Својства на Фуриеова трансформација

- Линеарност
- Поместување во време
- Конјугација
- Диференцирање во време
- Интегралење во време
- Скалирање

- Дуалност
- Парсевалова релација
- Конволуција
- Множење

Својства на Фуриеова трансформација

- Линеарност

$$x_1(t) \xleftrightarrow{FT} X_1(j\omega)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{FT} X_2(j\omega)$$

$$\boxed{ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{FT} aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)\,.}$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Поместување во време $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega),$

$$\boxed{x(t-t_0) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega).}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-j\omega t_0} X(j\omega)\right)e^{j\omega t}d\omega$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Поместување во време $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega),$

$$\boxed{x(t-t_0) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega).}$$

  – последица

$$FT\{x(t)\} = X(j\omega) = \left|X(j\omega)\right| e^{j\angle X(j\omega)}$$

Непроменет амплитуден спектар

$$FT\{x(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) = \left|X(j\omega)\right| e^{j[\angle X(j\omega)-\omega t_0]}$$

Линеарна промена во фазната карактеристика

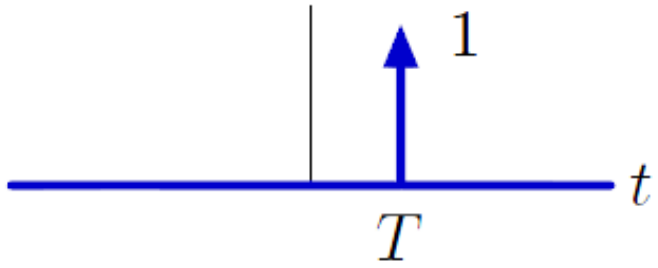
Својства на Фуриеова трансформација

- Поместување во време
- Пример

$$\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1,$$

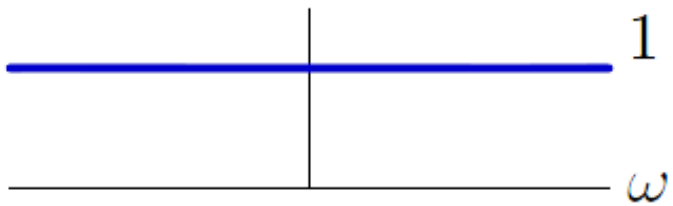
$$\delta(t-T) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega T}.$$

$$x(t) = \delta(t-T)$$

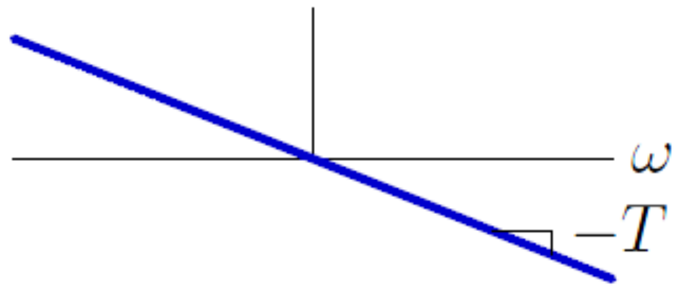


$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-T)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega T}$$

$$|X(j\omega)| = 1$$

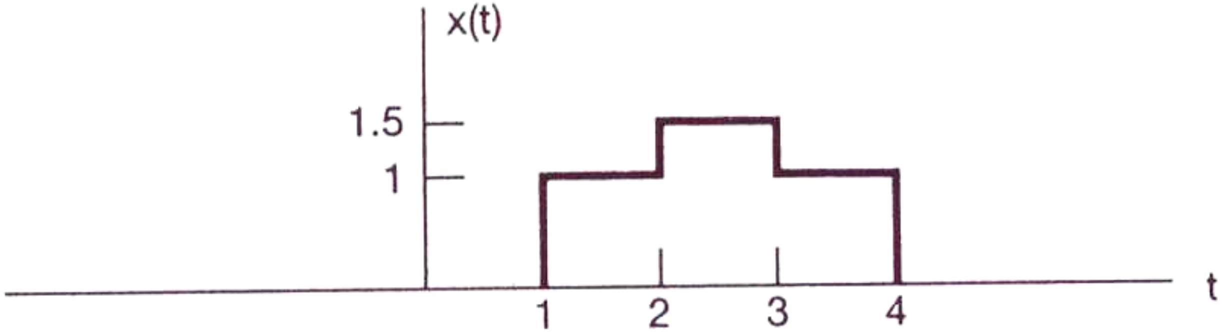


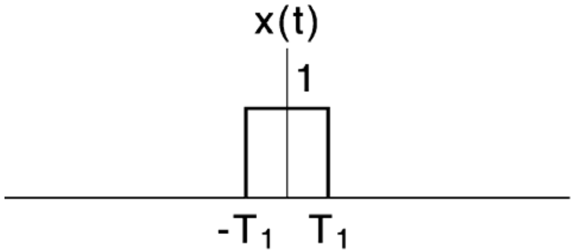
$$\angle X(j\omega) = -\omega T$$

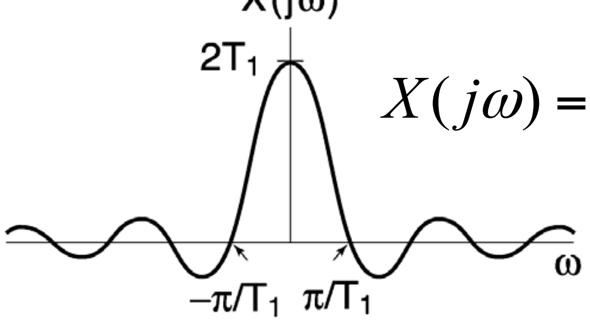


Својства на Фуриеова трансформација

- Задача за вежбање



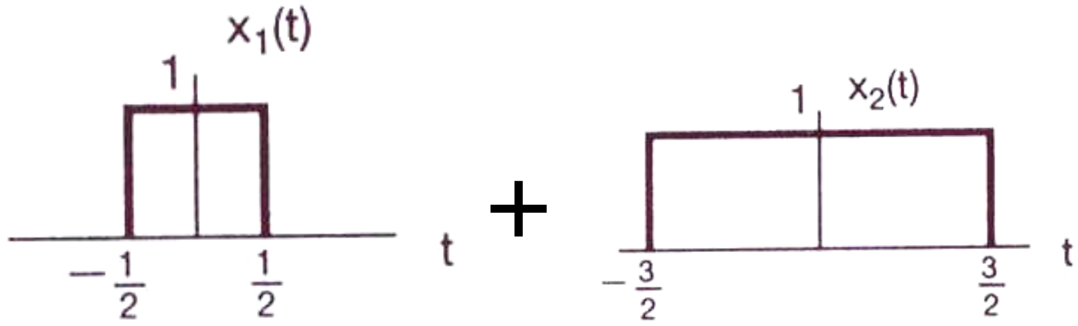




$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T} e^{-j\omega t} dt = 2\frac{\sin \omega T_1}{\omega}$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Задача за вежбање



$$x(t) = \frac{1}{2} x_1(t-2.5) + x_2(t-2.5)$$

$$X_1(j\omega) = 2\frac{\sin(\omega/2)}{\omega} \qquad X_2(j\omega) = 2\frac{\sin(3\omega/2)}{\omega}$$

$$X(j\omega) = e^{-j5\omega/2}\left\{\frac{\sin(\omega/2) + 2\sin(3\omega/2)}{\omega}\right\}$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Коњугирање

