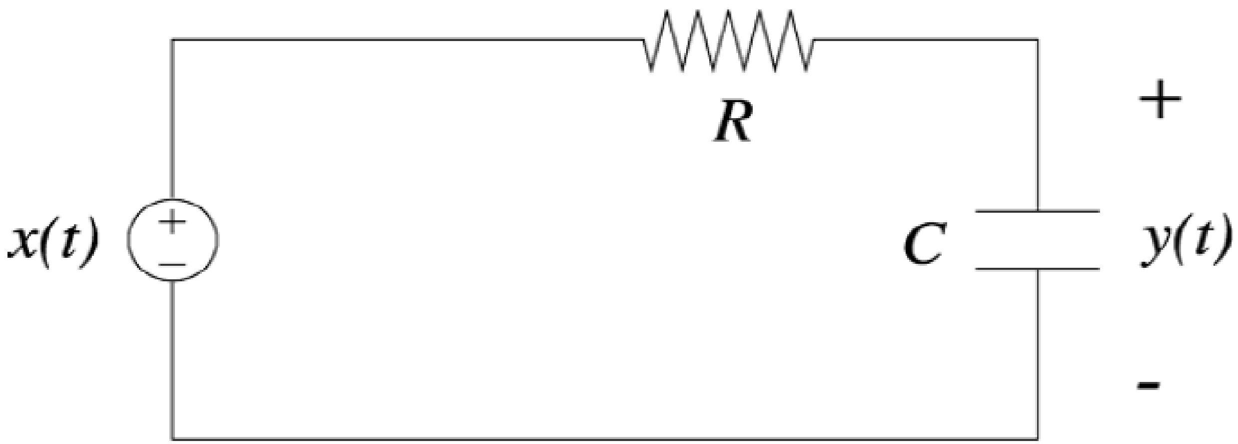
# LTI системи дефинирани со линеарни диференцијални равенки

- Диференцијална равенка со константни коефициенти




$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

# Линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти

- Линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t)$$

  – Нека претпоставиме дека влезниот сигнал е од облик

$$x(t) = 5u(t)$$

  – Решението се состои од две компоненти

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

партикуларно решение

општо решение

# Линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти

- Парикуларно решение $y_p(t)$ е кое било решение што ја задоволува диференцијалната равенка

  Има ист облик како и влезниот сигнал

нека $y_p(t) = Y$ (бидејќи влезниот сигнал е $x(t) = 5 \quad за \quad t \geq 0$ )

Со замена во диф. равенка

$$0 + 2Y = 2 \cdot 5$$
$$Y = 5$$

$$\Rightarrow y_p(t) = 5 \quad за \quad t > 0$$

# Линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти

- Општото решение $y_h(t)$ е решение на хомогената диф. равенка

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

$$y_h(t) = Ae^{st}$$

$$sAe^{st} + 2Ae^{st} = Ae^{st}(s+2) = 0$$

$$\Rightarrow s = -2$$

$$y(t) = Ae^{-2t} + 5, \quad t > 0$$

# Линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти

$$y(t) = Ae^{-2t} + 5, \quad t > 0$$

- Константа А се одредува од почетните услови

$$0 = A + 5$$

$$\Rightarrow A = -5$$

- Конечно

$$y(t) = 5(1 - e^{-2t}), \quad t \geq 0$$

# Линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти

- Општ облик на диференцијална раванка

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^m - 1} + \ldots b_m x(t)$$

- Хомогена диференцијална равенка

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y(t) = 0$$

- Карактеристичен полином

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n s = 0$$

# Линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти

- Решение: се состои од две компоненти

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

- Партикуларното решение има ист облик како влезниот сигнал
- Општото решение е од облик

$$y_h(t) = \sum_k A_k e^{s_k t}$$

$s_k$ се корени на карактеристичниот полином

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n s = 0$$

# Линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти

- Константите $A_k$ се одредуваат (и зависат) од почетните услови и од вредноста на излезниот сигнал и неговите изводи во моментот $t = 0$.

