



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧ/ΚΩΝ & ΜΗΧ/ΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Μάθημα: "Ρομποτική Ι: Ανάλυση, Έλεγχος, Εργαστήριο"
(Ακαδημαϊκό Έτος 2020-21)

Εξαμηνιαία Εργασία

Ρομποτικός Χειριστής τριών στροφικών βαθμών ελευθερίας
(Robotic Manipulator with 3 rotational DOF)

ΦΟΙΤΗΤΗΣ: ΜΠΕΚΡΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ
ΑΜ: 03117116

Α.Θεωρητική Ανάλυση:

1. Συμβατική τοποθέτηση πλαισίων κατά D-H:

Σύμφωνα με την διεθνή σύμβαση κατά D-H, οι κανόνες για την τοποθέτηση των πλαισίων είναι οι παρακάτω:

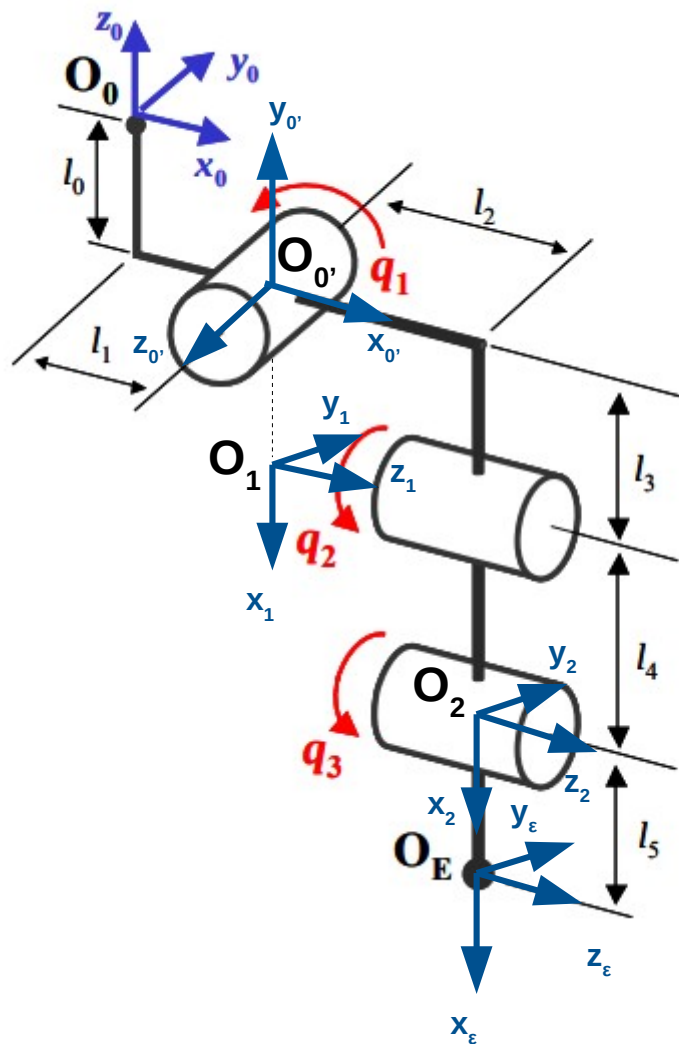
1. Η διεύθυνση του άξονα " z_i ", του εκάστοτε πλαισίου " i ", τοποθετείται πάνω στην διεύθυνση της γενικευμένης άρθρωσης(περιστροφική ή πρησματική).
2. Η τοποθέτηση του i -οστού πλαισίου, σύμφωνα με το $i-1$, γίνεται ως εξής:
 - (a) Περιστροφή του πλαισίου $i-1$ γύρω από τον άξονα $z_{(i-1)}$ κατά γωνία θ_i
 - (b) Μετατόπιση d_i του πλαισίου $i-1$ κατά μήκος του άξονα $z_{(i-1)}$
 - (c) Μετατόπιση a_i (μήκος της κοινής καθέτου) κατά το νέο (στραφέντα) άξονα $x_{(i-1)}$ (που τώρα συμπίπτει με τον x_i)
 - (d) Περιστροφή γύρω από τον άξονα x_i κατά γωνία α_i

Σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας D-H.

Σύνδεσμος i	θ_i	d_i	a_i	α_i
0'	0	$-l_0$	l_1	$\frac{\pi}{2}$
1	$q_1 - \frac{\pi}{2}$	0	l_3	$\frac{-\pi}{2}$
2	q_2	l_2	l_4	0
3=E	q_3	0	l_5	0

Πίνακας 1

Για την οπτικοποίηση της διαδικασίας παρατίθεται το αντίστοιχο σχήμα:



Εικόνα 1

Σχόλια:

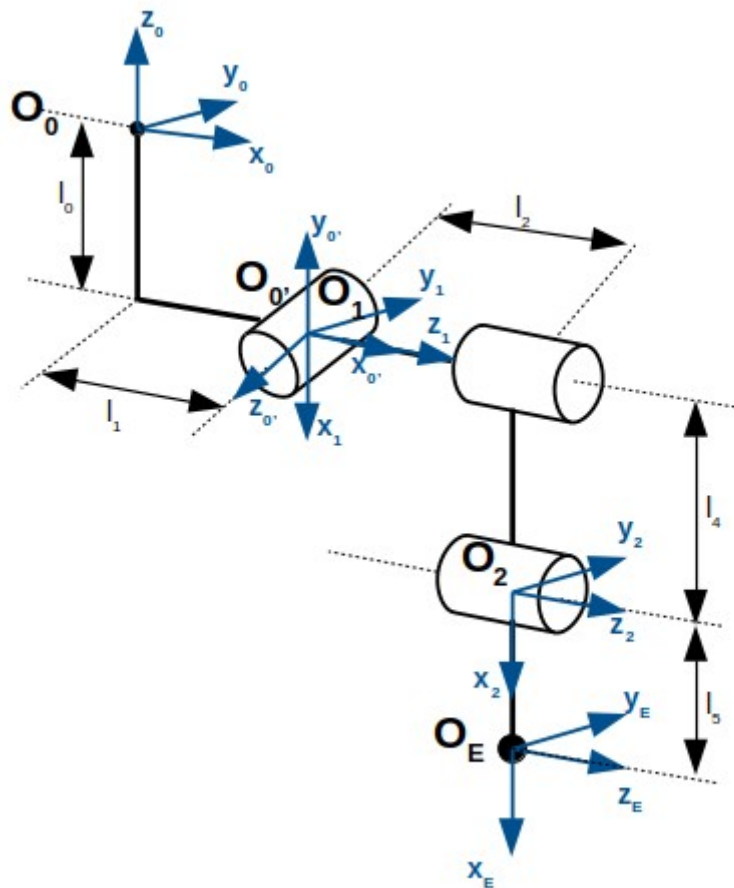
1. Παρατηρούμε ότι, λόγω του περιορισμού, που προσδίδει η προκαθορισμένη σειρά των κινήσεων, είναι αδύνατο να τοποθετηθεί το πλαίσιο O_1 πάνω στην άρθρωση q_2 . Επομένως, για την βέλτιστη τοποθέτηση των πλαισίων επιλέχθηκε το σημείο κάτω από την q_1 . Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, τοποθετούσαμε ένα ενδιάμεσο πλαίσιο στο δεξί γόνατο.
2. Μπορεί κανείς να καταλήξει στην προηγούμενη επιλογή, καθώς ο άξονας z_1 , διέρχεται από την διεύθυνση της q_2 (όπως επιβάλλεται) και είμαστε σίγουροι ότι, η παράκαμψη των σταθερών μερών (l_2, l_3), δεν μας οδηγεί σε λανθασμένο αποτέλεσμα, καθώς η q_2 προσδίδει ταχύτητα μόνο στους συνδέσμους l_4, l_5 και επομένως στο tool.
3. Για τα l_2, l_3 είναι υπεύθυνη μόνο η q_1 , της οποίας η συνεισφορά στην ταχύτητα του tool, θα είναι ορθή, καθώς η τελική θέση που καταληγει το tool είναι στην σωστή χωρική θέση.
4. Η συνεισφορά της q_2 στο τελικό εργαλείο δράσης, δεν αλλάζει από την υλοποίηση με το ενδιάμεσο πλαίσιο, καθώς υπολογίζοντας το διάνυσμα $(P^0)_{(1,E)}$, είναι προφανές ότι, μόνο η προβολή του στον άξονα x_1 , θα συνεισφέρει στην ταχύτητα, εφόσον η άλλη διέρχεται από την ίδια την άρθρωση (άξονας z_1).

