ОСНОВИ НА ДИГИТАЛНО ПРОЦЕСИРАЊЕ НА СИГНАЛИ
Z-трансформација

Решени задачи:

1. Користејќи ги својствата на Z-трансформација и табелата на Z-трансформација, да се одреди Z-тр. на следните низи:

а) $x[n]=(n-2)\cdot(0.5)^{n-2}\cdot u[n-2]+4\cdot\delta[n+1]$

б) $x[n]=\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}\cdot u[-n]$

Решение:

а) $X(z)=z^{-2}\cdot Z\{n\cdot(0.5)^n\cdot u[n]\}+4\cdot z,\quad Z\{4\cdot\delta[n+1]\}=4\cdot z\cdot Z\{\delta[n]\}=4\cdot z,\quad |z|<\infty$

$$Z\{n\cdot(0.5)^n\cdot u[n]\}=-z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{z-0.5}\right),\quad |z|>0.5$$

$$-z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{z-0.5}\right)=-z\frac{z-0.5-z}{(z-0.5)^2}=\frac{0.5\cdot z}{(z-0.5)^2}$$

$$X(z)=z^{-2}\frac{0.5\cdot z}{(z-0.5)^2}+4\cdot z=\frac{0.5\cdot z^{-1}+4\cdot z\cdot(z^2-z+0.25)}{(z-0.5)^2}=$$

$$X(z)=\frac{4\cdot z^4-4\cdot z^3+z^2+0.5}{z\cdot(z-0.5)^2},\quad |z|>0.5$$

б) $x[n]=\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}\cdot u[-n]$

$$x[n]=\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{n}\cdot u[-n]$$

$$x[n]=\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{-|n|}\cdot u[-n],\quad x[n]=0\quad for\quad n>0,\quad n=-|n|\quad for\quad n\le 0$$

$$x[n]=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{2}{\pi}\right)^{|n|}\cdot u[-n]$$

$$X(z)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{\pi}\right)\cdot z}=\frac{\frac{\pi^2}{4}}{1+\frac{2}{\pi}\cdot z}=\frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{1}{z+\frac{\pi}{2}},\quad |z|<\frac{\pi}{2}$$

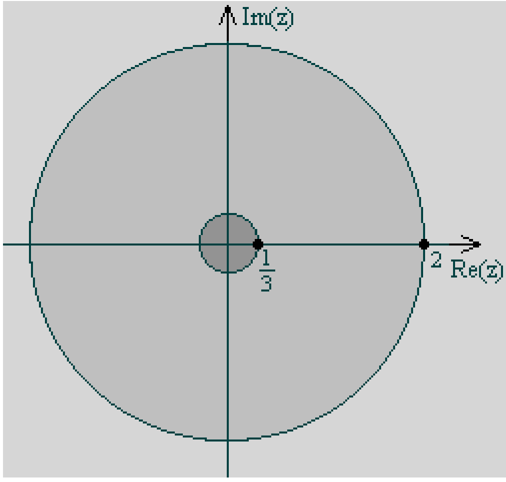
2. Да се одредат сите возможни низи чијашто Z-трансформација е функцијата:

$$X(z)=\frac{5\cdot z}{(z-2)\cdot(3\cdot z-1)}$$

Решение:

Функцијата $X(z)$ има два пола: $p_1 = 2$ и $p_2 = \frac{1}{3}$. Овие два пола ја делат комплексната z-рамнина на три области на конвергенција (слика 1), па според тоа постојат три дискретни низи $x_1[n], x_2[n]$ и $x_3[n]$ чијашто Z-трансформација е $X(z)$. Областите на конвергенција се следниве:

- $|z| < \frac{1}{3} \Rightarrow$ антикаузална низа;
- $\frac{1}{3} < |z| < 2 \Rightarrow$ двострана низа;
- $|z| > 2 \Rightarrow$ каузална низа;



Слика 1

Прво, ќе ја бараме низата чија Z-трансформација е $X(z)$ за $|z| < \frac{1}{3}$ т.е. ќе ја бараме антикаузалната низа $x_1[n]$. За таа цел, дробно-рационалната функција $X(z)$ ја разложуваме на прости дробно-рационални функции:

$$X(z) = \frac{5 \cdot z}{3 \cdot (z-2) \cdot \left(z - \frac{1}{3}\right)} = \frac{K_1}{z-2} + \frac{K_2}{z - \frac{1}{3}}$$

$$K_1 = \lim_{z \to 2}\big(X(z) \cdot (z-2)\big) = \frac{10}{3 \cdot \left(2 - \frac{1}{3}\right)} = 2; \quad K_2 = \lim_{z \to \frac{1}{3}}\left(X(z) \cdot \left(z - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\frac{5}{3}}{3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)} = -\frac{1}{3}$$

$$X(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{3}} = -\frac{2}{2-z} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{3} \cdot (1 - 3 \cdot z)} = -\frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z} + \frac{1}{1 - 3 \cdot z}$$

