



ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ,  
ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ  
3Η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ  
“ΝΕΥΡΟ-ΑΣΑΦΗΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ”

**ΜΠΕΚΡΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ**

**ΑΜ:03117116**

**Σχεδίαση Προσαρμοστικών Συστημάτων Ελέγχου**

**Άσκηση 1:**

Δίνονται το φυσικό σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ J \dot{\omega} = -K_m i_a \sin(N\theta) + K_m i_b \cos(N\theta) - B\omega - T_L(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

και το σύστημα αναφοράς:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -24 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_r \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix} \theta_c, \quad A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -24 & -10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix},$$

Για την σχεδίαση του ζητούμενου ελεγκτή μετασχηματίσαμε το μη-γραμμικό σύστημα εξισώσεων σε γραμμικό, ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε χρήση των τύπων της μεθόδου MRAC.

Επομένως, στο σύστημα (1), θέτουμε  $\begin{cases} i_a = -\sin(N\theta)u \\ i_b = \cos(N\theta)u \end{cases}$  και προκύπτει:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ J \dot{\omega} = -B\omega + K_m u - T_L(\theta) \end{cases}$$

1, 2)

Θεωρούμε μηδενική εξωτερική ροπή, οπότε προκύπτει:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ J \dot{\omega} = -B \omega + K_m u \end{cases}$$

Μετατρέποντας σε εξισώσεις κατάστασης, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J} \end{bmatrix} u, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J} \end{bmatrix},$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο MRAC, με είσοδο  $u = \hat{K}_x^T x + \hat{K}_r^T r$  πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύουν τα matching conditions.

Τα matching condition είναι τα εξής:

$$\begin{cases} A + B K_x^T = A_m \\ B K_r^T = B_m \end{cases}$$

Για να ισχύουν αρκεί ο πίνακας B, να είναι αντιστρέψιμος. Αφού ο B δεν είναι τετραγωνικός εργαζόμαστε αναλυτικά και καταλήγουμε:

$$B K_x^T = A_m - A \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J} \end{bmatrix} [k_{x1} \ k_{x2}] = A_m - A \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{x1} \frac{K_m}{J} & k_{x2} \frac{K_m}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{B}{J} - 24 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{cases} k_{x1} = \left( \frac{B}{J} - 24 \right) \frac{J}{K_m} \\ k_{x2} = -10 \frac{J}{K_m} \end{cases}$$

Επίσης, για το  $K_r^T$ , έχουμε  $k_r = 24 \frac{J}{K_m}$

Άρα, αρκεί  $J \neq 0, K_m \neq 0$ , που ισχύει οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους.

Θέλουμε παρακολούθηση και εκμηδενισμό του σφάλματος  $e = x - x_m(2)$ . Παραγωγίζοντας τη (2) προκύπτει:

$$\dot{e} = A_m e + B (\Delta K_x^T x + \Delta k_r r)$$

Επιλέγοντας υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V(e, \Delta \hat{K}_x, \Delta \hat{k}_r) = e^T P e + \text{trace}(\Delta \hat{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \Delta \hat{K}_x) + \Delta \hat{k}_r^2 \gamma_r^{-1} \quad (3)$$

και παραγωγίζοντας την (3), έχουμε:

$$\dot{V} = -e^T Q e + 2 \text{trace}(\Delta \hat{K}_x^T (x e^T P B + \Gamma_x^{-1} \dot{\hat{K}}_x^T)) + 2 \Delta \hat{k}_r (e^T P B r + \gamma_r^{-1} \dot{\hat{k}}_r)$$

Επιλέγω τους νόμους προσαρμογής, ώστε να μηδενίζονται οι όροι εκτός του  $-e^T Q e$ .

$$\begin{cases} \dot{\hat{K}}_x^T = -\Gamma_x x e^T P B \\ \dot{\hat{k}}_r = -\gamma_r r e^T P B \end{cases}$$

Επομένως,  $\dot{V} \leq 0$ , αρνητικά ημι-ορισμένη και όλα τα σήματα κλειστού βρόγχου είναι φραγμένα, καθώς  $\dot{V} = -(e^T Q e) < 0$ . Από Barbalat's Lemma,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V} = 0 \Rightarrow \|e\| = 0$

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση έγινε η ζητούμενη προσομοίωση. Η αβεβαιότητα στο σύστημα εισήλθε από τις ποσοστιαίες παρεκκλίσεις των ιδανικών τιμών των κερδών. Παρακάτω παρουσιάζονται τα σχετικά διαγράμματα.

Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής:

```
J = 4.5 * 10**(-5)
B = 8 * 10 **(-4)
N = 50
K_m = 0.19
A = np.array([[0,1],[0 , -B/J]])
BL = np.array([[0, K_m/J]]).T

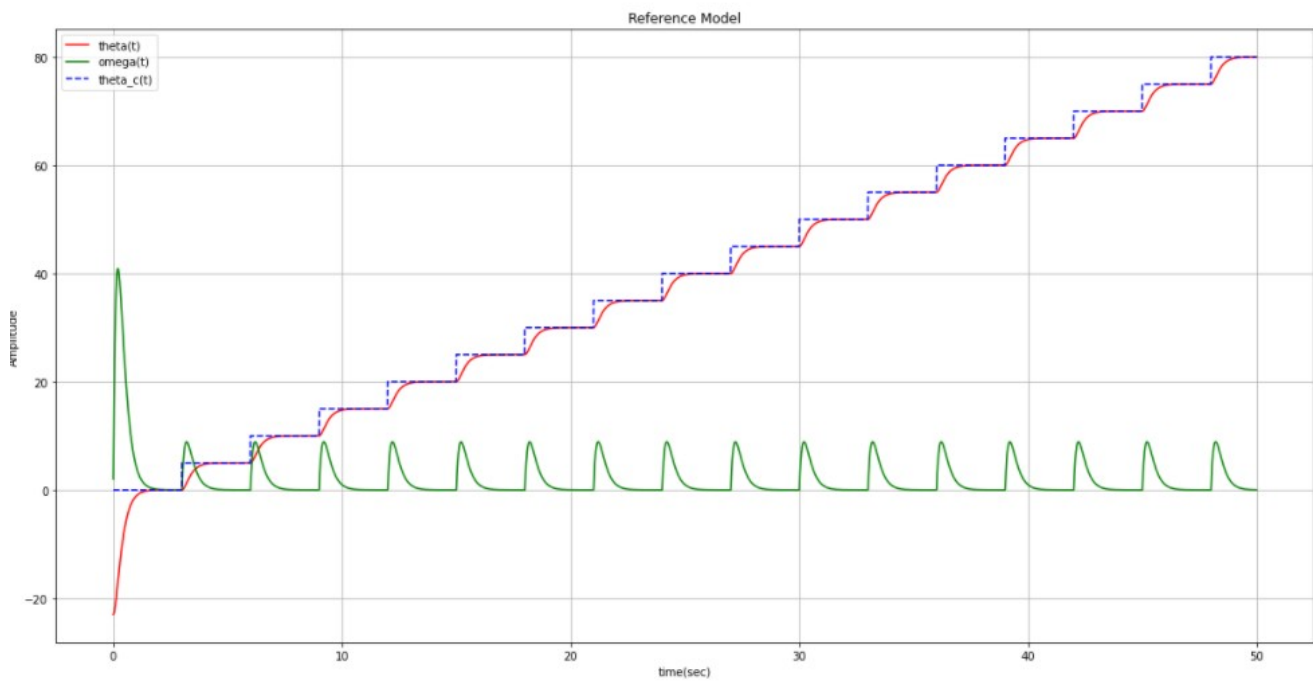
A_m = np.array([[0,1],[-24,-10]])
B_m = np.array([[0,24]]).T

l = [0.05, 0.25, 0.5, 0.75] #uncertainty

#matching conditions
AmA = A_m - A
Kx_ideal = np.array([[AmA[1,0]/BL[1] , AmA[1,1]/BL[1]])).T
Kr_ideal = B_m[1]/BL[1]

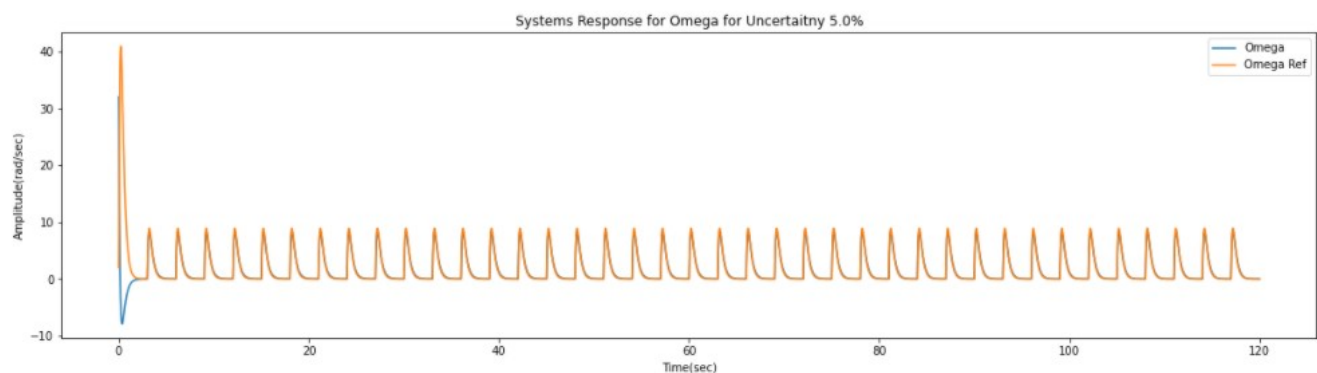
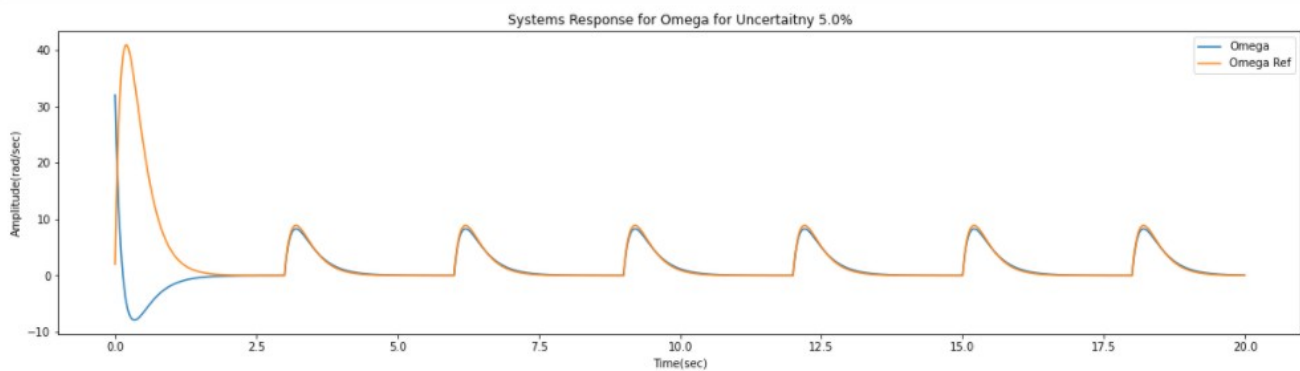
Gx = np.array([[50**(-4),0],[0, 50**(-4)]])
gr = 50**(-4)
Q = np.eye(2) * 10**(-3)
```

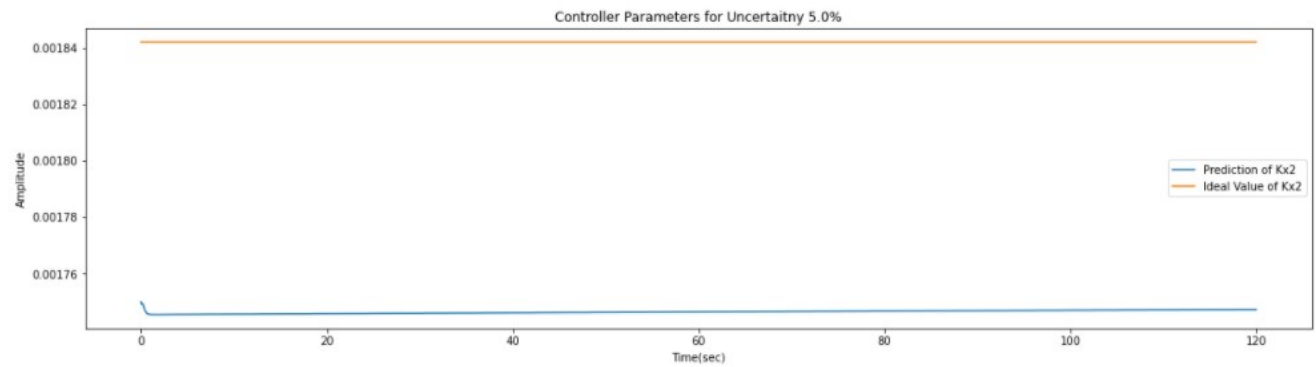
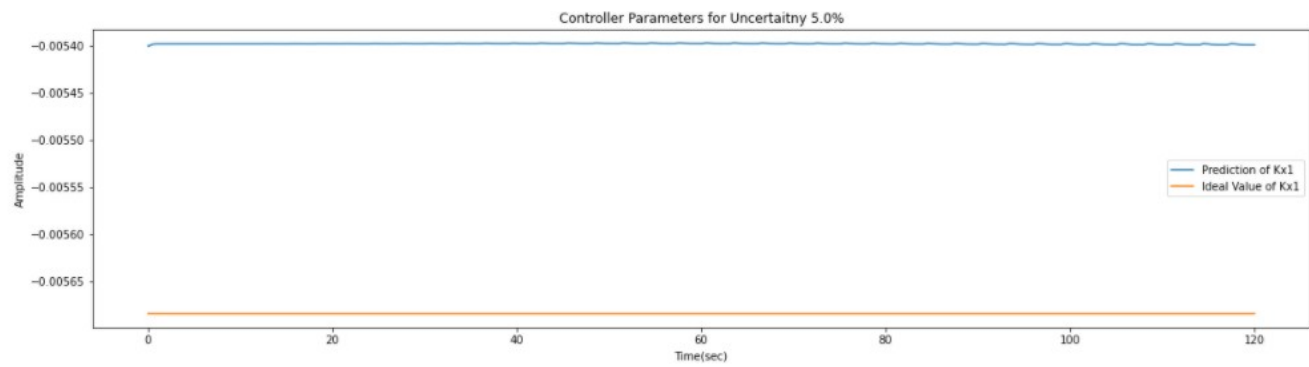
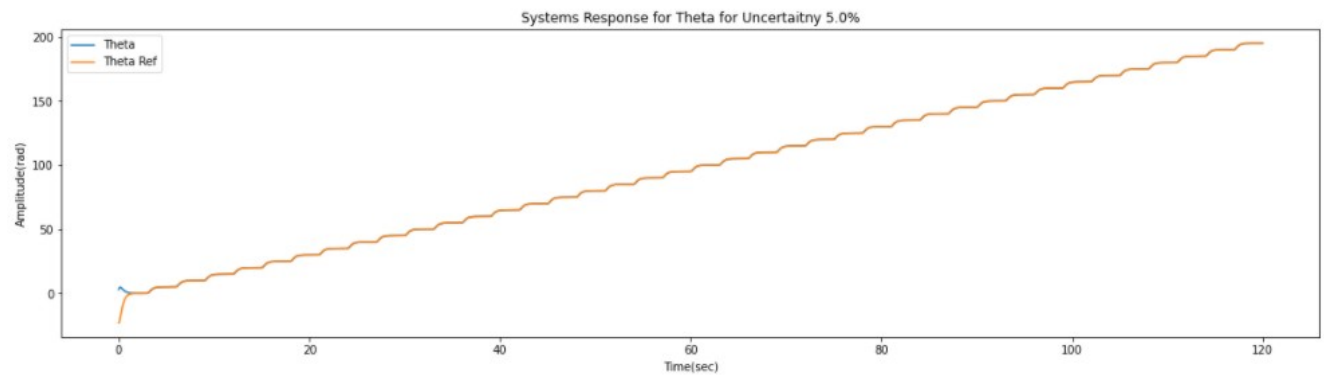
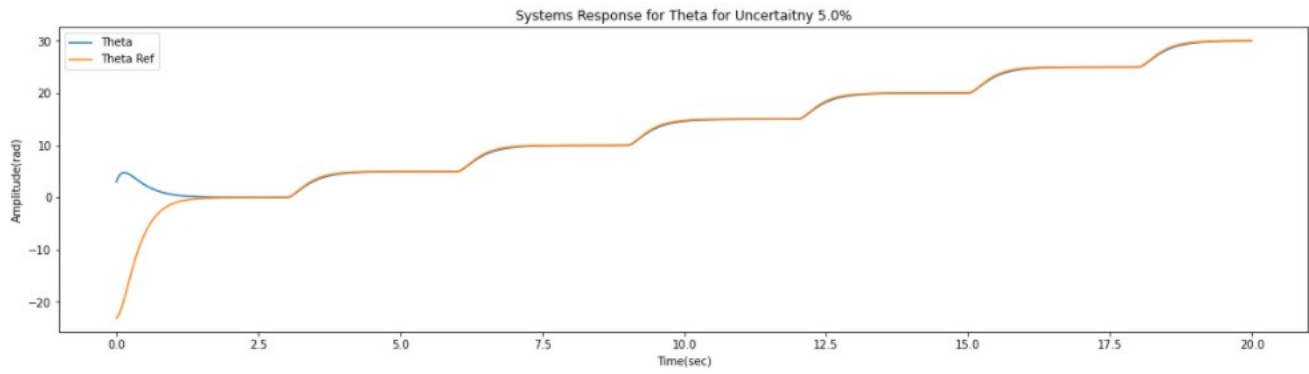
Αρχικά, παρουσιάζουμε το reference model και τη βηματική είσοδο.

