ Реш. $y = \frac{c}{x-1}$

в) $y' = (y-1)(y-2)$ Реш. $y = \frac{2-ce^x}{1-ce^x}$

г) $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$ Реш. $y^2 + 1 = c(x^2+1)$

д) $y' = \frac{-x\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2}}$ со почетни услови $y(0) = 1$.

Реш. $\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} = c$, партикуларното: $\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2} = 1$.

ѓ) $y' = 5x^4 + 3x^2 + 2x + 1$ Реш. $y = x^5 + x^3 + x^2 + x + c$

е) $(1+y^2)dx - xydy = 0$ Реш. $x = \sqrt{1+y^2} + c$

2. Да се решат следниве хомогени диференцијални равенки

а) $y' = \frac{xy-y^2}{x^2-2xy}$ Реш. $e^{x/y}y^2 = \frac{x}{c}$

б) $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$ Реш. $y = xe^{xc}$

в) $y + \sqrt{x^2+y^2} - xy' = 0$ со почетни услови $y(1) = 0$.

Реш. $\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} = c$, партикуларното $\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} = 2$

г) $y' = \frac{x+y}{x-y}$ Реш. $arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) = \ln x + c$

3. Да се решат следниве линеарни диференцијални равенки

а) $y' + 3x^2y = 3x^2$ Реш. $y = e^{-x^3}(c + e^{x^3})$

б) $y' - xy = x^3$ Реш. $y = ce^{x^2/2} - x^2 + 2$

в) $y' - \frac{y}{2x} = \frac{x+1}{x}$ Реш. $y = c\sqrt{x} + 2x - 2$

г) $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$ со почетни услови $y(1) = 1$

Реш. $y = (x+1)^2[c + \frac{x^2}{2} + x]$, $c = -\frac{5}{4}$

д) $y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}$ Реш. $y = e^{-x^2}(c + \frac{2x^3}{3})$

ѓ) $y'(1 + x^2) + y - arctgx = 0$ Реш. $y = ce^{-arctgx} + arctgx - 1$

е) $y' - yctgx = 2xsinx$ Реш. $y = \sin x\,(c + x^2)$

ж) $y' - \frac{2y}{x} = \frac{x}{2}$ Реш. $y = x^2(c + \frac{1}{2}\ln x)$

4. Да се решат следниве Бернулиеви диференцијални равенки

а) $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$ Реш. $y = x^4\left(c + \frac{1}{2}\ln x\right)^2$

б) $y' - \frac{3}{x}y = -x^3y^2$ Реш. $y\left(\frac{x^7}{7} + c\right) = x^3$

в) $y'\sqrt{x} - y + (x - 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$ Реш. $y = \left(x + ce^{\sqrt{x}}\right)^2$

г) $xy' + y = y^2lnx$ со почетни услови $y(1) = 1$ Реш. $y = \frac{1}{1+cx+lnx}$, $y = \frac{1}{1+lnx}$

5. Да се решат следниве Рикатиеви диференцијални равенки

а) $y' + \frac{1}{x}y^2 + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^3}$ со едно партикуларно решение $y_1 = \frac{1}{x}$.

Реш. $y = \frac{2c+e^{\frac{2}{x}}}{x\left(2c-e^{\frac{2}{x}}\right)}$

б) $y' - y^2 - \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2} = 0$ со едно партикуларно решение $y_1 = -\frac{1}{x}$.

Реш. $y = \frac{1+lnx-c}{x(c-lnx)}$

в) $y'(1 - sinxcosx) + y^2cosx - y + sinx = 0$ со едно партикуларно решение $y_1 = cosx$.

Реш. $y = \frac{1+c\cdot cosx}{sinx+c}$

г) $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$ со едно партикуларно решение $y_1 = \frac{1}{x}$.

Реш. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{cx^{2/3}+x}$.

д) $xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2$ со едно партикуларно решение $y_1 = x$.

Реш. $y = \frac{x^2+x+cx}{x+c}$.

6. Да се решат следниве диференцијални равенки нерешливи во однос на изводот

а) $y = y'^2 + 2y'^3$ Реш. $x = 2p + 3p^2 + c,\ y = p^2 + 2p^3$

б) $y = \ln(1 + y'^2)$ Реш. $x = 2arctg\, p + c,\ y = \ln(1 + p^2),$

в) $y = (y' - 1)e^y$ Реш. $x = e^p + c,\ y = (p - 1)e^p$

г) $x = y' + siny'$ Реш. $x = p + \sin p\,,\ y = \frac{p^2}{2} + p\sin p\ + \cos p + c$

д) $x = y'\sqrt{1 + y'^2}$ Реш. $x = p\sqrt{1 + p^2},\ 3y = (2p^2 - 1)\sqrt{1 + p^2} + c$

ѓ) $x(y'^2 - 1) = 2y'$ Реш. $x = \frac{2p}{p^2-1},\ y = \frac{2}{p^2-1} - \ln(p^2 - 1) + c$

е) $(y - xy')cosy' + x = 0$ Реш. $x = c\cos p\, e^{\sin p},\ \ y = ce^{\sin p}(p\cos p - 1)$

ж) $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$ Реш. $cy^{\frac{3}{2}}(c - 4x) + 8y^2 = 0$

з) $x = \frac{y(1-y'^2)}{2y'}$ Реш. $y^2 = 2cx + c^2$

ѕ) $x = \frac{y'^2}{4y} + \frac{2y}{y'}$ Реш. $x = \frac{c^2}{4} + \frac{2\sqrt{y}}{c}$

