Дијаграми на Bode

- Фреквенциска карактеристика

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

$$H(j\omega)=K\frac{\prod_i (j\omega - z_i)}{\prod_j (j\omega - p_j)}$$

$$H(j\omega)=\prod_{k=0}^{M+N} H_k(j\omega)=H_1(j\omega)H_2(j\omega)H_3(j\omega)\ldots H_{M+N}(j\omega)$$

Дијаграми на Bode

- Фреквенциска карактеристика

$$H(j\omega) = \prod_{k=0}^{M+N} H_k(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)H_3(j\omega)\ldots H_{M+N}(j\omega)$$

$$\ln H(j\omega) = \gamma(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$$

$\alpha(\omega) = \ln\left|H(j\omega)\right| \quad (N)$ **Засилување (добивка)**

$\beta(\omega) = \arg H(j\omega)$ **фазна функција**

$$\alpha(\omega) = 20\log\left|H(j\omega)\right| \quad (dB)$$

$$20\log\left|H(j\omega)\right| = 20\log\left|H_1(j\omega)\right| + 20\log\left|H_2(j\omega)\right| + \ldots + 20\log\left|H_{M+N}(j\omega)\right|$$

$$\alpha(\omega) = \alpha_1(\omega) + \alpha_2(\omega) + \alpha_3(\omega) + \ldots + \alpha_{M+N}(\omega)$$

$$\beta(\omega) = \beta_1(\omega) + \beta_2(\omega) + \beta_3(\omega) + \ldots\beta_{M+N}(\omega)$$

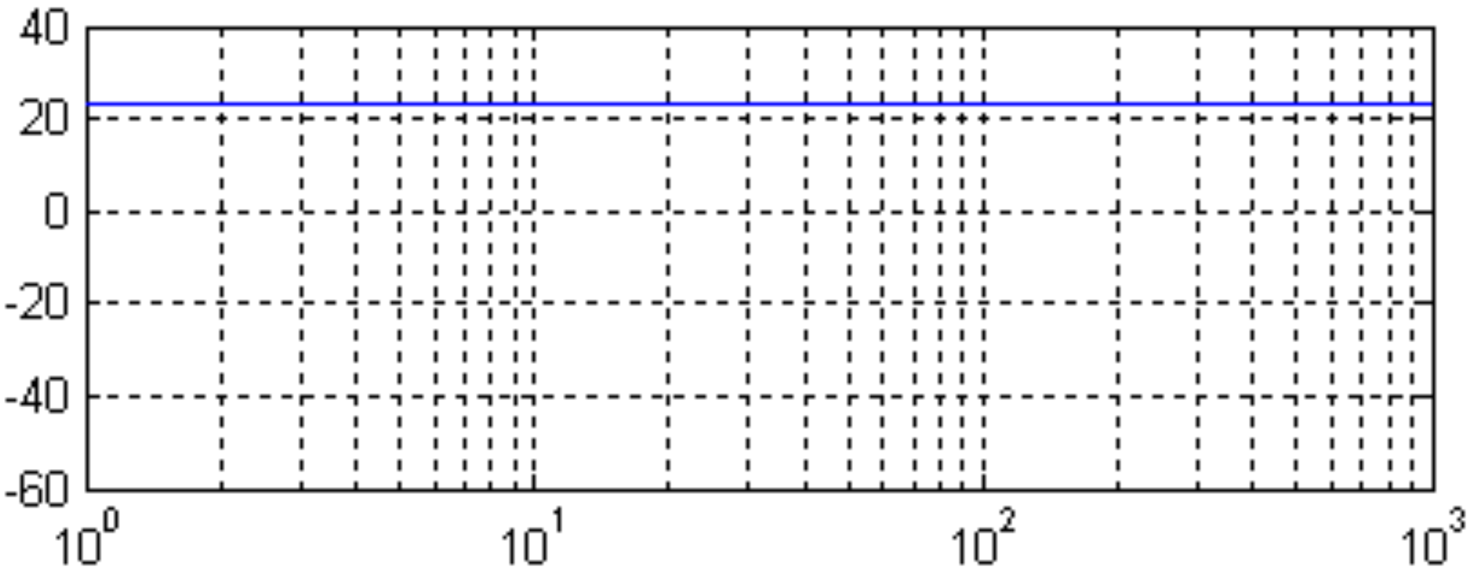
Дијаграми на Bode: систем од прв ред

- Константен член $H(j\omega) = K$

$H(j\omega) = |K|$

Пример: $H(j\omega) = 15$

$\alpha(\omega) = 20\log(15) = 23.52dB$



За константен член, амплитудната карактеристика е права линија

Дијаграми на Bode: систем од прв ред

- Реален пол $$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$|H(j\omega)| = \left|\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}\right| \qquad \alpha(\omega) = -20\log_{10}\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$\omega \ll \omega_0$ $$\alpha(\omega) = -20\log_{10}\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \approx -20\log_{10}(1) = 0$$ хоризонтална асимптота

вертикална асимптота
со стрмнина -20dB/декада

$\omega \gg \omega_0$ $$\alpha(\omega) = -20\log_{10}\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \approx -20\log_{10}\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

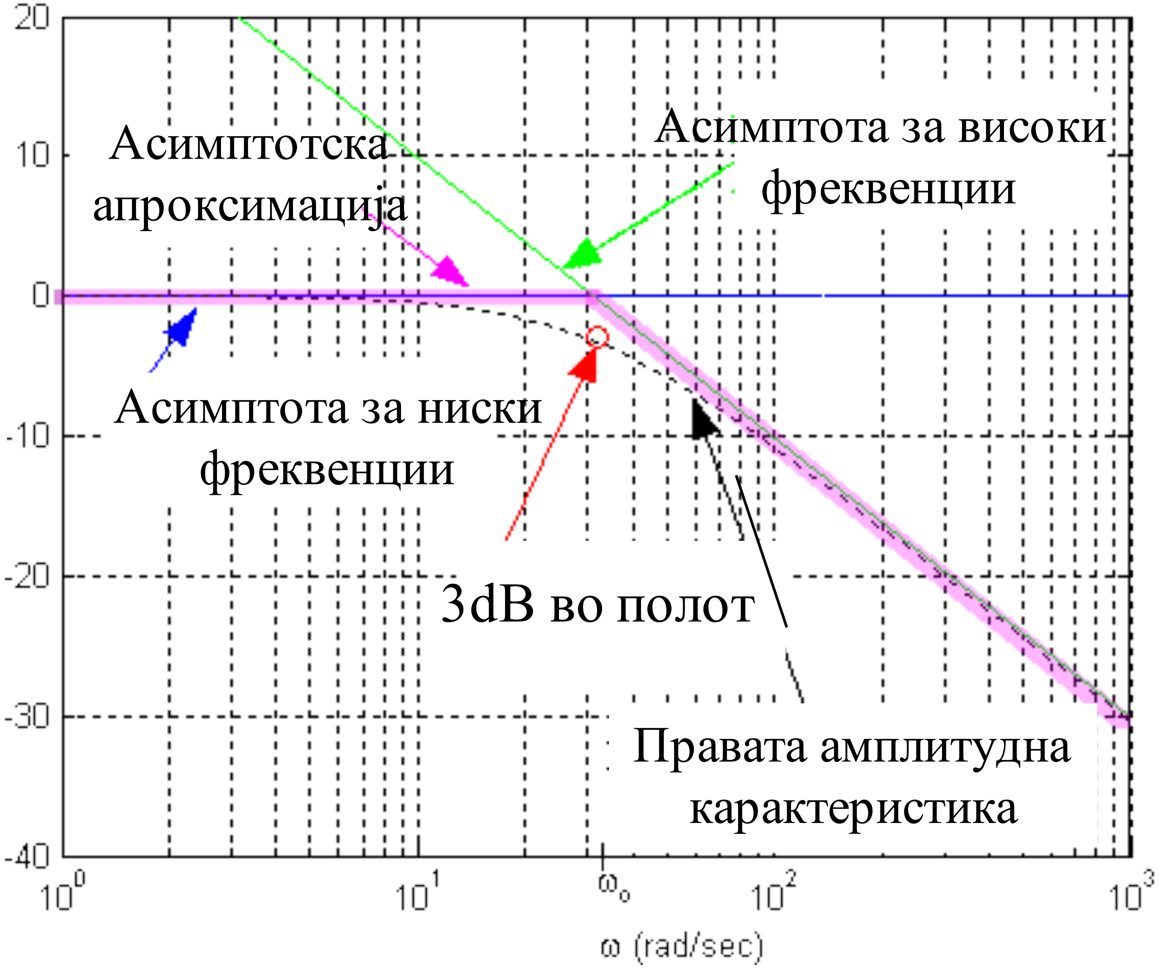
$\omega = \omega_0$ $$\alpha(\omega) = -20\log_{10}\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \approx -20\log_{10}\sqrt{2} = -3.01dB \approx -3dB$$