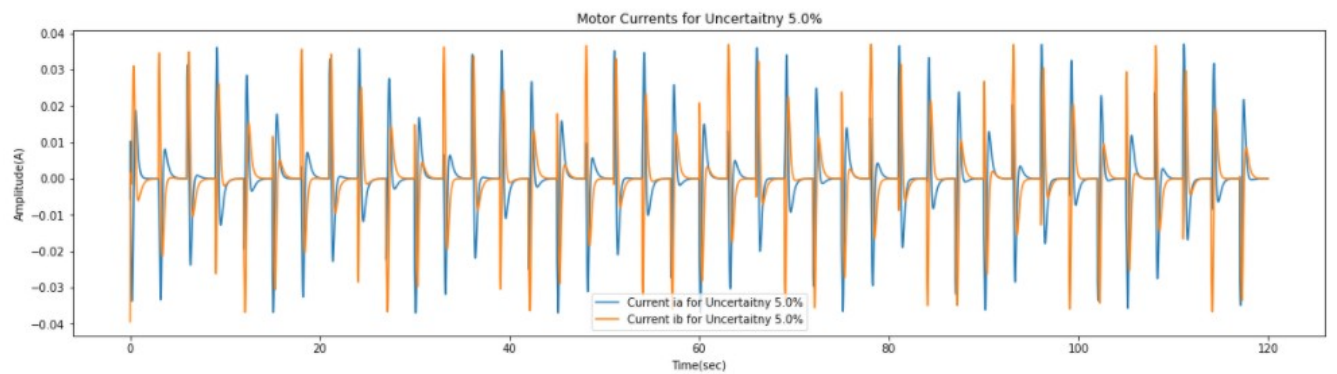
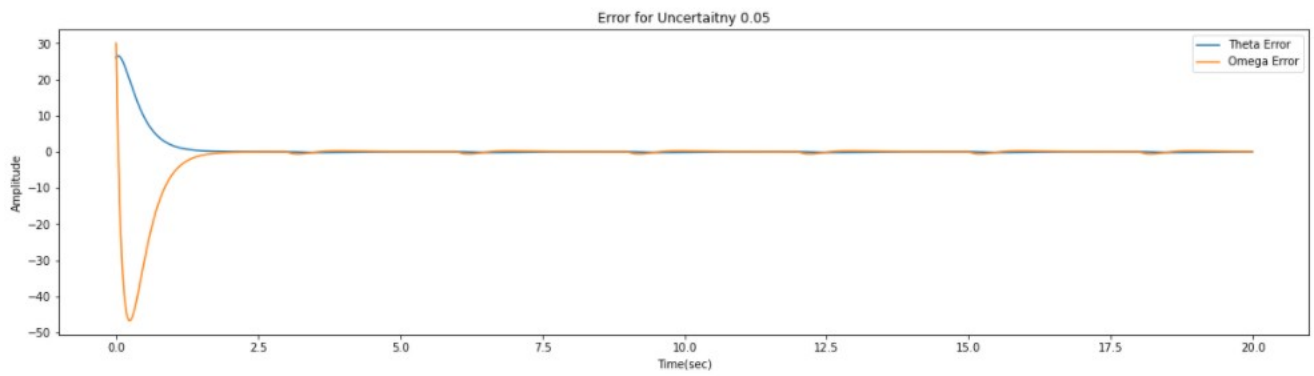
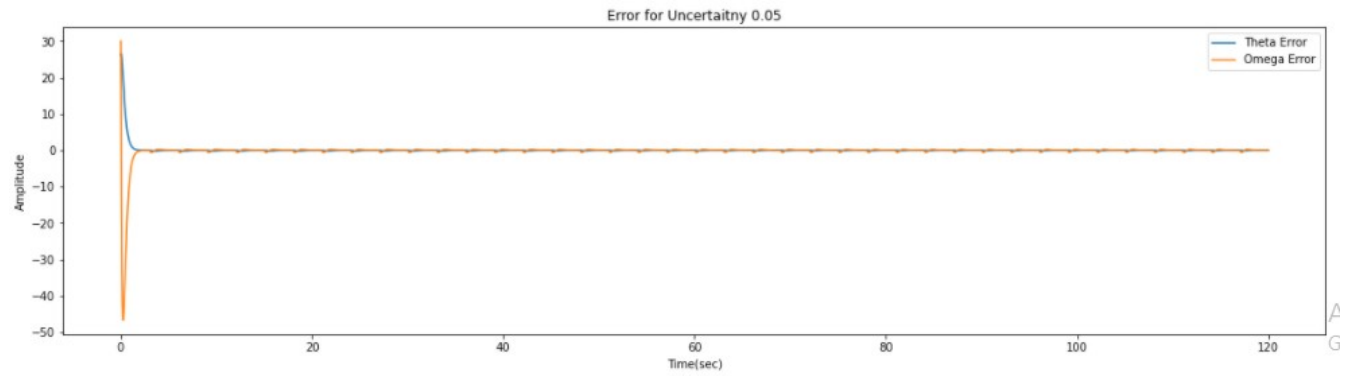
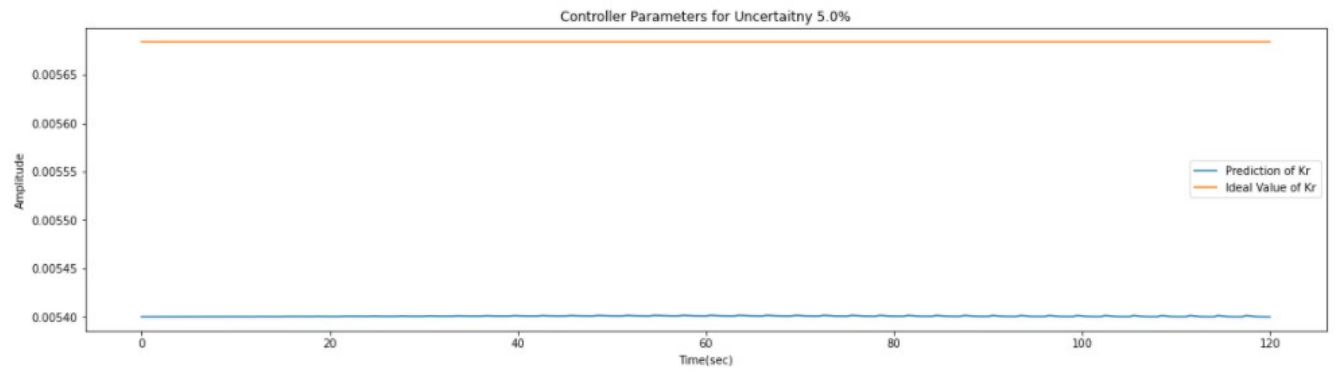


Παρατηρούμε μια διακύμανση στην αρχή, καθώς έχει επιλεχθεί αρχική συνθήκη για το reference model  $x_{m0} = \begin{bmatrix} -23 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Ενώ για το φυσικό σύστημα, επιλέχθηκε  $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 32 \end{bmatrix}$ .

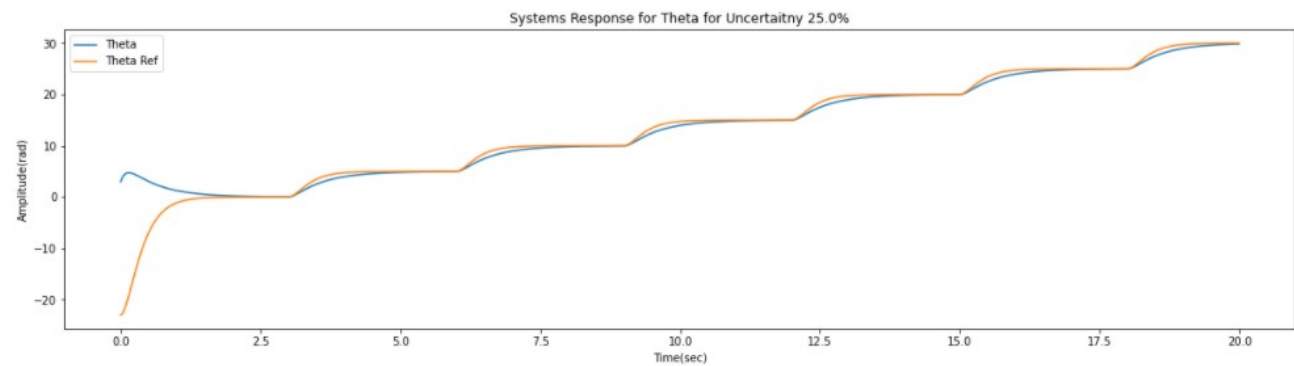
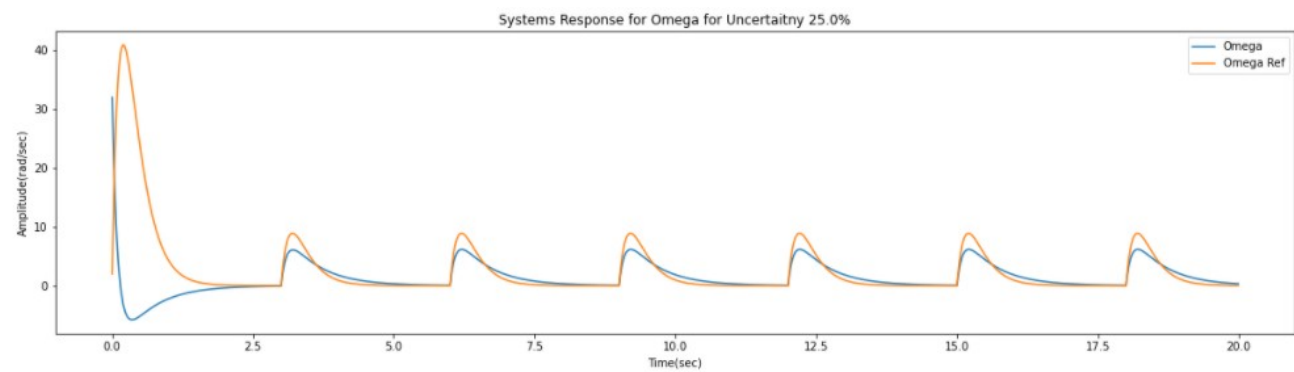
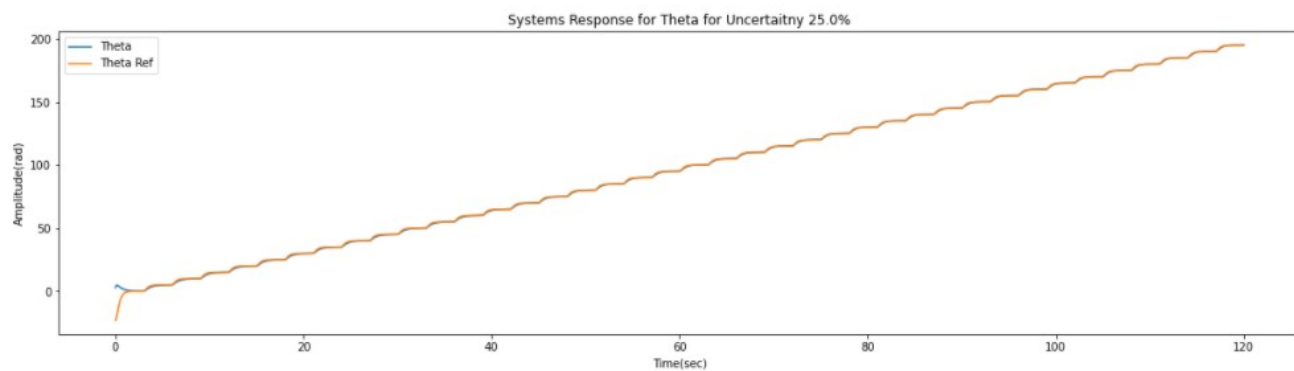
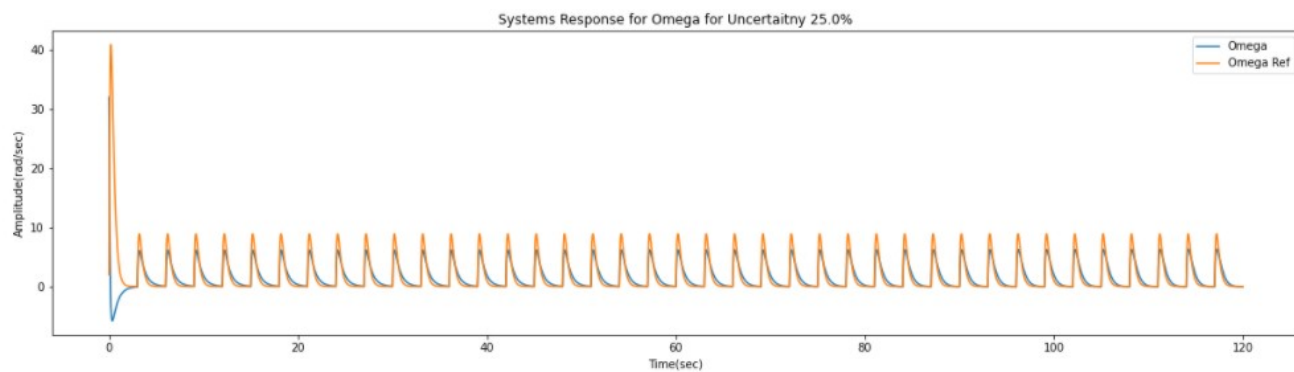
Για αβεβαιότητα  $a = 5\%$ :

