Z трансформација

- **Z трансформација** на низата $\{x[n], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ е дефинирана со

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

каде z е *комплексна променлива*

- Ознака $X(z) = \mathrm{Z}\{\mathrm{x}[n]\}$

- Кореспонденција $x[n] \xleftrightarrow{ZT} X(z)$

Z трансформација

- Каузална низа $\{x_+[n], n = 0,1,2,\ldots\}$

$$X_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_+[n] z^{-n}$$

- Антикаузална низа $\{x_-[n], n = 0,-1,-2,\ldots\}$

$$X_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} x_-[n] z^{-n}$$

- Двострана низа

$$X(z) = X_-(z) + X_+(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} x_-[n] z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x_+[n] z^{-n}$$

Z трансформација: примери

- Пример 1: $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

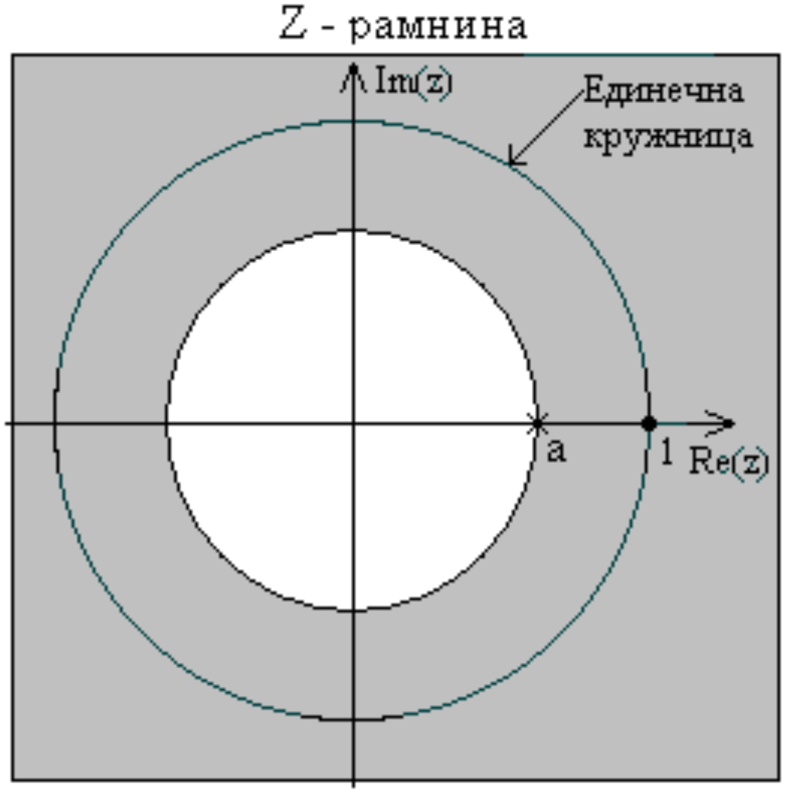
$$= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad \text{за} \quad |az^{-1}| < 1$$

- Област на конвергенција: вредности на z за кои $X(z)$ има конечни вредности ($X(z) < \infty$)

$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |a| < |z| \quad \Rightarrow \quad \boxed{|z| > |a|}$$

Z трансформација: примери

- Пример 1: $x[n] = a^n u[n]$

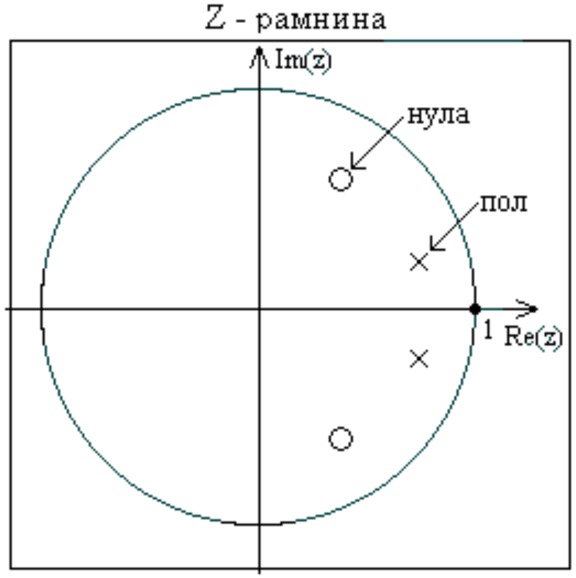


Нули и полови

- Z трансформација од облик

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

P(z) и Q(z) се полиноми од z



- Нули: вредности на z за кои $X(z) = 0$ о
- Полови: вредности на z за кои $X(z)$ е бесконечно x
- Постои врска помеѓу половите и областа на конвергенција