Отстапување во $\omega = \omega_0$
-3dB

Дијаграми на Bode: систем од прв ред

- Реален пол

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$



Дијаграми на Bode: систем од прв ред

- Пример: реален пол

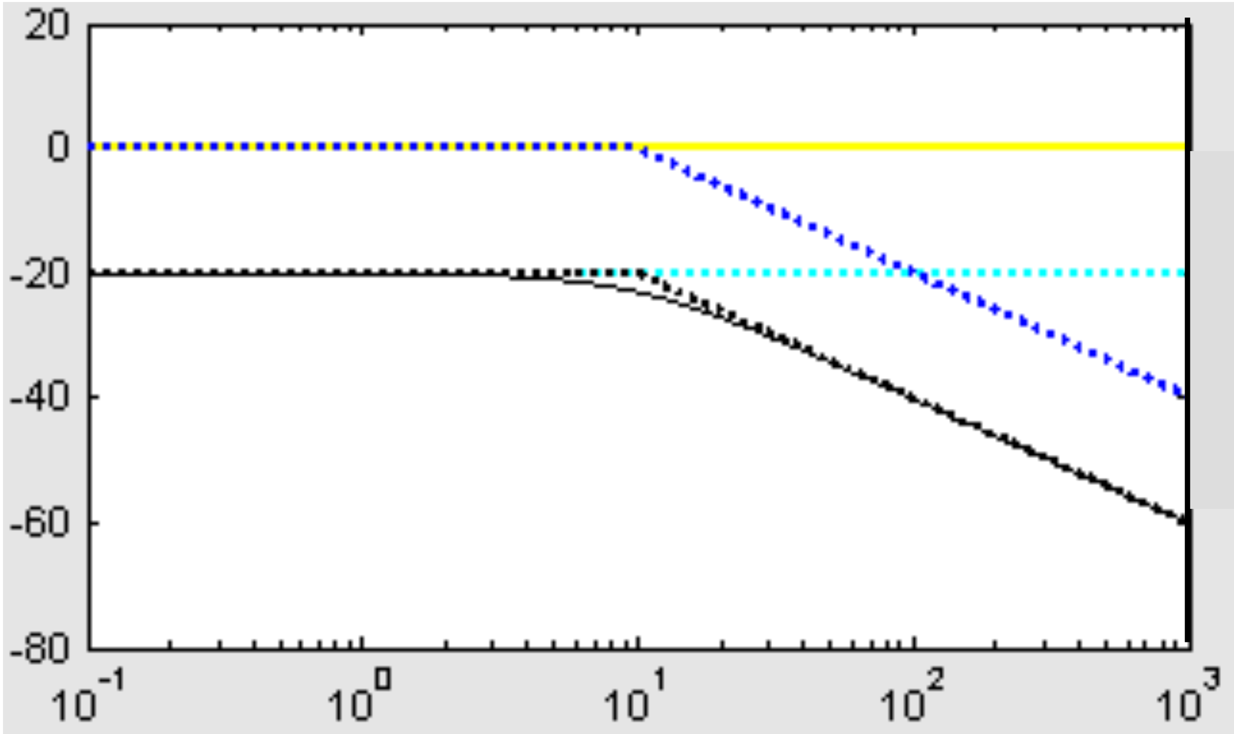
$$H(j\omega) = \frac{1}{10 + j\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{10}\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{10}}$$

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$$

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{10}$$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{10}}$$



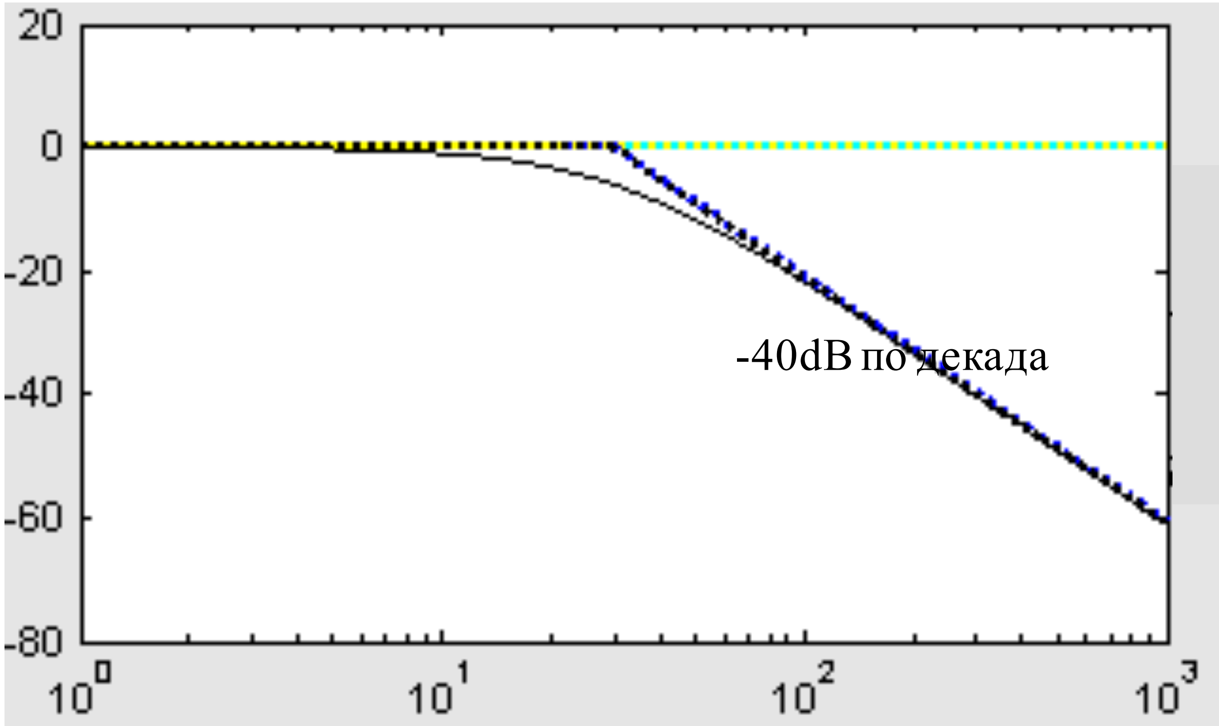
$$\alpha_1(\omega) = 20\log_{10}\left|H_1(j\omega)\right| = -20d\text{B}$$