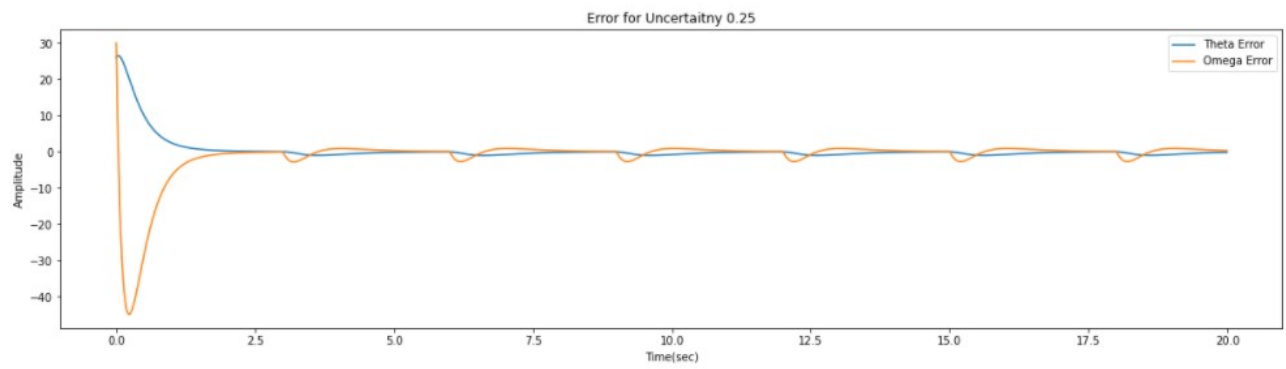
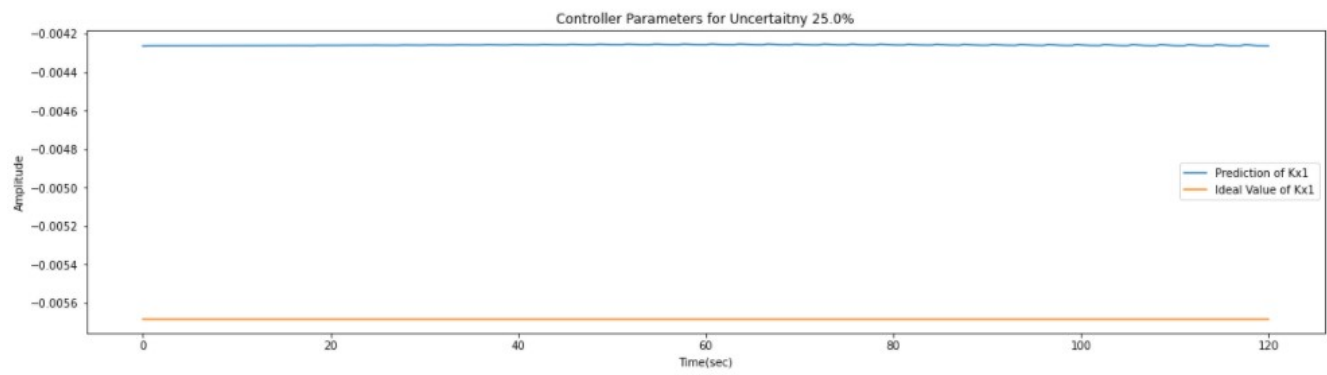
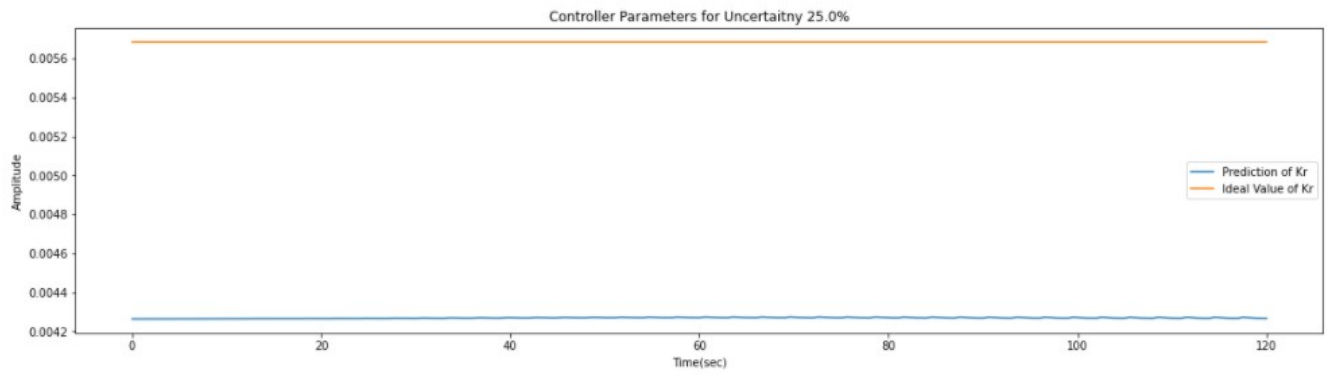
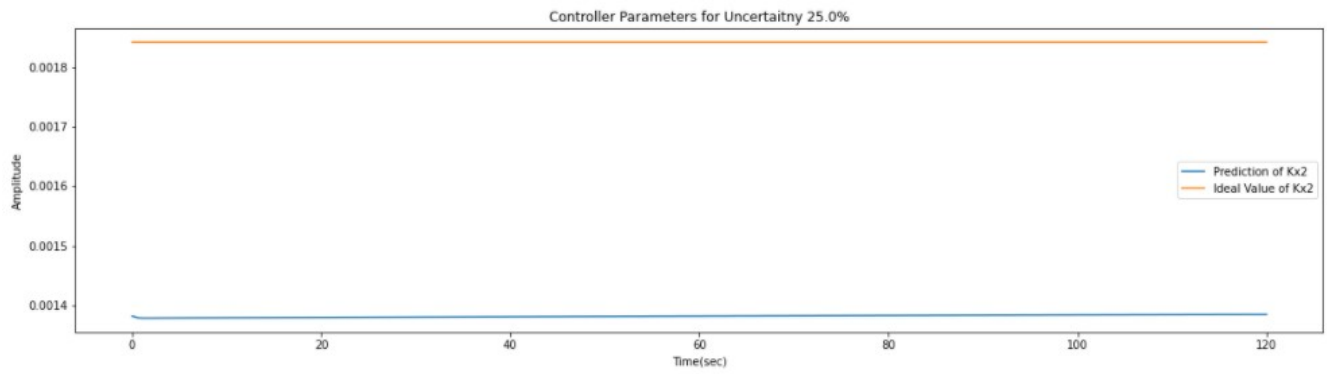




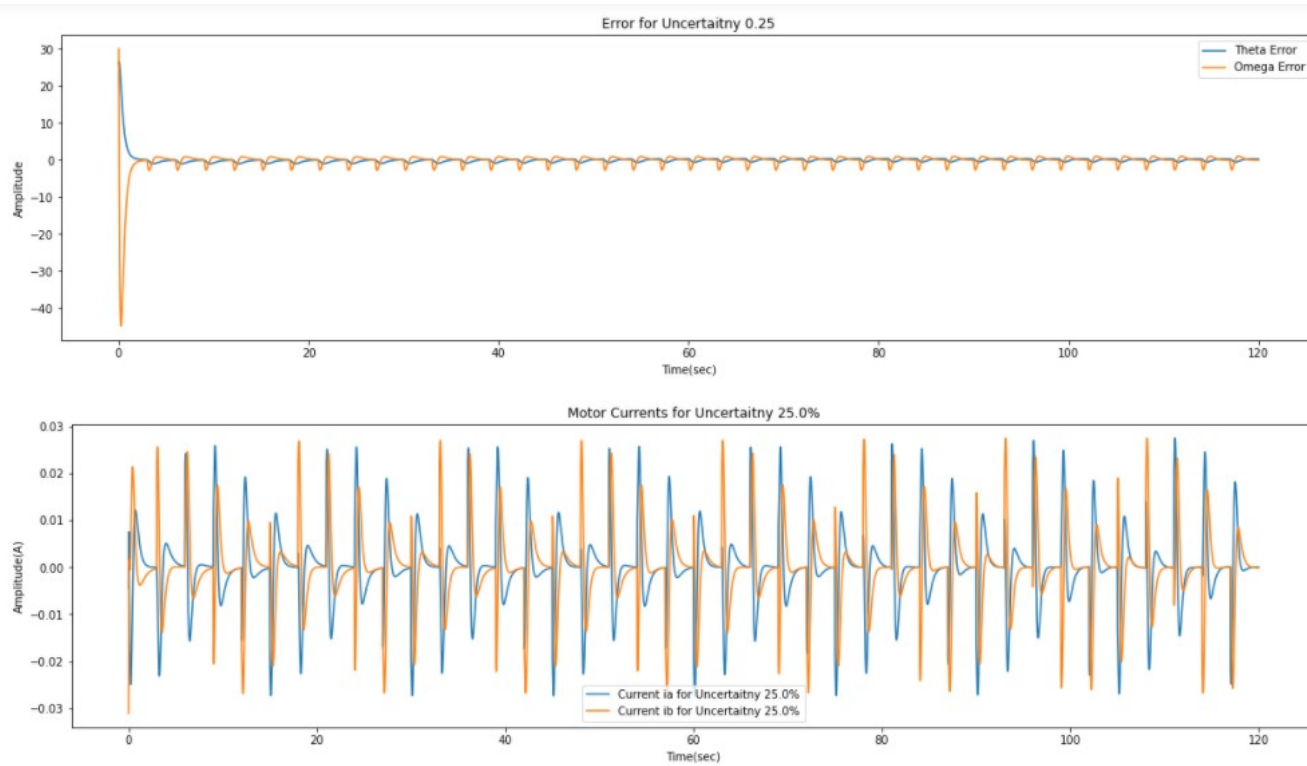


Για αβεβαιότητα  $\alpha = 25\%$ :

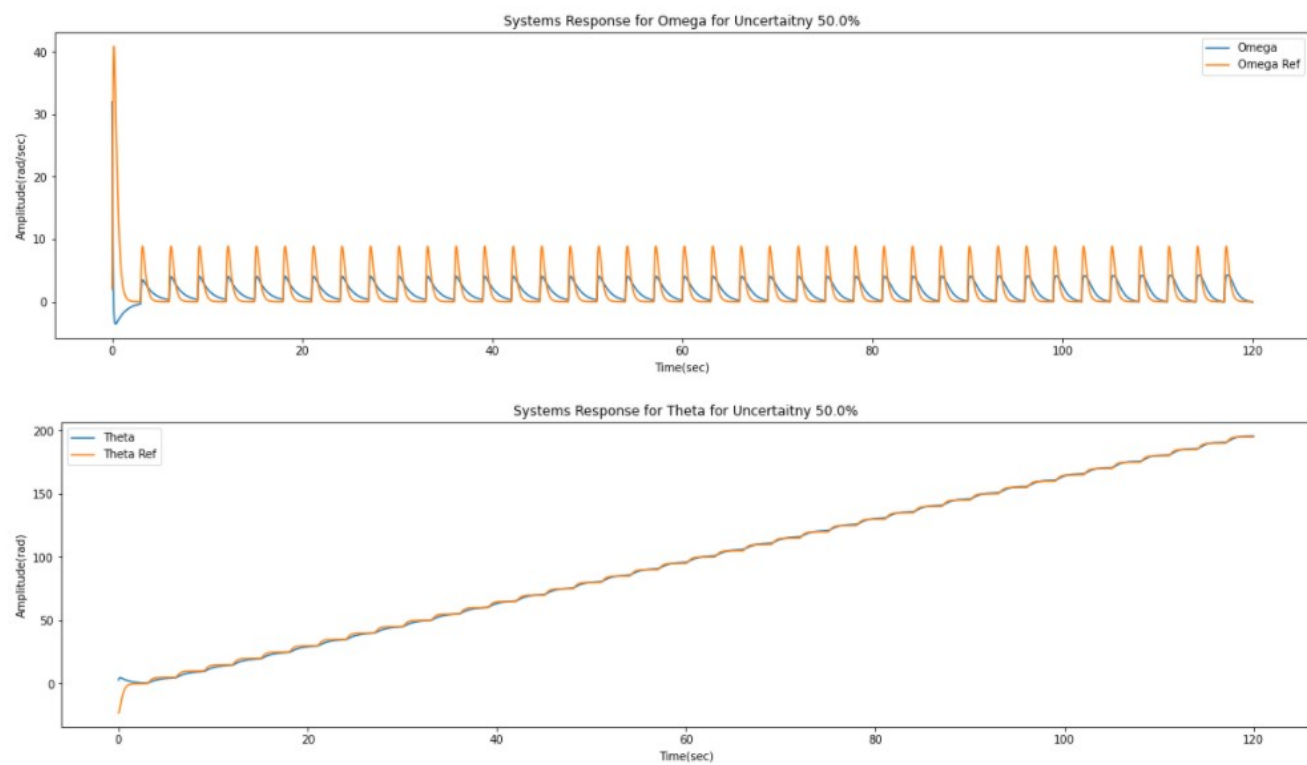


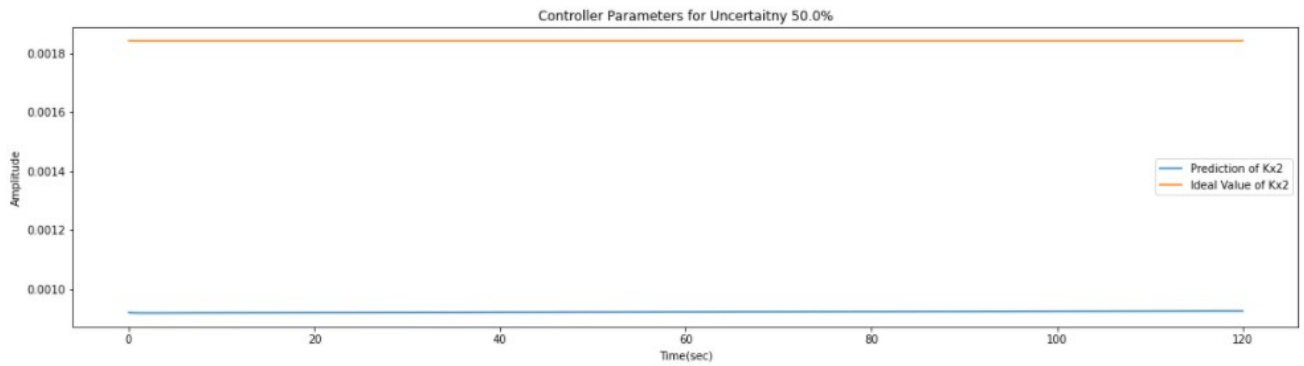
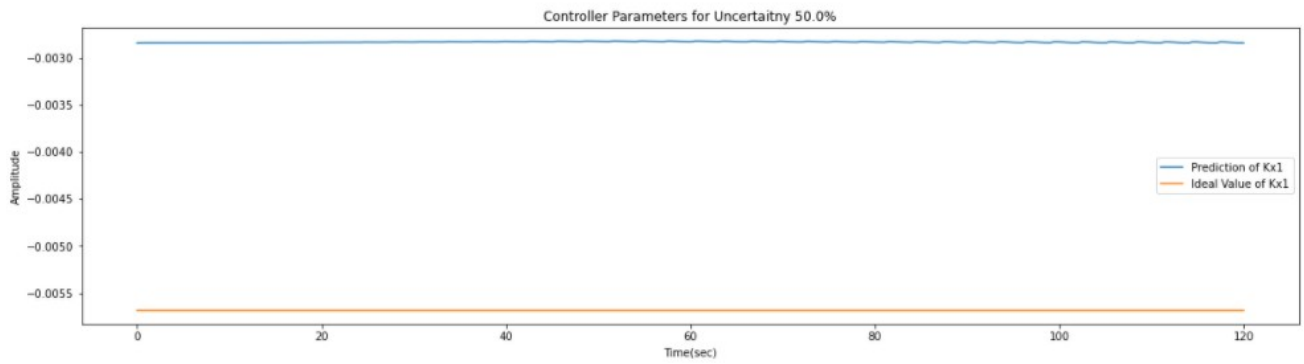
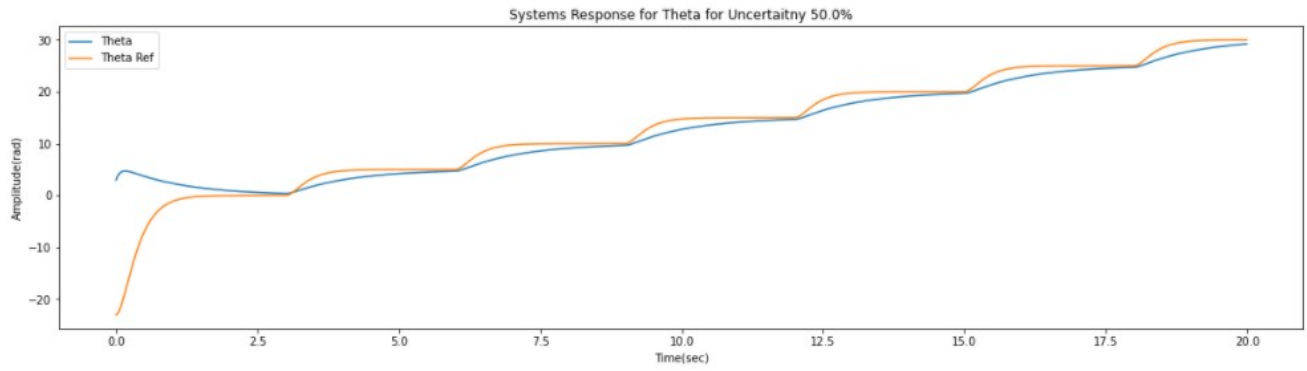
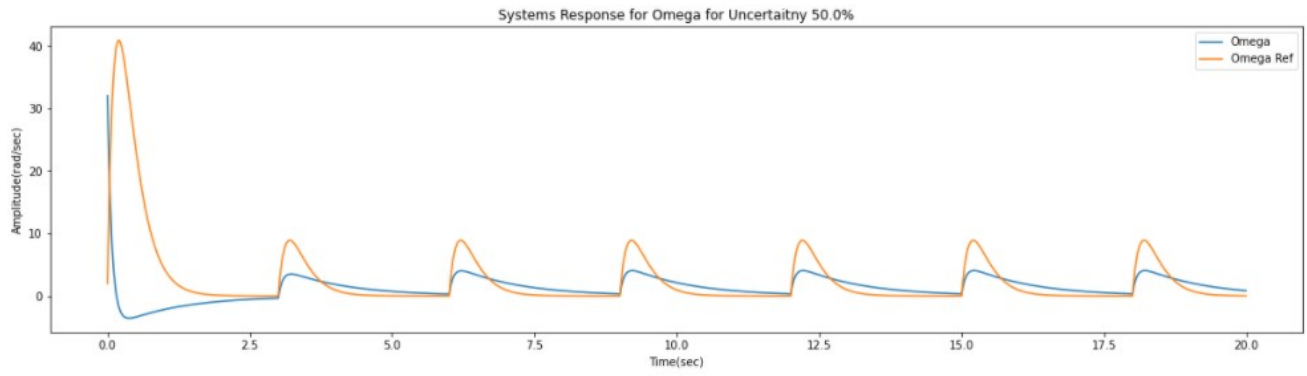