2.Ορθή Κινηματική Ανάλυση του Ρομπότ:

Με τον μηδενισμό της l_3 , ποροκύπτει:

Σύνδεσμος i	θ_i	d_i	a_i	α_i
0'	0	$-l_0$	l_1	$\frac{\pi}{2}$
1	$q_1 - \frac{\pi}{2}$	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
2	q_2	l_2	l_4	0
3=E	q_3	0	l_5	0

Πίνακας 2



Εικόνα 2

Για τον υπολογισμό της ευθείας κινηματικής εξίσωσης, χρησιμοποιούμε τον Πίνακα 2 D-H, από όπου προκύπτουν οι εξής μετασχηματισμοί:

$$A_{(0')}^0 = Tra(z, -l_0) Tra(x, l_1) Rot(x, \frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^{(0')} = Rot(z, q_1 - \frac{\pi}{2}) Rot(x, -\frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1 = Rot(z, q_2) Tra(z, l_2) Tra(x, l_4) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_4 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_4 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = Rot(z, q_3) Tra(x, l_5) = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & c_3 l_5 \\ s_3 & c_3 & 0 & s_3 l_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^0 = A_{(0')}^0 A_1^{(0')} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^0 = A_1^0 A_2^1 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_4 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_4 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$A_2^0 = \begin{bmatrix} s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & s_1 c_2 l_4 + c_1 l_2 + l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_4 \\ -c_1 c_2 & c_1 s_2 & s_1 & -c_1 c_2 l_4 + s_1 l_2 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^0 = A_2^0 A_3^2 = \begin{bmatrix} s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & s_1 c_2 l_4 + c_1 l_2 + l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_4 \\ -c_1 c_2 & c_1 s_2 & s_1 & -c_1 c_2 l_4 + s_1 l_2 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & c_3 l_5 \\ s_3 & c_3 & 0 & s_3 l_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$A_{(E=3)}^0 = \begin{bmatrix} s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & s_1 (c_{23} l_5 + c_2 l_4) + c_1 l_2 + l_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & s_{23} l_5 + s_2 l_4 \\ -c_1 c_{23} & c_1 s_{23} & s_1 & -c_1 (c_{23} l_5 + c_2 l_4) + s_1 l_2 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα θέσης και ο προσανατολισμός του ΤΕΔ ως προς το αρχικό πλαίσιο, είναι το διάνυσμα της τελευταίας στήλης και ο υποπίνακας $R_{(E=3)}^0$ του πίνακα $A_{(E=3)}^0$ αντίστοιχα.

3.Ορθή Διαφορική Κινηματική:

Για τον υπολογισμό της Ιακωβιανή μήτρας, θα κινηθούμε με την γεωμετρική μέθοδο. Εφόσον, έχουμε 3 περιστροφικές αρθρώσεις, οι συνεισφορές τους στην ταχύτητα θα είναι για την καθεμία:

$$J_{(L_i)} = b_{(i-1)} \times r_{(i-1,E)}^0$$

$$J_{(A_i)} = b_{(i-1)}$$

Σημείωση:

- Επειδή το πλαίσιο αναφοράς δεν συμπίπτει με τον άξονα της πρώτης άρθρωσης, ο άξονας b_0 δε θα είναι το διάνυσμα $[001]^T$, που θα ήταν λόγω του D-H αλλά θα μετασχηματιστεί. Όμοια το διάνυσμα, r_E^0 δεν ισούται με P_E^0 αλλά με τη διαφορά του $P_E^0 - P_{(0')}^0$, όπου $P_{(0')}^0$ το διάνυσμα από το αρχικό frame μέχρι το frame της πρώτης άρθρωσης. Ουσιαστικά ο αλγόριθμος, ο οποίος ακολουθείται για τον υπολογισμό, εκτελείται και για την πρώτη άρθρωση.

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής:

Για κάθε άρθρωση, καθώς ακολουθούμε την μέθοδο D-H, το διάνυσμα b_{ref} για το τοπικό σύστημα συντεταγμένων θα είναι το $[001]^T$. Συνεπώς, ως προς το αρχικό πλαίσιο τα διανύσματα $b_{(i-1)}$ θα είναι:

$$\begin{aligned} i=1: \quad b_0 &= R_{(0')}^0 b_{ref} = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad r_{(0',E)}^0 = P_{(0,E)}^0 - P_{(0,0')}^0 = \begin{bmatrix} s_1(c_{23}l_5 + c_2l_4) + c_1l_2 \\ s_{23}l_5 + s_2l_4 \\ -c_1(c_{23}l_5 + c_2l_4) + s_1l_2 \end{bmatrix} \\ i=2: \quad b_1 &= R_1^0 b_{ref} = [c_1 \ 0 \ s_1]^T, \quad r_{(1,E)}^0 = P_{(0,E)}^0 - P_{(0,1)}^0 = \begin{bmatrix} s_1(c_{23}l_5 + c_2l_4) + c_1l_2 \\ s_{23}l_5 + s_2l_4 \\ -c_1(c_{23}l_5 + c_2l_4) + s_1l_2 \end{bmatrix} \\ i=3: \quad b_2 &= R_2^0 b_{ref} = [c_1 \ 0 \ s_1]^T, \quad r_{(2,E)}^0 = P_{(0,E)}^0 - P_{(0,2)}^0 = \begin{bmatrix} s_1c_{23}l_5 \\ s_{23}l_5 \\ -c_1c_{23}l_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Όπου τα διανύσματα $P_{(i,j)}^0 = A_j^i r_{ref}$, $r_{ref} = [0001]^T$

Σε γραφή MATLAB θα είναι:

$$b_{(i-1)} = R_{(i-1)}^0 [1:3,3], \quad P_{(i,j)}^0 = A_j^i [1:3,4]$$

Σημειώνουμε στους πίνακες μετασχηματισμού τα αντίστοιχα διανύσματα.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{b}_{0'} & & \mathbf{P}_{(0,0')}^0 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 A_{(0')}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{b}_1 & & \mathbf{P}_{(0,1)}^0 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 A_1^0 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{b}_2 & & \mathbf{P}_{(0,2)}^0 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 A_2^0 = \begin{bmatrix} s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & s_1 c_2 l_4 + c_1 l_2 + l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_4 \\ -c_1 c_2 & c_1 s_2 & s_1 & -c_1 c_2 l_4 + s_1 l_2 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Επομένως, προκύπτουν τα αντίστοιχα διανύσματα ταχυτήτων:

$$\begin{aligned}
 J_{(L_1)} &= \begin{bmatrix} c_1(c_{23}l_5 + c_2l_4) - s_1l_2 \\ 0 \\ s_1(c_{23}l_5 + c_2l_4) + c_1l_2 \end{bmatrix}, \quad J_{(A_1)} = [0 \quad -1 \quad 0]^T \\
 J_{(L_2)} &= \begin{bmatrix} -s_1(s_{23}l_5 + s_2l_4) \\ c_{23}l_5 + c_2l_4 \\ c_1(s_{23}l_5 + s_2l_4) \end{bmatrix}, \quad J_{(A_2)} = [c_1 \quad 0 \quad s_1]^T \\
 J_{(L_3)} &= \begin{bmatrix} -s_1s_{23}l_5 \\ c_{23}l_5 \\ c_1s_{23}l_5 \end{bmatrix}, \quad J_{(A_3)} = [c_1 \quad 0 \quad s_1]^T
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε:

$$J_{(6 \times 3)} = \begin{bmatrix} c_1(c_{23}l_5 + c_2l_4) - s_1l_2 & -s_1(s_{23}l_5 + s_2l_4) & -s_1s_{23}l_5 \\ 0 & c_{23}l_5 + c_2l_4 & c_{23}l_5 \\ s_1(c_{23}l_5 + c_2l_4) + c_1l_2 & c_1(s_{23}l_5 + s_2l_4) & c_1s_{23}l_5 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(c_{23}l_5+c_2l_4)-s_1l_2 & -s_1(s_{23}l_5+s_2l_4) & -s_1s_{23}l_5 \\ 0 & c_{23}l_5+c_2l_4 & c_{23}l_5 \\ s_1(c_{23}l_5+c_2l_4)+c_1l_2 & c_1(s_{23}l_5+s_2l_4) & c_1s_{23}l_5 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

4.Αντίστροφη Διαφορική Κινηματική Ανάλυση:

Το αντίστροφο διαφορικό μοντέλο ,για τη γραμμική ταχύτητα, αποτελεί η εξίσωση $\dot{q}=J_L^{(-1)}\dot{p}$, μόνο για εκείνες τις τιμές των q_i , όπου η ορίζουσα της Ιακωβιανής των γραμμικών ταχυτήτων δεν μηδενίζεται. Για την εύρεση αυτών των ιδιόμορφων διατάξεων (όπως καλούνται) θα λύσουμε την εξίσωση $\det(J_L)=0$ (1) .

Εύρεση Ιδιόμορφων Διατάξεων:

Η Ιακωβιανή των γραμμικών ταχυτήτων είναι :

$$J_L = \begin{bmatrix} c_1(c_{23}l_5+c_2l_4)-s_1l_2 & -s_1(s_{23}l_5+s_2l_4) & -s_1s_{23}l_5 \\ 0 & c_{23}l_5+c_2l_4 & c_{23}l_5 \\ s_1(c_{23}l_5+c_2l_4)+c_1l_2 & c_1(s_{23}l_5+s_2l_4) & c_1s_{23}l_5 \end{bmatrix}$$

Χάριν ευκολίας θέτουμε $A_{23}=c_{23}l_5+c_2l_4$, $B_{23}=s_{23}l_5+s_2l_4$ (2) και η παραπάνω εξίσωση γίνεται|:

$$J_L = \begin{bmatrix} c_1A_{23}-s_1l_2 & -s_1B_{23} & -s_1s_{23}l_5 \\ 0 & A_{23} & c_{23}l_5 \\ s_1A_{23}+c_1l_2 & c_1B_{23} & c_1s_{23}l_5 \end{bmatrix}$$

Επομένως προκύπτει:

$$\begin{aligned} \det(J_L) &= (c_1A_{23}-s_1l_2)(A_{23}c_1s_{23}l_5-c_1c_{23}B_{23}l_5)+(s_1A_{23}+c_1l_2)(-c_{23}s_1B_{23}l_5+A_{23}s_{23}s_1l_5) \\ \det(J_L) &= (c_1A_{23}-s_1l_2)(A_{23}s_{23}-c_{23}B_{23})c_1l_5+(s_1A_{23}+c_1l_2)s_1l_5(A_{23}s_{23}-c_{23}B_{23}) \\ \det(J_L) &= l_5(A_{23}s_{23}-c_{23}B_{23})(c_1^2A_{23}-s_1c_1l_2+s_1^2A_{23}+s_1c_1l_2) \\ \det(J_L) &= l_5A_{23}(A_{23}s_{23}-B_{23}c_{23}) \quad (3) \end{aligned}$$