$\alpha_2(\omega)$ 0 dB до полот, потоа опаѓа со -20 dB/декада.

Дијаграми на Bode: систем од прв ред

- Двократен реален пол

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{30}\right)^2}$$



Дијаграми на Bode: систем од прв ред

- Реална нула $$H(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\left|H(j\omega)\right| = \left|1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right|$$

$$\alpha(\omega) = 20\log_{10}\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

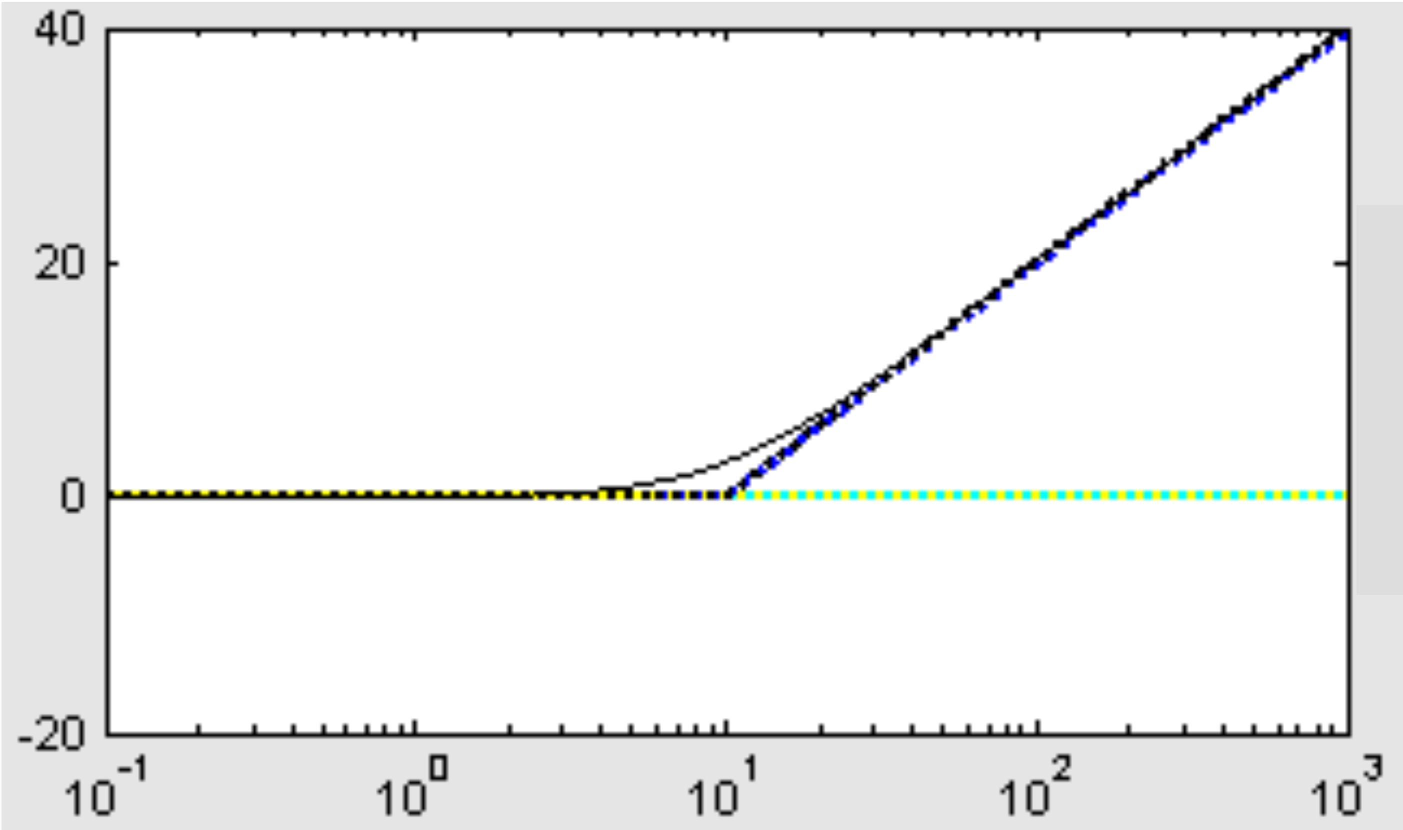
За ниски фреквенции, $\omega << \omega_0$, добивката е приближно нула

За високи фреквенции, $\omega >> \omega_0$, добивката се зголемува 20 dB/декада
и поминува низ полот во 0 dB.

Во полот, $\omega = \omega_0$, добивката е околу 3 dB.