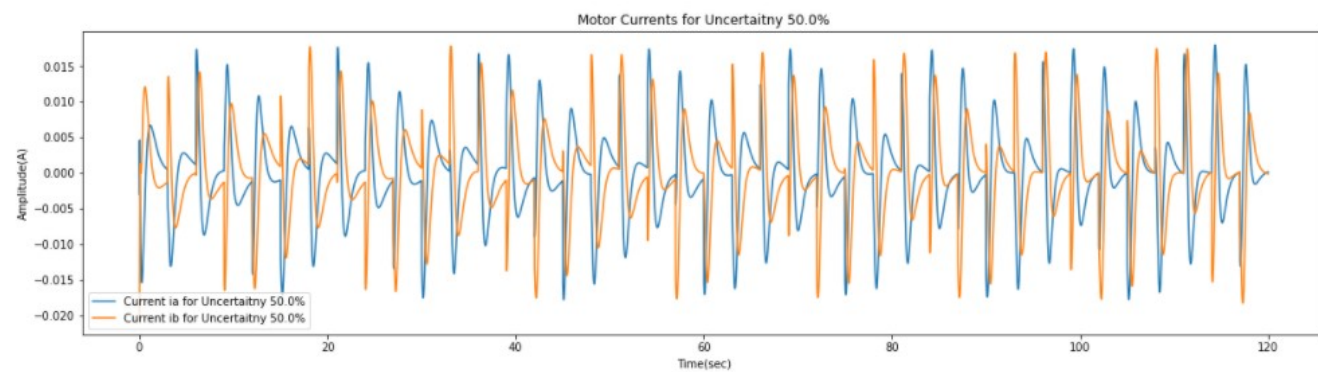
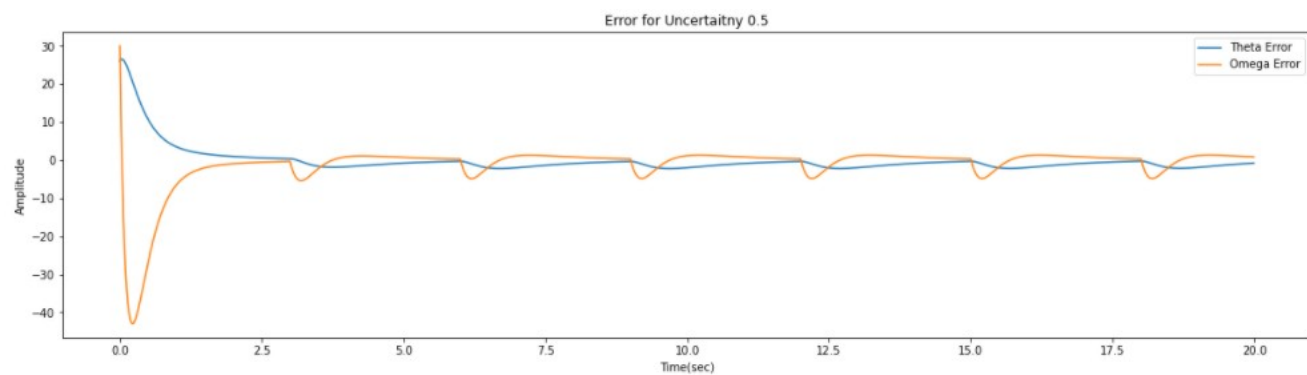
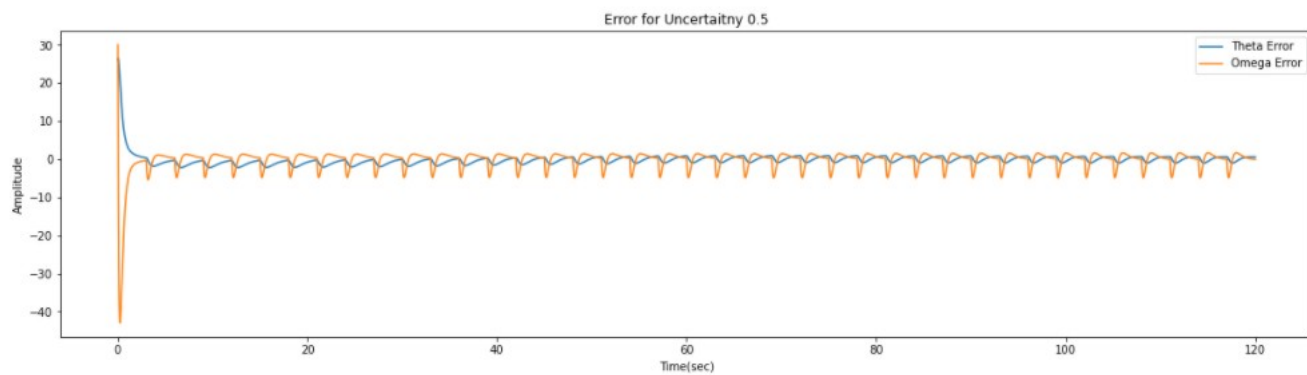
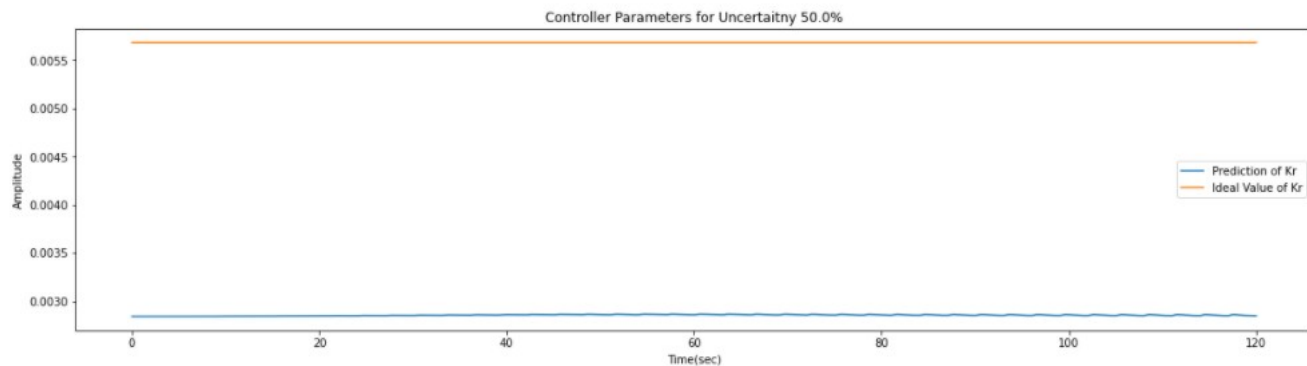




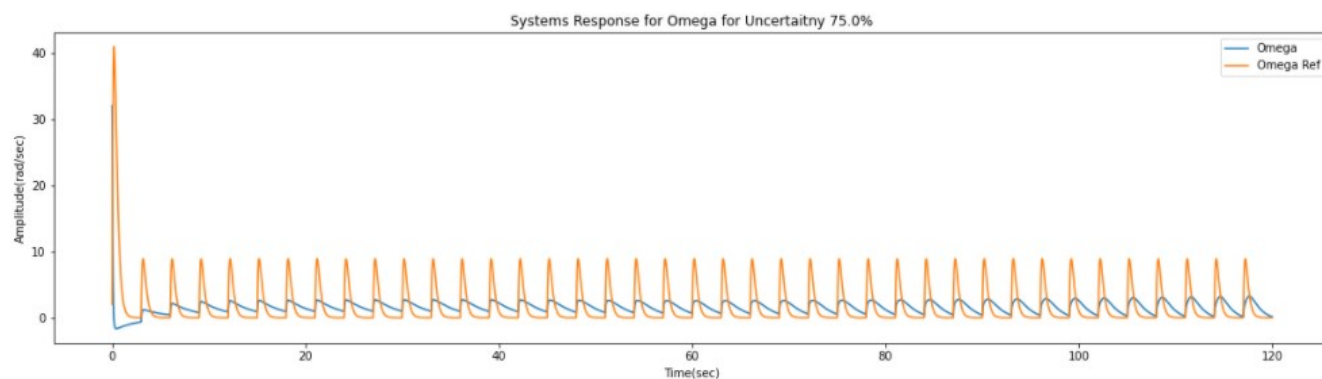
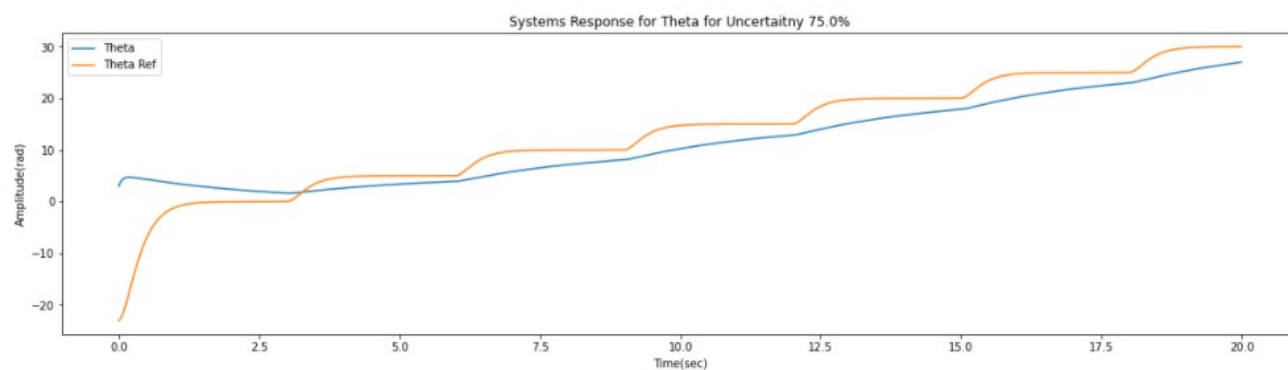
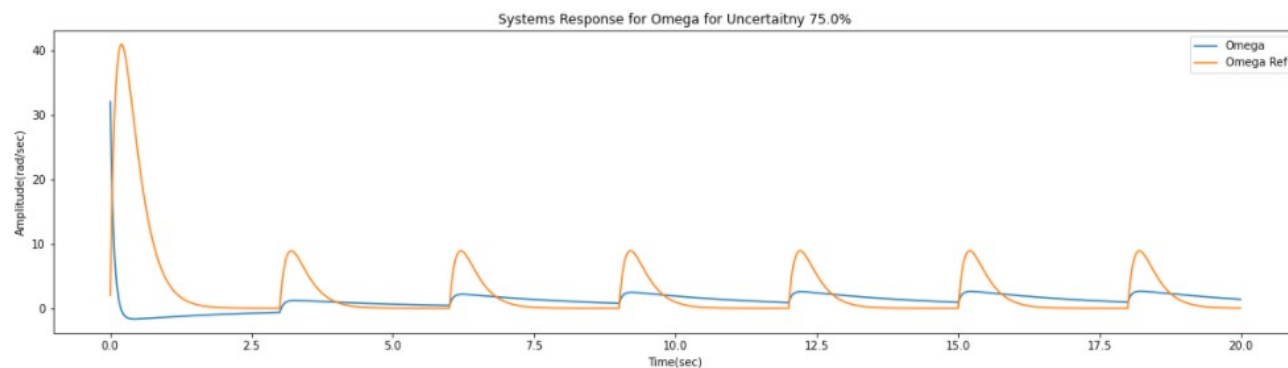
Για αβεβαιότητα  $\alpha = 50\%$ :

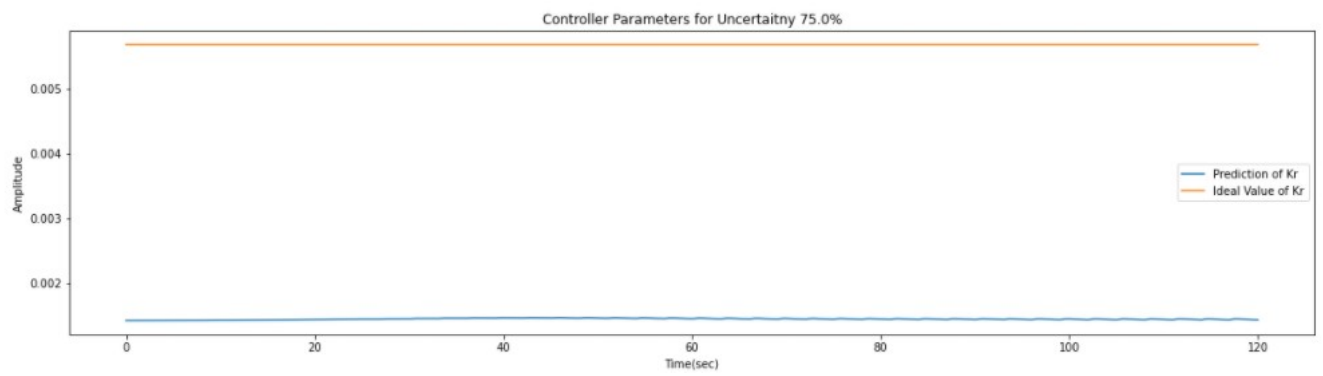
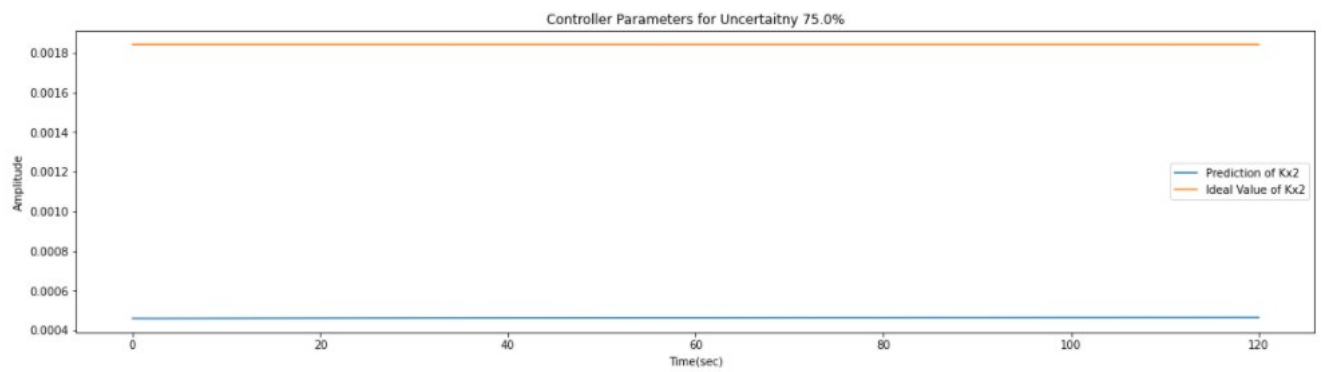
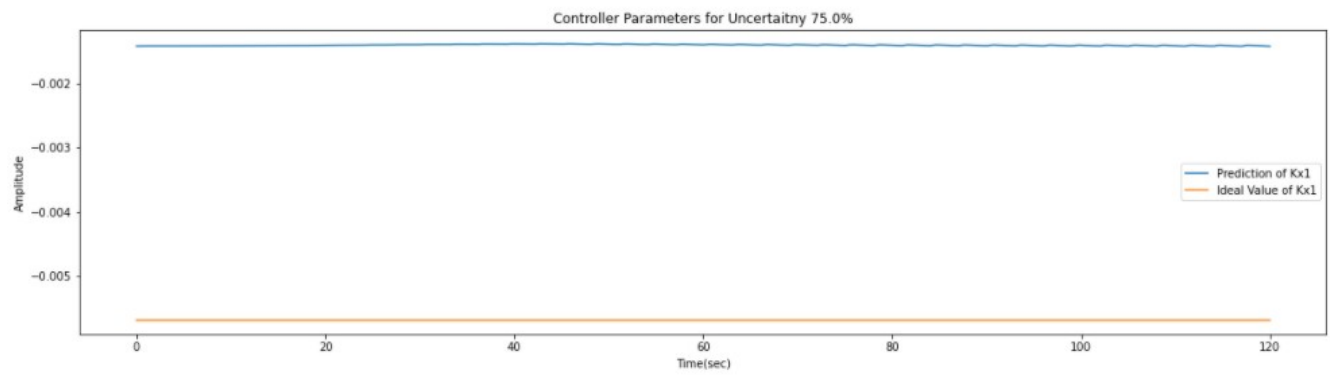
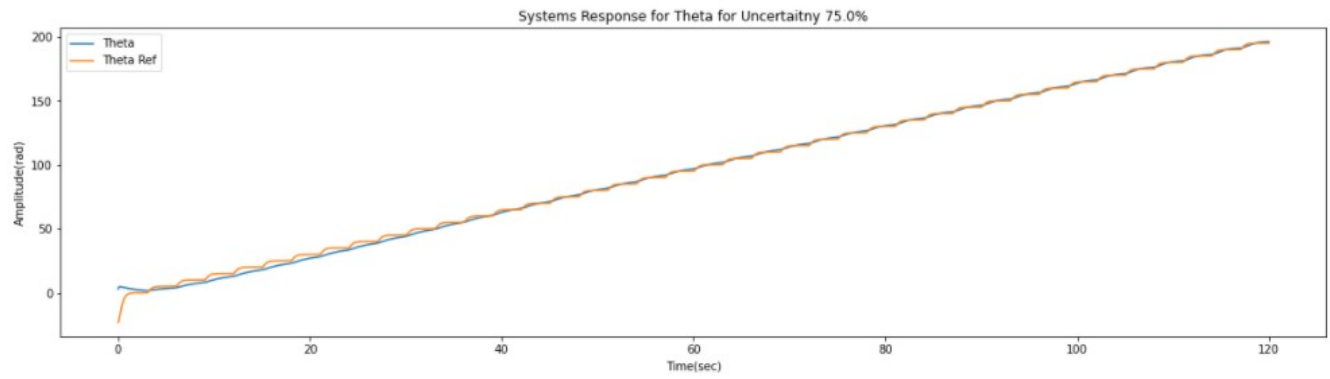