Значи функцијата $X(z)$ ја доведовме во облик од кој, користејќи ја табелата на Z-трансформација, може директно да се одреди инверзна Z-трансформација:

$$x_1[n] = 3^{|n|} \cdot u[-n] - \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cdot u[-n]$$

Сега, ќе ја бараме каузалната низа $x_3[n]$ чијашто Z-трансформација $X(z)$ конвергира за $|z| > 2$. За таа цел, функцијата $\frac{X(z)}{z}$ ја разложуваме на прости дробно-рационални функции:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{5}{3\cdot(z-2)\cdot\left(z-\frac{1}{3}\right)}=\frac{K_1}{z-2}+\frac{K_2}{z-\frac{1}{3}}$$

$$K_1=\lim_{z\to 2}\left(\frac{X(z)}{z}\cdot(z-2)\right)=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2-\frac{1}{3}}=1;\quad K_2=\lim_{z\to\frac{1}{3}}\left(\frac{X(Z)}{z}\cdot\left(z-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}-2}=-1$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-\frac{1}{3}};\quad X(z)=\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

Користејќи ја таблицата за инверзната Z-трансформација лесно се добива:

$$x_3[n]=2^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot u[n]$$

Ни остана уште да ја најдеме двостраната низа $x_2[n]$ чијашто Z-трансформација $X(z)$ конвергира за $\frac{1}{3}<|z|<2$. Најпрво, ја разложуваме функцијата $X(z)$ на прости дробно-рационални функции, а потоа ја пишуваме во облик $X(z)=X_+(z)+X_-(z)$, каде $X_+(z)$ е Z-трансформација на каузалниот дел $x_{2+}[n]$, а $X_-(z)$ е Z-трансформација на антикаузалниот дел $x_{2-}[n]$ од низата $x_2[n]$. Во $X_+(z)$ ќе влезат членовите чии полови по модул се помали или еднакви на $R_+=\frac{1}{3}$, а во $X_-(z)$ ќе влезат членовите чии полови по модул се поголеми или еднакви на $R_-=2$. Потоа, посебно се бараат $x_{2+}[n]$ и $x_{2-}[n]$ според постапките опишани претходно, за барање на каузално и антикаузално решение:

$$X(z)=\frac{5\cdot z}{3\cdot(z-2)\cdot\left(z-\frac{1}{3}\right)}=\frac{K_1}{z-2}+\frac{K_2}{z-\frac{1}{3}}$$

$$K_1=\lim_{z\to 2}\left(X(z)\cdot(z-2)\right)=\frac{10}{3\cdot\left(2-\frac{1}{3}\right)}=2;\quad K_2=\lim_{z\to\frac{1}{3}}\left(X(z)\cdot\left(z-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{\frac{5}{3}}{3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}=-\frac{1}{3}$$

$$X(z)=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{3}}=X_+(z)+X_-(z)$$

$$X_+(z)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-\frac{1}{3}};\quad X_-(z)=\frac{2}{z-2}$$

$$\frac{X_+(z)}{z}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z\cdot\left(z-\frac{1}{3}\right)}=\frac{K_1}{z}+\frac{K_2}{z-\frac{1}{3}};\quad K_1=\lim_{z\to 0}\left(\frac{X_+(z)}{z}\cdot z\right)=1;K_2=\lim_{z\to\frac{1}{3}}\left(\frac{X_+(z)}{z}\cdot\left(z-\frac{1}{3}\right)\right)=-1$$

$$X_+(z)=1-\frac{z}{z-\frac{1}{3}};\quad X_-(z)=\frac{2}{z-2}=-\frac{2}{2-z}=-\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot z}$$

Оттука следува:

$$x_{2+}[n]=\delta[n]-\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot u[n];\quad x_{2-}[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\cdot u[-n];\quad x_2[n]=x_{2+}[n]+x_{2-}[n]$$

$$x_2[n]=\delta[n]-\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\cdot u[-n]$$

3. Да се одреди двостраната низа чијашто Z-трнасформација е функцијата:

$$F(z) = \frac{z^2+1}{z^2+z-2}$$

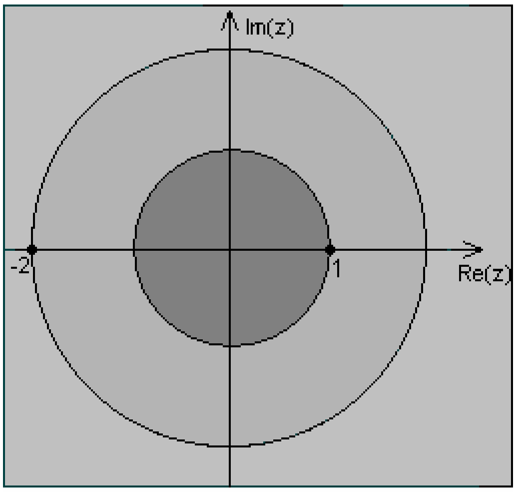
Решение:

Ако се реши полиномот во броителот, функцијата $F(z)$ може да се запише во облик:

$$F(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)\cdot(z-1)}$$

Значи, функцијата $F(z)$ има два пола: $p_1 = -2$ и $p_2 = 1$ кои ја делат z-рамнината на три области на конвергенција (Слика 2):

- $|z| < 1 \Rightarrow$ антикаузална низа
- $1 < |z| < 2 \Rightarrow$ двострана низа
- $|z| > 2 \Rightarrow$ каузална низа



Слика 2

Ние треба да ја најдеме двостраната низа $f[n]$ чијашто Z-трансформација конвергира за $1 < |z| < 2$. Прво, треба да ја разложиме $F(z)$ на прости дробно-рационални изрази. Меѓутоа, за да може да ја разложуваме функцијата $F(z)$, треба највисокиот степен на полиномот во броителот (во нашиот случај 2) да биде помал од највисокиот степен на полиномот во именителот (исто така 2). Бидејќи ова не е исполнето прво треба да се поделат полиномите во броителот и именителот за да функцијата $F(z)$ се доведе во облик кој не содржи дробно рационален израз во кој степенот во броителот е поголем или еднаков на степенот во именителот, т.е. за да може да ја разложуваме:

$$(z^2+1):(z^2+z-2) = 1$$

$$\frac{-z^2-z+2}{-z+3}$$

$$F(z) = 1 + \frac{-z+3}{z^2+z-2} = 1 - \frac{z-3}{z^2+z-2} = 1 - F'(z)$$

Во овој случај доволен беше само еден чекор во делењето бидејќи највисокиот степен во остатокот од првото делење (-z+3) е помал од 2. Сега, може да ја разложуваме функцијата $F'(z)$:

$$F'(z) = \frac{z-3}{z^2+z-2} = \frac{z-3}{(z+2)\cdot(z-1)} = \frac{K_1}{z+2} + \frac{K_2}{z-1}$$

$$K_1 = \lim_{z\to -2}\left(F'(z)\cdot(z+2)\right) = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}; \quad K_2 = \lim_{z\to 1}\left(F'(z)\cdot(z-1)\right) = -\frac{2}{3}$$

$$F'(z) = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{z+2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z-1}; \quad F(z) = 1 - \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{z+2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z-1} = F_+(z) + F_-(z)$$

$$F_+(z) = 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z-1} = \frac{z-\frac{1}{3}}{z-1};\quad F_-(z) = -\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{z+2};$$

$$\frac{F_+(z)}{z} = \frac{z-\frac{1}{3}}{z\cdot(z-1)} = \frac{K_1}{z} + \frac{K_2}{z-1};\quad K_1 = \lim_{z\to 0}\left(\frac{F_+(z)}{z}\cdot z\right) = \frac{1}{3};\quad K_2 = \lim_{z\to 1}\left(\frac{F_+(z)}{z}\cdot(z-1)\right) = \frac{2}{3}$$

$$F_+(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{z}{z-1};\quad F_-(z) = -\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{z+2} = -\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot z}$$

$$f_+[n] = \frac{1}{3}\cdot\delta[n] + \frac{2}{3}\cdot u[n];\quad f_-[n] = -\frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{|n|}\cdot u[-n];\quad f[n] = f_+[n] + f_-[n]$$

$$f[n] = \frac{1}{3}\cdot\delta[n] + \frac{2}{3}\cdot u[n] - \frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{|n|}\cdot u[-n]$$

4. Да се одреди инверзна Z-трансформација на функцијата $Y(z)$ ако $0 < |z| < \infty$

$$Y(z) = \left(1 - z^{-1}\right)\cdot\left(1 + 2\cdot z\right)\cdot\left(1 + 3\cdot z^{-1}\right)$$

Решение:

$$Y(z) = \left(1 - z^{-1} + 2\cdot z - 2\right)\cdot\left(1 + 3\cdot z^{-1}\right)$$

$$Y(z) = 1 - z^{-1} + 2\cdot z - 2 + 3\cdot z^{-1} - 3\cdot z^{-2} + 6 - 6\cdot z^{-1}$$

$$Y(z) = 2\cdot z + 5 - 4\cdot z^{-1} - 3\cdot z^{-2}$$

$$y[n] = 2\cdot\delta[n+1] + 5\cdot\delta[n] - 4\cdot\delta[n-1] - 3\cdot\delta[n-2]$$