Дијаграми на Bode: систем од прв ред

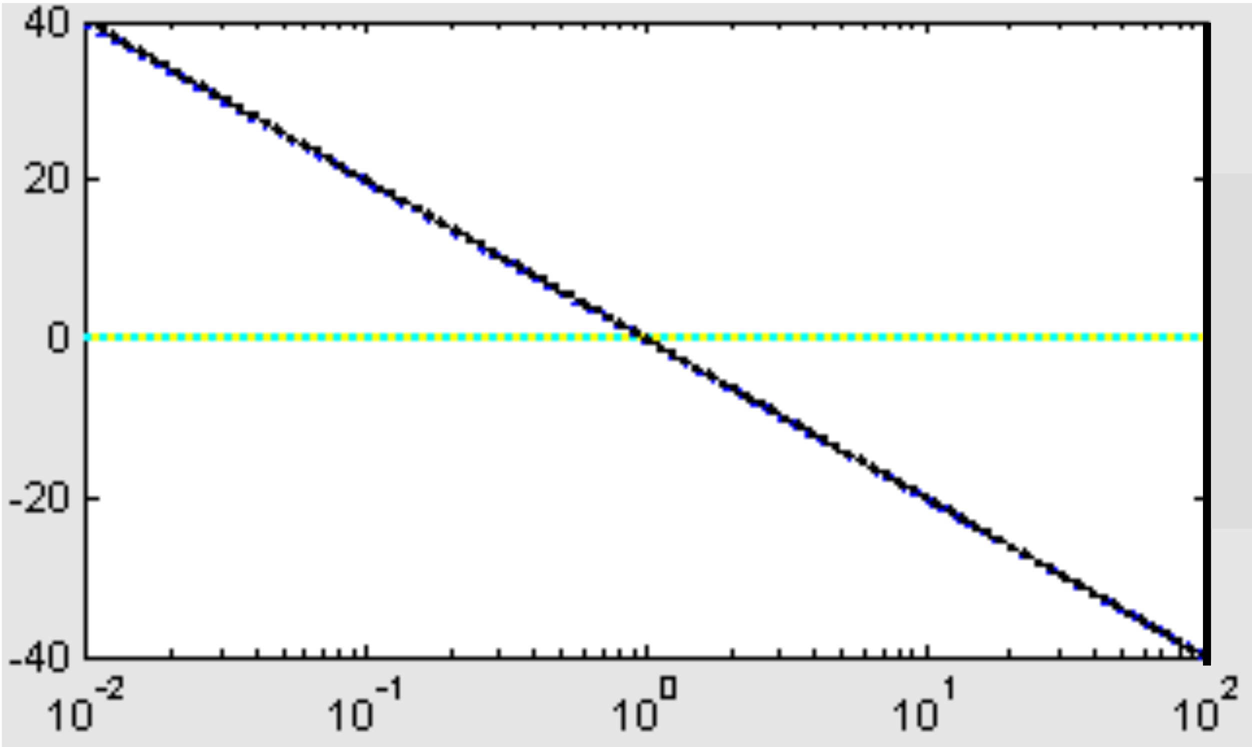
- Пример: реална нула $H(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{10}$



Дијаграми на Bode: систем од прв ред

- Пол во координатен почеток $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega}$

$$|H(j\omega)| = \left|-j\frac{1}{\omega}\right| = \frac{1}{\omega}$$

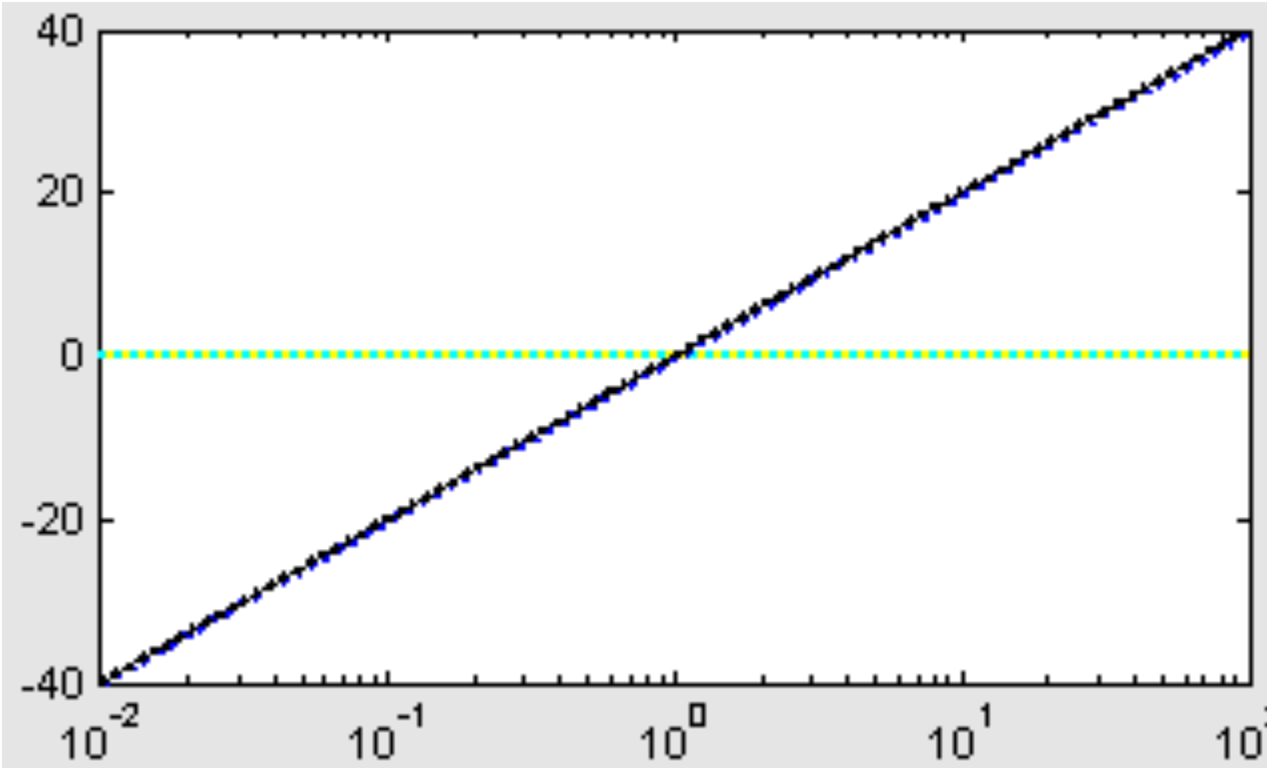


Стрмнина -20 dB по декада, и поминува низ 0 dB за 1 rad/ sec, односно 20 dB за 0.1 rad/sec, -20 dB за 10 rad/sec...