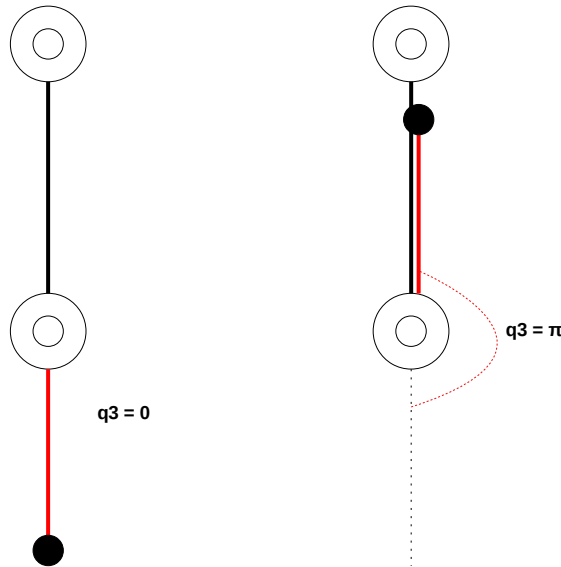
Από (1), (3) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} A_{23}=0 \\ \dot{q} \\ A_{23}s_{23}-c_{23}B_{23}=0 \end{array} \right\} &\xrightarrow{(3)} \left\{ \begin{array}{l} (c_{23}l_5+c_2l_4)=0 \\ \dot{q} \\ (c_{23}l_5+c_2l_4)s_{23}-c_{23}(s_{23}l_5+s_2l_4)=0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (c_{23}l_5+c_2l_4)=0 \\ \dot{q} \\ c_2s_{23}-c_{23}s_2=0 \end{array} \right\} \\ \text{-----} &\xrightarrow{\sin a \cos b - \sin b \cos a = \sin(a-b)} \left\{ \begin{array}{l} (c_{23}l_5+c_2l_4)=0 \quad (4) \\ \dot{q} \\ s_3=0 \quad (5) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

1. Για την εξίσωση (5) η λύση είναι $q_3 = k\pi$, οπότε προκύπτει $q_3 = 0$ ή $q_3 = \pi$. Πρόκειται για workspace singularity, καθώς λαμβάνει χώρα στα όρια του χώρου εργασίας, όταν ο σύνδεσμος l_5 ευθυγραμμίζεται με τον l_4 . Έχουμε alignment δύο αξόνων γεγονός, το οποίο σηματοδοτεί την γραμμική εξάρτηση των δύο τελευταίων στηλών-διανυσμάτων της Ιακωβιανής, όπως προκύπτει και από το μηδενισμό της q_3 στον πίνακα J_L .

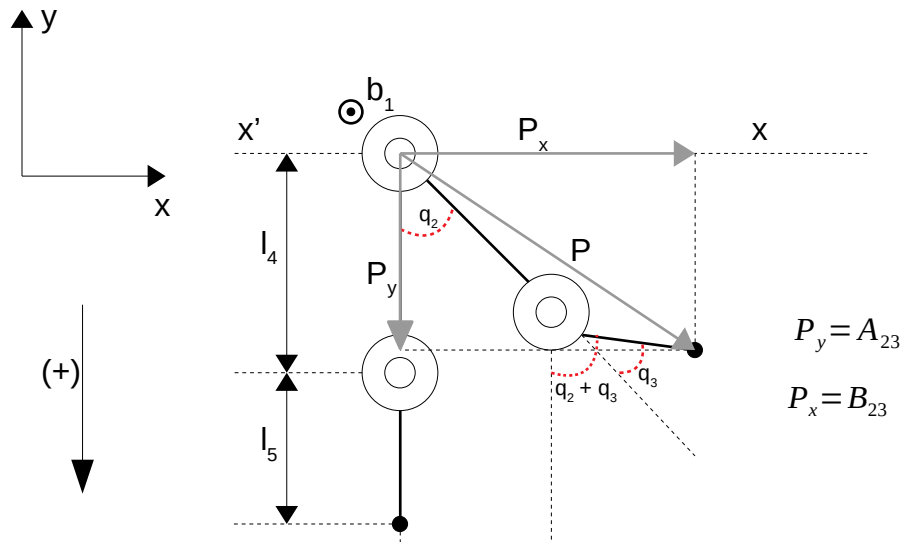
$$J_L = \begin{bmatrix} c_1 c_2 (l_4 + l_5) - s_1 l_2 & -s_1 s_2 (l_4 + l_5) & -s_1 s_2 l_5 \\ 0 & c_2 (l_4 + l_5) & c_2 l_5 \\ s_1 c_2 (l_4 + l_5) + c_1 l_2 & c_1 s_2 (l_4 + l_5) & c_1 s_2 l_5 \end{bmatrix}$$

Πρακτικά, η q_3 παύει να συνεισφέρει στην γραμμική ταχύτητα του tool, καθώς οι δύο άξονες κινούνται μαζί. Παρουσιάζονται οι δύο αυτές διατάξεις:



Εικόνα 3

2. Για την εξίσωση (5) παρατίθεται το παρακάτω σχήμα για την οπτικοποίηση της διάταξης.



Εικόνα 4

Στο παραπάνω σχήμα έχει οριστεί ένα σύστημα συντεταγμένων για την διευκόλυνση της ανάλυσης. Παρατηρώντας την ρομποτική διάταξη από πλάγια όψη, όπως αυτή, πρόκειται για ένα 2R – planar, στο οποίο η απόσταση A_{23} , είναι η απόσταση του ΤΕΔ από την ευθεία x'x παράλληλη στην διεύθυνση της q_1 .

Συνεπώς, όταν το end-effector κινείται πάνω στην ευθεία αυτή έχουμε internal singularity και προκύπτει γραμμική εξάρτηση των πρώτων δύο στηλών-διανυσμάτων της Ιακωβιανής.

$$J_L = \begin{bmatrix} -s_1 l_2 & -s_1 B_{23} & -s_1 s_{23} l_5 \\ 0 & 0 & c_{23} l_5 \\ c_1 l_2 & c_1 B_{23} & c_1 s_{23} l_5 \end{bmatrix}$$

Πρακτικά, μηδενίζεται η συνεισφορά της q_2 στη ταχύτητα του tool στην διεύθυνση του $y_{(0)}$ (σύμφωνα με το αρχικό πλαίσιο αναφοράς), στο οποίο πλέον συνεισφέρει μόνο η q_3 .

Σχόλιο:

- Στην περίπτωση που ισχύουν και τα 2 singularities, τότε το tool κινείται μόνο στο επίπεδο που ορίζουν οι άξονες, $z_{(0)}, x_{(0)}$, του αρχικού συστήματος αναφοράς καθώς ισχύει $P_y = \pm(l_4 + l_5)$.

Υπολογισμός Αντίστροφης Ιακωβιανής Μήτρας:

Για τις διατάξεις, όπου δεν έχουμε ιδιομορφίες ορίζεται η αντίστροφη Ιακωβιανή και ο υπολογισμός της έχει ως εξής.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο εύρεσης του αντιστρόφου ενός πίνακα $A_{(3 \times 3)}$:

$$A_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ο Adjoint πίνακας θα είναι :

$$A_{adj} = \begin{bmatrix} \left| \begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right| \end{bmatrix}$$

Πρωτού προχωρήσουμε στους υπολογισμούς, οφείλουμε να επισημάνουμε τις σχέσεις, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν.

$$\left(\begin{array}{l} A_{23}, B_{23}(2) \\ \sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b) \quad (6) \\ \cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b) \quad (7) \\ \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1 \quad (8) \end{array} \right)$$

Προς αντιστοιχία με το δικό μας πρόβλημα θα έχουμε τους εξής πίνακες:

$$J_{adj}^{11} = \begin{vmatrix} J_L^{22} & J_L^{23} \\ J_L^{32} & J_L^{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{23} & c_{23}l_5 \\ c_1B_{23} & c_1s_{23}l_5 \end{vmatrix} = A_{23}c_1s_{23}l_5 - c_{23}c_1B_{23}l_5 = (c_{23}l_5 + c_2l_4)c_1s_{23}l_5 - c_{23}c_1(s_{23}l_5 + s_2l_4)l_5$$

$$J_{adj}^{11} = c_1l_5l_4(c_2s_{23} - s_2c_{23}) \xrightarrow{(6)}$$

$$J_{adj}^{11} = c_1s_3l_4l_5$$

$$J_{adj}^{12} = \begin{vmatrix} J_L^{13} & J_L^{12} \\ J_L^{33} & J_L^{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -s_{23}s_1l_5 & -s_1B_{23} \\ c_1s_{23}l_5 & c_1B_{23} \end{vmatrix}$$

$$J_{adj}^{12} = 0$$

$$J_{adj}^{13} = \begin{vmatrix} J_L^{12} & J_L^{13} \\ J_L^{22} & J_L^{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -s_1B_{23} & -s_1s_{23}l_5 \\ A_{23} & c_{23}l_5 \end{vmatrix} = -s_1(s_{23}l_5 + s_2l_4)c_{23}l_5 + s_{23}s_1l_5(c_{23}l_5 + c_2l_4) = s_1l_4l_5(-c_{23}s_2 + s_{23}c_2) \xrightarrow{(6)}$$

$$J_{adj}^{13} = s_1s_3l_4l_5$$

$$J_{adj}^{21} = \begin{vmatrix} J_L^{23} & J_L^{21} \\ J_L^{33} & J_L^{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{23}l_5 & 0 \\ c_1s_{23}l_5 & s_1A_{23} + c_1l_2 \end{vmatrix}$$