Z трансформација: примери

- Пример 2: $x[n] = -b^n u[-n-1]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (bz^{-1})^n$$

смена: $l = -n; \quad n = -\infty \Rightarrow l = \infty; \quad n = -1 \Rightarrow l = 1$

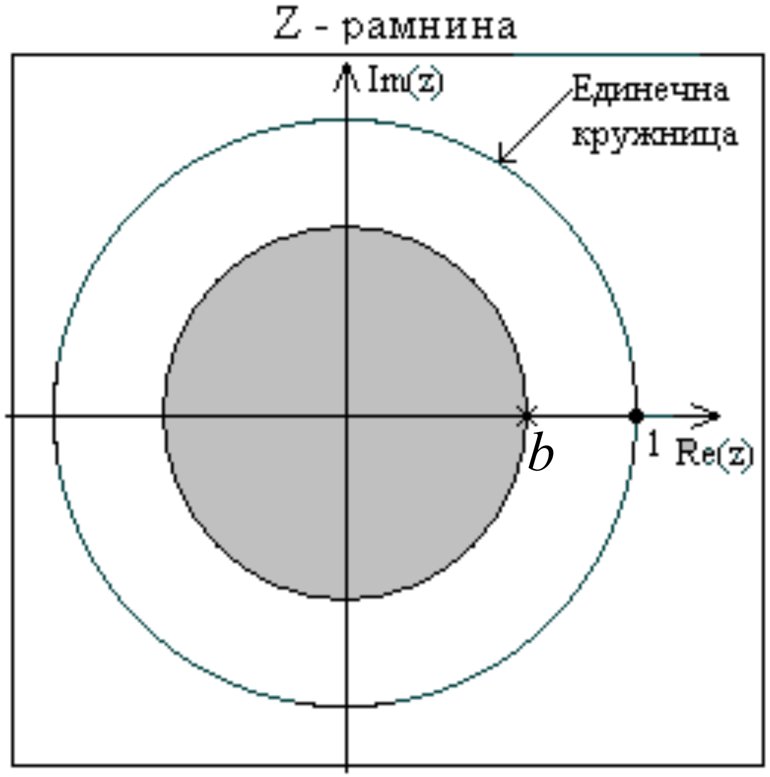
$$\sum_{n=-\infty}^{-1} -(bz^{-1})^n = \sum_{l=1}^{\infty} -(zb^{-1})^l = 1 - \sum_{l=0}^{\infty} (zb^{-1})^l = 1 - \frac{1}{1 - zb^{-1}} = \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

за $\left| b^{-1} z \right| < 1$

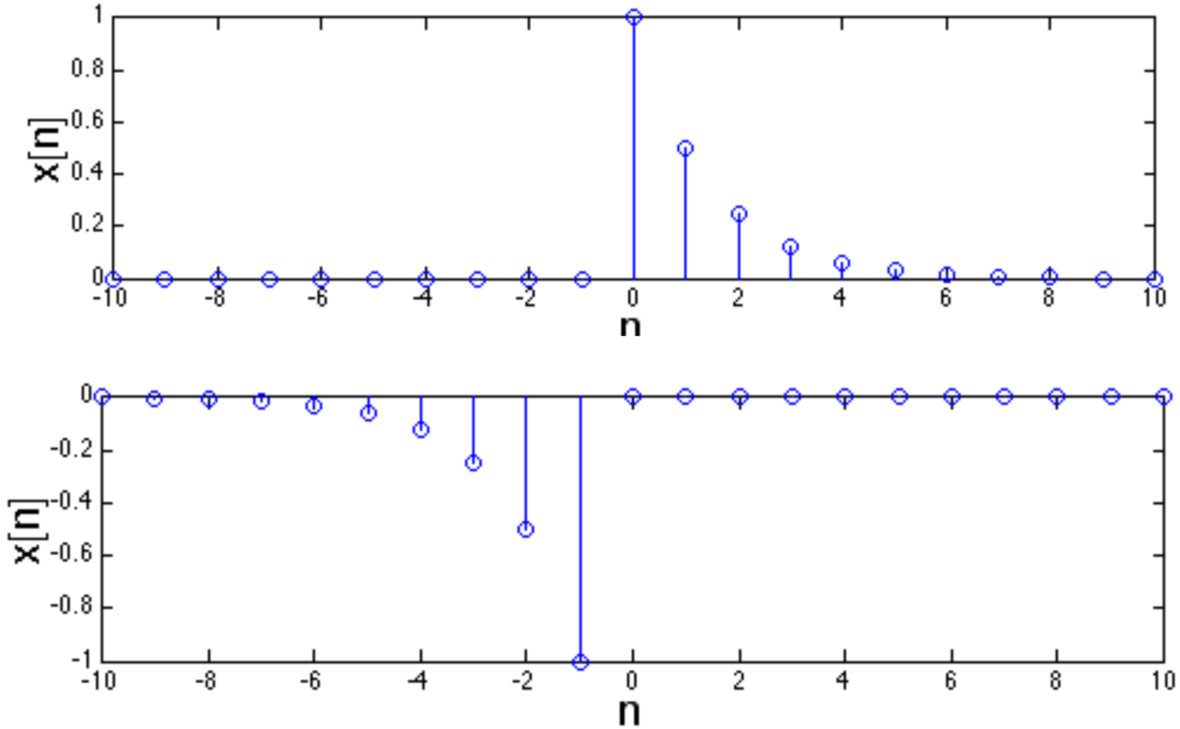
- Област на конвергенција: $\left| \frac{z}{b} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|z| < |b|}$