Дијаграми на Bode: систем од прв ред

- Нула во кооринатен почеток $H(j\omega) = j\omega$

$$\left|H(j\omega)\right| = \left|\omega\right|$$

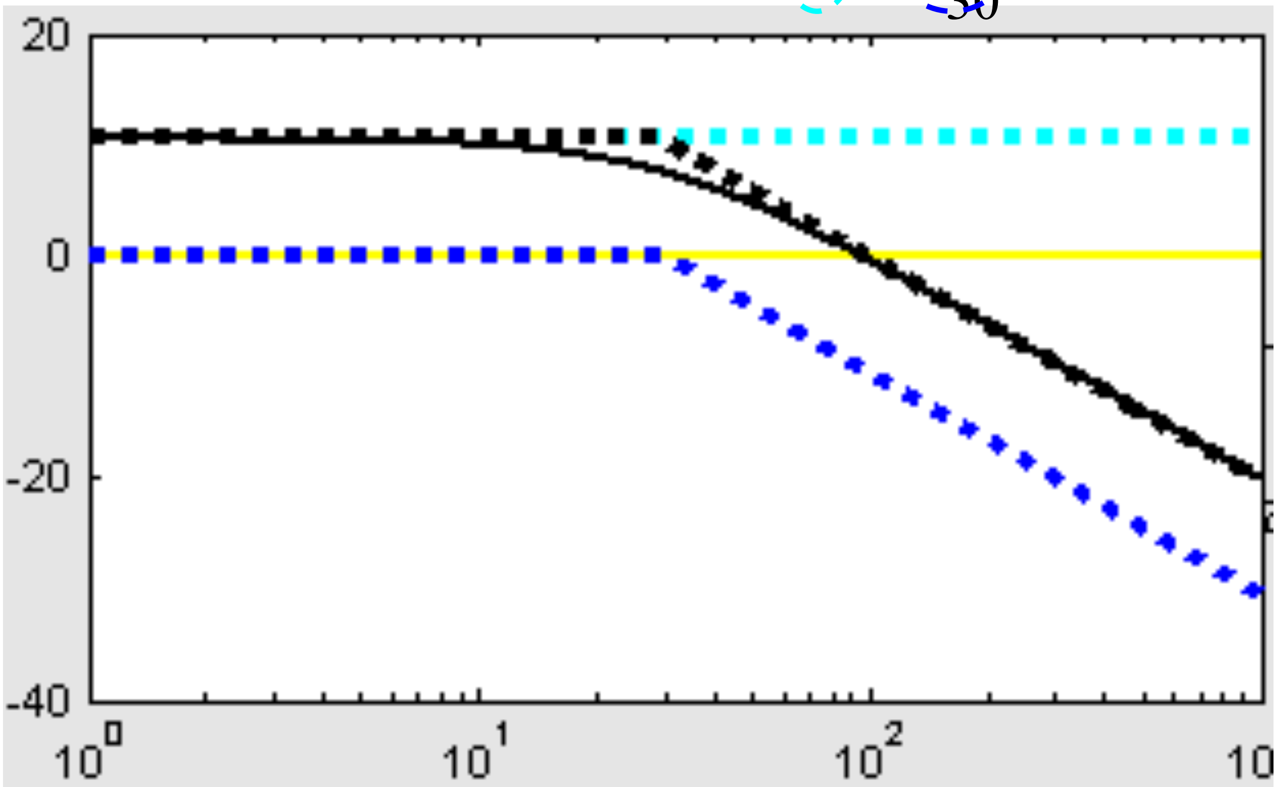


Права линија со стрмнина +20 dB по декада, и поминува низ 0 dB за 1 rad/ sec.

Дијаграми на Bode: систем од прв ред

- Примери $H(j\omega) = \dfrac{100}{j\omega + 30}$ $H(j\omega) = \dfrac{100}{30} \dfrac{1}{1 + \dfrac{j\omega}{30}}$

Две функции
- Константа 3.3
- Пол во -30



-Константа 3.3 = 10.4 dB

-Пол: 0 dB до полот, потоа опаѓа со -20 dB/декада.

Дијаграми на Bode: систем од прв ред

- Примери $H(j\omega) = 100\dfrac{(j\omega+1)}{(j\omega+10)(j\omega+100)}$ $H(j\omega) = \dfrac{100}{10\cdot 100}\dfrac{\dfrac{j\omega}{1}+1}{\left(\dfrac{j\omega}{10}+1\right)\left(\dfrac{j\omega}{100}+1\right)}$

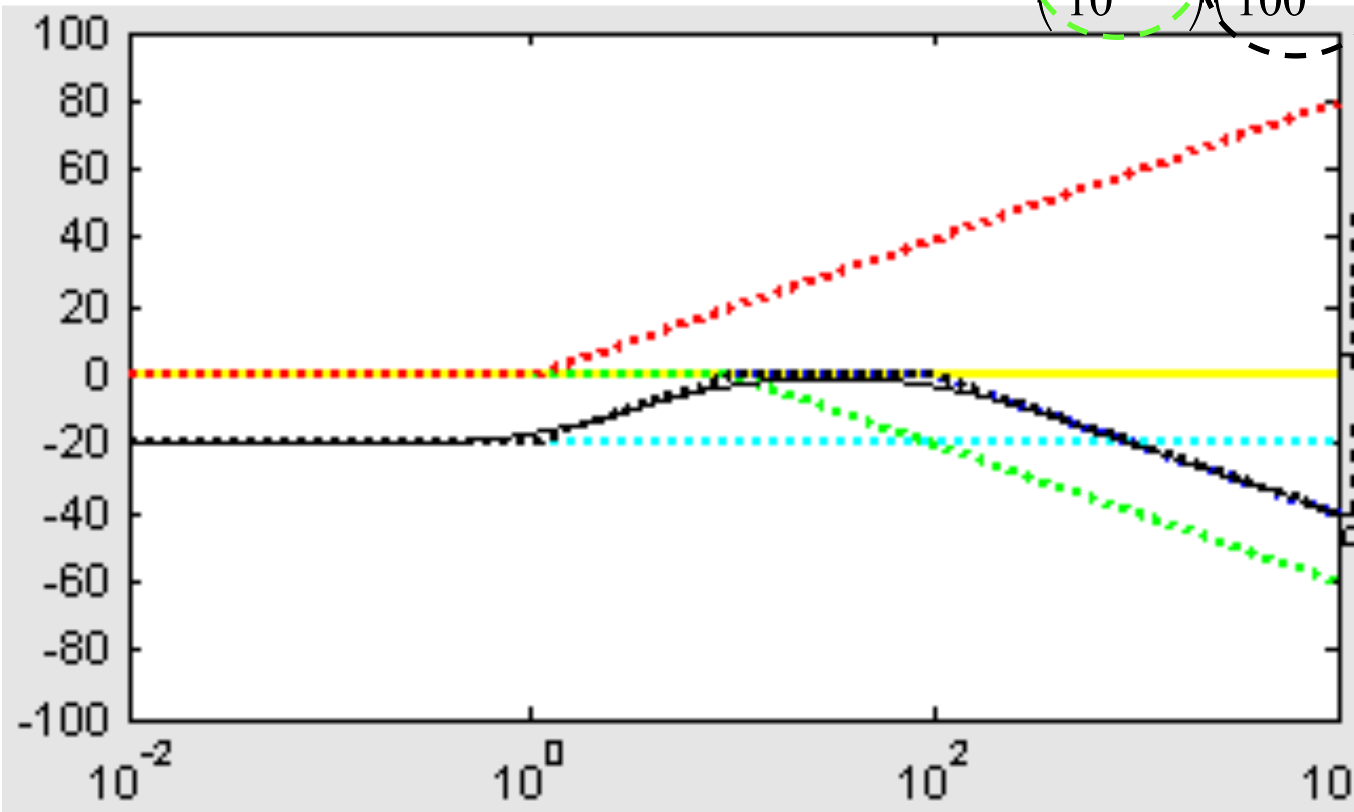
Четири функции:

Константа = 0.1

Пол во $j\omega$ = -10

Пол во $j\omega$ = -100

Нула во $j\omega$ = -1



Константа 0.1 = -20 dB

Пол во 10 rad/sec: 0 dB до полот, потоа опаѓа со -20 dB/декада.

Пол во 100 rad/sec: 0 dB до полот, потоа опаѓа со -20 dB/декада.

Нула во 1 rad/sec: 0 dB до нулата, потоа раст со 20 dB/декада.