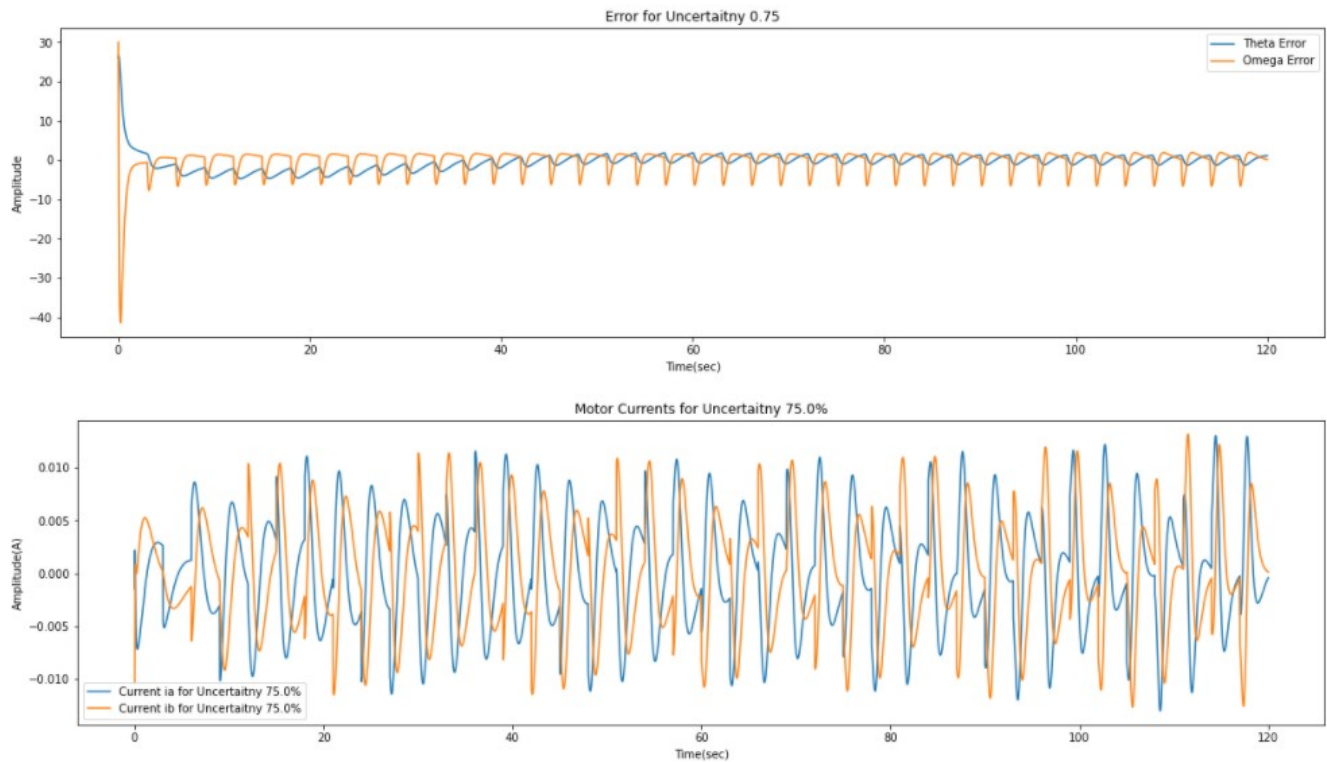




Για αβεβαιότητα  $\alpha = 75\%$ :







### Σχόλια:

1. Από τα παραπάνω διαγράμματα, μπορεί να παρατηρήσει κανείς την διαφορετική απόκριση του συστήματος για τις διαφορετικές αβεβαιότητες. Όσο η αβεβαιότητα αυξάνεται, τόσο περισσότερο διαρκεί το μεταβατικό φαινόμενο.
2. Οι τιμές των κερδών είναι σχεδόν σταθερές με πολύ μικρές διακυμάνσεις, καθώς οι αρχικές τιμές τους δεν αποκλίνουν πολύ από τις ιδανικές τιμές. Επίσης, δεν παρατηρείται parameter drift.
3. Δίνονται διαγράμματα για 20 sec, για να φανεί η διαφορά στο μεταβατικό φαινόμενο της απόκρισης, αλλά και για 120 sec για να γίνει εμφανής η μη-ύπαρξη parameter drift.
4. Οι παράμετροι δεν συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές, γεγονός το οποίο σηματοδοτεί ότι, η είσοδος δεν είναι PE.

3):

Στο 3ο μέρος καλούμαστε να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία, με μόνη διαφορά την μη μοντελοποιημένη αβεβαιότητα, την οποία προσφέρει το RBF-net.

Για την εκπαίδευση του μοντέλου δόθηκαν οι εξής παράμετροι:

```
NUM_SAMPLES = 1000
X = np.random.uniform(0., 1, NUM_SAMPLES)
X = np.sort(X, axis=0)
y = 10**(-3) * (np.cos(2*np.pi*X))**2 * np.sin(3*np.pi*X)

rbfnet = RBFNet(lr=0.1, k=5, epochs = 2000)
rbfnet.fit(X, y)
```

Όπως, φαίνεται και στην παραπάνω εικόνα, το NN καλείται να προσεγγίσει την συνάρτηση:

$$f(x) = 10^3 \cos^2(2\pi x) \sin(3\pi x) \quad (4)$$

Πλέον το σύστημα έχει τη μορφή:

$$\dot{x} = Ax + B\Lambda(u - f(x))$$

Επομένως, επιλέγουμε νόμο ελέγχου  $u = \hat{K}_x^T x + \hat{K}_r^T r + \Theta^T \Phi(x)$ . Το διάνυσμα  $\vec{\Phi}(x)$ , απαρτίζεται από τις συναρτήσεις βάσεις, οι οποίες προκύπτουν από τα κέντρα και τις διασπορές, που παρήχθησαν από το δίκτυο για την προσέγγιση της συνάρτησης. Συνεπώς, προκύπτει το σφάλμα  $e_f(x)$ , το οποίο δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί και είναι υπεύθυνο για το drift των παραμέτρων.

Επιλέγοντας ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την:

$$V(e, \Delta \hat{K}_x, \Delta \hat{k}_r, \Delta \Theta) = e^T P e + \text{trace}(\Delta \hat{K}_x^T \Gamma_x^{-1} \Delta \hat{K}_x) + \Delta \hat{k}_r^2 \gamma_r^{-1} + \text{trace}(\Delta \Theta^T \Gamma^{-1} \Delta \Theta)$$

και παραγωγίζοντας καταλήγουμε

$$\dot{V} = -e^T Q e + 2 \text{trace}(\Delta K_x^T (x e^T P B + \Gamma_x^{-1} \dot{\hat{K}}_x^T)) + 2 \Delta k_r (e^T P B r + \gamma_r^{-1} \dot{\hat{k}}_r) + 2 \text{trace}(\Delta \Theta^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\Theta}})$$

Επιλέγουμε τους εξής νόμους προσαρμογής:

$$\begin{cases} \dot{k}_x^T = -\Gamma_x x e^T P B \\ \dot{k}_r = -\gamma_r r e^T P B \\ \dot{\Theta} = -\Gamma_\theta \Phi(x) e^T P B \end{cases}$$

Όπως αναφέρονται στις διαφάνειες, ισχύει  $\dot{V} < 0$  μόνο εκτός του set.

$$E \triangleq \left\{ e : \|e\| \leq \frac{2\|PB\|\lambda_{\max}(\Lambda)\varepsilon}{\lambda_{\min}(Q)} \right\}$$

Για την αποφυγή της τυχόν αστάθειας και του parameter drift, πραγματοποιήθηκε e-modification.

```
from numpy import linalg as LA
def Kx2(kx, t, x, e, Gx, P, BL, sx):
    x = np.array([[x[0]], [x[1]]]) # 2x1
    e = np.array([[e[0]], [e[1]]]).T # 1x2
    kx = np.array([[kx[0]], [kx[1]]])
    norm = LA.norm(multi_dot((e, P, BL)))
    dkxdt = np.dot(-Gx, multi_dot([x, e, P, BL]) + sx*norm*kx)
    return np.squeeze(dkxdt)
```

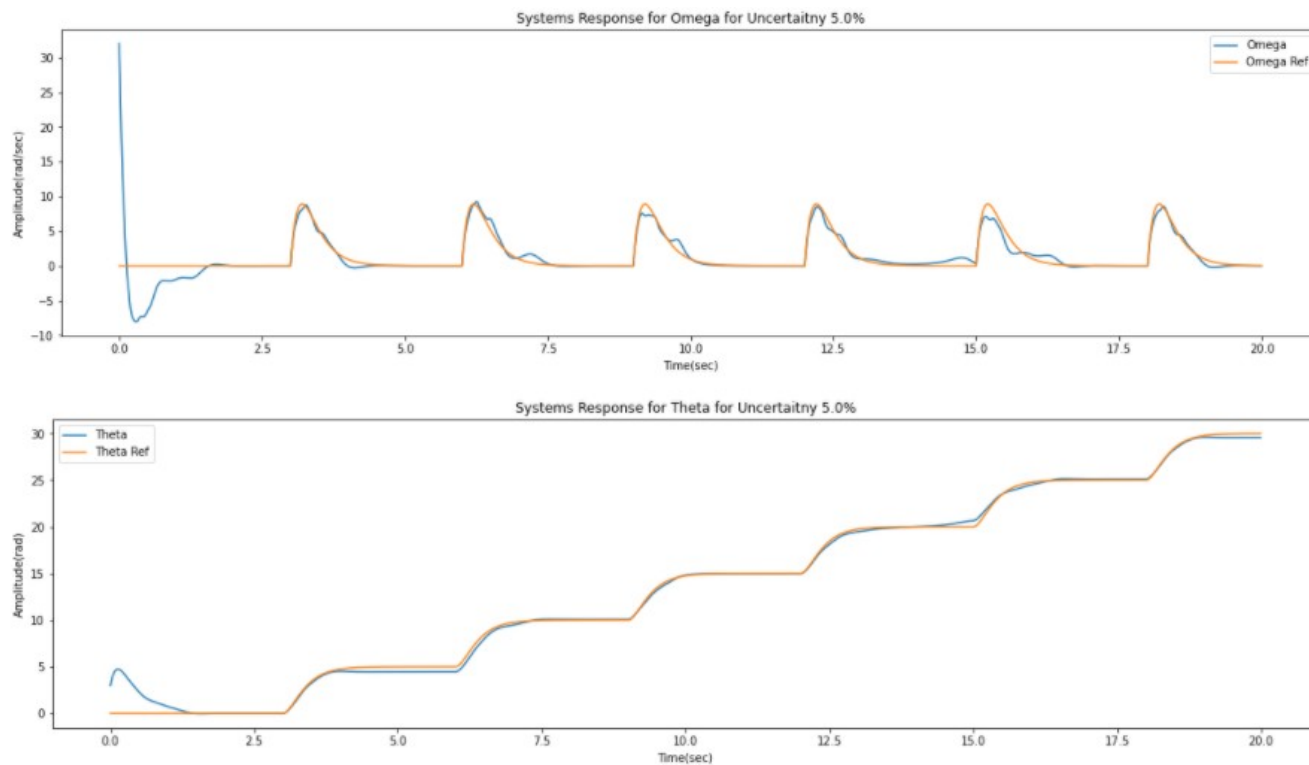
```
def Kr2(kr, t, e, gr, P, BL, sr):
    r = 5 * (t//3)
    e = np.array([[e[0]], [e[1]]]).T
    norm = LA.norm(multi_dot((e, P, BL)))
    dkrdt = -gr*(r*multi_dot([e, P, BL]) + sr*norm*kr)
    return np.squeeze(dkrdt)
```

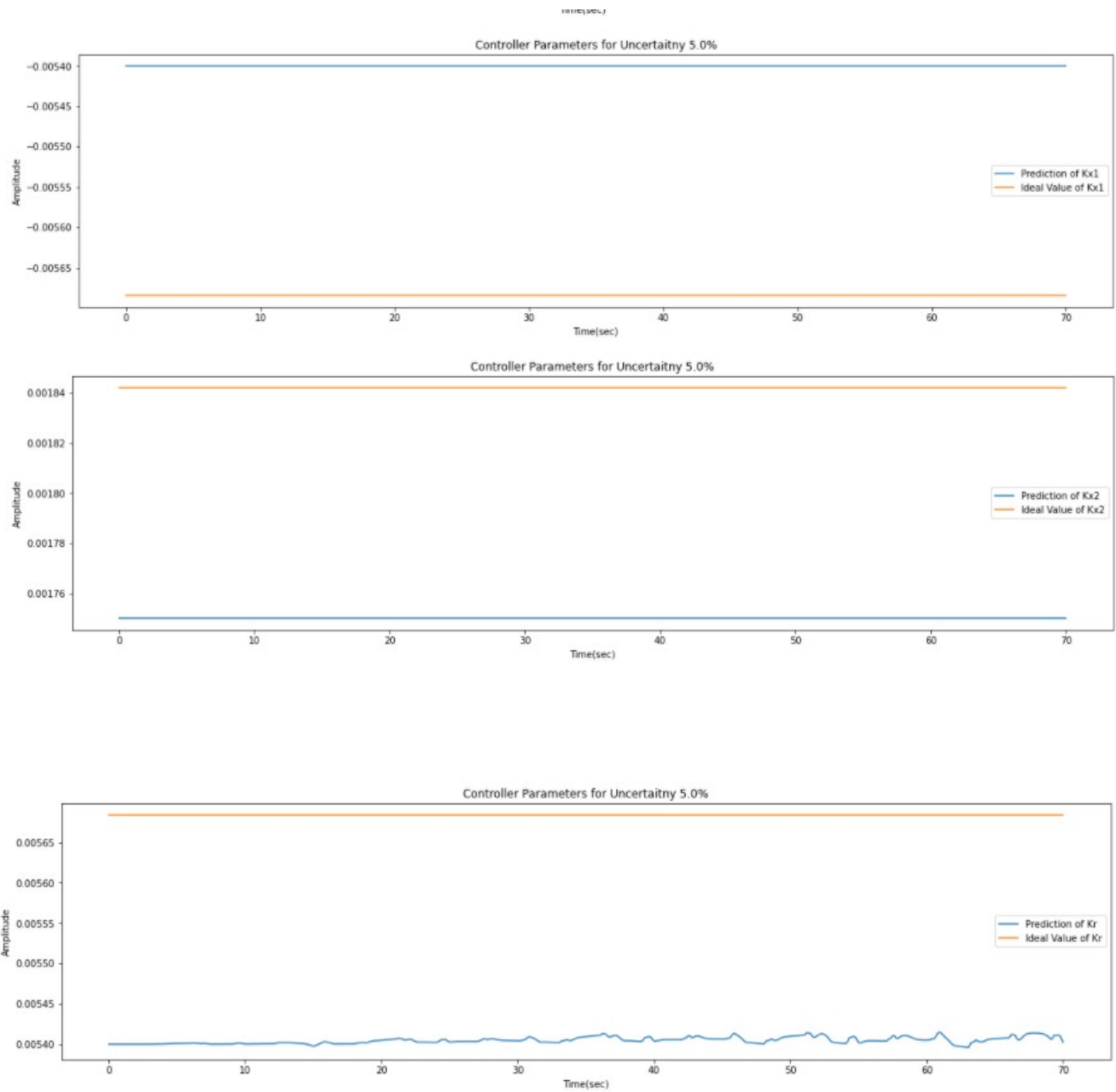
```
def Th(th, t, x, e, Gth, P, BL, sth, centers, stds, k):
    th = np.array([[th[0]], [th[1]], [th[3]], [th[3]], [th[4]]])
    Fx = np.zeros((5, 1))
    for i in range(k):
        Fx[i] = rbf(x[0], centers[i], stds[i])
    x = np.array([[x[0]], [x[1]]]) # 2x1
    e = np.array([[e[0]], [e[1]]]).T # 1x2
    norm = LA.norm(multi_dot((e, P, BL)))
    dthdt = np.dot(-Gth, multi_dot([Fx, e, P, BL]) + sth*norm*th)
    return np.squeeze(dthdt)
```



Όπως και στο πρώτο μέρος, παρήχθησαν διαγράμματα για όλες τις τιμές αβεβαιότητας. Δίνονται διαγράμματα για 20 sec, για να φανεί η διαφορά στο μεταβατικό φαινόμενο της απόκρισης, αλλά και για 70 sec για να γίνει εμφανής η ταλάντωση των παραμέτρων και η μη-ύπαρξη drift(το αντιμετωπίσαμε με e-modification).