$$J_{adj}^{21} = c_{23}l_5(s_1A_{23} + c_1l_2)$$

$$J_{adj}^{22} = \begin{vmatrix} J_L^{11} & J_L^{13} \\ J_L^{31} & J_L^{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1A_{23} - s_1l_2 & -s_1s_{23}l_5 \\ s_1A_{23} + c_1l_2 & c_1s_{23}l_5 \end{vmatrix} = (c_1A_{23} - s_1l_2)(c_1s_{23}l_5) + (s_1s_{23}l_5)(s_1A_{23} + c_1l_2)$$

$$J_{adj}^{22} = c_1^2s_{23}l_5A_{23} - s_1c_1s_{23}l_2l_5 + s_1^2s_{23}l_5A_{23} + s_1c_1s_{23}l_2l_5 \xrightarrow{(8)}$$

$$J_{adj}^{22} = s_{23}l_5A_{23}$$

$$J_{adj}^{23} = \begin{vmatrix} J_L^{13} & J_L^{11} \\ J_L^{23} & J_L^{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -s_{23}s_1l_5 & c_1A_{23} - s_1l_2 \\ c_{23}l_5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$J_{adj}^{23} = -c_{23}l_5(c_1A_{23} - s_1l_2)$$

$$J_{adj}^{31} = \begin{vmatrix} J_L^{21} & J_L^{22} \\ J_L^{31} & J_L^{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A_{23} \\ s_1A_{23} + c_1l_2 & c_1B_{23} \end{vmatrix}$$

$$J_{adj}^{31} = -A_{23}(s_1A_{23} + c_1l_2)$$

$$J_{adj}^{32} = \begin{vmatrix} J_L^{12} & J_L^{11} \\ J_L^{32} & J_L^{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -s_1B_{23} & c_1A_{23} - s_1l_2 \\ c_1B_{23} & s_1A_{23} + c_1l_2 \end{vmatrix} = -s_1B_{23}(s_1A_{23} + c_1l_2) - c_1B_{23}(c_1A_{23} - s_1l_2)$$

$$J_{adj}^{32} = -s_1^2A_{23}B_{23} - s_1c_1l_2B_{23} - c_1^2B_{23}A_{23} + c_1s_1l_2B_{23} \xrightarrow{(8)}$$

$$J_{adj}^{32} = -A_{23} B_{23}$$

$$J_{adj}^{33} = \begin{vmatrix} J_L^{11} & J_L^{12} \\ J_L^{21} & J_L^{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 A_{23} - s_1 l_2 & -s_1 B_{23} \\ 0 & A_{23} \end{vmatrix}$$

$$J_{adj}^{33} = A_{23} (c_1 A_{23} - s_1 l_2)$$

Επίσης η ορίζουσα, από την (3) θα είναι:

$$\det(J_L) = l_5 A_{23} (A_{23} s_{23} - B_{23} c_{23}) = l_4 l_5 s_3 A_{23}$$

Επομένως, προκύπτει ο αντίστροφος της Ιακωβιανής Μήτρας:

$$J_L^{(-1)} = \frac{1}{\det(J_L)} J_{adj} \rightarrow$$

$$J_L^{(-1)} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{A_{23}} & 0 & \frac{s_1}{A_{23}} \\ c_{23} \frac{(s_1 A_{23} + c_1 l_2)}{(A_{23} s_3 l_4)} & \frac{s_{23}}{(s_3 l_4)} & -c_{23} \frac{(c_1 A_{23} - s_1 l_2)}{(A_{23} s_3 l_4)} \\ \frac{-(s_1 A_{23} + c_1 l_2)}{(s_3 l_4 l_5)} & \frac{-B_{23}}{(s_3 l_4 l_5)} & \frac{(c_1 A_{23} - s_1 l_2)}{(s_3 l_4 l_5)} \end{bmatrix}$$

Και το αντίστροφο διαφορικό μοντέλο είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{A_{23}} & 0 & \frac{s_1}{A_{23}} \\ c_{23} \frac{(s_1 A_{23} + c_1 l_2)}{(A_{23} s_3 l_4)} & \frac{s_{23}}{(s_3 l_4)} & -c_{23} \frac{(c_1 A_{23} - s_1 l_2)}{(A_{23} s_3 l_4)} \\ \frac{-(s_1 A_{23} + c_1 l_2)}{(s_3 l_4 l_5)} & \frac{-B_{23}}{(s_3 l_4 l_5)} & \frac{(c_1 A_{23} - s_1 l_2)}{(s_3 l_4 l_5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix}$$

5. Αντίστροφη Κινηματική Ανάλυση:

Δεδομένης θέσης στο χώρο έστω P_E θα υπολογίσουμε τις τιμές των αρθρώσεων q_i , για την επίτευξη της. Λαμβάνοντας υπόψιν το διάνυσμα $P_{(0,E)}^0$ από το ευθύ γεωμετρικό μοντέλο του Ζητήματος (2) προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων, έστω Σ :

$$\Sigma \begin{cases} P_{Ex} = s_1 A_{23} + c_1 l_2 + l_1 (\Sigma.1) \\ P_{Ey} = B_{23} (\Sigma.2) \\ P_{Ez} = -c_1 A_{23} + s_1 l_2 - l_0 (\Sigma.3) \end{cases}$$

Τετραγωνίζοντας τις σχέσεις (Σ.1), (Σ.3) προκύπτει:

$$\begin{cases} (P_{Ex} - l_1)^2 = (s_1 A_{23} + c_1 l_2)^2 \\ (P_{Ez} + l_0)^2 = (s_1 l_2 - c_1 A_{23})^2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} s_1^2 A_{23}^2 + 2 s_1 A_{23} c_1 l_2 + (c_1 l_2)^2 + (s_1 l_2)^2 - 2 s_1 l_2 c_1 A_{23} + (c_1 A_{23})^2 = A_{23}^2 + l_2^2$$

$$A_{23} = \pm \sqrt{(P_{Ex} - l_1)^2 + (P_{Ez} + l_0)^2 - l_2^2} \quad (9)$$

Επομένως, προκύπτουν δύο λύσεις για την απόσταση A_{23} , η οποία όπως δείχθηκε προηγουμένως, πρόκειται για την απόσταση του ΤΕΔ από την ευθεία $x'x$, η οποία φαίνεται στην Εικόνα 3. Τα δύο διαφορετικά πρόσημα που έχουν οι λύσεις της (9), ερμηνεύονται από το γεγονός ότι, η προσέγγιση της **ζητούμενης θέσης** από το ρομπότ γίνεται για 2 διαφορετικές θέσεις του tool ως προς την **ευθεία $x'x$** . Εφόσον, η διάταξη αρχικοποίησης επιτάσσει την αρχική θέση του tool κάτω από την ευθεία, η φορά που καθορίζει το πρόσημο καθορίζεται όπως στην Εικόνα 3.

$$\text{Έστω } P_{xz} = \sqrt{(P_{Ex} - l_1)^2 + (P_{Ez} + l_0)^2 - l_2^2}$$

Εύρεση της q_3 :

Από τις σχέσεις (Σ.2), (9) προκύπτει λοιπόν το σύστημα Σ', για το οποίο ισχύει:

$$\Sigma', \begin{cases} P_{Ey} = s_{23}l_5 + s_2l_4 \\ A_{23} = c_{23}l_5 + c_2l_4 \end{cases}$$

Τετραγωνίζοντας και προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$P_{Ey}^2 + A_{23}^2 = (s_{23}l_5)^2 + 2s_{23}s_2l_5l_4 + (s_2l_4)^2 + (c_{23}l_5)^2 + 2c_{23}c_2l_5l_4 + (c_2l_4)^2 = l_5^2 + l_4^2 + 2l_4l_5c_3$$

Λύνοντας ως προς c_3 , έχουμε:

$$c_3 = \frac{P_{Ey}^2 + A_{23}^2 - l_5^2 - l_4^2}{2l_4l_5}, l_4, l_5 > 0 \quad (10)$$

Από την (8) θα έχουμε:

$$s_3 = \pm \sqrt{1 - c_3^2} \quad (11)$$

Επομένως, προκύπτει:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_3 = \frac{P_{Ey}^2 + (P_{Ex} - l_1)^2 + (P_{Ez} + l_0)^2 - l_2^2 - l_5^2 - l_4^2}{2l_4l_5}, l_4, l_5 > 0 \\ s_3 = \pm \sqrt{1 - c_3^2} \\ q_3 = \text{atan2}(s_3, c_3) \end{array} \right\}$$

Εφόσον, το s_3 παίρνει 2 τιμές, θα έχουμε 2 λύσεις για την q_3 . Επίσης, η παράσταση A_{23} παίρνει 2 τιμές, οι οποίες λόγω του τετραγωνισμού συνεισφέρουν ισόποσα. Επομένως, για κάθε μία από τις περιπτώσεις της (9), προκύπτουν 2 λύσεις για την q_3 , άρα συνολικά 4 ανα 2 ίδιες (2 διπλές).