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$\boxed{x^*(t) \xleftrightarrow{FT} X^*(-j\omega).}$$

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^*$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}dt$$

$$\omega = -\omega$$

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}dt$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Коњугирање

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$\boxed{x^*(t) \xleftrightarrow{FT} X^*(-j\omega).}$$

  – Ако $x(t)$ е реален сигнал $\quad X(-j\omega) = X^*(j\omega).$

  – од

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = X(j\omega)$$

  – и смена $\omega = -\omega$

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega)$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Коњугирање

  – пример $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$X(-j\omega) = \frac{1}{a - j\omega} = X^{*}(j\omega)$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Коњугирање
  - за $x(t)$ реален сигнал $\quad X(-j\omega) = X^*(j\omega).$
  - Последица

од

$$X(j\omega) = \Re e\left\{X(j\omega)\right\} + j\Im m\left\{X(j\omega)\right\}$$

$$X^*(-j\omega) = \Re e\left\{X(-j\omega)\right\} - j\Im m\left\{X(-j\omega)\right\}$$

$$\Re e\left\{X(j\omega)\right\} = \Re e\left\{X(-j\omega)\right\}$$ парна функција од ω

$$\Im m\left\{X(j\omega)\right\} = -\Im m\left\{X(-j\omega)\right\}$$ непарна функција од ω

Својства на Фуриеова трансформација

- Коњугирање
  - за $x(t)$ реален сигнал $\quad X(-j\omega) = X^*(j\omega).$
  - Последица

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$$

=> $$X^*(-j\omega) = |X(-j\omega)| e^{-j\angle X(-j\omega)}$$

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$$ парна функција од ω

$$\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$$ непарна функција од ω

Својства на Фуриеова трансформација

- Коњугирање
  - Ако $x(t)$ е реален и парен сигнал
  - од $$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}d\omega$$
  - со замена $\tau = -t$
  $$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$
  - Бидејќи $x(-\tau) = x(\tau)$
  $$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = X(j\omega)$$ парна функција од ω
  - Заедно со $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$.
  $$X^*(j\omega) = X(j\omega)$$ реална функција од ω

Својства на Фуриеова трансформација

- Коњугирање
  - Ако $x(t)$ е реален, може да се напише во облик

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

  - Од особината на линеарност на FT

$$FT\{x(t)\} = FT\{x_e(t)\} + FT\{x_o(t)\}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega).$$

$$x_e(t) \xleftrightarrow{FT} \Re e\left\{X(j\omega)\right\}.$$

$$x_o(t) \xleftrightarrow{FT} j\Im m\left\{X(j\omega)\right\}.$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Диференцирање во временски домен

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega).$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j\omega X(j\omega).}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Интегралење во временски домен

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega).$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega).$$

– Пример

$$x(t) = u(t)$$

$$FT\{x(t)\} = ?$$

Својства на Фуриеова трансформација

$$x(t) = u(t)$$
$$FT\{x(t)\} = ?$$

- Интегралење во временски домен
  - знаеме $g(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{FT} G(j\omega) = 1$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}G(j\omega) + \pi G(0)\delta(\omega).$$

  - бидејќи $G(j\omega) = 1$

$$\boxed{X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega).}$$

  - Обратно, ако сакаме да најдеме FT на Дираков импулс

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j\omega\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] = 1$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Скалирање

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega).$$

$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a}).$$

$$FT\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

$$\tau = at$$

$$FT\{x(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Скалирање

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega).$$

$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a}).$$

за $a = -1, \quad x(-t) \xleftrightarrow{FT} X(-j\omega).$

- за реален и парен сигнал

$x(t)=x(-t)$

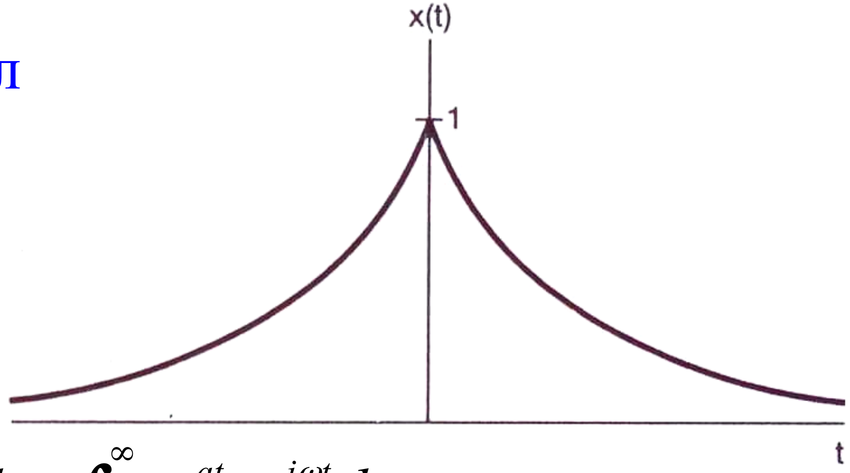
$$\underbrace{X(j\omega) = \overbrace{X(-j\omega)}_{\text{парен сигнал}} = X^*(j\omega)}^{\text{реален сигнал}}$$

Реална и парна

Својства на Фуриеова трансформација

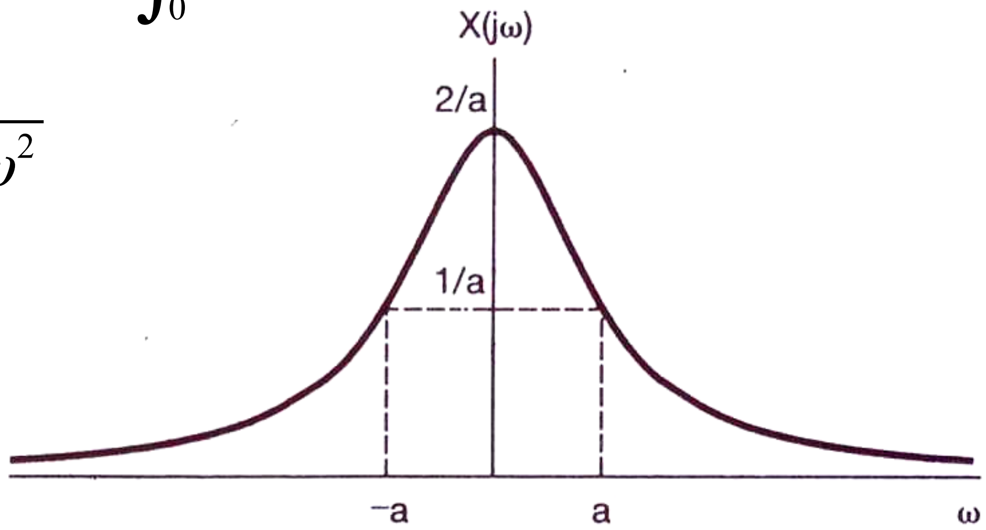
- Пример: реален и парен сигнал

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$



Својства на Фуриеова трансформација

- за реален и непарен сигнал

$$x(t) = -x(-t)$$

$$X(j\omega) = \overbrace{-X(-j\omega) = -X^*(j\omega)}^{\text{реален сигнал}}$$

$$\underbrace{X(j\omega) = -X(-j\omega)}_{\text{непарен сигнал}} = -X^*(j\omega)$$