Дијаграми на Bode: систем од втор ред

- Пар коњугирано комплексни полови $p_{12} = -\sigma_1 \pm j\omega_1$

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} = \frac{1}{(j\omega + \sigma_1 - j\omega_1)(j\omega + \sigma_1 + j\omega_1)}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + \sigma_1)^2 + \omega_1^2}$$

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\sigma_1^2 + \omega_1^2 - \omega^2\right)^2 + 4\sigma_1^2\omega^2}}$$

$$\alpha(\omega) = -10\log\left[\left(\rho_1^2 - \omega^2\right)^2 + 4\sigma_1^2\omega^2\right] \qquad \rho_1^2 = \sigma_1^2 + \omega_1^2$$

Дијаграми на Bode: систем од втор ред

- Пар коњугирано комплексни полови $p_{12} = -\sigma_1 \pm j\omega_1$

$$\alpha(\omega) = -10\log\left[\left(\rho_1^{\,2} - \omega^2\right)^2 + 4\sigma_1^{\,2}\omega^2\right]$$

$$\rho_1^{\,2} = \sigma_1^{\,2} + \omega_1^{\,2}$$

$\omega = 0$ $\qquad \alpha(0) = -20\log\rho_1^{\,2}$ хоризонтална асимптота

$\omega \to \infty$ $\qquad \alpha(\infty) = -\,40\log\omega$ вертикална асимптота
со стрмнина -40dB/декада

$\omega = \rho_1$ $\qquad \alpha(\rho_1) = -20\log 2\sigma_1\rho_1 = \alpha_0 + 20\log\left(\rho_1/2\sigma_1\right)$

максимално отстапување

Дијаграми на Bode: систем од втор ред

- Пример: $H(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega)^2 + j\omega + 100}$

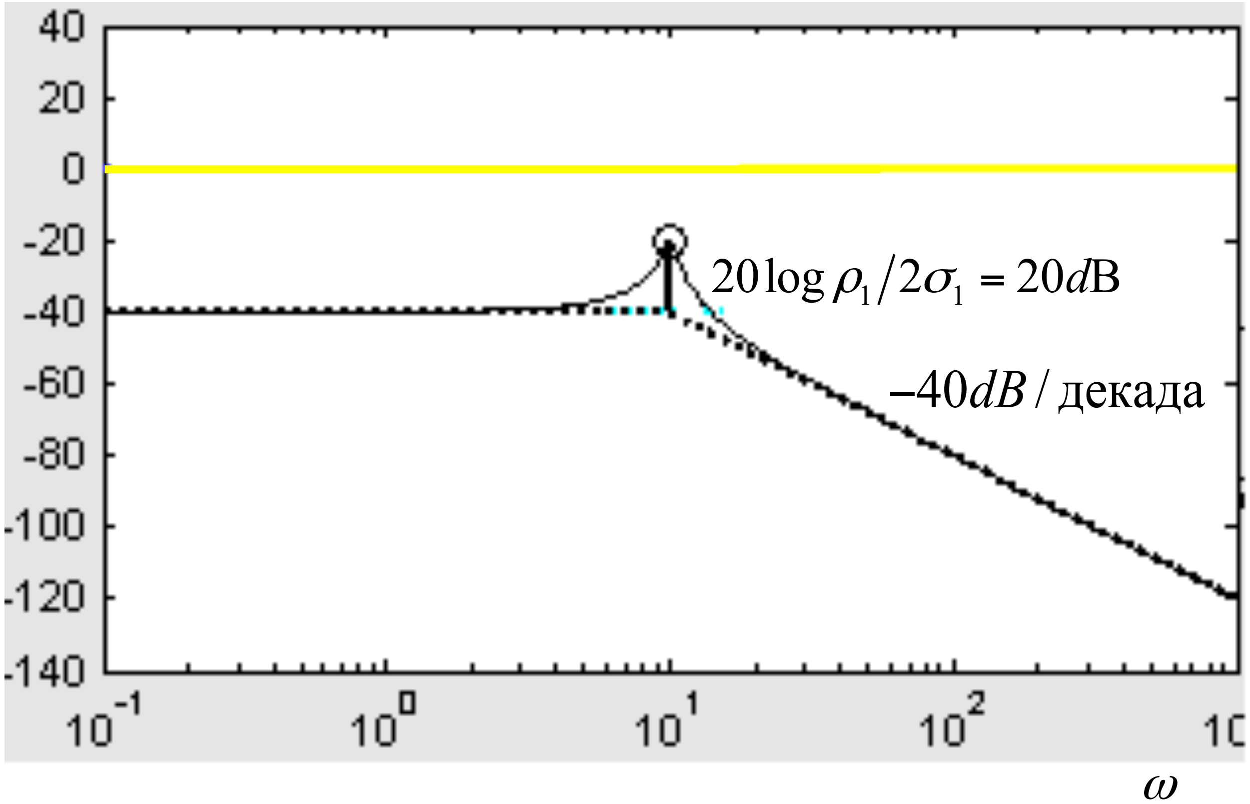
$$p_{1,2} = -0.5 \pm j9.987$$

$$\rho_1 = \sqrt{0.5^2 + 9.987^2} = 10$$

$$\alpha(0) = -20\log\rho_1^2 = -40d\mathrm{B}$$

Отстапување во ρ_1

$$\alpha(\rho_1) = 20\log\left(\rho_1/2\sigma_1\right) = 20d\mathrm{B}$$



Дијаграми на Bode: систем од втор ред

Пар коњугирано комплексни нули $z_{12} = -\sigma_1 \pm j\omega_1$

$$H(j\omega) = (j\omega + \sigma_1 - j\omega_1)(j\omega + \sigma_1 + j\omega_1)$$

$$H(j\omega) = (j\omega + \sigma_1)^2 + \omega_1^2 = (\rho_1^2 - \omega^2) + j2\sigma_1\omega$$

$$\left|H(j\omega)\right| = \sqrt{\left(\sigma_1{}^2 + \omega_1{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\sigma_1{}^2\omega^2}$$

$$\alpha(\omega) = 10\log\left[\left(\rho_1{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\sigma_1{}^2\omega^2\right]$$

Дијаграми на Bode: систем од втор ред

- Пар коњугирано комплексни нули $z_{12} = -\sigma_1 \pm j\omega_1$

$$\alpha(\omega) = 10\log\left[\left(\rho_1^{\ 2} - \omega^2\right)^2 + 4\sigma_1^{\ 2}\omega^2\right]$$

$\omega = 0$ $\alpha(0) = 20\log\rho_1^{\ 2}$ хоризонтална асимптота

$\omega \to \infty$ $\alpha(\infty) = 40\log\omega$ вертикална асимптота со стрмнина 40dB/декада

$\omega = \rho_1$ $\alpha(\rho_1) = 20\log 2\sigma_1\rho_1 = \alpha_0 - 20\log\left(\rho_1/2\sigma_1\right)$