Z трансформација: примери

- Пример 2: $x[n] = -b^n u[-n-1]$



Важност на областа на конвергенција



$$X(z) = \frac{z}{z-a}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-b}$$

За потполно дефинирање на Z трансформација, мора да се специфицира областа на конвергенција

Дадена G(z) може да претставува Z трансформација на неколку низи со различни области на конвергенција

Z трансформација: примери

- Пример3: $x[n] = a^n u[n] + b^n u[-n-1]$

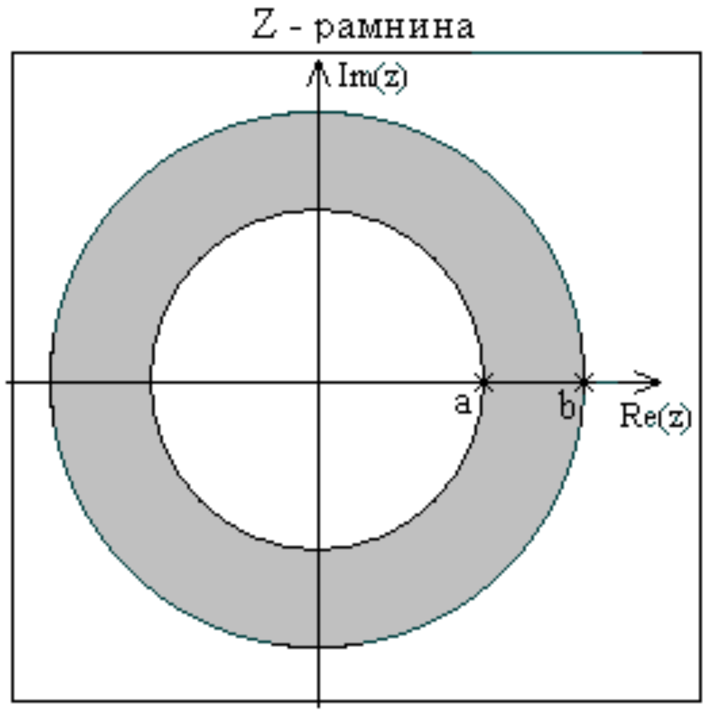
- Користејќи ги резултатите од примерите 1 и 2 за Z трансфорација-та на оваа низа се добива

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z(a-b)}{(z-a)(z-b)}$$

- Областа на конвергенција е $\boxed{|a| < z < |b|}$, што претставува пресек на областите на конвергенција на двете низи земени индивидуално

Z трансформација: примери

- Пример3: $x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$



$|a| < z < |b|$

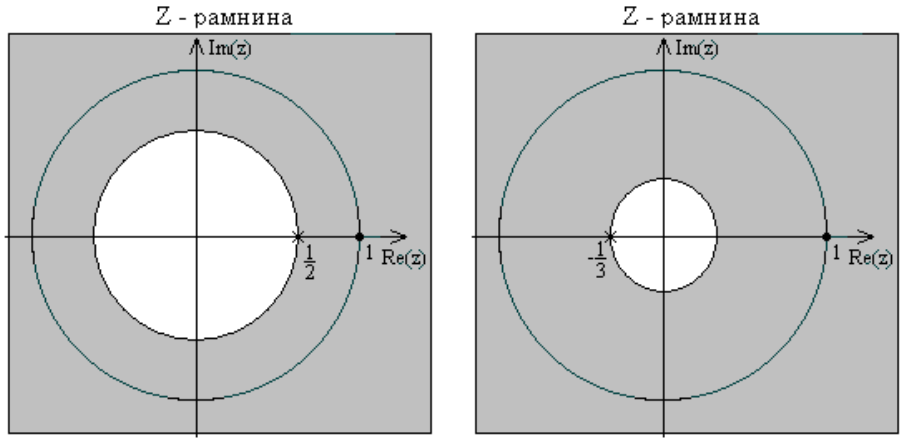
Z трансформација: примери

- Пример4: $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \right\} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n$$



