СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

Системи

Решени задачи:

1. Кои од следните системи зададени со релацијата влез-излез:

а) $y(t)=3x(t+2)$ б) $y(t)=x(t)\cdot\cos(3t)$ в) $y(t)=x\left(\frac{t}{3}\right)$

г) $y[n]=x[n-2]-2x[n-8]+2$ д) $y[n]=x[-n]$ ѓ) $y[n]=n\cdot x[n]$

се:

I) каузални
II) без меморија
III) линеарни
IV) временски инваријантни

Решение:
I) Еден систем е каузален ако вредноста на излезниот сигнал зависи само од моменталната и/или од минатите вредности на влезниот сигнал.
а) Системот зададен со релацијата $y(t)=3x(t+2)$ не е каузален, бидејќи излезниот сигнал зависи од идни вредности на влезниот сигнал. Пример: $y(5)=3x(7)$
б) Системот зададен со релацијата $y(t)=x(t)\cdot\cos(3t)$ е каузален бидејќи излезниот сигнал, за секоја вредност на *t*, зависи само од моменталната вредност на влезниот сигнал: $y(1)=x(1)\cdot\cos(3)$
в) Системот зададен со релацијата $y(t)=x\left(\frac{t}{3}\right)$ не е каузален бидејќи излезниот сигнал, за негативни вредности на *t*, зависи од идни вредности на влезниот сигнал. Пример: $y(-9)=x(-3)$.
г) Системот зададен со релацијата $y[n]=x[n-2]-2x[n-8]+2$ е каузален бидејќи излезниот сигнал, за сите вредности на *n*, зависи само од минати вредности на влезниот сигнал. Пример: $y[8]=x[6]-2x[0]+2$.
д) Системот зададен со релацијата $y[n]=x[-n]$ не е каузален бидејќи излезниот сигнал, за негативни вредности на *n*, зависи од идни вредности на влезниот сигнал. Пример: $y[-3]=x[3]$.
ѓ) Системот зададен со релацијата $y[n]=n\cdot x[n]$ е каузален бидејќи излезниот сигнал зависи само од моменталната вредност на влезниот сигнал. Пример: $y[4]=4\cdot x[4]$

II) Еден систем е без меморија ако вредноста на излезниот сигнал зависи само од моменталната вредност на влезниот сигнал.
а) Системот е со меморија бидејќи излезниот сигнал не зависи од моменталните вредности на влезниот сигнал. Пример: $y(5)=3x(7)$
б) Системот е без меморија бидејќи излезниот сигнал зависи само од моменталните вредности на влезниот сигнал. Пример: $y(1)=x(1)\cdot\cos(3)$
в) Системот е со меморија бидејќи излезниот сигнал, за вредности на *t* различни од нула, не зависи од моменталните вредности на влезниот сигнал. Пример: $y(-9)=x(-3)$
г) Системот е со меморија бидејќи излезниот сигнал не зависи од моменталните вредности на влезниот сигнал. Пример: $y[8]=x[6]-2x[0]+2$
д) Системот е со меморија бидејќи излезниот сигнал, за вредности на *n* различни од нула, не зависи од моменталните вредности на влезниот сигнал. Пример: $y[-3]=x[3]$
ѓ) Системот е без меморија бидејќи излезниот сигнал зависи само од моменталните вредности на влезниот сигнал. Пример: $y[4]=4\cdot x[4]$

III) Еден систем е линеарен ако го поседува својството на суперпозиција:
Ако на влезот на линеарен систем се примени влезен сигнал кој е линеарна комбинација од два различни влезни сигнали, тогаш и одзивот ќе биде иста таква линеарна комбинација од излезните сигнали кои одговараат на секој од влезовите применети поединечно. Ова својство се проверува на следниот начин:

а) Ако на влез од системот зададен со релацијата $y(t)=3x(t+2)$ се донесе сигналот $x_1(t)$ на излез ќе се добие сигналот $y_1(t)=3x_1(t+2)$, означуваме $x_1(t)\to y_1(t)$. Ако на влез на системот се донесе сигналот $x_2(t)$ на излез ќе се добие сигналот $y_2(t)=3x_2(t+2)$, означуваме $x_2(t)\to y_2(t)$. Ако пак на влез од системот се донесе сигналот $x_3(t)$, кој е линеарна комбинација на првите два: $x_3(t)=K_1x_1(t)+K_2x_2(t)$, на излез ќе се добие сигналот $y_3(t)=3x_3(t+2)$, означуваме $x_3(t)\to y_3(t)$. За да биде системот линеарен, излезниот сигнал $y_3(t)$ треба да биде еднаков со сигналот $K_1y_1(t)+K_2y_2(t)$. Се проверува дали важи ова равенство:

$y_3(t)=3x_3(t+2)=3(K_1x_1(t+2)+K_2x_2(t+2))\ \ ?=\ \ K_1y_1(t)+K_2y_2(t)$

$3K_1x_1(t+2)+3K_2x_2(t+2)\ \ ?=\ \ K_1y_1(t)+K_2y_2(t)$

$3K_1x_1(t+2)+3K_2x_2(t+2)\ \ ?=\ \ K_1 3x_1(t+2)+K_2 3x_2(t+2)$

Се гледа дека последниот израз претставува равенство, значи

$3K_1x_1(t+2)+3K_2x_2(t+2)\ \ =\ \ K_1 3x_1(t+2)+K_2 3x_2(t+2)$

односно, системот зададен со релацијата $y(t)=3x(t+2)$ е линеарен.

б) Системот е зададен со релацијата $y(t)=x(t)\cdot\cos(3t)$

$x_1(t)\to y_1(t)=x_1(t)\cos(3t)$

$x_2(t)\to y_2(t)=x_2(t)\cos(3t)$

$x_3(t)=K_1x_1(t)+K_2x_2(t)$

$x_3(t)\to y_3(t)=x_3(t)\cos(3t)=[K_1x_1(t)+K_2x_2(t)]\cos(3t)=K_1x_1(t)\cos(3t)+K_2x_2(t)\cos(3t)$

$K_1y_1(t)+K_2y_2(t)=K_1x_1(t)\cos(3t)+K_2x_2(t)\cos(3t)$

Од последните две равенства се гледа дека $y_3(t)=K_1y_1(t)+K_2y_2(t)$, што значи дека системот е линеарен.

в) Системот е зададен со релацијата $y(t)=x\left(\dfrac{t}{3}\right)$

$x_1(t)\to y_1(t)=x_1\left(\dfrac{t}{3}\right)$

$x_2(t)\to y_2(t)=x_2\left(\dfrac{t}{3}\right)$

$x_3(t)=K_1x_1(t)+K_2x_2(t)$

$x_3(t)\to y_3(t)=x_3\left(\dfrac{t}{3}\right)=K_1x_1\left(\dfrac{t}{3}\right)+K_2x_2\left(\dfrac{t}{3}\right)=K_1y_1(t)+K_2y_2(t)\Rightarrow$ системот е линеарен.

г) Системот е зададен со релацијата $y[n]=x[n-2]-2x[n-8]+2$

$x_1[n]\to y_1[n]=x_1[n-2]-2x_1[n-8]+2$

$x_2[n]\to y_2[n]=x_2[n-2]-2x_2[n-8]+2$

$x_3[n]=K_1x_1[n]+K_2x_2[n]$

$x_3[n]\to y_3[n]=x_3[n-2]-2x_3[n-8]+2=K_1x_1[n-2]+K_2x_2[n-2]-2K_1x_1[n-8]-2K_2x_2[n-8]+2$

$K_1y_1[n]+K_2y_2[n]=K_1\{x_1[n-2]-2x_1[n-8]+2\}+K_2\{x_2[n-2]-2x_2[n-8]+2\}=$

$K_1x_1[n-2]+K_2x_2[n-2]-2K_1x_1[n-8]-2K_2x_2[n-8]+2K_1+2K_2$

Бидејќи во овој случај не важи равенството $y_3[n]=K_1y_1[n]+K_2y_2[n]$ следува дека системот не е линеарен.