7.Да се покаже дека следниве диференцијални равенки се егзактни а потоа, да се најде општиот интеграл

а) $xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0,\ \mu = \mu(xy)$ Реш. $xy - \ln y = c$

б) $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0,\ \ \mu = \mu(x)$ Реш. $e^x(x^2y + \frac{y^3}{3}) = c$

в) $(y^2 + x^2 + x)y' - y = 0,\ \mu = \mu(x^2 + y^2)$ Реш.$y = \arctan\frac{x}{y} + c$

г) $(2y + 3x^4y^2)dx + (6x - 2x^5y)dy = 0,\ \ \mu(x,y) = x^ry^s$ Реш. $x^4y - 2 = cxy^3$

д) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0,\ \mu = \mu(x)$ Реш. $x^2 + y^2 = ce^{-x}$

ѓ) $ycos\, xdx + (2y - \sin x)dy = 0,\ \mu = \mu(x)$ Реш. $\frac{\sin x}{y} + 2\ln y = c$

е) $(y + xy^2)dx - xdy = 0,\ \mu = \mu(y)$ Реш. $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c$

8. Да се најде општото решение на следниве диференцијални равенки кои се дадени со соодветниот интегрален множител

а) $(2e^{2x}y - 3x^2)dx + e^{2x}dy = 0$ Реш. $ye^{2x} - x^3 = c$

б) $\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx - \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy = 0$ Реш. $\ln\frac{x}{y} + \frac{xy}{x-y} = c$

в) $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)dy=0$ Реш. $\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)y=c$

г) $y'=-\frac{2x+3y}{3x+2y}$ Реш. $x^2+3xy+y^2=c$

д) $(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy=0$ Реш. $yxe^y+\frac{x^2}{2}-y^2=c$

ѓ) $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$ Реш. $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=c$

9. Да се решат следниве Лагранжови и Клерови диференцијални равенки

а) $y=2xy'-lny'$ Реш. $x=\frac{1}{p^2}(c+p),\ y=\frac{2}{p}(c+p)-lnp$

б) $y=2\mathrm{x}y'+\mathrm{y}'^2$ Реш. $x=\frac{c}{p^2}-\frac{2p}{3},\ y=\frac{2\mathrm{c}}{\mathrm{p}}-\frac{\mathrm{p}^2}{3},$

в) $2y=xy'+y'lny'$ Реш. $x=2cp-2-lnp,\ \ y=cp^2-p$

г) $y=xy'^2-\frac{1}{y'}$ Реш. $x=\frac{1}{(1-p)^2}\left(c-\frac{1}{2p^2}+\frac{2}{p}\right),\ y=\frac{1}{2p(1-p)^2}(cp^2+2p-1)-\frac{1}{p}$

д) $y=xy'+\frac{a}{y'^2}$ Реш. $x=cx+\frac{a}{c^2},\ \ y^3=\frac{27ax^2}{4}$

10. Да се решат следниве хомогени диференцијални равенки со константни коефициенти

а) $y^{(5)}-8y^{(4)}+16y'''=0$ Реш. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{4x}+c_5xe^{4x}$

б) $y''-4y'+5y=0$ со почетни услови $y(\pi)=0, y'(\pi)=1$

Реш. Општото решение е $y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$ а партикуларното $y=e^{2(x-\pi)}\sin x$

в) $y^{(4)}\ +8y''+16=0$ Реш. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+c_3x\cos 2x+c_4x\sin 2x$

г) $y^{(7)}+2y^{(5)}\ +y'''=0$ Реш. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4\cos x+c_5\sin x+c_6x\cos x+c_7x\sin x$

д) $y^{(4)}\ -y=0$ Реш. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$

ѓ) $y'''-y''+y'-y=0$ Реш. $y=c_1e^x+c_2\cos x+c_3\sin x$

11. Да се решат следниве нехомогени диференцијални равенки со константни коефициенти

а) $y''+2y=x^2+1$ Реш. $y=c_1cos\sqrt{2}\,x+c_2sin\sqrt{2}\,x+\frac{x^2}{2}$

б) $y'''-2y''=x+2$ Реш. $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}-\frac{x^3}{12}-\frac{5x^2}{8}$

в) $y'' + y' - 6y = (3-4x)e^{x}$ Реш. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} + xe^{x}$

г) $y'' + y' - 2y = (x-1)e^{-2x}$ Реш. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-2x} + \frac{x}{18}(-3x+4)e^{-2x}$

д) $y'' + 4y = 8\,sin2x$ Реш. $y = c_1cos2x + c_2sin2x - 2xcos2x$

ѓ) $y'' - 2y' + 5y = 12e^{x}cos2x$ Реш. $y = c_1e^{x}cos2x + c_2e^{x}sin2x + xe^{x}sin2x$

е) $y''' - 2y'' = x^2e^{2x}$ Реш. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} + \frac{e^{2x}}{x}(\frac{x^2}{12} - \frac{x}{4} + \frac{3}{8})$

ж) $y''' - y' = 3(2-x^2)$ Реш. $y = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x} + x^3$

з) $y'' - y = xe^{x}cosx$ Реш. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + e^{x}\left[\left(-\frac{x}{5} + \frac{14}{25}\right)cosx + \left(\frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right)sinx\right]$

ѕ) $y'' - 2y' + 10y = 37cos3x$ Реш. $y = c_1e^{x}cos3x + c_2e^{x}sin3x + cos3x - 6sin3x$

и) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ Реш. $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + e^{2x}$