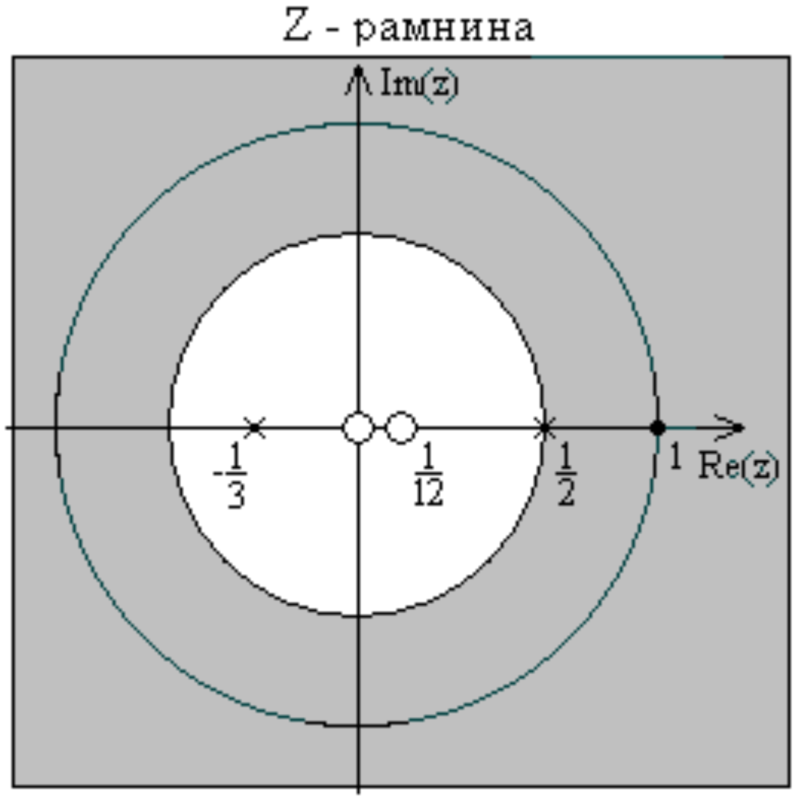
Од примерот за каузална низа, првата сума конвергира за $|z| > \left|\frac{1}{2}\right|$ а втората сума за $|z| > \left|\frac{1}{3}\right|$, според тоа X(z) конвергира за $|z| > \left|\frac{1}{2}\right|$

Z трансформација: примери

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z+\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2z(z-\frac{1}{12})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})}$$

$$|z| > \left|\frac{1}{2}\right|$$



Z трансформација

- Задача за решавање час:
  - Да се одреди Z трансформација и областа на конвергенција на следните низи

а) $\{x[n], n = 0,1,2,3,4\} = \{1,2,3,5,8\}$

б) $\{x[n], n = -2,-1,0,1,2\} = \{1,2,3,5,8\}$

в) $x[n] = \delta[n]$

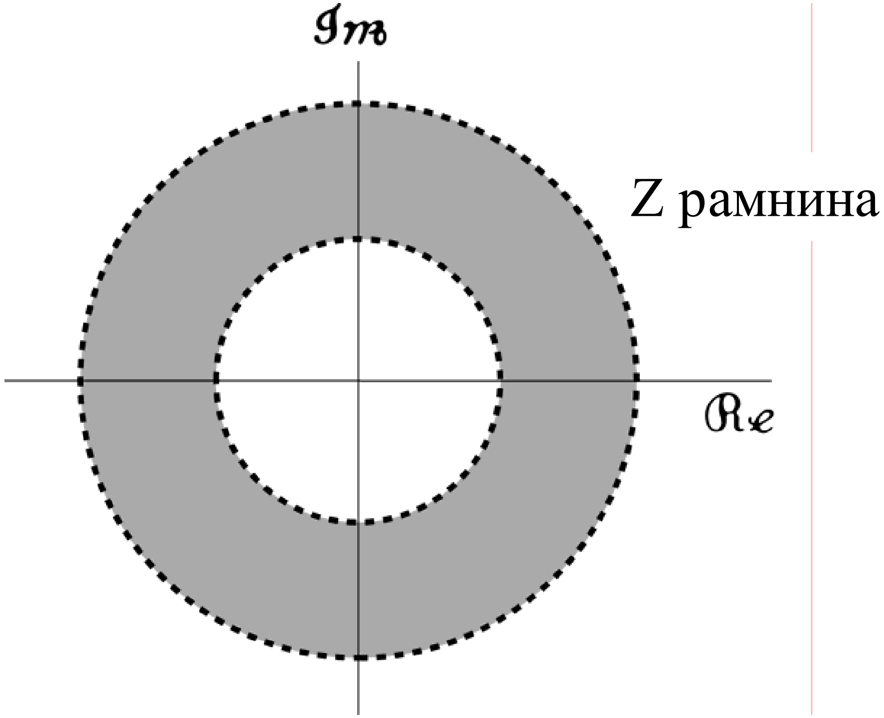
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 8z^{-4}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = z^{2} + 2z^{1} + 3 + 5z^{-1} + 8z^{-2}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = 1$$