чисто имагинарна и непарна

$$\Rightarrow \quad X(j\omega) = \Re e\{X(j\omega)\} + j\Im m\{X(j\omega)\}$$

b b

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

Фуриеова трансформација

- Пример $\quad x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{a + j\omega}$$

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-a|t|} &= e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \\ &= 2\left[\frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2}\right] \\ &= 2x_e(t) \end{aligned}$$

$$X(j\omega) = 2\Re e\left\{\frac{1}{a + j\omega}\right\} = \frac{2}{a^2 + \omega^2}$$

Својства на Фуриеова трансформација

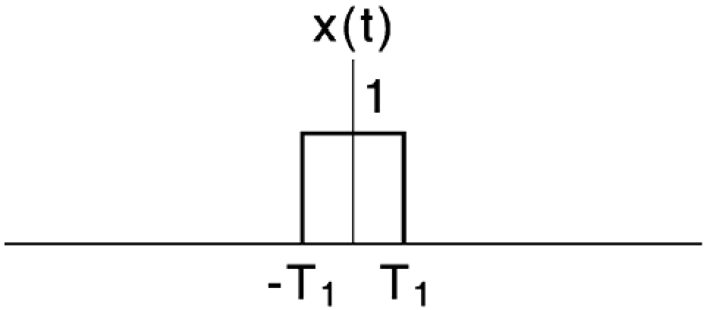
- Дуалност: Фуриеовата трансформација и нејзината инверзна трансформација се доста слични

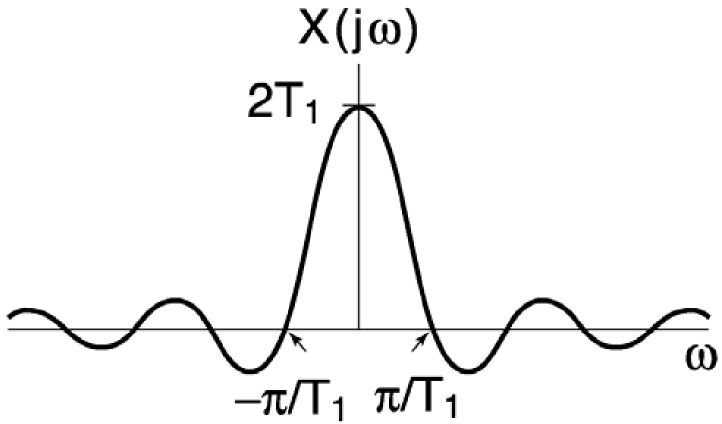
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

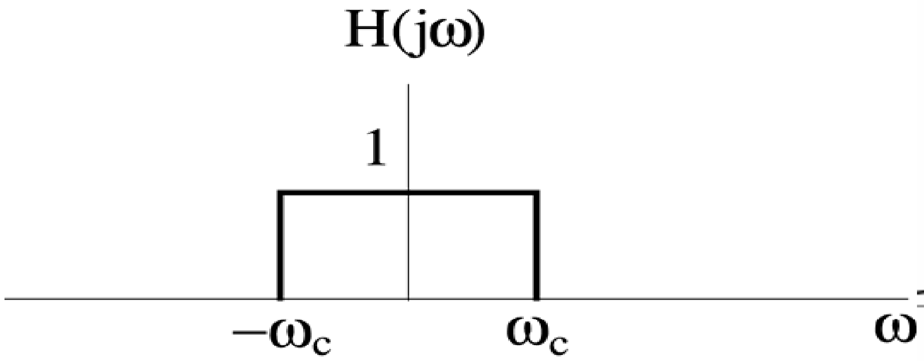
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

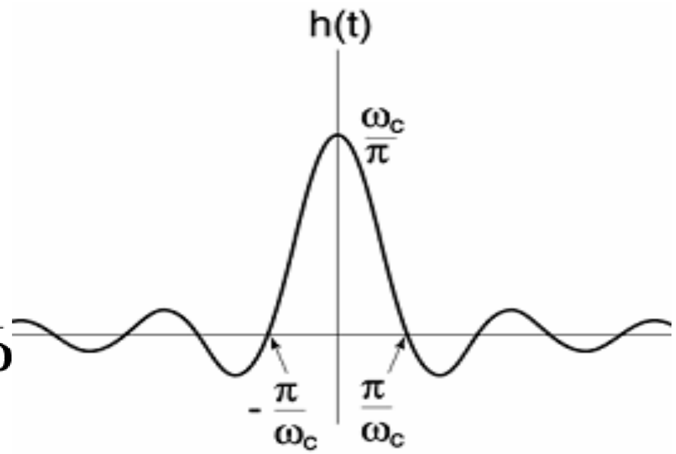
Својства на Фуриеова трансформација

- Дуалност: потсетување









Својства на Фуриеова трансформација

- Дуалност: Фуриеовата трансформација и нејзината инверзна трансформација се доста слични

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

  – Премин од една во друга

$t \rightarrow \omega \quad \omega \rightarrow t$

$\omega \rightarrow -\omega$

скалирање со 2π

Својства на Фуриеова трансформација

- Дуалност: Фуриеовата трансформација и нејзината инверзна трансформација се доста слични

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x_1(t) = g(t) \quad \leftrightarrow \quad X_1(j\omega) = G(\omega)$$

$\omega \rightarrow t$ $\qquad$ $t \rightarrow \omega;$ знак минус (превртување); $\times 2\pi$

$$x_2(t) = G(t) \quad \leftrightarrow \quad X_2(j\omega) = 2\pi g(-\omega)$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Дуалност: Фуриеовата трансформација и нејзината инверзна трансформација се доста слични

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$t \rightarrow \omega \quad \omega \rightarrow t$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$\omega \rightarrow -\omega$

$$X(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} x(-\omega) e^{j\omega t} d(-\omega)$$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

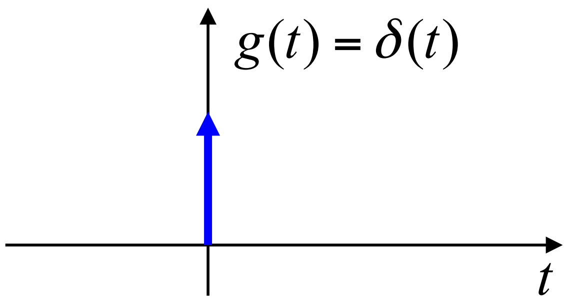
$$X(t) \xleftrightarrow{FT} 2\pi x(-\omega)$$

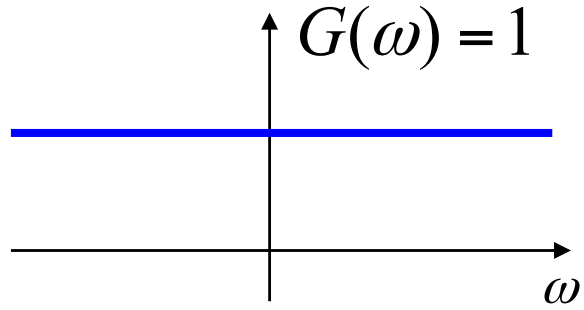
Својства на Фуриеова трансформација

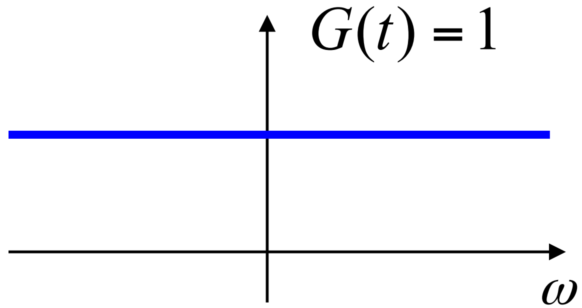
$$x_1(t) = g(t) \quad \leftrightarrow \quad X_1(j\omega) = G(\omega)$$