д) Системот е зададен со релацијата $y[n]=x[-n]$

$x_1[n]\to y_1[n]=x_1[-n]$

$x_2[n] \to y_2[n] = x_2[-n]$

$x_3[n] = K_1 x_1[n] + K_2 x_2[n]$

$x_3[n] \to y_3[n] = x_3[-n] = K_1 x_1[-n] + K_2 x_2[-n] = K_1 y_1[n] + K_2 y_2[n] \Rightarrow$ системот е линеарен.

ѓ) Системот е зададен со релацијата $y[n] = n \cdot x[n]$

$x_1[n] \to y_1[n] = n x_1[n]$

$x_2[n] \to y_2[n] = n x_2[n]$

$x_3[n] = K_1 x_1[n] + K_2 x_2[n]$

$x_3[n] \to y_3[n] = n x_3[n] = n K_1 x_1[n] + n K_2 x_2[n] = K_1 y_1[n] + K_2 y_2[n] \Rightarrow$ системот е линеарен.

IV) Временски инваријантен (перманентен) систем е оној систем чиишто карактеристики не зависат од времето. Испитувањето дали еден систем е перманентен се врши на следниот начин:
а) Ако на влез од системот зададен со релацијата $y(t) = 3x(t+2)$ се донесе сигналот $x_1(t)$, на излез ќе се добие сигналот $y_1(t) = 3x_1(t+2)$, означуваме $x_1(t) \to y_1(t)$. Ако на влез на системот се донесе сигналот $x_2(t)$ којшто е временски поместена верзија на $x_1(t)$ за вредност t_0, значи $x_2(t) = x_1(t - t_0)$, на излез ќе се добие сигналот $y_2(t) = 3x_2(t+2) = 3x_1(t + 2 - t_0)$, означуваме $x_2(t) \to y_2(t)$. Ако важи равенството $y_2(t) = y_1(t - t_0)$ тогаш системот е временски инваријантен, односно перманентен.

$y_1(t - t_0) = 3x_1(t - t_0 + 2) = y_2(t) \Rightarrow$ системот е перманентен.

б) $x_1(t) \to y_1(t) = x_1(t)\cos(3t)$

$x_2(t) = x_1(t - t_0) \to y_2(t) = x_2(t)\cos(3t) = x_1(t - t_0)\cos(3t)$

$y_1(t - t_0) = x_1(t - t_0)\cos(3(t - t_0))$

$y_2(t) \neq y_1(t - t_0) \Rightarrow$ системот не е перманентен

в) $x_1(t) \to y_1(t) = x_1\left(\frac{t}{3}\right)$

$x_2(t) = x_1(t - t_0) \to y_2(t) = x_2\left(\frac{t}{3}\right) = x_1\left(\frac{t}{3} - t_0\right)$

$y_1(t - t_0) = x_1\left(\frac{t - t_0}{3}\right) = x_1\left(\frac{t}{3} - \frac{t_0}{3}\right) \neq y_2(t) \Rightarrow$ системот не е перманентен.

г) $x_1[n] \to y_1[n] = x_1[n-2] - 2x_1[n-8] + 2$

$x_2[n] = x_1[n - n_0] \to y_2[n] = x_2[n-2] - 2x_2[n-8] + 2 = x_1[n - n_0 - 2] - 2x_1[n - n_0 - 8] + 2$

$y_1[n - n_0] = x_1[n - n_0 - 2] - 2x_1[n - n_0 - 8] + 2 = y_2[n] \Rightarrow$ системот е перманентен

д) $x_1[n] \to y_1[n] = x_1[-n]$

$x_2[n] = x_1[n - n_0] \to y_2[n] = x_2[-n] = x_1[-n - n_0]$

$y_1[n - n_0] = x_1[-(n - n_0)] = x_1[-n + n_0] \neq y_2[n] \Rightarrow$ системот не е перманентен

ѓ) $x_1[n] \to y_1[n] = n x_1[n]$

$x_2[n] = x_1[n - n_0] \to y_2[n] = n x_2[n] = n x_1[n - n_0]$

$y_1[n - n_0] = (n - n_0) x_1[n - n_0] \neq y_2[n] \Rightarrow$ системот не е перманентен