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \quad t = t_0$$

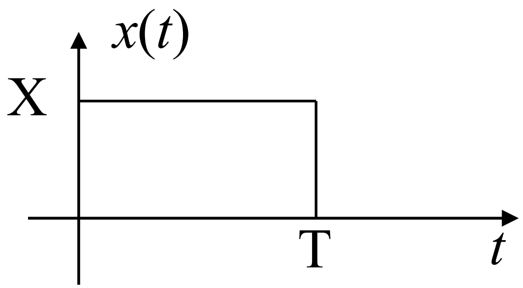
# LTI системи дефинирани со линеарни диференцијални равенки

- Задача за вежбање: Влезниот и излезниот сигнал на LTI систем се поврзани преку диференцијалната равенка

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{1}{2}x(t)$$

а) Да се одреди индиционият одзив на системот

б) Да се одреди одзивот ако влезниот сигнал е прикажан на сликата



# Компоненти на одзивот

- Форсиран одзив: Одзив (излезен сигнал) на систем во кој делува **влезен сигнал** кога системот е во **релаксирана состојба**
- Се добива како решение на **нехомогената** диференцијална равенка со **почетни услови нула**.
- Облик:

$$y(t) = \sum_k A_k e^{s_k t} + y_p(t)$$

# Компоненти на одзивот

- Слободен одзив: Одзив (излезен сигнал) на систем во кој не делува влезен сигнал, а одзивот е резултат на состојба на меморијата различна од нула.

- Се добива како решение на **хомогената** диференцијална равенка со **почетни услови различни од нула**.

- Облик: $$y(t) = \sum_k B_k e^{s_k t}$$

# Компоненти на одзивот

- Комплетен одзив: Одзив на систем во кој делува **влезен сигнал** и кој не е во **релаксирана состојба**

- Се добива како решение на **нехомогената** диференцијална равенка со **почетни услови различни од нула**.

- Облик:

$$y(t) = \sum_k C_k e^{s_k t} + y_p(t) = \sum_k (A_k + B_k) e^{s_k t} + y_p(t)$$

# Компоненти на одзивот

- Принуден одзив:

$y_p(t) = \lim_{t\to\infty} y(t)$ е одзив (излезен сигнал) кон кој се стреми системот кога $t \to \infty$

- Преоден одзив:

$y_t(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_k C_k e^{s_k t}$ е одзив (излезен сигнал) кој исчезнува кога $t \to \infty$

# LTI системи дефинирани со линеарни диференцни равенки

- Диференцна равенка

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Слично, решението за $y[n]$ може да се напише како сума на партикуларно решение $y_p[n]$ и општо решение

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0.$$

со почетни услови.

# LTI системи дефинирани со линеарни диференцни равенки

- Диференцна равенка

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

експлицитно решение

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$

за дадени $x[n]$ и $y[n_0-1], y[n_0-2], \ldots, y[n_0-N]$,

- Се пресметува $y[n_0]$,
- Потоа $y[n_0+1]$, итн...

рекурзивна равенка

# LTI системи дефинирани со линеарни диференцни равенки

- Диференцна равенка

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Специјален случај, кога $N = 0$, имаме нерекурзивна равенка

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k], \text{ конволуциска сума}$$

Импулсниот одзив на системот се добива кога $x[n] = \delta[n]$

$$y[n] = h[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} \delta[n-k] = \frac{b_n}{a_0}, 0 \le n \le M, h[n] = 0 \text{ за други } n.$$

Ова се нарекува систем со конечен импулсен одзив (FIR - finite impulse response)

# LTI системи дефинирани со линеарни диференцни равенки

- Пример:

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n],$$

Со влезен сигнал $x[n]=K\delta[n]$, и почетни услови $y[-1]=0$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]$$

$$y[0]=x[0]+\frac{1}{2}y[-1]=K,$$

$$y[1]=x[1]+\frac{1}{2}y[0]=\frac{1}{2}K,$$

$$y[2]=x[2]+\frac{1}{2}y[1]=(\frac{1}{2})^2K,$$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=(\frac{1}{2})^nK,$$

# LTI системи дефинирани со линеарни диференцни равенки

- Пример:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = (\frac{1}{2})^n K,$$

за $K = 1$, се добива импулсниот одзив на системот

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$ кој што е бесконечен.

Такви системи се наречени системи со бесконечен импулсен одзив (IIR- infinite inpulse response)