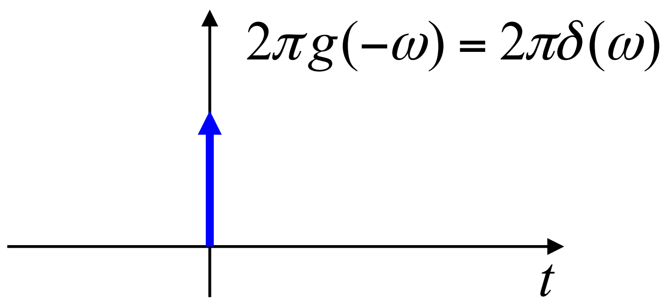
$\omega \to t$ $\qquad$ $t \to \omega$; знак минус (превртување); $\times 2\pi$

$$x_2(t) = G(t) \quad \leftrightarrow \quad X_2(j\omega) = 2\pi g(-\omega)$$

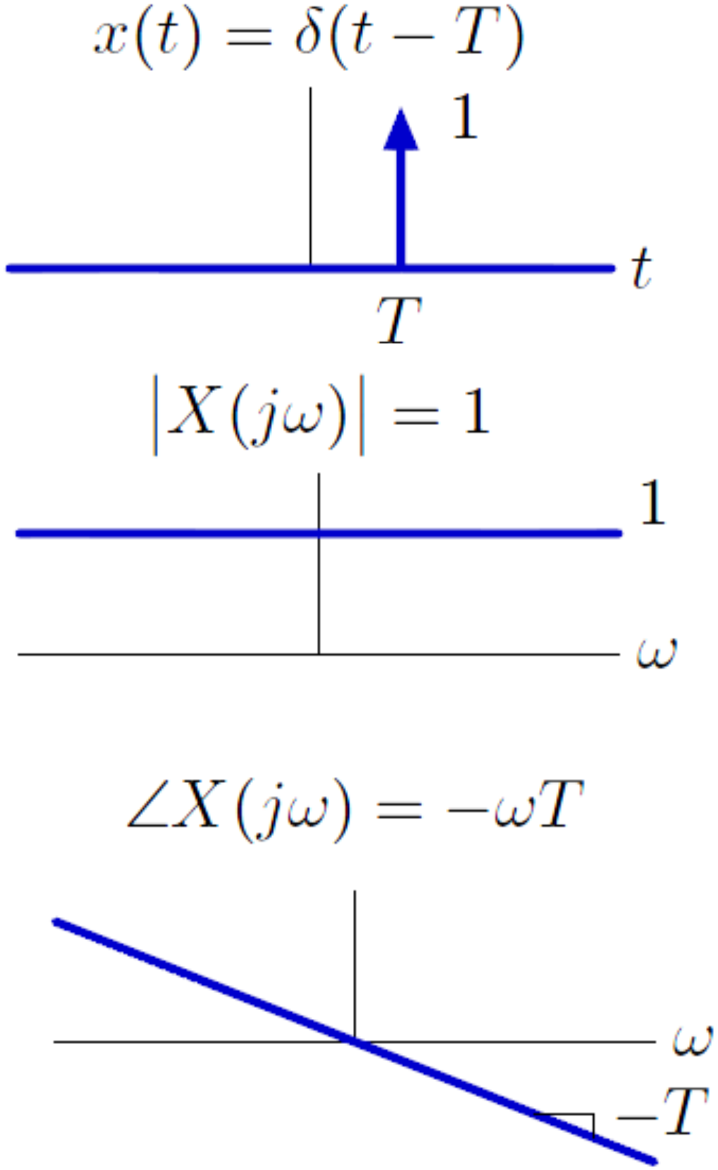








Својства на Фуриеова трансформација



$$\delta(t-T) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega T}.$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-T)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega T}$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Дуалност: FT на $e^{-j\omega_0 t}$?

$$\delta(t-T) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega T}.$$

$\omega \to t$ $\quad$ $t \to \omega$; знак минус (превртување); $\times 2\pi$

$$e^{-jtT} \quad \leftrightarrow \quad 2\pi\delta(\omega+T)$$

$T \to \omega_0$:

$$e^{-j\omega_0 t} \quad \leftrightarrow \quad 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Дуалност:
  - Пример: Користејќи го Фуриеовиот трансформацион пар

$$x(t) = e^{-a|t|} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

да се одреди $FT\left\{\dfrac{1}{1+t^2}\right\}$

$$g(t) \xleftrightarrow{FT} G(\omega)$$

$$G(t) \xleftrightarrow{FT} 2\pi g(-\omega)$$

$$\frac{1}{2}e^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\frac{1}{1+t^2} \xleftrightarrow{FT} \pi e^{-|\omega|}$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Дуалност: FT на $\dfrac{dX(j\omega)}{d\omega} = ?$

познато:

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega).$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j\omega X(j\omega).}$$

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$-jtx(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$\boxed{tx(t) \xleftrightarrow{FT} j\frac{dX(j\omega)}{d\omega}}$$

Особина: диференцирање во фреквенциски домен

Својства на Фуриеова трансформација

- Парсевалов идентитет

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2}_{\text{Вкупна енергија во временски домен}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega}_{\text{Вкупна енергија во фреквенциски домен}}$$

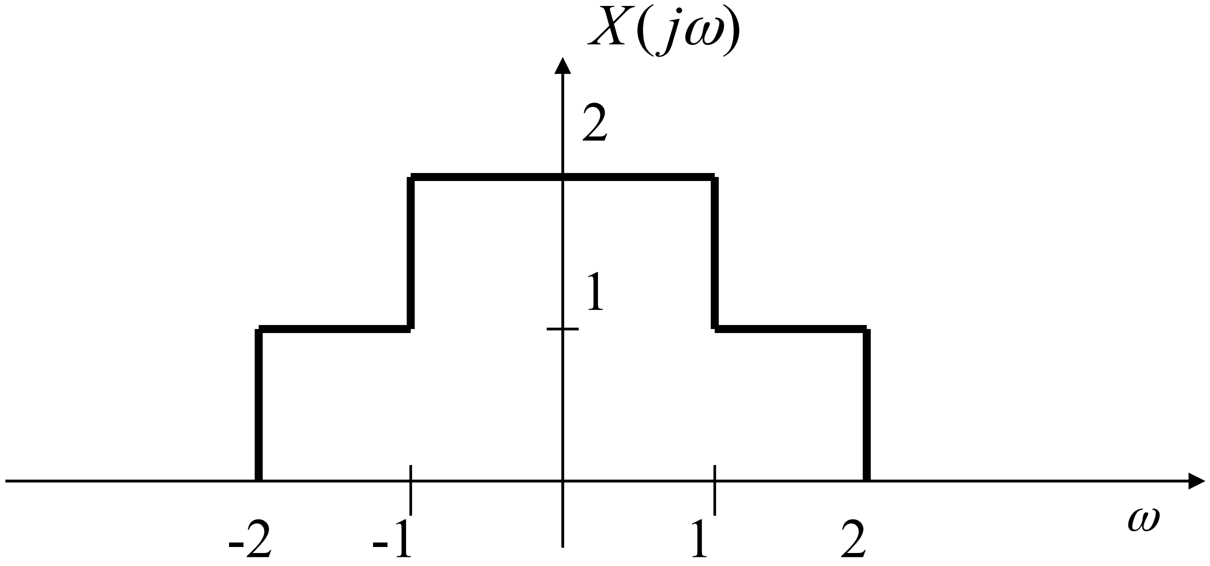
  - Доказ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|X(j\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)X^*(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}dt\right\}d\omega =$$