Εύρεση της q_1 :

Εκμεταλλευόμενοι τις εξισώσεις Σ.1, Σ.3 έχουμε:

$$\Sigma'', \begin{cases} P_{Ex} = s_1A_{23} + c_1l_2 + l_1 \\ P_{Ez} = -c_1A_{23} + s_1l_2 - l_0 \end{cases} (l_2 > 0) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{P_{Ex} - s_1A_{23} - l_1}{l_2} \quad (12) \\ P_{Ez} = \frac{-(P_{Ex} - s_1A_{23} - l_1)}{l_2} A_{23} + s_1l_2 - l_0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
P_{Ez} l_2 &= -P_{Ex} A_{23} + s_1 A_{23}^2 + l_1 A_{23} + s_1 l_2^2 - l_0 l_2 \rightarrow \\
-s_1 A_{23}^2 - A_{23} (P_{Ex} - l_1) - s_1 l_2^2 + l_0 l_2 + P_{Ez} l_2 &= 0 \rightarrow \\
s_1 &= \frac{P_{Ez} l_2 + l_0 l_2 + (P_{Ex} - l_1) A_{23}}{A_{23}^2 + l_2^2}, \quad l_2 > 0 \wedge A_{23}^2 \geq 0 \quad (13)
\end{aligned}$$

Επομένως, προκύπτει:

$$\left\{ \begin{aligned} s_1 &= \frac{P_{Ez} l_2 + l_0 l_2 + (P_{Ex} - l_1) (\pm \sqrt{(P_{Ex} - l_1)^2 + (P_{Ez} + l_0)^2 - l_2^2})}{(P_{Ex} - l_1)^2 + (P_{Ez} + l_0)^2} \\ c_1 &= \frac{P_{Ex} - s_1 (\pm \sqrt{(P_{Ex} - l_1)^2 + (P_{Ez} + l_0)^2 - l_2^2}) - l_1}{l_2} \\ q_1 &= \text{atan} 2(s_1, c_1) \end{aligned} \right\}$$

Εφόσον το $A_{23} = \pm P_{xz}$, προκύπτουν 2 τιμές (μία για κάθε θέση του tool σε σχέση με τον άξονα x'x της Εικόνας 3) για το s_1 , συνεπώς προκύπτουν αντίστοιχα 2 τιμές για το c_1 για τις αντίστοιχες περιπτώσεις για το A_{23} . Τελικά, η q_1 θα παίρνει 2 τιμές, καθώς το ζεύγος (s_1, c_1) λαμβάνει 2 τιμές.

Εύρεση της q_2 :

Από το σύστημα Σ' προκύπτει':

$$\begin{aligned}
\Sigma', \left\{ \begin{aligned} A_{23} &= c_{23} l_5 + c_2 l_4 \\ P_{Ey} &= s_{23} l_5 + s_2 l_4 \end{aligned} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{aligned} A_{23} &= (c_2 c_3 - s_2 s_3) l_5 + c_2 l_4 \\ P_{Ey} &= (s_2 c_3 + c_2 s_3) l_5 + s_2 l_4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} A_{23} &= c_2 (c_3 l_5 + l_4) - s_2 s_3 l_5 \\ P_{Ey} &= s_2 (c_3 l_5 + l_4) + c_2 s_3 l_5 \end{aligned} \right\} \rightarrow \\
\left\{ \begin{aligned} s_2 &= \frac{c_2 (c_3 l_5 + l_4) - A_{23}}{s_3 l_5}, \quad s_3 \neq 0 \rightarrow q_3 \neq k\pi, \quad l_5 > 0 \quad (14) \\ \frac{c_2 (c_3 l_5 + l_4) - A_{23}}{s_3 l_5} (c_3 l_5 + l_4) + c_2 s_3 l_5 &= P_{Ey} \end{aligned} \right\} &\rightarrow \\
c_2 (c_3 l_5 + l_4)^2 - A_{23} (c_3 l_5 + l_4) + c_2 s_3^2 l_5^2 &= P_{Ey} s_3 l_5 \rightarrow \\
c_2 &= \frac{P_{Ey} s_3 l_5 + A_{23} (c_3 l_5 + l_4)}{(c_3 l_5 + l_4)^2 + l_5^2 s_3^2}, \quad (s_3 l_5)^2 > 0 \rightarrow (c_3 l_5 + l_4)^2 + (s_3 l_5)^2 > 0 \quad (15)
\end{aligned}$$

Η παράσταση $(c_3 l_5 + l_4)^2 + l_5^2 s_3^2$ αντικαθιστώντας το s_3, c_3 από (9), (10), (11), γίνεται:

$$\begin{aligned}
(c_3 l_5 + l_4)^2 + l_5^2 s_3^2 &= (c_3 l_5)^2 + 2 l_4 l_5 c_3 + l_4^2 + l_5^2 (1 - c_3^2) = 2 l_4 l_5 c_3 + l_4^2 + l_5^2 \rightarrow \\
(c_3 l_5 + l_4)^2 + l_5^2 s_3^2 &= P_{Ey}^2 + (P_{Ex} - l_1)^2 + (P_{Ez} + l_0)^2 - l_2^2
\end{aligned}$$

Επομένως, προκύπτει:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_2 = \frac{2P_{Ey}s_3l_4l_5 + (\pm\sqrt{(P_{Ex}-l_1)^2 + (P_{Ez}+l_0)^2 - l_2^2})(P_{Ey}^2 + (P_{Ex}-l_1)^2 + (P_{Ez}+l_0)^2 - l_2^2 - l_5^2 + l_4^2)}{2l_4(P_{Ey}^2 + (P_{Ex}-l_1)^2 + (P_{Ez}+l_0)^2 - l_2^2)} \\ s_2 = \frac{c_2(P_{Ey}^2 + (P_{Ex}-l_1)^2 + (P_{Ez}+l_0)^2 - l_2^2 - l_5^2 + l_4^2) - 2l_4(\pm\sqrt{(P_{Ex}-l_1)^2 + (P_{Ez}+l_0)^2 - l_2^2})}{2s_3l_4l_5} \\ q_2 = \text{atan2}(s_2, c_2) \end{array} \right\}$$

Για κάθε μία από τις περιπτώσεις της σχέσης (9), η q_3 , λαμβάνει 2 τιμές, επομένως και η q_2 θα παίρνει αντίστοιχα 2 τιμές. Συνεπώς, οι συνολικές λύσεις για την q_2 είναι 4 στην γενική περίπτωση, όπου $q_3 \neq k\pi$, αφού $q_2 = \text{atan2}(s_2, c_2)$, όπου τα s_2, c_2 παίρνουν 2 τιμές το καθένα, για κάθε μία από τις λύσεις της (9).

Σχόλια:

1. Το σύστημα εξισώσεων Σ' , πρόκειται για ένα 2R-planar για κάθε μία από τις τιμές της παράστασης A_{23} , όπου προκύπτουν 2 λύσεις για την καθεμία.
2. Στα 2 διαφορετικά πρόσημα της A_{23} ευθύνεται η q_1 , η οποία δίνει τη δυνατότητα κίνησης στο επίπεδο, που ορίζουν οι άξονες z_0, x_0 , του αρχικού πλαισίου.

Ειδικές περιπτώσεις:

1. $q_3 = 0$:

Από τις (9), $\Sigma.2$ προκύπτει:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_2l_5 + c_2l_4 = A_{23} \\ s_2l_5 + s_2l_4 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_2 = \frac{A_{23}}{l_4 + l_5} \\ s_2 = \frac{P_{Ey}}{l_4 + l_5} \end{array} \right\}$$

Τελικά:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_2 = \frac{\pm\sqrt{(P_{Ex}-l_1)^2 + (P_{Ez}+l_0)^2 - l_2^2}}{l_4 + l_5} \\ s_2 = \frac{P_{Ey}}{l_4 + l_5} \\ q_2 = \text{atan2}(s_2, c_2) \end{array} \right\}$$

Το A_{23} δέχεται 2 τιμές λόγω της (9), επομένως το c_2 παίρνει αμφιμονοσήμαντα και αυτό 2 τιμές. Έτσι, η q_2 θα λαμβάνει 2 τιμές κι αυτή από τη σχέση

$q_2 = \text{atan2}(s_2, c_2)$, όπου αλλάζει το πρόσημο στο c_2 , ανάλογα αν το ρομπότ επιλέξει να κινήσει το tool πάνω (“-”) ή κάτω από την ευθεία x’x(“+”).

Αντικαθιστώντας στις αντίστοιχες εξισώσεις για την q_1 , προκύπτουν 2 λύσεις.

2. $q_3 = \pi$:

Από την (9), Σ.2 προκύπτει:

$$\begin{cases} -c_2 l_5 + c_2 l_4 = A_{23} \\ -s_2 l_5 + s_2 l_4 = P_{Ey} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{A_{23}}{l_4 - l_5} \\ s_2 = \frac{P_{Ey}}{l_4 - l_5} \end{cases}, \quad l_4 \neq l_5$$

Τελικά:

$$\begin{cases} c_2 = \frac{\pm \sqrt{(P_{Ex} - l_1)^2 + (P_{Ez} + l_0)^2 - l_2^2}}{l_4 - l_5} \\ s_2 = \frac{P_{Ey}}{l_4 - l_5} \\ q_2 = \text{atan2}(s_2, c_2) \end{cases}$$

Εφόσον, το A_{23} αλλάζει πρόσημο, τότε η q_2 θα παίρνει 2 τιμές από τη σχέση $q_2 = \text{atan2}(s_2, c_2)$ για $l_4 \neq l_5$ και η q_1 θα παίρνει 2 τιμές αντίστοιχα.

• Αν $l_4 = l_5$:

Τότε, οι τιμές των q_1, q_2 θα είναι:

1. Για την q_2 :

$$\begin{cases} c_2(l_4 - l_5) = A_{23} \\ s_2(l_4 - l_5) = P_{Ey} \end{cases} \rightarrow q_2 \in R$$

2. Για την q_1 :

$$\begin{cases} c_1 = \frac{P_{Ex} - l_1}{l_2} \\ s_1 = \frac{P_{Ez} + l_0}{l_2} \\ q_1 = \text{atan2}(s_1, c_1) \text{ μοναδική λύση} \end{cases}$$

Επομένως, προκύπτει **απειρία λύσεων**.