Z трансформација

- Област на конвергенција: особини
- Областа на конвергенција на $X(z)$ претставува прстен во z-рамнината, центриран околу координатниот почеток (еквивалентно на вертикална лента во s-рамнината)



Z трансформација

- Област на конвергенција: особини
- Областа на конвергенција не содржи ниту еден пол (исто како кај Лапласова трансформација)

- Ако $x[n]$ е со конечна должина област на конвергенција е целата рамнина, освен можеби $z = 0$ и/или $z = \infty$

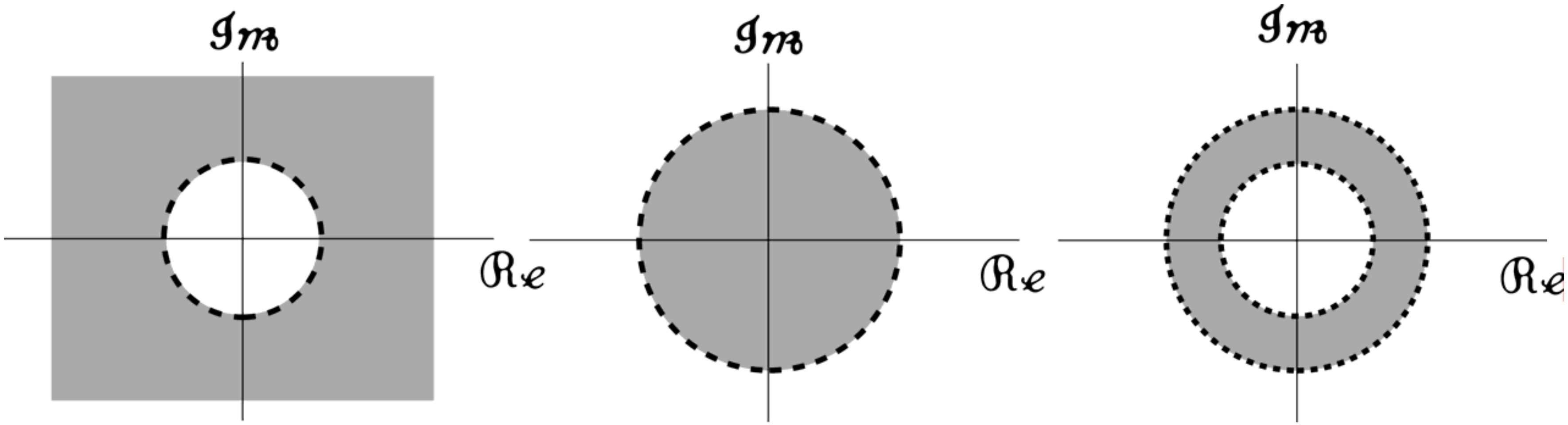
$$\delta[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$ ROC цела z рамнина

$$\delta[n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-1] z^{-n} = z^{-1}$$ ROC $z \neq 0$

$$\delta[n+1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1] z^{-n} = z^{1}$$ ROC $z \neq \infty$

Z трансформација

- Област на конвергенција: особини
- На какви низи одговараат следните ROC?