максимално отстапување

Дијаграми на Bode: систем од втор ред

- Пример

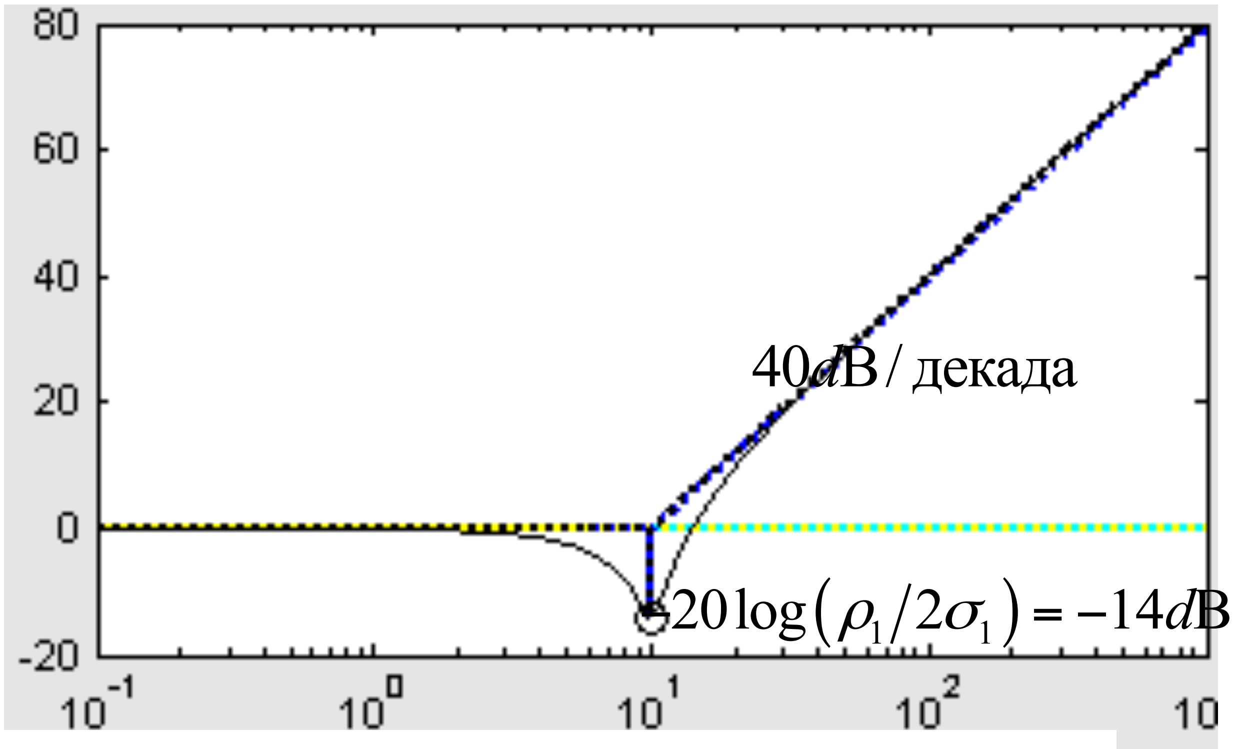
$$H(j\omega) = 0.01(j\omega)^2 + 0.02(j\omega) + 1$$
$$H(j\omega) = 0.01\left((j\omega)^2 + 2(j\omega) + 100\right)$$

$$z_{12} = -1 \pm j9.95$$

$$\rho_1 = \sqrt{1^2 + 9.95^2} = 10$$

Константа 0.01

Комплексни нули во 10



Константа 0.01 => α = - 40 dB

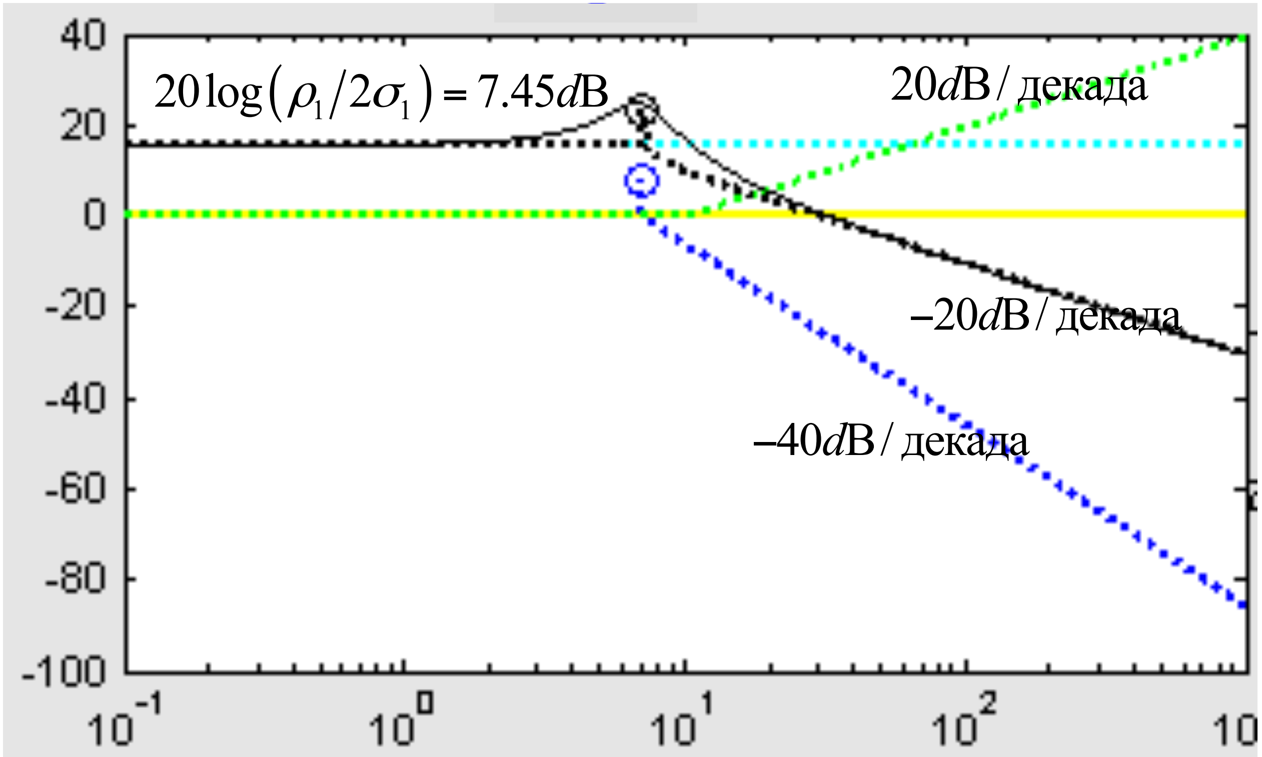
Комплексни нули во 10 rad/sec: 40 dB до нулата, потоа расте со 40 dB/декада. Отстапување во нулата: -14 dB

Дијаграми на Bode: рационални ф-ци

- Пример

$$H(j\omega) = \frac{30j\omega + 300}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 50}$$

$$H(j\omega) = 300\frac{\frac{j\omega}{10} + 1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 50}$$



Константа 300

Комплексни полови во $p_{12} = -1.5 \pm j6.91$ ($\rho_1 = 7.07$)

Нула z = -10

Константа 300 => $\alpha = 49.54$ dB

Комплексни полови во 7.07 rad/sec: -33,97 dB до полот, потоа опаѓа со -40 dB/декада. Отстапување во полот: 7.45 dB

Нула во 10 rad/sec: 0 dB до нулата, потоа раст со 20 dB/декада.