Σχόλια:

1. Οι δύο αυτές περιπτώσεις, είναι ιδιόμορφες διατάξεις, όπως βρέθηκαν στο Ζήτημα (4).
2. Για την ειδική περίπτωση $q_3 = \pi \wedge l_4 = l_5$, η επιθυμητή θέση P_E , βρίσκεται πάνω στην άρθρωση q_2 . Επομένως, η $q_2 \in R$ και η q_1 έχει μοναδική λύση.

Συνοψίζοντας, έχουμε τις παρακάτω λύσεις:

Γενική Λύση ($q_3 \neq \pi$)	$q_3 = 0 \vee (q_3 = \pi \wedge l_4 \neq l_5)$	$q_3 = \pi \wedge l_4 = l_5$
4 λύσεις (2 για την q_1 , 4 για την q_2 και 4 για την q_3)	2 λύσεις (2 για την q_1 , 2 για την q_2 και 1 για την q_3)	Άπειρες λύσεις (θεωρητικά) (1 για την q_1 , $q_2 \in R$ και 1 για την q_3)

Πίνακας 3

B.Κινηματική Προσομοίωση:

6.Σχεδιασμός τροχιάς:

Η τροχιά για την μετακίνηση από το Α στο Β και αντίστροφα(περιοδικότητα) χωρίζεται σε 6 στάδια. Το πρώτο αποτελείται από την πολυωνυμική παρεμβολή ενός πολυωνύμου 5ου βαθμού, η δεύτερη ενός 1ου βαθμού και η τρίτη ενός 5ου και όμοια για τις φάσεις 4,5,6. Έχουν οριστεί οι μεταβλητές Δ , όπου $2*\Delta$ = **χρονική διάρκεια** των πολυωνύμων 5ου βαθμού και t_f = **χρονική διάρκεια της της συνολικής περιοδικής κίνησης** από το ένα σημείο στο άλλο. Παρακάτω θα γίνει ανάλυση για την μετακίνηση στον άξονα “x, καθώς για τον άξονα “y” ακολουθείται η ίδια διαδικασία.

1. 1η Φάση - Πολυώνυμο 5ου Βαθμού(A → A')

Έστω $P_1(t)=a_5t^5+a_4t^4+a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0$. Λόγω της συνέχειας της ταχύτητας(ομαλή τροχιά) στο τέλος της πρώτης φάσης, θα πρέπει το tool να έχει ταχύτητα ίση με την κλίση της 2ης φάσης-1ου βαθμού πολυώνυμο. Έστω, $\dot{x}_2=\text{κλίση}$, η οποία ισούται με $\dot{x}_2=\frac{x_B-x_A}{\frac{t_f}{2}-2*\Delta}$.

Επίσης, την χρονική στιγμή $t=2*\Delta$, η τιμή του πολυωνύμου θα είναι $x_{(A)}$ (ενδιάμεσο σημείο), για την οποία ισχύει $x_{(A)}=\dot{x}_2*D+x_A$.

Με τα παραπάνω και λόγω της υπόθεσης για συνέχεια της τροχιάς και της ταχύτητας αλλά και της επιτάχυνσης(όπως επιλέχτηκε για την σχεδίαση), προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\begin{pmatrix} P_1(0)=x_A \\ P_1(2*\Delta)=x_{(A)} \\ \dot{P}_1(0)=0 \\ \dot{P}_1(2*\Delta)=\dot{x}_2 \\ \ddot{P}_1(0)=0 \\ \ddot{P}_1(2*\Delta)=0 \end{pmatrix}$$

2. 2η Φάση - Πολυώνυμο 1ου Βαθμού(A' → B')

Έστω $P_2(t)=b_1t+b_0$. Λόγω της συνέχειας θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} P_2(2*\Delta)=x_{(A)} \\ \dot{P}_2(2*\Delta)=\dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

3. 3η Φάση - Πολυώνυμο 5ου Βαθμού(B' → B)

Έστω $P_3(t) = c_5 t^5 + c_4 t^4 + c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0$ και $x_{(\dot{B})} = -\dot{x}_2 * \Delta + x_B$ το δεύτερο ενδιαμέσο σημείο, στο οποίο ξεκινά η 3η φάση. Εργαζόμαστε όμοια όπως για την 1η φάση και προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_3\left(\frac{t_f}{2} - 2 * \Delta\right) = x_{(\dot{B})} \\ P_3\left(\frac{t_f}{2}\right) = x_B \\ \dot{P}_3\left(\frac{t_f}{2} - 2 * \Delta\right) = \dot{x}_2 \\ \dot{P}_3\left(\frac{t_f}{2}\right) = 0 \\ \ddot{P}_3\left(\frac{t_f}{2} - 2 * \Delta\right) = 0 \\ \ddot{P}_3\left(\frac{t_f}{2}\right) = 0 \end{array} \right.$$

4. 4η Φάση - Πολυώνυμο 5ου Βαθμού(B → B')

Έστω $P_4(t) = d_5 t^5 + d_4 t^4 + d_3 t^3 + d_2 t^2 + d_1 t + d_0$. Έχουμε αντίθετη κλίση στην επιστροφή ενώ τα ενδιαμέσα σημεία παραμένουν ίδια. Επομένως, έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_4\left(\frac{t_f}{2} + 2 * \Delta\right) = x_{(\dot{B})} \\ P_4\left(\frac{t_f}{2}\right) = x_B \\ \dot{P}_4\left(\frac{t_f}{2} + 2 * \Delta\right) = -\dot{x}_2 \\ \dot{P}_4\left(\frac{t_f}{2}\right) = 0 \\ \ddot{P}_4\left(\frac{t_f}{2} + 2 * \Delta\right) = 0 \\ \ddot{P}_4\left(\frac{t_f}{2}\right) = 0 \end{array} \right.$$

5. 5η Φάση - Πολυώνυμο 1ου Βαθμού(B' → A')

Έστω $P_5(t) = e_1 t + e_0$. Όμοια με τη 2η φάση προκύπτει:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_5\left(\frac{t_f}{2} + 2 * \Delta\right) = x_{(\dot{B})} \\ \dot{P}_5\left(\frac{t_f}{2} + 2 * \Delta\right) = -\dot{x}_2 \end{array} \right.$$

6. 6η Φάση - Πολυώνυμο 5ου Βαθμού(B' → A)

Έστω $P_6(t) = f_5 t^5 + f_4 t^4 + f_3 t^3 + f_2 t^2 + f_1 t + f_0$. Για την τελευταία φάση της τροχιάς, θα έχουμε:

$$\begin{cases} P_6(t_f - 2*\Delta) = x_{(A)} \\ P_6(t_f) = x_A \\ \dot{P}_6(t_f - 2*\Delta) = -\dot{x}_2 \\ \dot{P}_6(t_f) = 0 \\ \ddot{P}_6(t_f - 2*\Delta) = 0 \\ \ddot{P}_6(t_f) = 0 \end{cases}$$

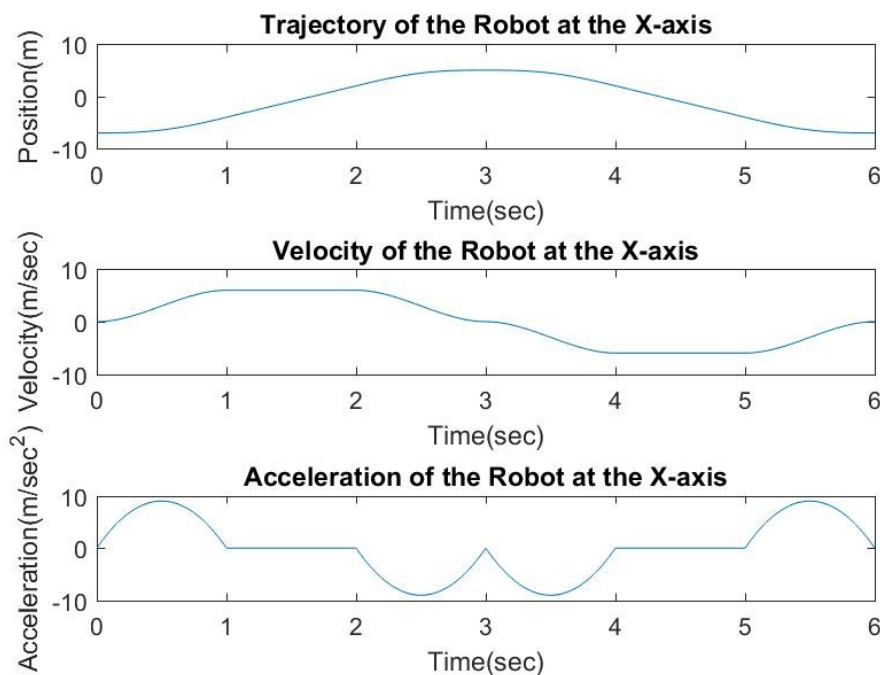
Τα παραπάνω γραμμικά συστήματα λύνονται με την βοήθεια του script **parameters.m**, από όπου εξάγουμε τους συντελεστές.