Каузална низа

Антикаузална низа

Двострана низа

Z трансформација: особини

$x_1[n] \xleftrightarrow{ZT} X_1(z)$ Радиус на конвергенција R_{x_1}

$x_2[n] \xleftrightarrow{ZT} X_2(z)$ Радиус на конвергенција R_{x_2}

- Линеарност

$$\boxed{Z\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1(z) + bX_2(z)} \qquad R_x = R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

- Поместување во време

$$\boxed{Z\{x[n-n_0]\} = z^{-n_0} X(z)} \qquad R_x$$

Z трансформација: особини

- Множење со експоненцијална низа

$$Z\{a^n x[n]\} = X\left(\frac{z}{a}\right) \qquad |a|R_x$$

- Множење со *n* (диференцирање во z домен)

$$Z\{nx[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R_x$$

- Конволуција

$$Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z) \qquad R_x = R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

Z трансформација: особини

- Конјугирана низа

$$\boxed{Z\{x^*[n]\} = X^*(z^*)}$$

$$R_x$$

  – Ако $x[n]$ е реална, $X(z) = X^*(z^*)$

  => Ако $X(z)$ има пол (или нула) во $z = z_0$, мора да има и пол (или нула) во $z = z_0^*$

- Почетна вредност на сигналот
  – Ако $x[n] = 0$, за $n < 0$

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Z трансформација: особини

- Крајна вредност на сигналот

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

Z трансформација: особини

- Пример: $y[n] = (n+1)a^n u[n]$

$$= x[n] + nx[n] \qquad \text{каде } x[n] = a^n u[n]$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$$

$$Z\{nx[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dz} \quad (|z| > |a|)$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{az}{(z-a)^2} = \frac{z^2}{(z-a)^2} \qquad (|z| > |a|)$$

Z трансформација: особини

- Задача за решавање на час:

а) $y[n] = u[n] - u[n-10]$

помош

$$Z\{u[n]\} = ?$$

$$Z\{x[n-n_0]\} = z^{-n_0} X(z)$$

б) $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-2]$

Z трансформација: особини

- Задача за решавање на час:

а) $y[n] = u[n] - u[n-10]$

$$Z\{u[n]\} = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$$

$$Z\left\{u[n-10]\right\} = z^{-10}\frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$$

$$Z\left\{y[n]\right\} = \frac{z}{z-1} - z^{-10}\frac{z}{z-1} = \frac{z(1-z^{-10})}{z-1} = \frac{z^{-10}-1}{z^{9}(z-1)} \qquad |z| > 1$$

б) $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n-2] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$

$$Z\left\{y[n]\right\} = \frac{1}{4}z^{-2}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

Z трансформација: особини

- Конволуција

$$Z\{x_1[n]*x_2[n]\}=X_1(z)X_2(z)$$

пример

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$h[n]=u[n]$$

$$Z\{x[n]*h[n]\}=?$$

$$Z\{x[n]*h[n]\}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\cdot\frac{z}{z-1}$$

Инверзна Z трансформација

- Инверзна z трансформација:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

каде Γ е затворена крива која лежи во областа на конвергенција и го опфаќа координатниот почеток

- Во пракса z трансформација бараме
  - Со разложување на просто дробни рационални функции и користење на таблица
  - Со директно делење
  - Со употреба на Кошиевата теорема на остатоци

Инверзна Z трансформација

- Пример: разлагање на просто-дробно рационални функции:

$$\boxed{X(z)=\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}},\quad |z|>\frac{1}{2}}$$

$$X(z)=\frac{z^2}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}=\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})}=\frac{K_1}{(z-\frac{1}{4})}+\frac{K_2}{(z-\frac{1}{2})}$$

$$K_1=\frac{X(z)}{z}(z-\frac{1}{4})\Big|_{z=\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=-1$$

$$K_2=\frac{X(z)}{z}(z-\frac{1}{2})\Big|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=2$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{-1}{(z-\frac{1}{4})}+\frac{2}{(z-\frac{1}{2})}$$

$$X(z)=-\frac{z}{(z-\frac{1}{4})}+\frac{2z}{(z-\frac{1}{2})}$$

$$\boxed{Z\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=a^{|n|}u[n]}$$

$$x[n]=-\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Инверзна Z трансформација

- Пример: разлагање на просто-дробно рационални функции:

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}},\quad |z|<\frac{1}{4}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1}{\left(z^{-1}-4\right)\left(z^{-1}-2\right)}$$

$$\frac{X(z)}{z^{-1}}=\frac{1}{z^{-1}(z^{-1}-4)(z^{-1}-2)}=$$

$$=\frac{K_0}{z^{-1}}+\frac{K_1}{(z^{-1}-4)}+\frac{K_2}{(z^{-1}-2)}$$

$$K_0=\frac{X(z)}{z^{-1}}z^{-1}\Big|_{z^{-1}=0}=\frac{1}{(-4)(-2)}=\frac{1}{8}$$

$$K_1=\frac{X(z)}{z^{-1}}(z^{-1}-4)\Big|_{z^{-1}=4}=\frac{1}{4(4-2)}=\frac{1}{8}$$

$$K_2=\frac{X(z)}{z^{-1}}(z^{-1}-2)\Big|_{z^{-1}=2}=\frac{1}{2(2-4)}=-\frac{1}{4}$$