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right\}dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t)dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt$$

Својства на Фуриеова трансформација

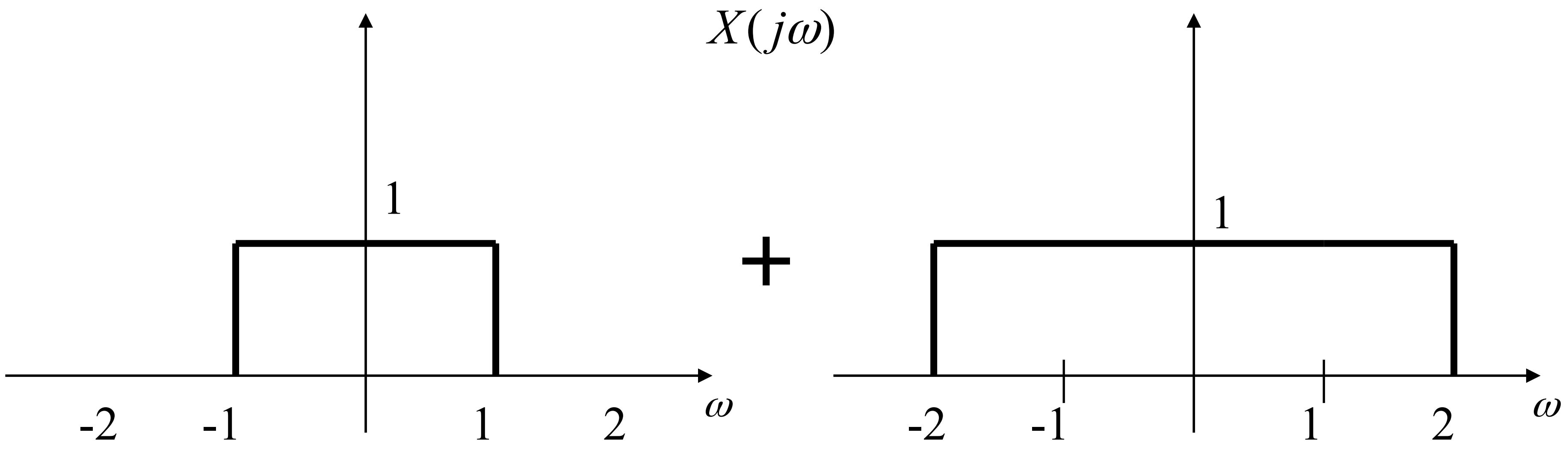
- Задача за вежбање
  - Да се одреди сигналот $x(t)$ чија Фуриеова трансформација е прикажана на сликата



  - Да се одреди вкупната енергијата на сигналот $x(t)$

Својства на Фуриеова трансформација

- Задача за вежбање

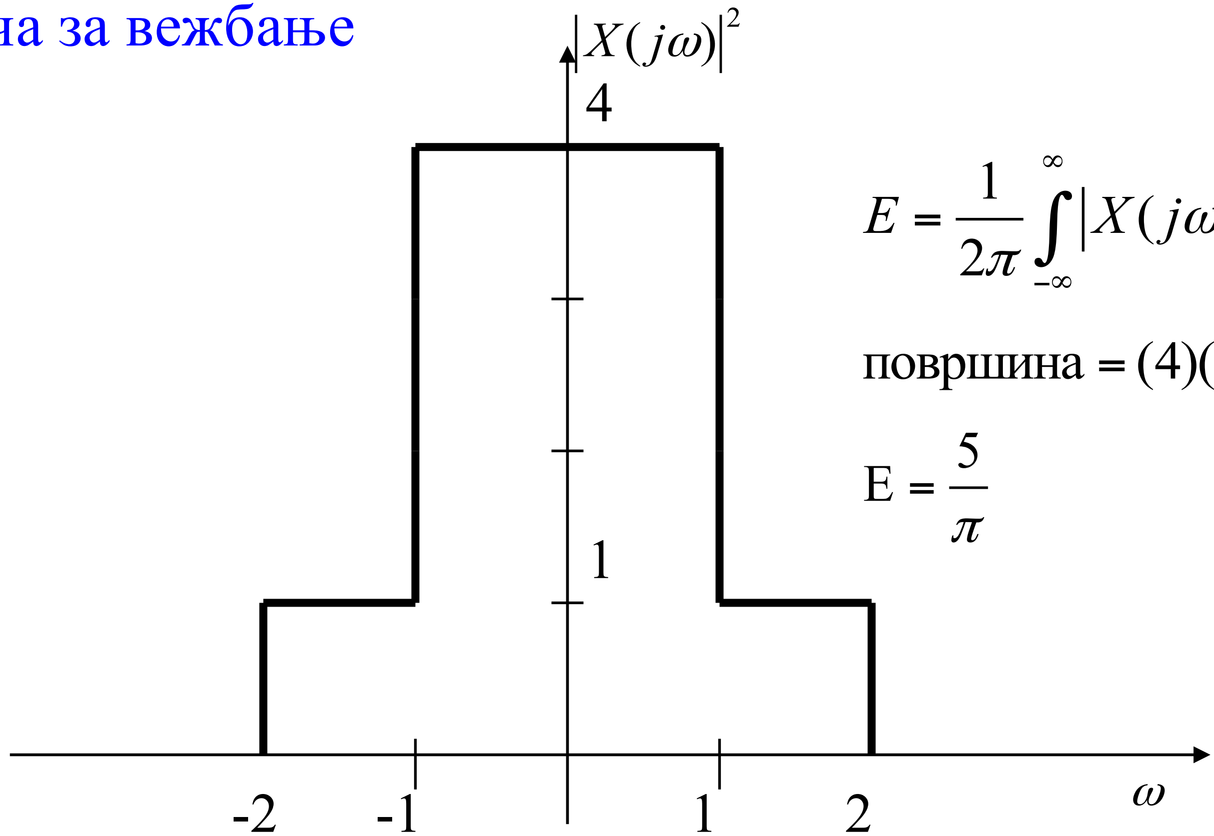


$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

$$x(t) = \frac{\sin t}{\pi t} + \frac{\sin 2t}{\pi t}$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Задача за вежбање



$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega$$

$$\text{површина} = (4)(2) + (2)(1)(1) = 10$$

$$\mathrm{E} = \frac{5}{\pi}$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција

$$X(j\omega) \xleftrightarrow{FT} x(t)$$

$$H(j\omega) \xleftrightarrow{FT} h(t)$$

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)}$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција

  – Доказ

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right\}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\overbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]}^{e^{-j\omega\tau}H(j\omega)}d\tau$$

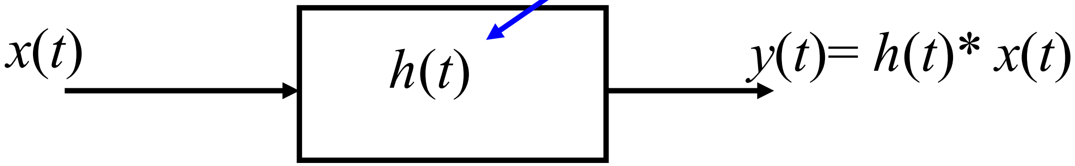
$$Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}H(j\omega)d\tau=H(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција

Импулсен одзив



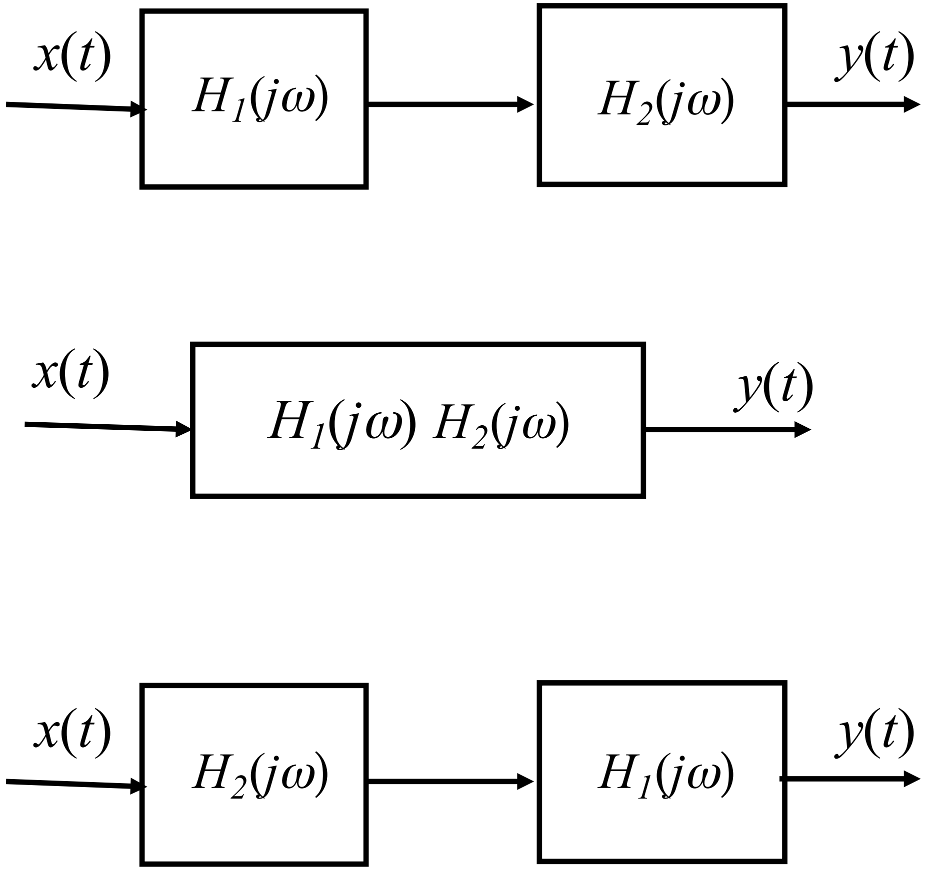
$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

Фреквенциска карактеристика

$$\boxed{H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt}$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција



Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција
  - Пример

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = H(j\omega)2\pi\delta(\omega - \omega_0) = 2\pi H(j\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција
  - Пример: LTI систем со импулсен одзив

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

  - Фреквенциската карактеристика на системот е

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

  - За кој било влезен сигнал $x(t)$, FT на излезниот сигнал е

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

  - Конзистентно е со особината на поместувања во време

$$y(t) = x(t - t_0)$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција
  - Пример: Диференцијатор $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$
  - Својство на диференцирање

$$Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$$

$$\Rightarrow \quad H(j\omega) = j\omega$$

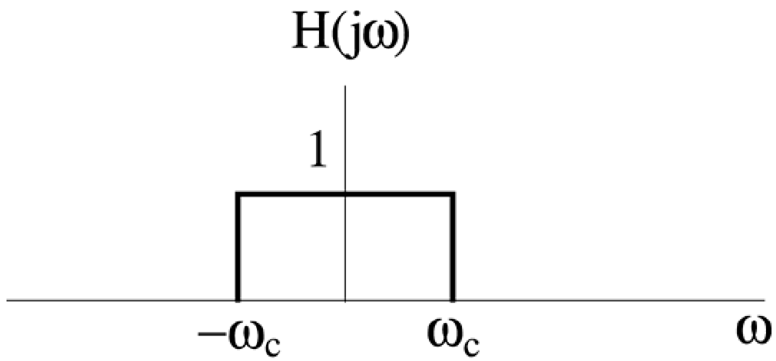
  - Ги засилува високите фреквенции (ги подобрува ивиците)
  - Воведува $\pi/2$ фазно поместување ($j = e^{j\pi/2}$)

$$\frac{d}{dt}\sin\omega_0 t = \omega_0 \cos\omega_0 t = \omega_0 \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d}{dt}\cos\omega_0 t = -\omega_0 \cos\omega_0 t = \omega_0 \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

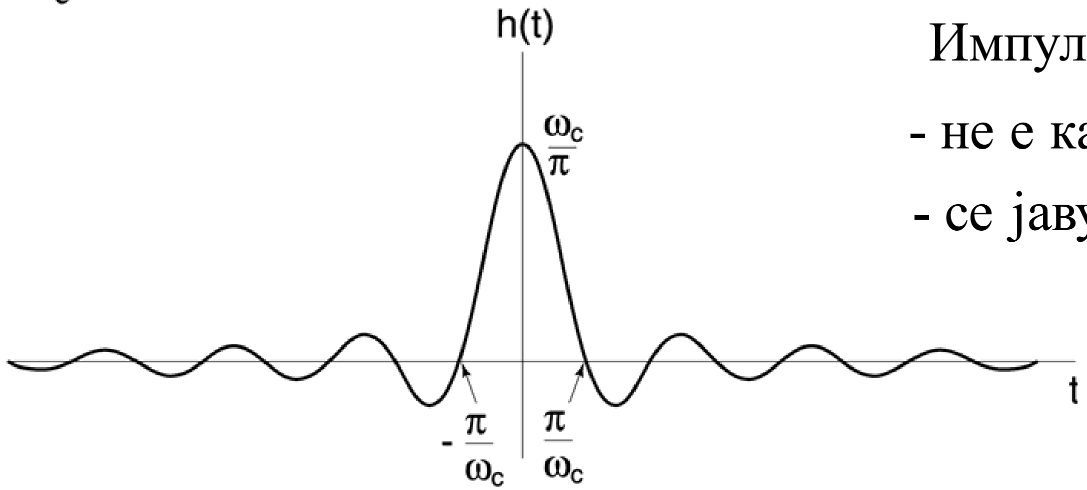
Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција
  - Пример: Идеален филтер



$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega t}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right|_{-\omega_c}^{\omega_c}=\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}$$