Дијаграми на Bode: рационални ф-ци

- Задача за вежбање

$$H(j\omega)=\frac{100\,j\omega+100}{(j\omega)^2+110\,j\omega+1000}$$

$$H(j\omega)=100\frac{j\omega+1}{(j\omega+10)(j\omega+100)}$$

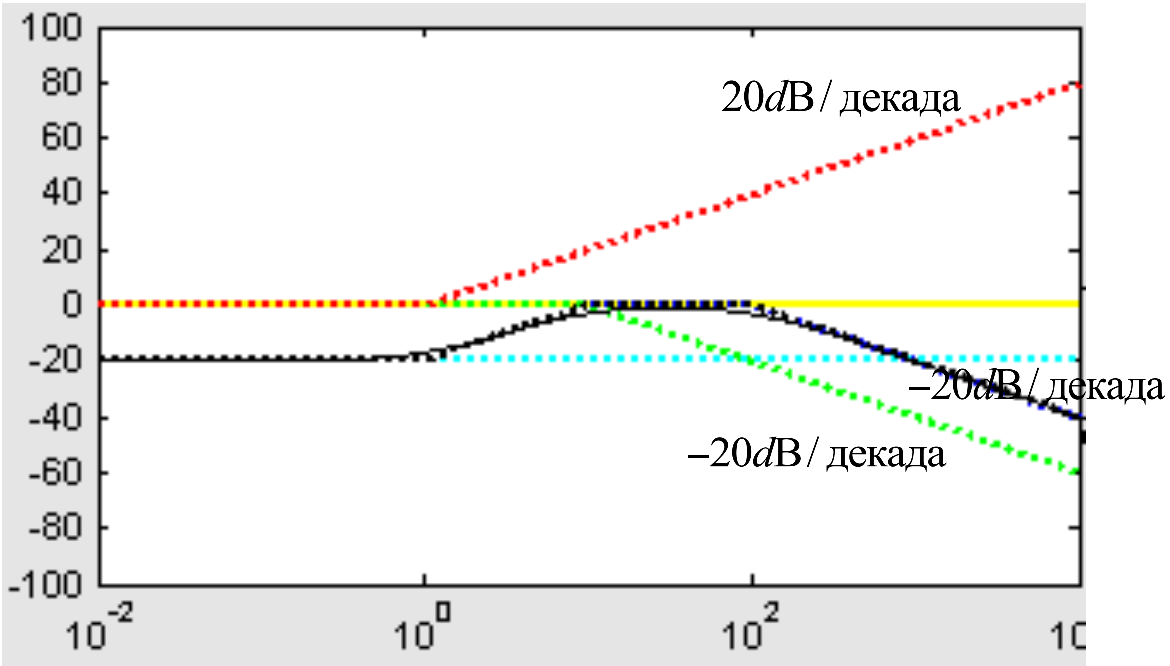
$$H(j\omega)=\frac{100}{10\cdot 100}\frac{\frac{j\omega}{1}+1}{\left(\frac{j\omega}{10}+1\right)\left(\frac{j\omega}{100}+1\right)}$$

Константа 0.1

Пол во $j\omega$ = -10

Пол во $j\omega$ = -100

Нула во $j\omega$ = -1



Константа 0.1 => a= -20 dB

Пол во -10 rad/sec: 0 dB до полот, потоа опаѓа со -20 dB/декада.

Пол во -100 rad/sec: 0 dB до полот, потоа опаѓа со -20 dB/декада.

Нула во 1 rad/sec: 0 dB до нулата, потоа раст со 20 dB/декада.

Дијаграми на Bode: рационални ф-ци

- Задача за вежбање $$H(j\omega) = -\frac{100\,j\omega}{(j\omega+1)^2(j\omega+10)}$$

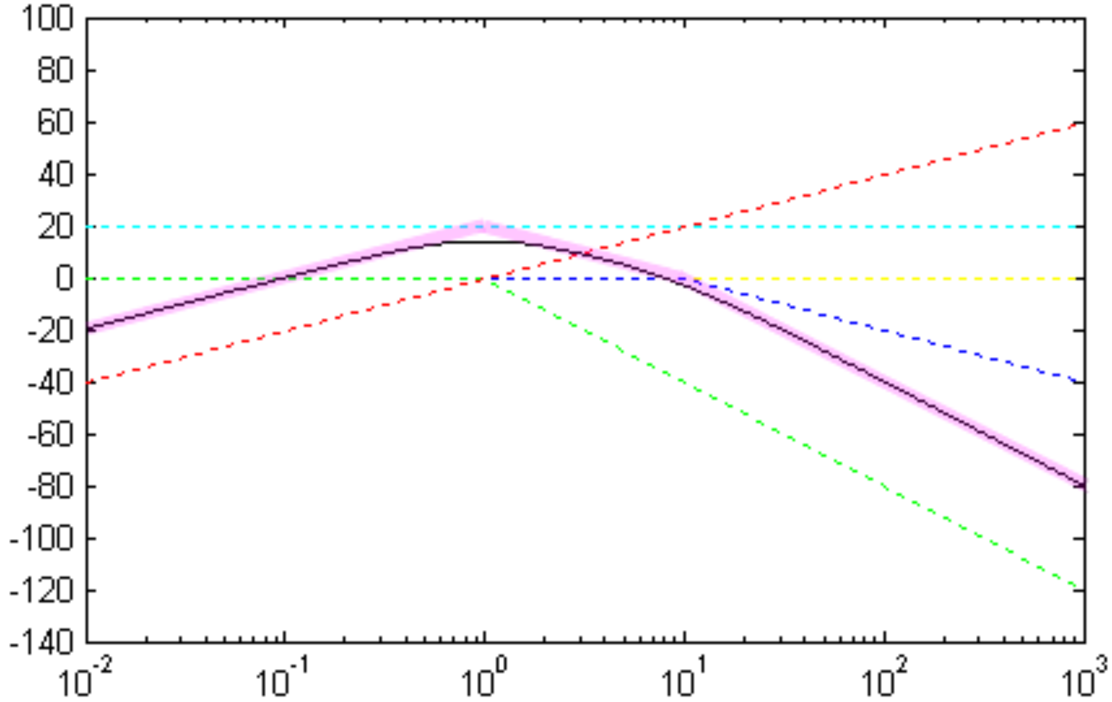
$$H(j\omega) = -10\frac{j\omega}{\left(\frac{j\omega}{1}+1\right)^2\left(\frac{j\omega}{10}+1\right)}$$

Константа -10

Пол во $j\omega$ = -10

Двоен пол во $j\omega$ = -1

Нула во $j\omega$ = 0



Константа -10 => α = 20 dB

Пол во -10 rad/sec: 0 dB до полот, потоа опаѓа со -20 dB/декада.

Пол во -1 rad/sec: 0 dB до полот, потоа опаѓа со -40 dB/декада.

Нула во 0 rad/sec: раст со 20 dB/декада, и поминува во 0dB за 1rad/sec