Инверзна Z трансформација

$$\frac{X(z)}{z^{-1}} = \frac{1}{8}\frac{1}{z^{-1}} + \frac{1}{8}\frac{1}{(z^{-1}-4)} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z^{-1}-2)}$$

$$X(z) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\frac{1}{1-4z} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-2z}$$

$$Z\left\{\frac{1}{1-az}\right\} = a^{|n|}u[-n]$$

$$x[n] = \frac{1}{8}\delta[n] + \frac{1}{8}4^{|n|}u[-n] - \frac{1}{4}2^{|n|}u[-n]$$

Инверзна Z трансформација

- Пример: разлагање на просто-дробно рационални функции:

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}},\quad |z|<\frac{1}{4}$$

$$X(z)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\frac{1}{1-4z}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-2z}$$

$$Z\left\{\frac{1}{1-az}\right\}=a^{|n|}u[-n]$$

$$x[n]=\frac{1}{8}\delta[n]+\frac{1}{8}4^{|n|}u[-n]-\frac{1}{4}2^{|n|}u[-n]$$

Инверзна Z трансформација

- Пример: разлагање на просто-дробно рационални функции:

$$\boxed{X(z)=\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}},\quad \frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{2}}$$

$$X(z)=\frac{z^2}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}=1+\underbrace{\frac{\frac{3}{4}z-\frac{1}{8}}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}}_{X'(z)}$$

$$X'(z)=\frac{\frac{3}{4}z-\frac{1}{8}}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})}=\frac{K_1}{(z-\frac{1}{4})}+\frac{K_2}{(z-\frac{1}{2})}$$

$$K_1=X'(z)(z-\frac{1}{4})\Big|_{z=\frac{1}{4}}=-\frac{1}{4}$$

$$K_2=X'(z)(z-\frac{1}{2})\Big|_{z=\frac{1}{2}}=1$$

Инверзна Z трансформација

$$X(z) = 1 + \frac{-\frac{1}{4}}{z - \frac{1}{4}} + \frac{1}{z - \frac{1}{2}} = X_+(z) + X_-(z)$$

$$X_+(z) = 1 + \frac{-\frac{1}{4}}{z - \frac{1}{4}} = 1 + 1 - \frac{z}{z - \frac{1}{4}}$$

$$Z\left\{\frac{1}{1 - az}\right\} = a^{|n|}u[-n]$$

$$X_-(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2}} = -\frac{2}{1 - 2z}$$

$$x[n] = 2\delta[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2 \cdot 2^{|n|} u[-n]$$

Инверзна Z трансформација

- Задача за решавање на час:

  а) Да се нацрта пол-нула дијаграмот на функцијата и да се означат сите можни области на конвергенција

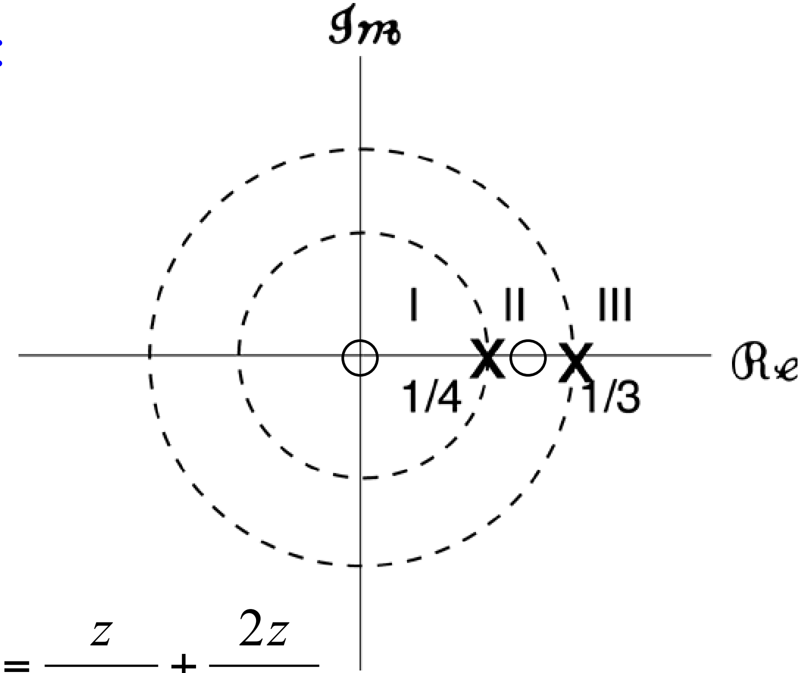
$$X(z)=\frac{3z^2-\frac{5}{6}z}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{3})}$$