Импулсниот одзив

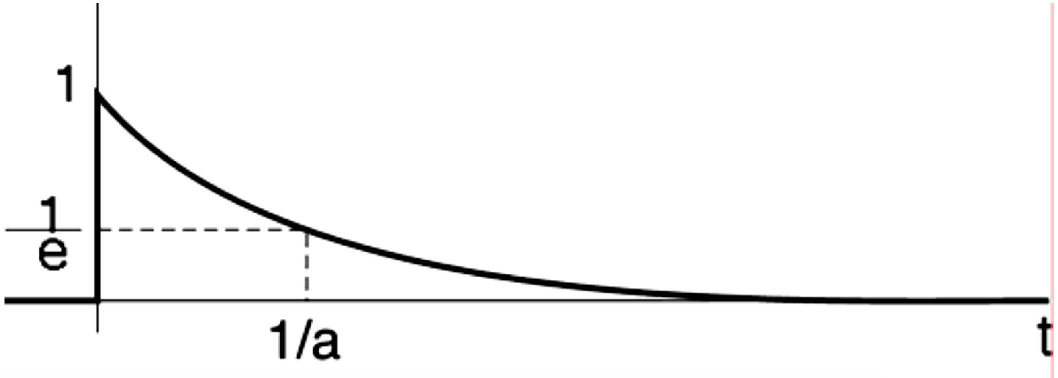
- не е каузален

- се јавуваат осцилации

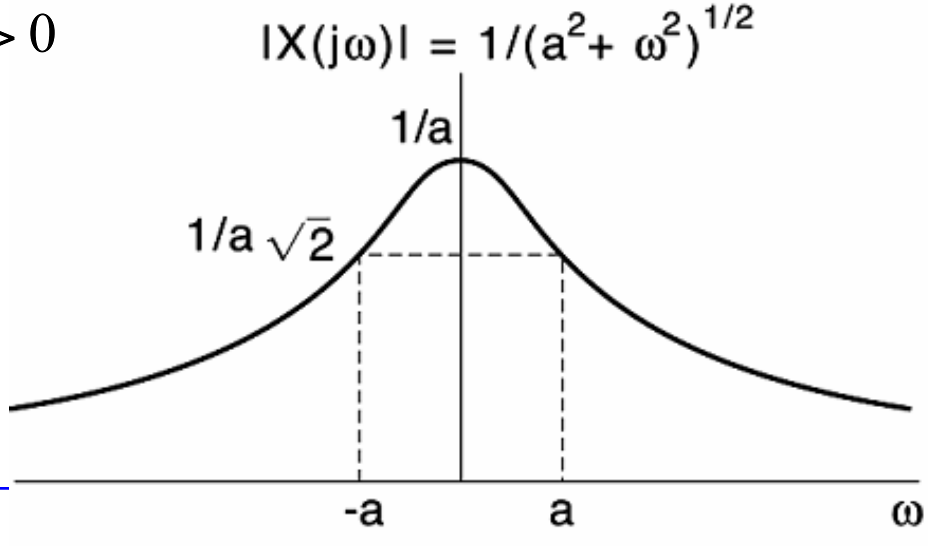
Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција
  - Пример: можеби подобар филтер би бил едноставно RC коло?

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$



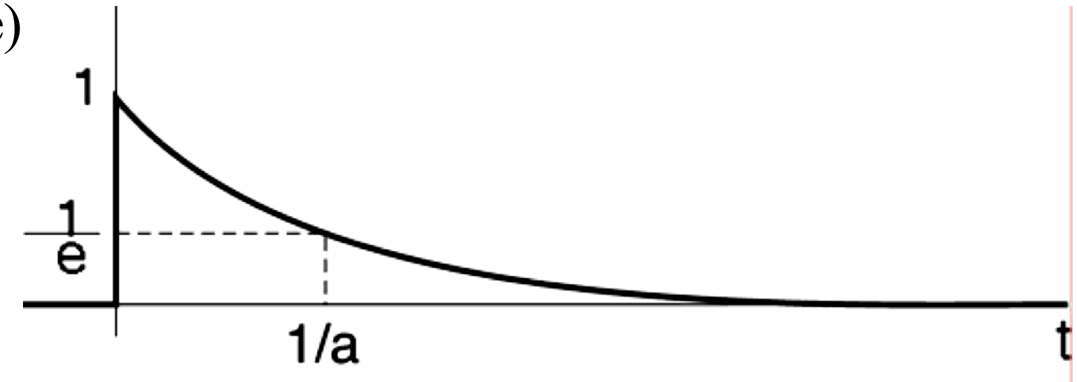
$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0$$



Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција
  - Пример: (потсетување)

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$



$$X(j\omega) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^\infty e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^\infty$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}, \quad a > 0$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција
  - Пример: $h(t) = e^{-at}u(t),\qquad x(t) = e^{-bt}u(t)$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)} \cdot \frac{1}{(b+j\omega)}$$

  - Дробно-рационална функција од $j\omega$

$$\Downarrow$$

Разложување на прости Дробно-рационални функции

$$Y(j\omega) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{b+j\omega}\right]$$

$$\Downarrow$$

инверзна FT

$$y(t) = \frac{1}{b-a}\left[e^{-at} - e^{-bt}\right]u(t)$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција
  - Пример: $\boxed{a=b}$ $$Y(j\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)^2}$$
  - Бидејќи $$\frac{1}{(a+j\omega)^2}=j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{a+j\omega}\right]$$
  - Може да се искористи особината диференцирање во фреквенциски домен

$$e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{a+j\omega}$$

$$te^{-at}u(t)\xleftrightarrow{FT}j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{a+j\omega}\right]=\frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

$$y(t)=te^{-at}u(t)$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Конволуција
  - Пример:

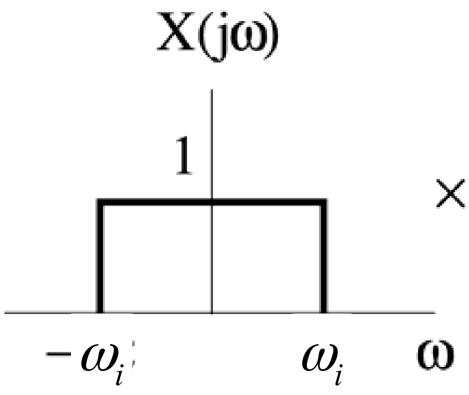
$$x(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\pi t} \qquad h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

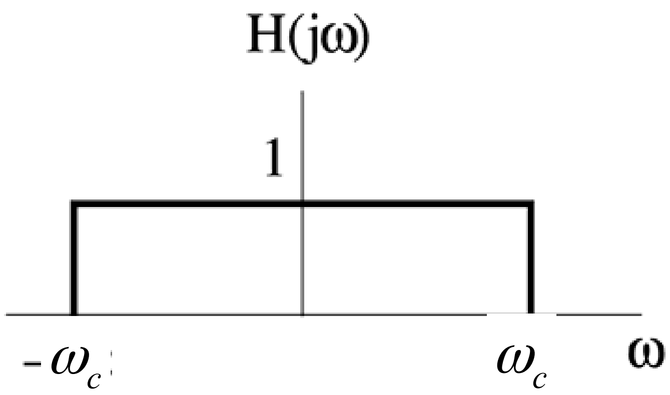
$$\Downarrow$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

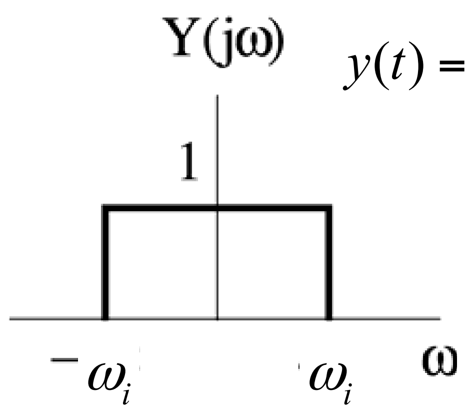
конволуција на
две sinc функции
е sinc функција