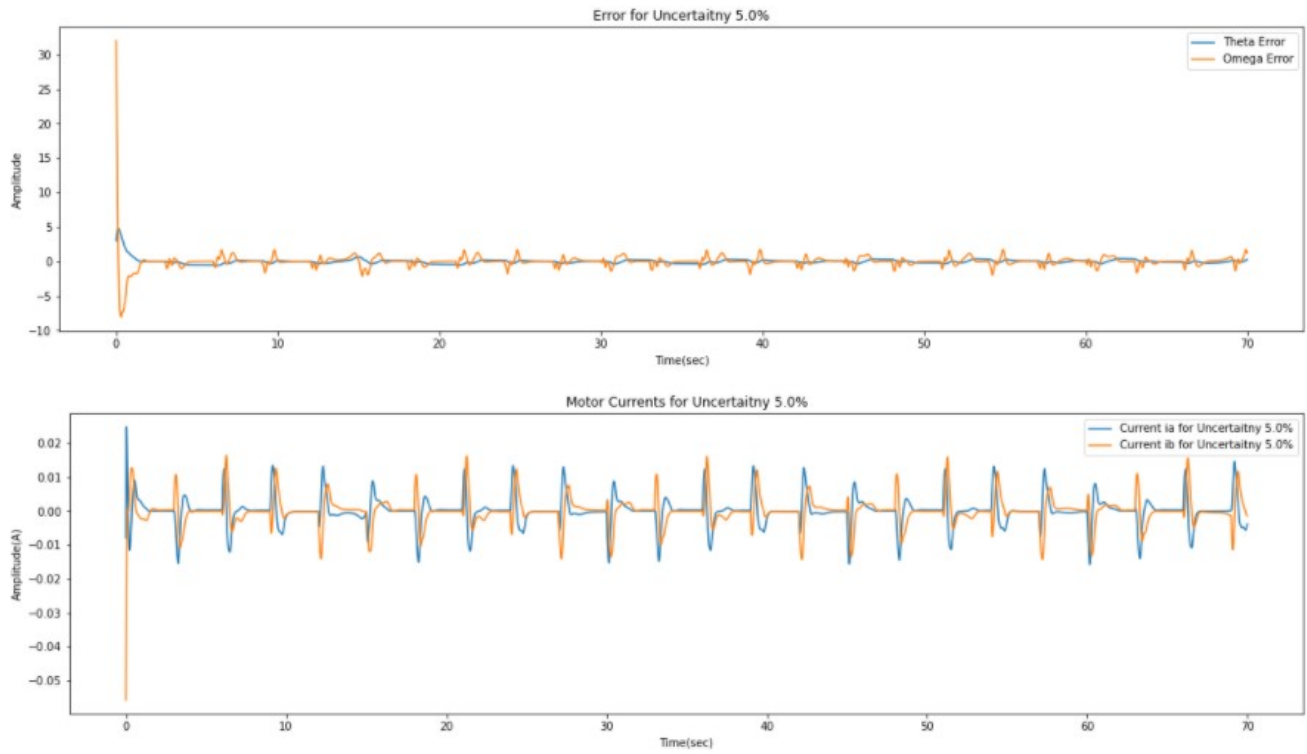
Για  $\alpha = 5\%$ :



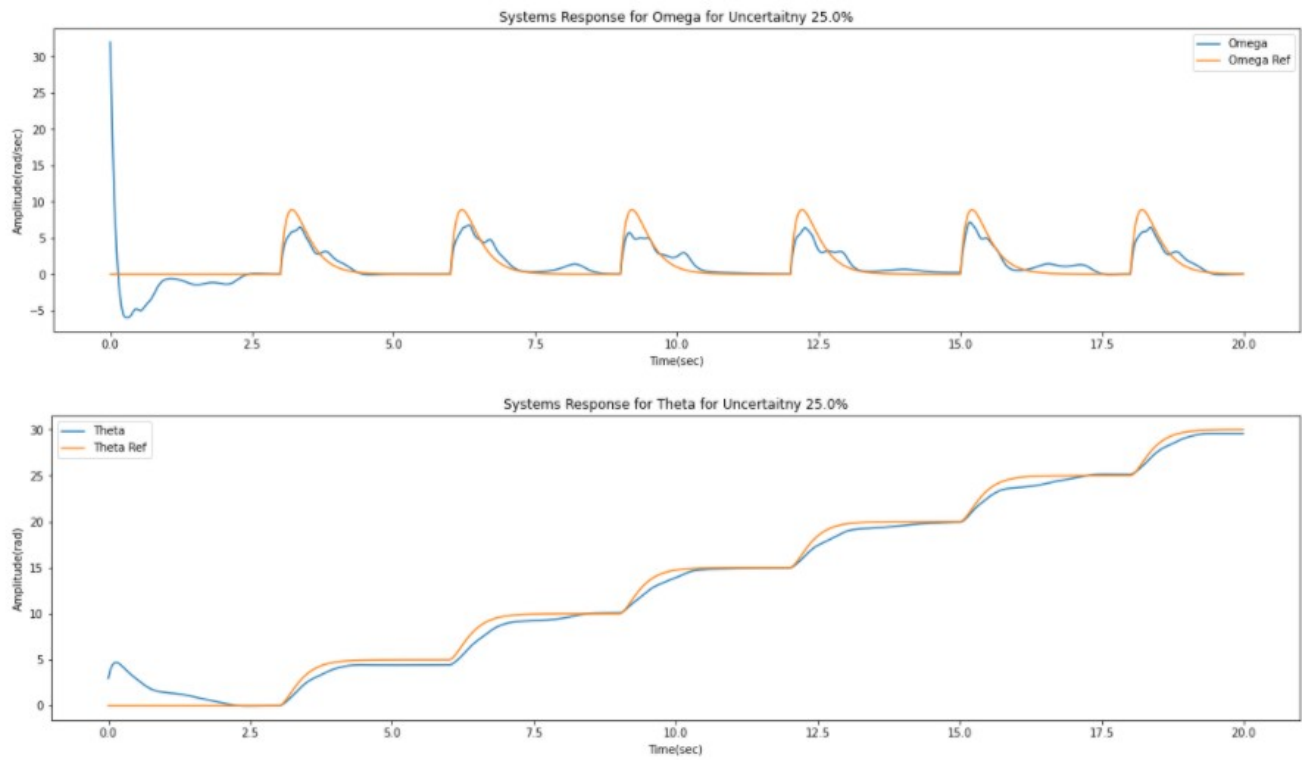


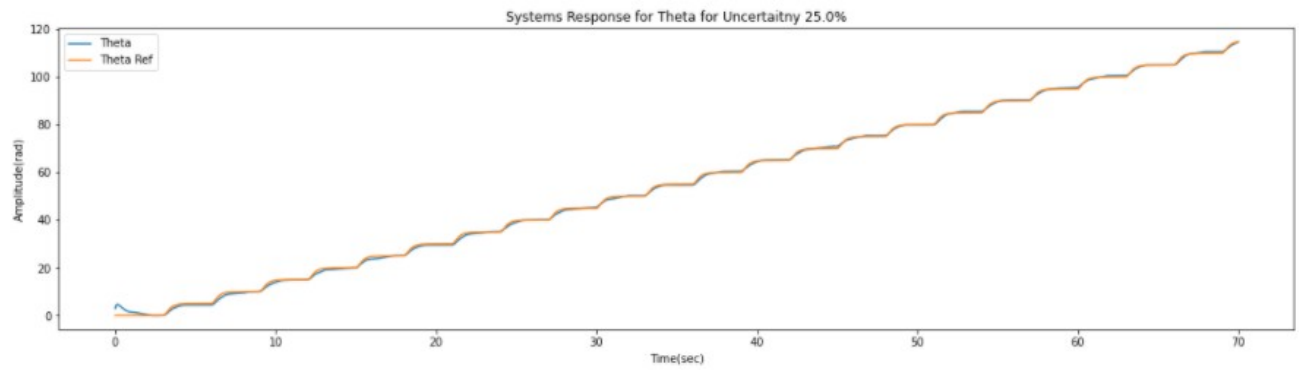
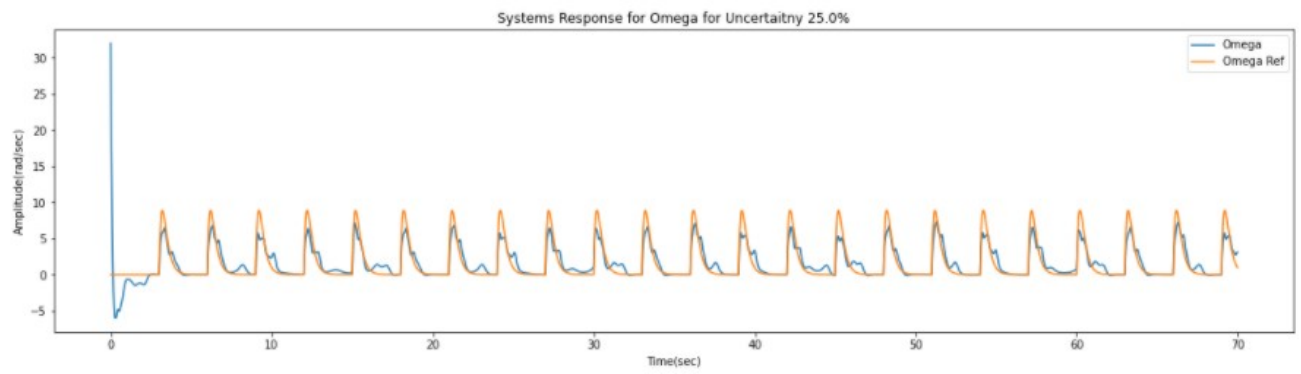
### Σχόλιο:

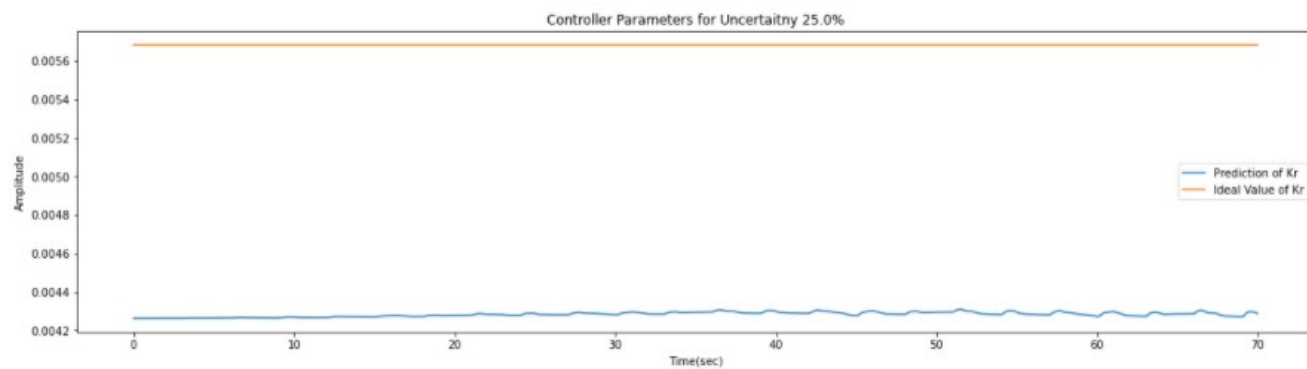
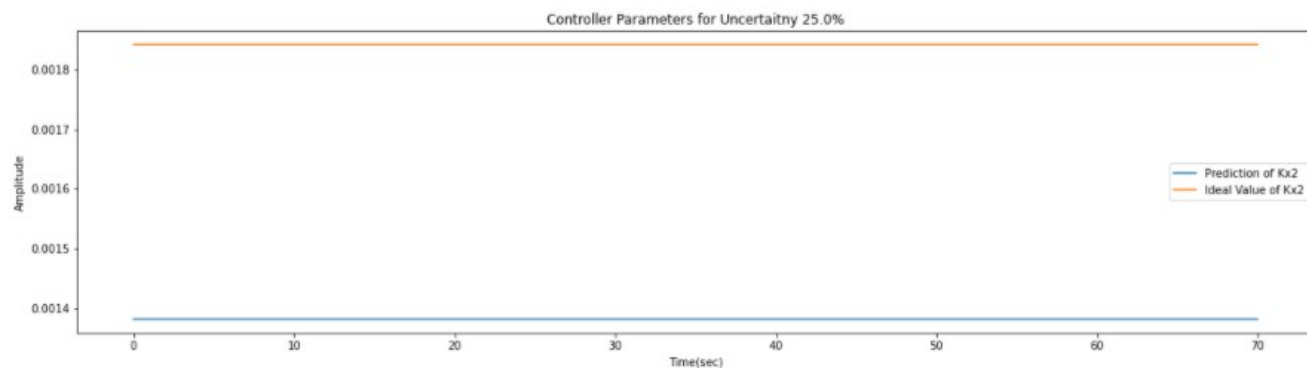
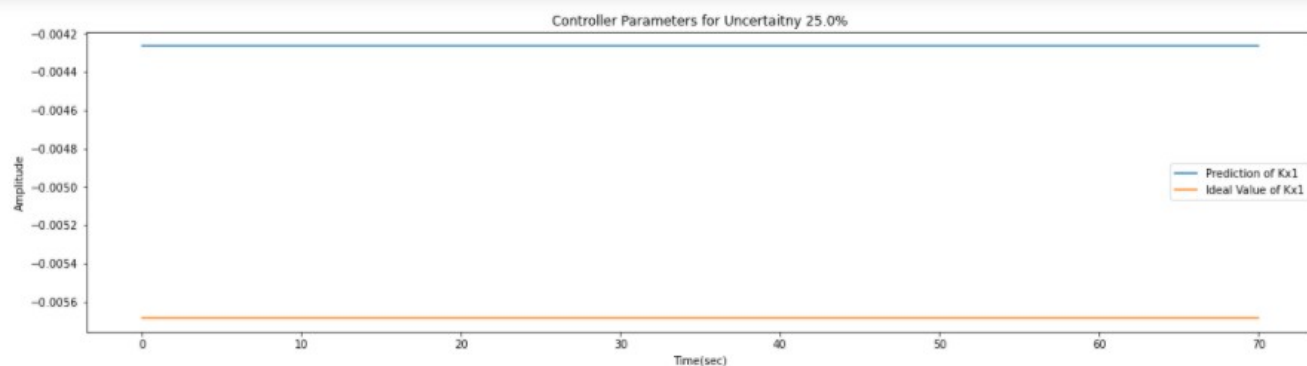
- Είναι εμφανής η ταλάντωση των παραμέτρων, γεγονός το οποίο προκαλεί η αβεβαιότητα  $e_f(x)$ .
- Παρατηρούμε ότι, τα  $k_x$  είναι σχεδόν σταθερά.