  б) Да се одреди инверзната z трансформација ако ROC е $|z|>\frac{1}{3}$

Инверзна Z трансформација

- Задача за решавање на час:

а)



б)

$$X(z) = \frac{3z^2 - \frac{5}{6}z}{(z - \frac{1}{4})(z - \frac{1}{3})} = \cdots = \frac{z}{z - \frac{1}{4}} + \frac{2z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Инверзна Z трансформација

- Низа со конечна должина

$$X(z) = z^2(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})(1-z^{-1})$$

Со множење, Z трансформацијата постанува

$$X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$$

$x[n]$ = коефициенти пред z^{-1}

$$\{x[n], n = -2,-1,0,1\} = \{1,-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}\}$$

$$x[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

Инверзна Z трансформација

- Директно делење

$$X(z) = \frac{z}{z-a}$$

$$z:(z-a) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} +$$

$$\underline{z-a}$$

$$a$$

$$\underline{a - a^2 z^{-1}}$$

$$a^2 z^{-1} \ldots$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \ldots \quad \text{односно} \quad x[n] = a^n u[n]$$

Фреквенциски спектар

- Фреквенциски спектар на сигнал: Z трансформација на дискретниот сигнал $\{f[n]\}$, пресметана на единичната кружница $z = \exp(jwT)$

$$Z\{f[nT]\}\Big|_{z=e^{j\omega T}} = F(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = F(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[nT]e^{-jn\omega T}$$

  – дефиниран е само кога единичната кружница се наоѓа во областа на конвергенција на $F(z)$

  – Периодична функција од ω со период $2\pi / T$ каде T е период на дискретизација на сигналот

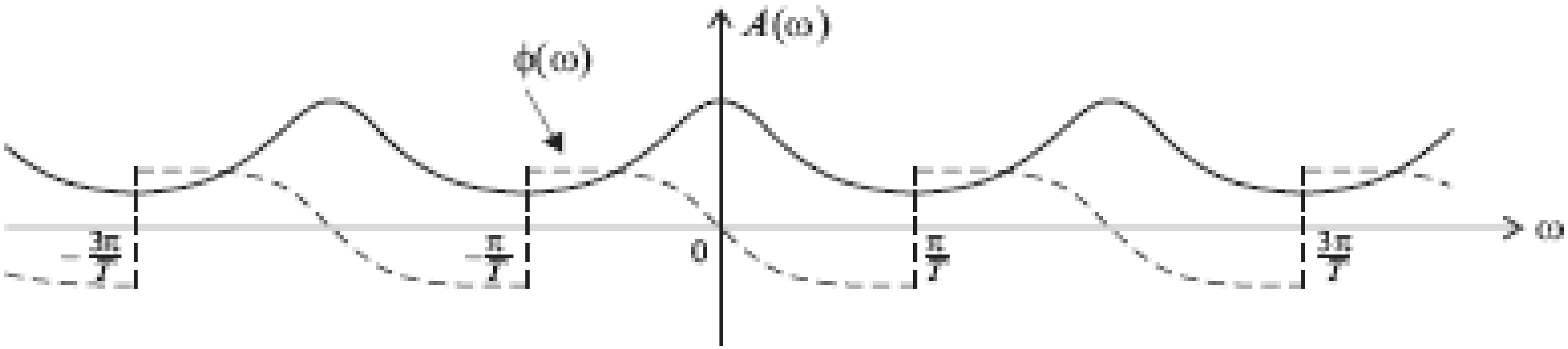
  – коефициентите од неговиот развој во Фуриеов ред се поклопуваат со примероците од оригиналниот дискретен сигнал

Фреквенциски спектар

- Амплитуден спектар $A(\omega) = \left| F(e^{j\omega T}) \right|$

- Фазен спектар $\phi(\omega) = \angle F(e^{j\omega T})$

- кога сигналот е реален $f^*[n] = f[n]$, амплитудниот спектар е парна функција $A(-\omega) = A(\omega)$ а фазниот спектар е непарна функција $\phi(-\omega) = -\phi(\omega)$ од кружната фреквенција ω



Парсевалова теорема

- Со точност од мултипликативна константа $T/2\pi$, енергијата на дискретниот сигнал $f[nT]$ останува инваријантна кога тој е претставен со неговиот фреквенциски спектар $F(e^{j\omega T})$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| f[nT] \right|^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left| F(e^{j\omega T}) \right|^2$$