×



=



$$y(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\pi t}$$

Својства на Фуриеова трансформација

- Множење на сигналите

$$\boxed{r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{FT} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[S(j\omega) * P(j\omega)]}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\theta)P(j(\omega-\theta))d\theta$$

– Пример

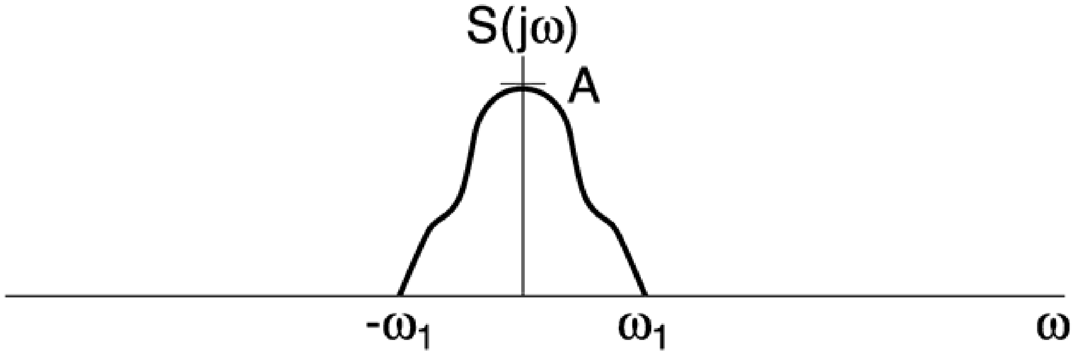
– Нека е $\quad p(t) = \cos\omega_0 t \xleftrightarrow{FT} P(j\omega) = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$

– За било кој сигнал $s(t)$

$$FT\{p(t)\,s(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\theta)\,P\big(j(\omega-\theta)\big)d\theta = \frac{1}{2}S\big(j(\omega-\omega_0)\big) + \frac{1}{2}S\big(j(\omega+\omega_0)\big)$$

Својст ацијa

- Множењ

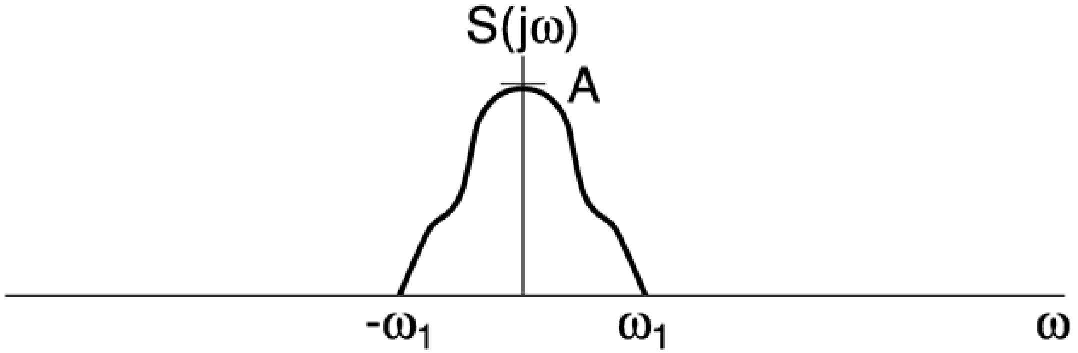


Амплитудна модулација

$$r(t) = s(t)\cos\omega_0 t$$

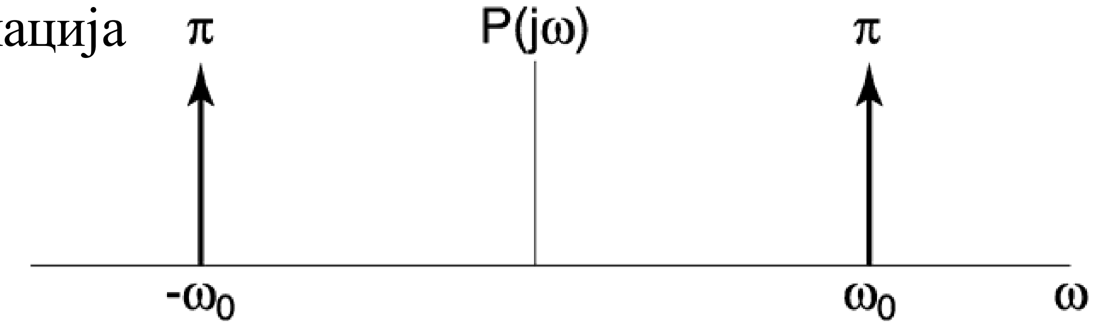
Својст ација

- Множењ



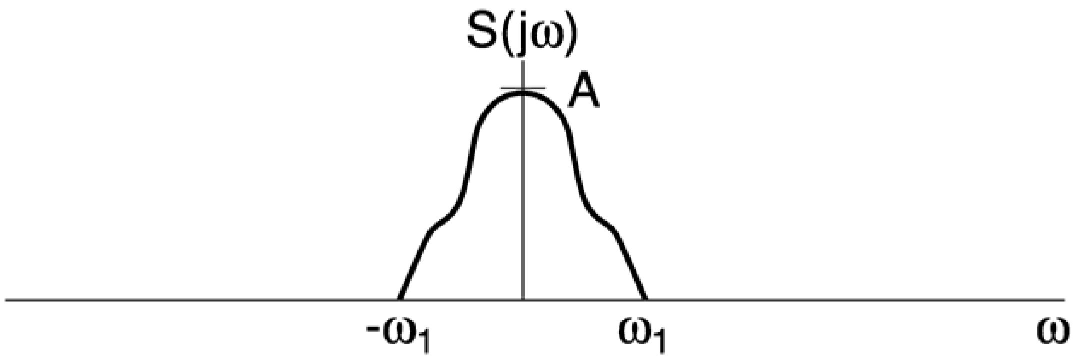
Амплитудна модулација

$$r(t) = s(t)\cos\omega_0 t$$



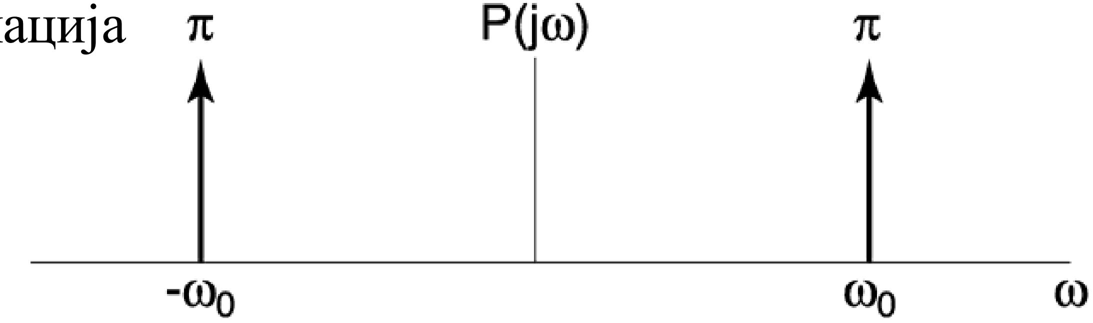
Својст ација

- Множењ



Амплитудна модулација

$r(t) = s(t)\cos\omega_0 t$



$$R(j\omega) = \frac{1}{2}S\left(j\left(\omega-\omega_0\right)\right) + \frac{1}{2}S\left(j\left(\omega+\omega_0\right)\right)$$

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[S(j\omega) * P(j\omega)]$$