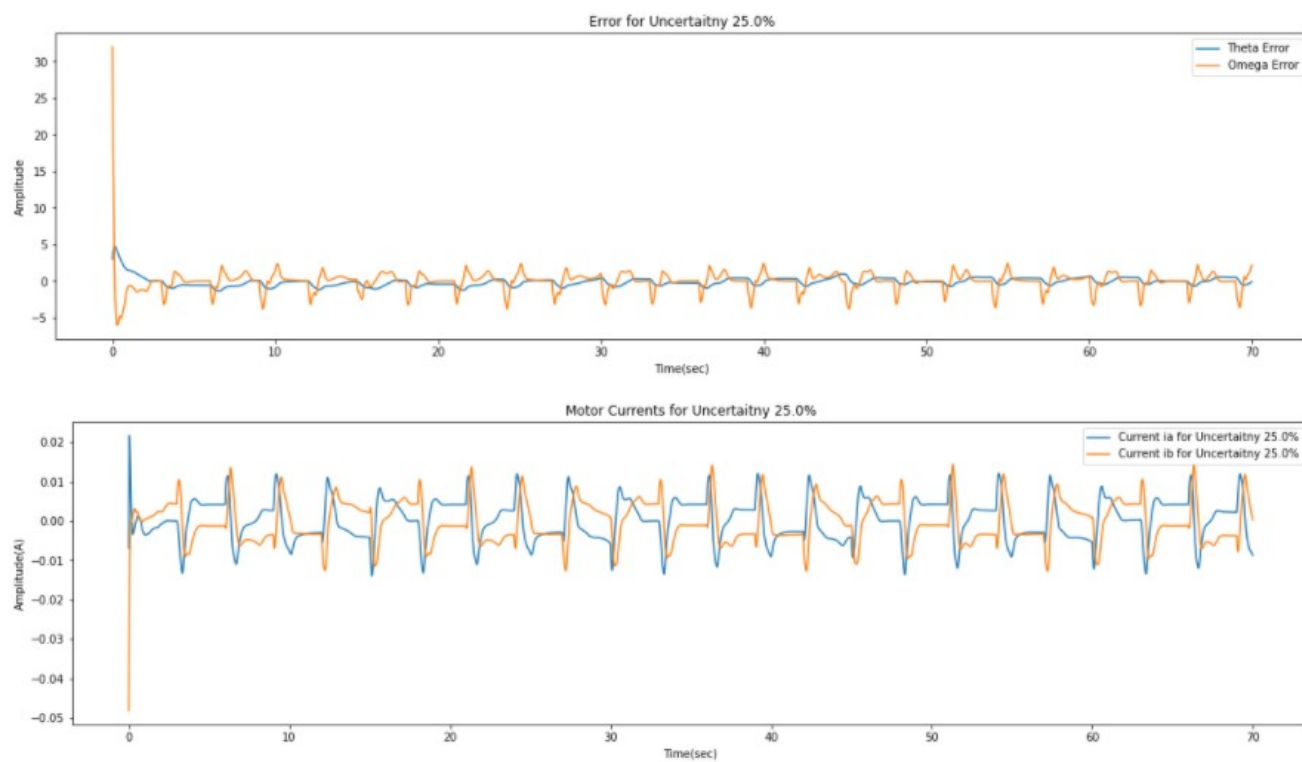


Γα α = 25%:

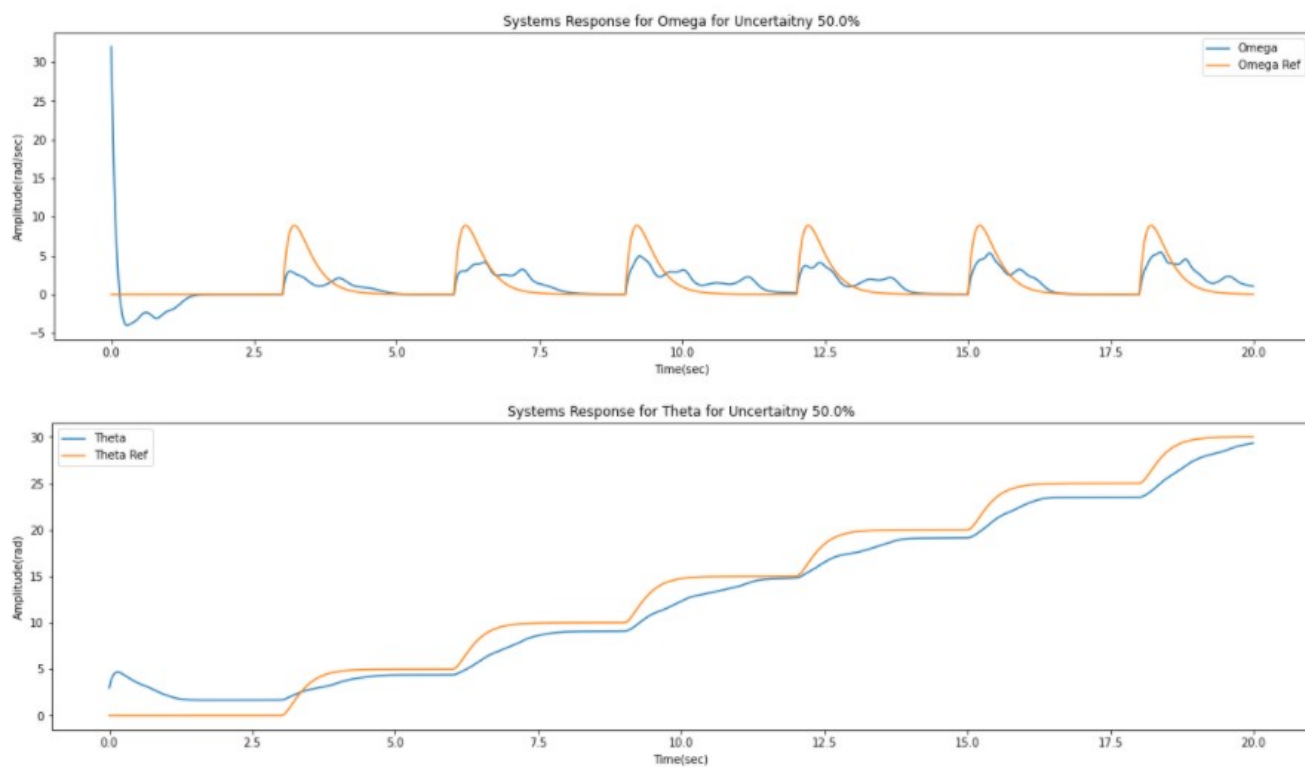


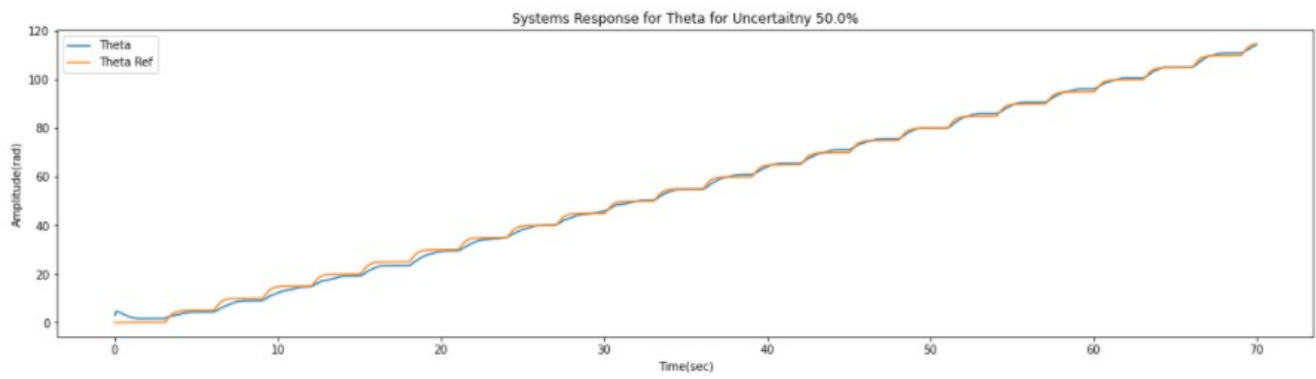
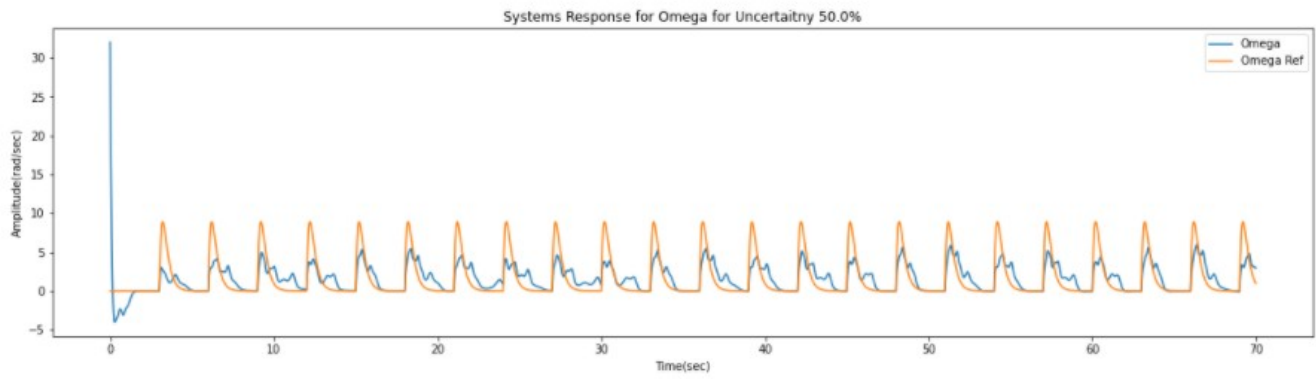


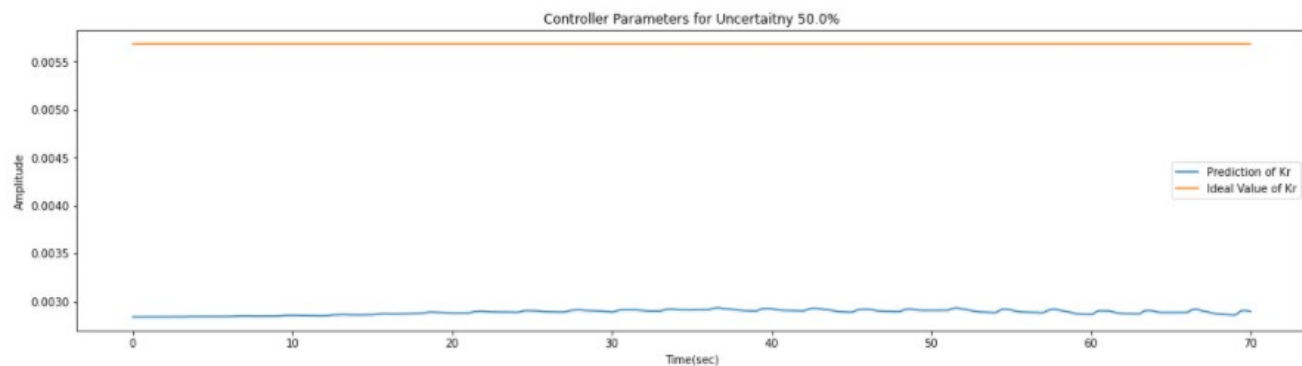
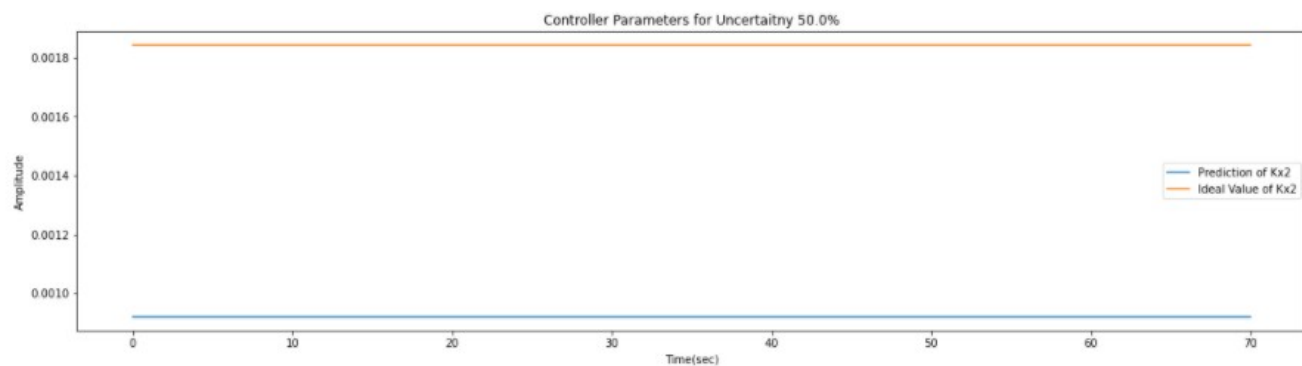
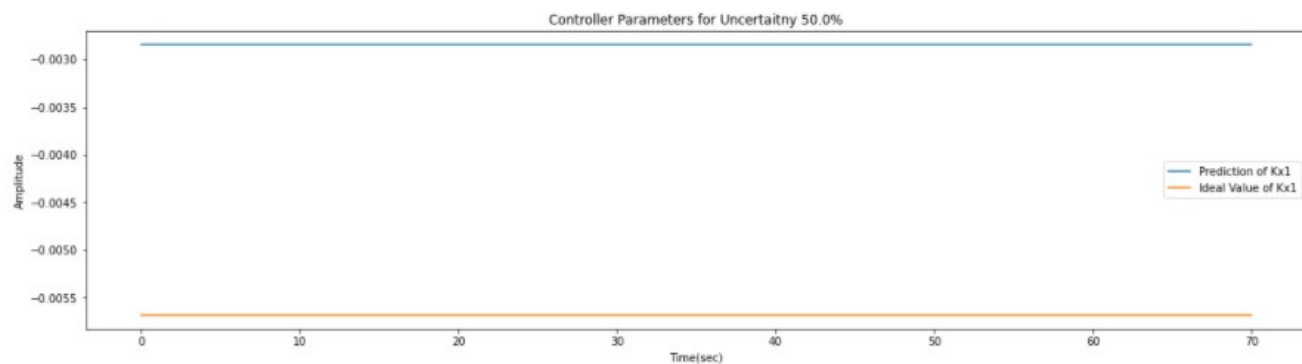




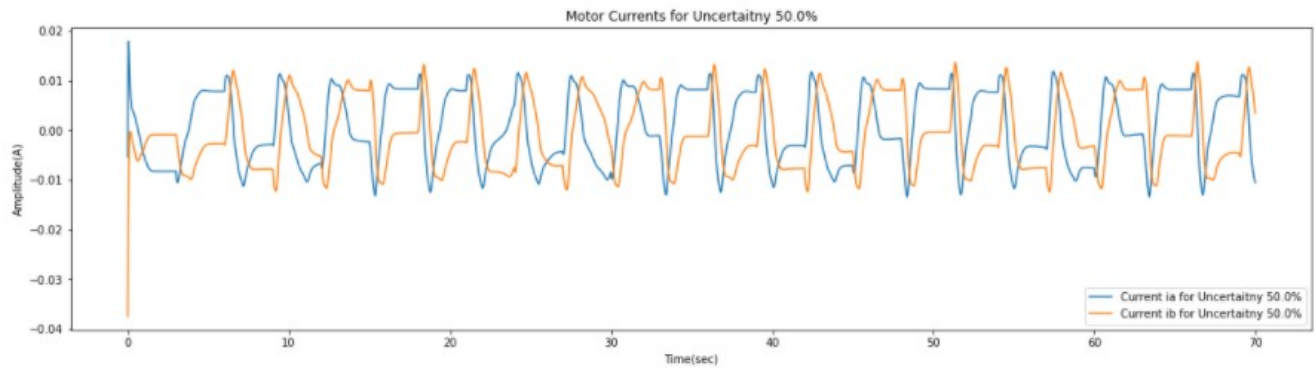
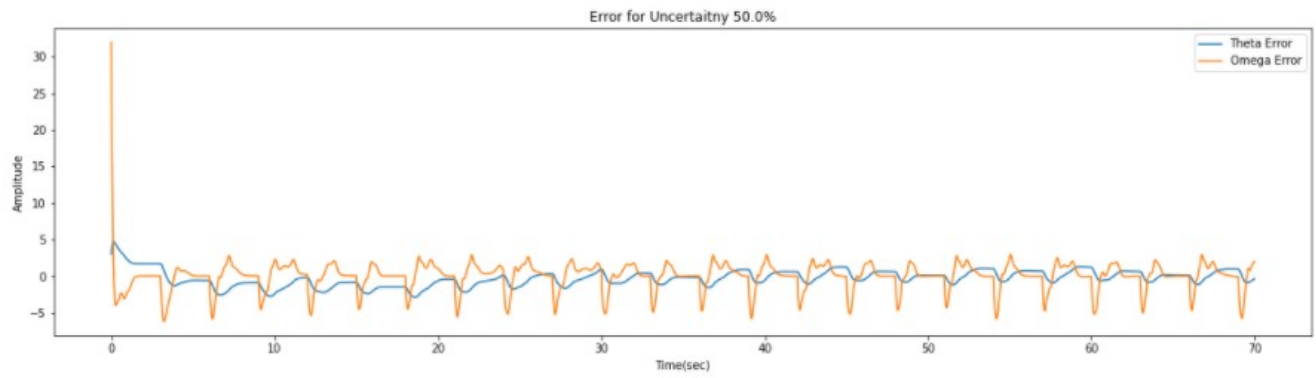
Γα α = 50%:



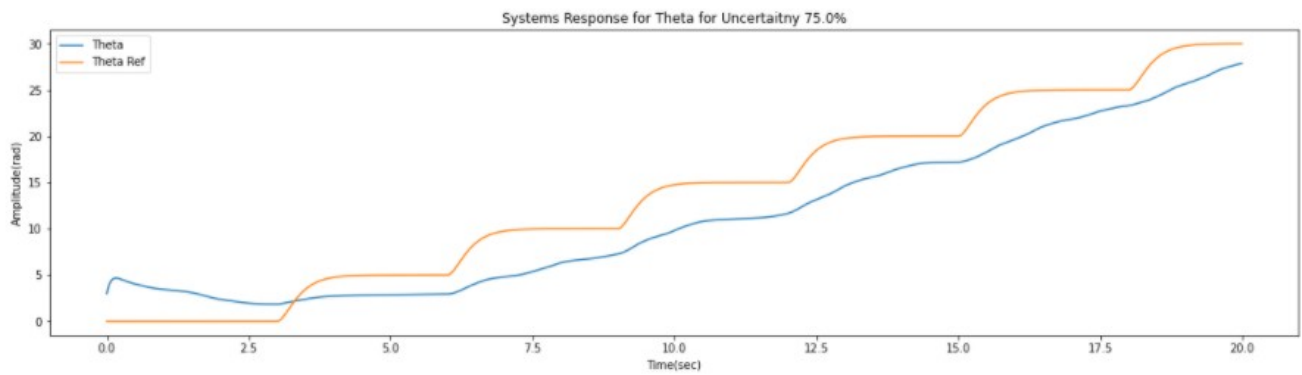
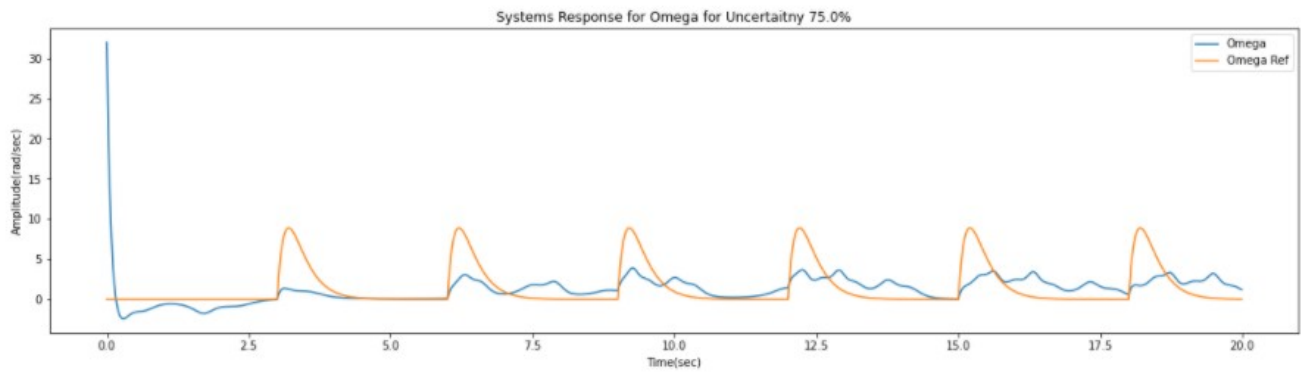


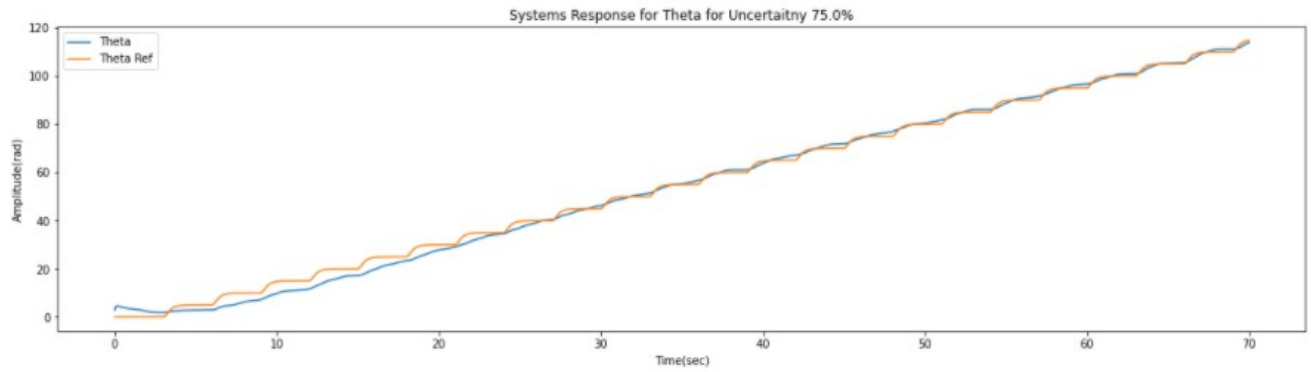
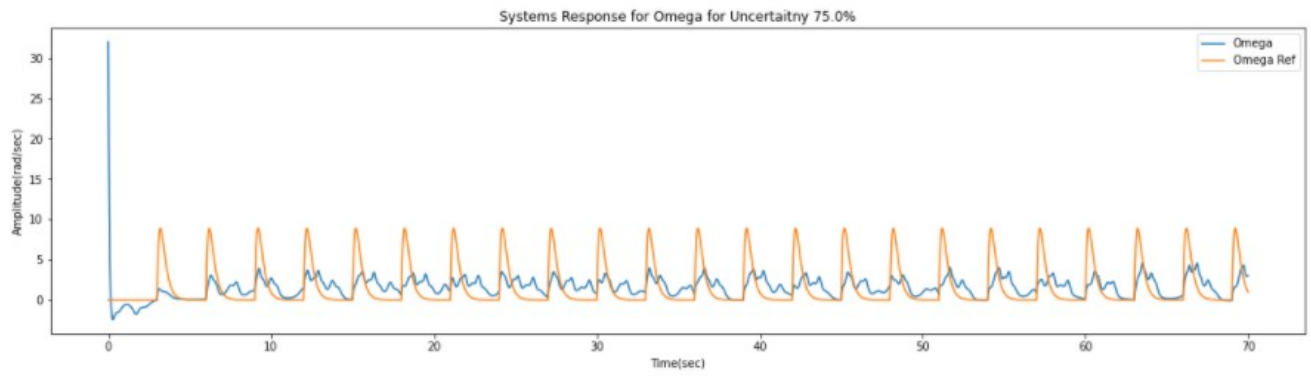


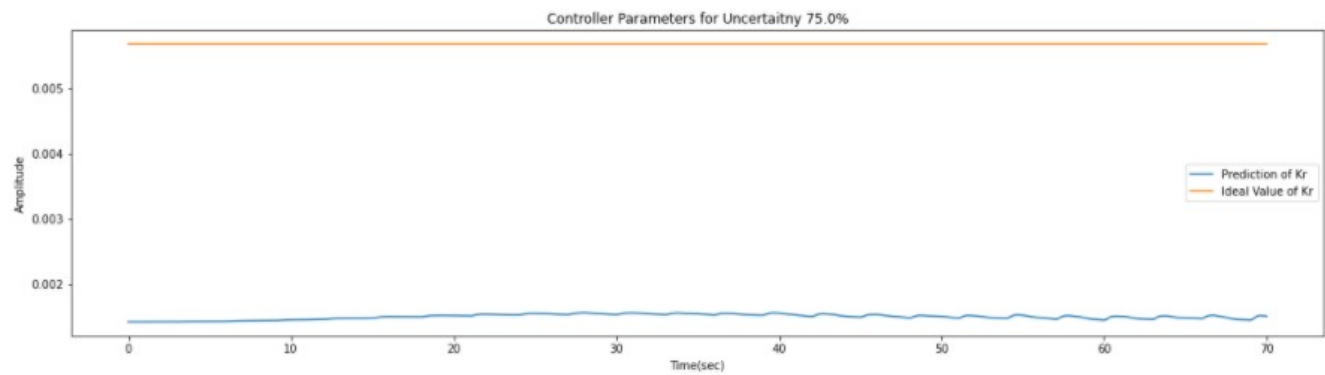
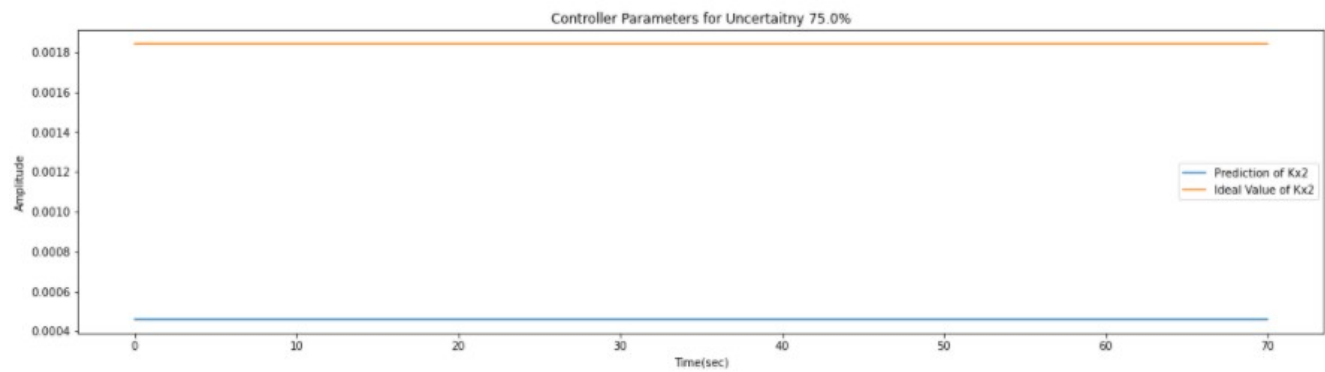
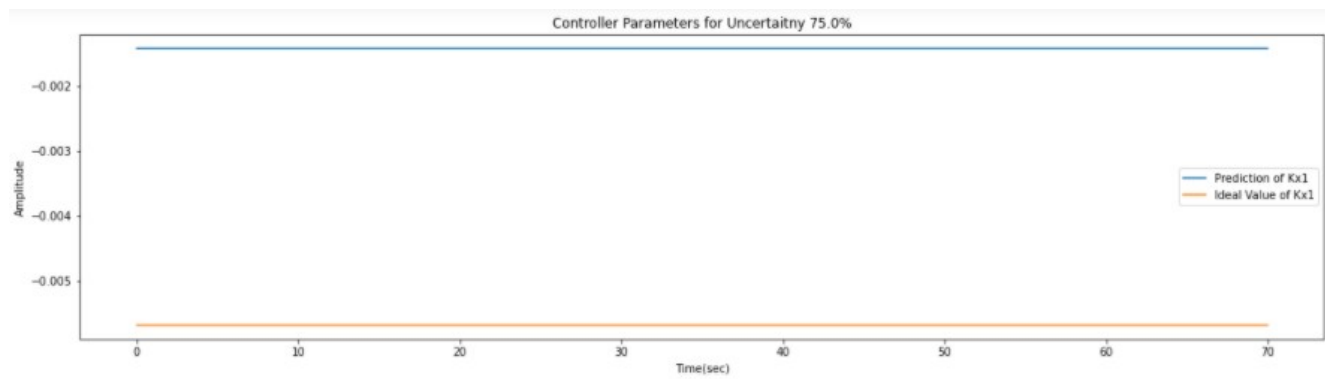


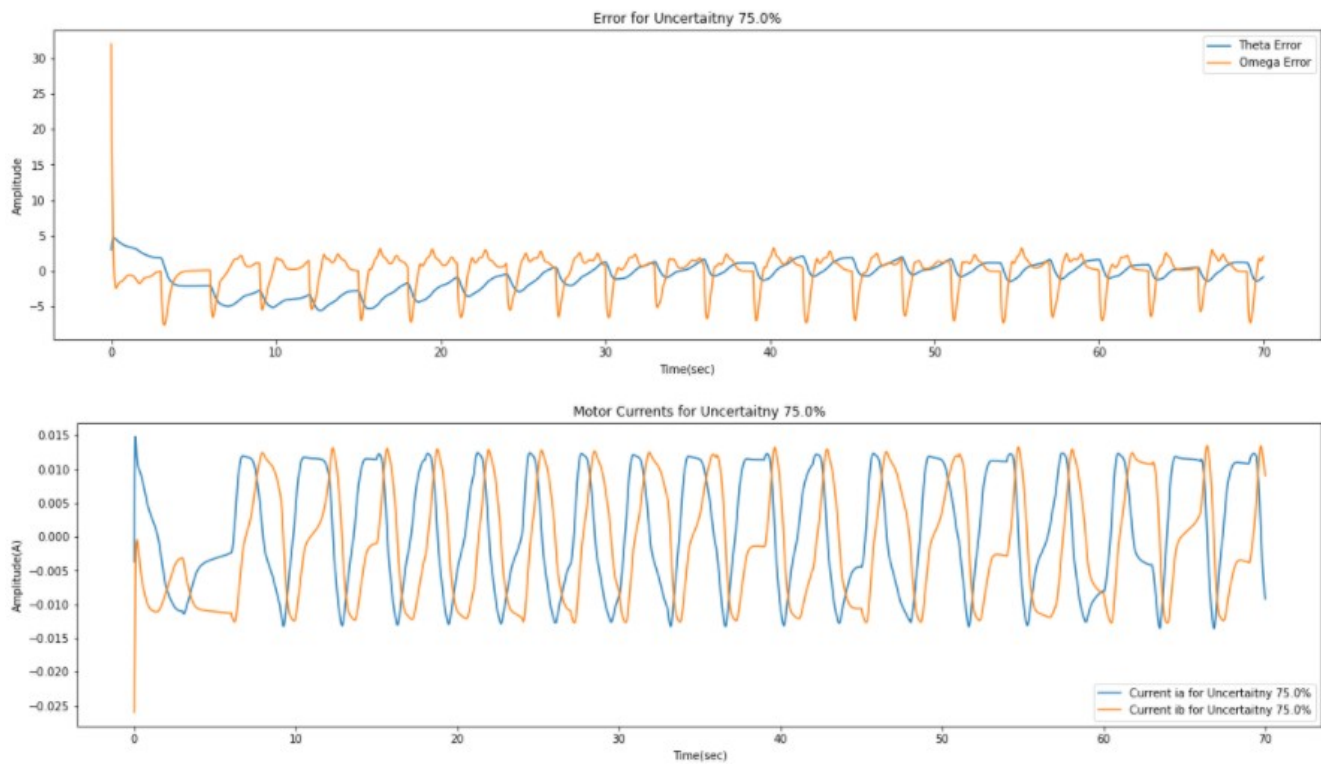


$\Gamma \alpha = 75\%$ :









### Συμπεράσματα:

- Τα συμπεράσματα είναι παρόμοια με προηγούμενως, με τη μόνη διαφορά η αβεβαιότητα να είναι πιο έντονη, γεγονός το οποίο γίνεται αντιληπτό από την αργή σύγκλιση του συστήματος.

### Σημείωση:

- Ο κώδικας για την υλοποίηση του RBF-net και το αλγόριθμου K-means, προέρχονται από το site: <https://pythonmachinelearning.pro/using-neural-networks-for-regression-radial-basis-function-networks/>