7.Κινηματική Προσομοίωση:

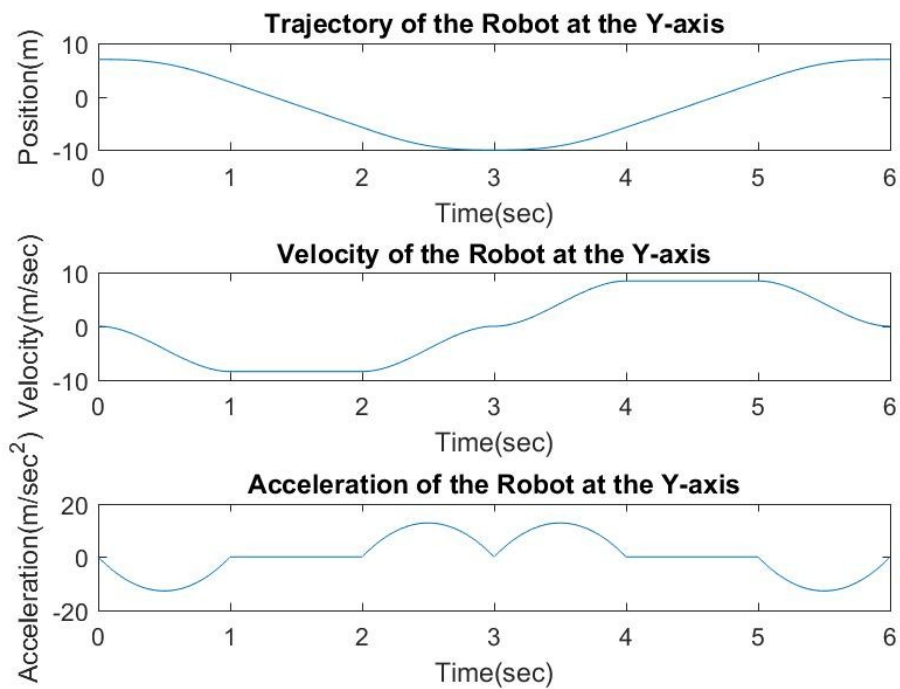
α)

Με τη βοήθεια του script **trajectory.m**, παράγονται τα διαγράμματα κίνησης, ταχύτητας και επιτάχυνσης στους άξονες x-y-z, για το ΤΕΔ. Παρακάτω, παρατίθενται τα σχετικά διαγράμματα:

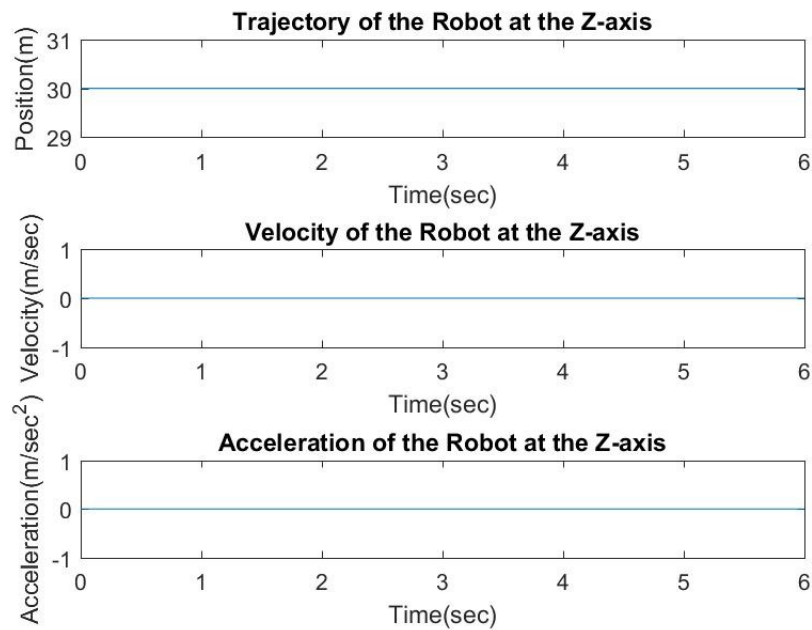
1. Στον x - άξονα:



2. Στον y - άξονα:



3. Στον z - άξονα:



Σχόλια:

1. Παρατηρούμε συνέχεια σε όλα τα μεγέθη, γεγονός το οποίο καθιστά την τροχιά ομαλή.
2. Μπορεί κανείς να αντιληφθεί την περιοδικότητα στην κίνηση(επιλέχθηκε 1 περίοδος)
3. Οφείλουμε να αναφέρουμε τις παραμέτρους, οι οποίες επιλέχθηκαν:
 - a) $h = 30$, $x_A = -7$, $x_B = 5$, $y_A = 7$, $y_B = -10$
 - b) $12 = 20$, $14 = 15$, $15 = 23$
 - c) $\Delta = 0.5$
 - d) $t_f = 6$;

4. Οι παράμετροι επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο, ώστε να υπάρχει λύση από το αντίστροφο γεωμετρικό, χωρίς ασυνέχειες στις κινήσεις των αρθρώσεων

β)

Στη συνέχεια με το αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο, βρήκαμε τις αντίστοιχες τιμές των αρθρώσεων. Όπως, έχουμε αναφέρει, προκύπτουν 4 λύσεις. Επομένως, η μελέτη έγινε κι για τους 4 διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης του ΤΕΔ. Παρακάτω, παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα κίνησης και ταχύτητας των αρθρώσεων αλλά και animations για την κάθε λύση.

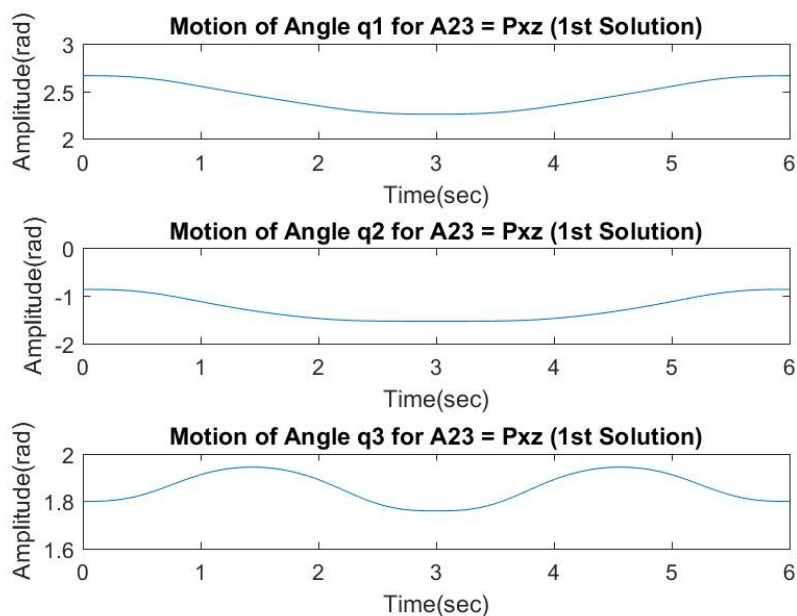
Συνοπτικά αναφέρουμε:

1η Λύση	2η Λύση	3η Λύση	4η Λύση
$A_{23} = P_{xz}$	$A_{23} = P_{xz}$	$A_{23} = -P_{xz}$	$A_{23} = -P_{xz}$
1η λύση για την q_1	1η λύση για την q_1	2η λύση για την q_1	2η λύση για την q_1
1η λύση για την q_2	2η λύση για την q_2	3η λύση για την q_2	4η λύση για την q_2
1η λύση για την q_3	2η λύση για την q_3	1η λύση για την q_3 (διπλή)	2η λύση για την q_3 (διπλή)

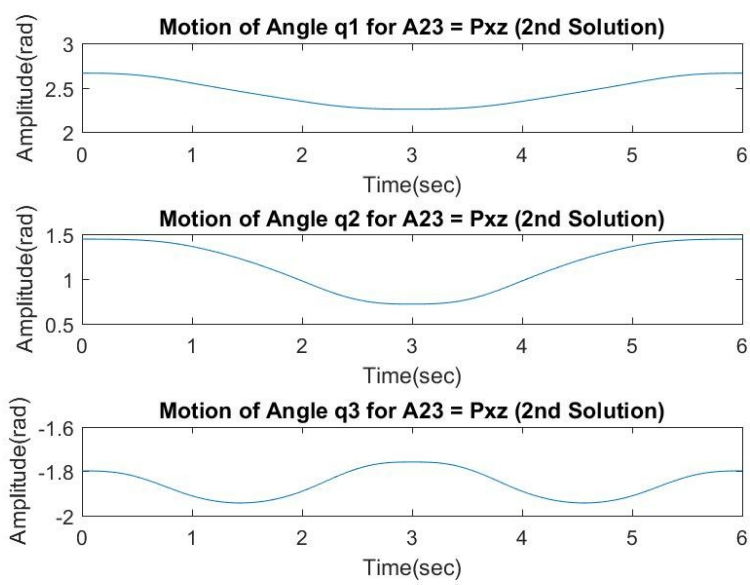
Πίνακας 4

Αρχικά, θα παρουσιάσουμε τις κινήσεις των q_1, q_2, q_3 :

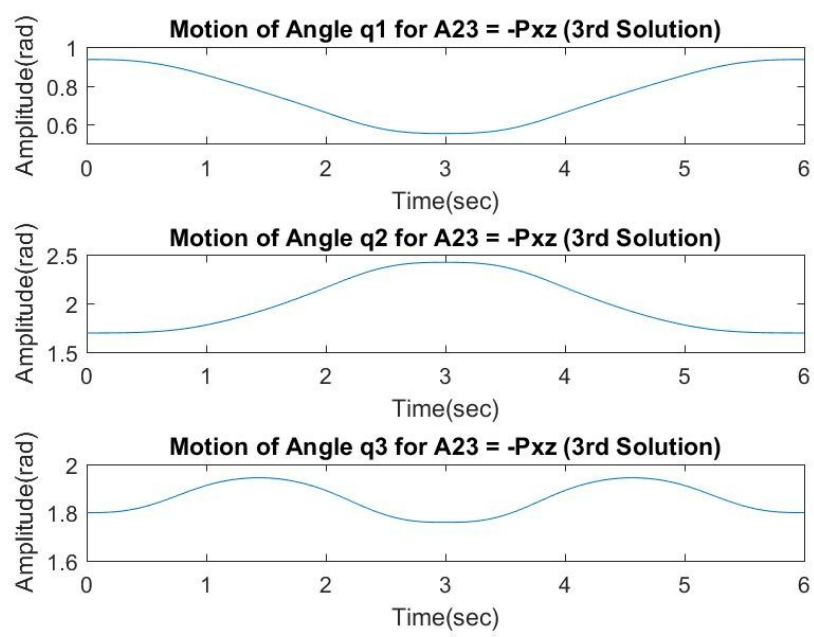
Για την 1η λύση:



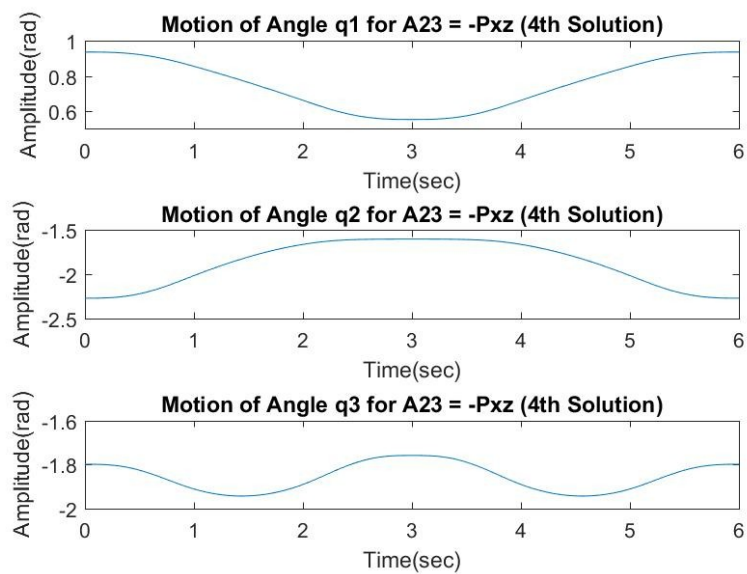
Για την 2η λύση:



Για την 3η λύση:



Για την 4η λύση:

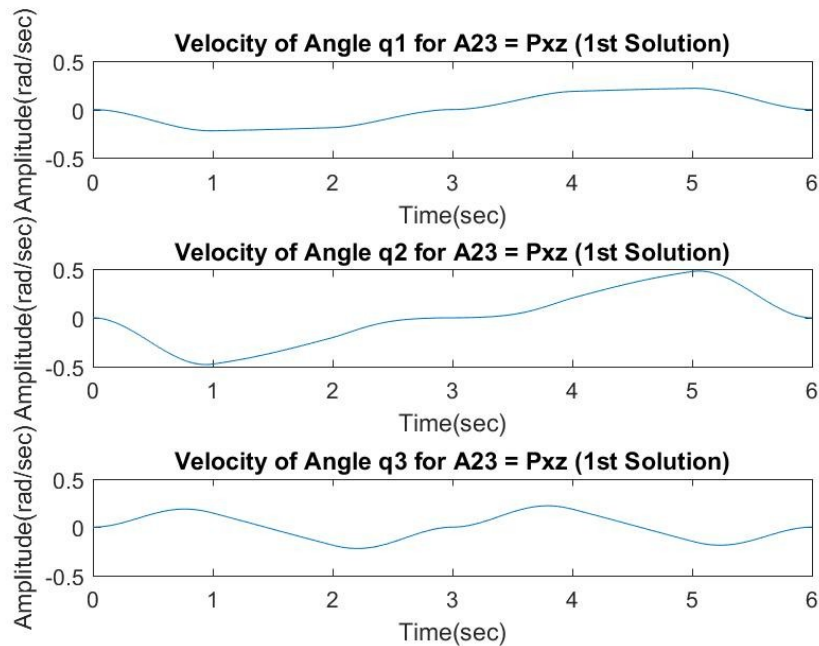


Παρατήρηση:

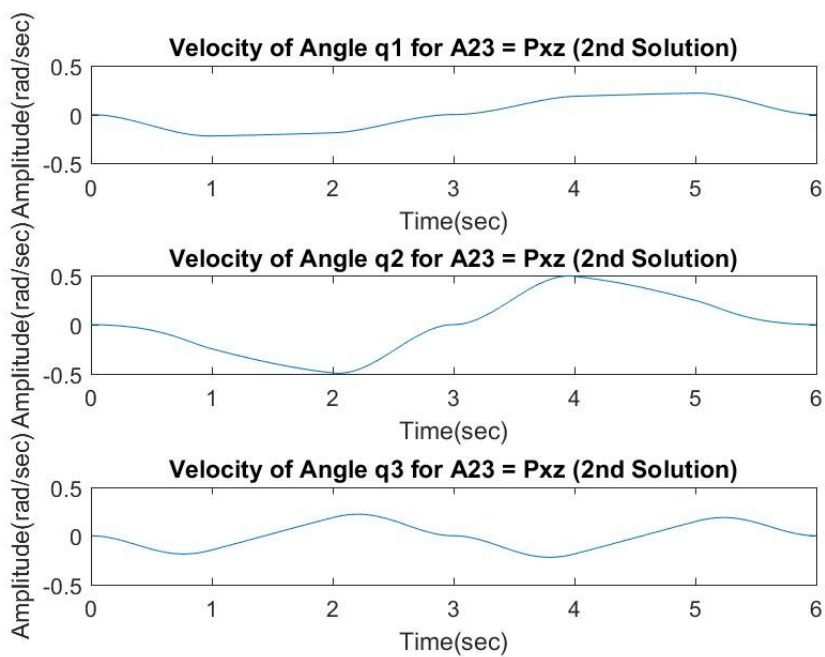
- Είναι εμφανές ότι, πρόκειται για ομαλή περιοδική κίνηση των αρθρώσεων σε κάθε μία από τις λύσεις.
- Παρατηρούμε ότι, οι αρθρώσεις έχουν αρχικές συνθήκες, καθώς έχουμε υποθέσει ότι, η ρομποτική διάταξη βρίσκεται ήδη στο αρχικό σημείο.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις αντίστοιχες ταχύτητες για κάθε μία από τις λύσεις.

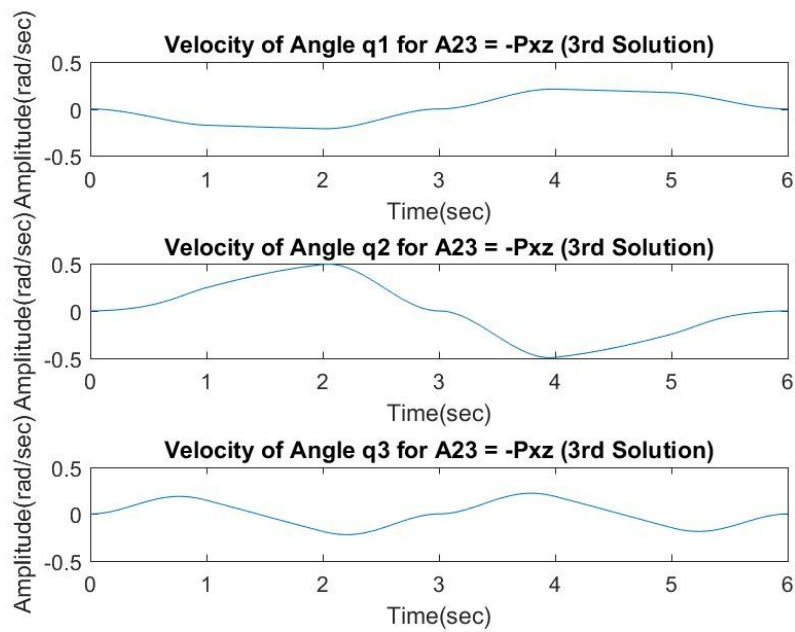
Για την 1η λύση:



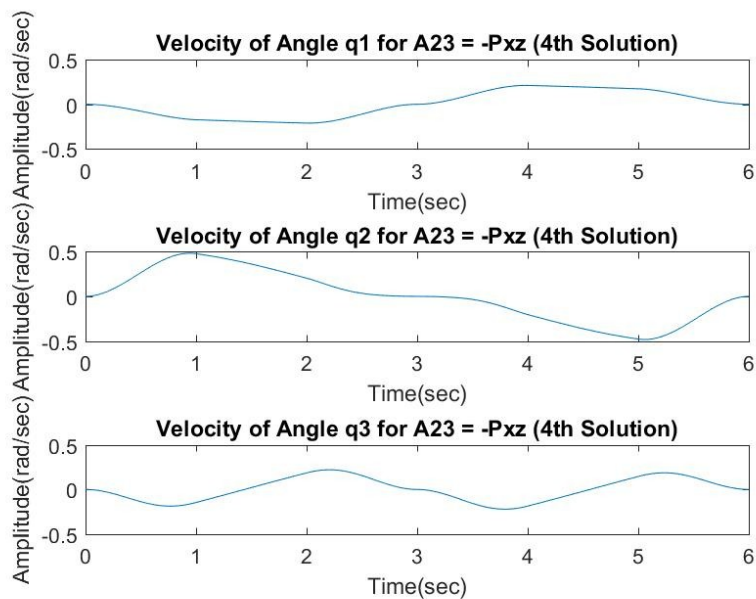
Για την 2η λύση:



Για την 3η λύση:



Για την 4η λύση:



Παρατηρήσεις:

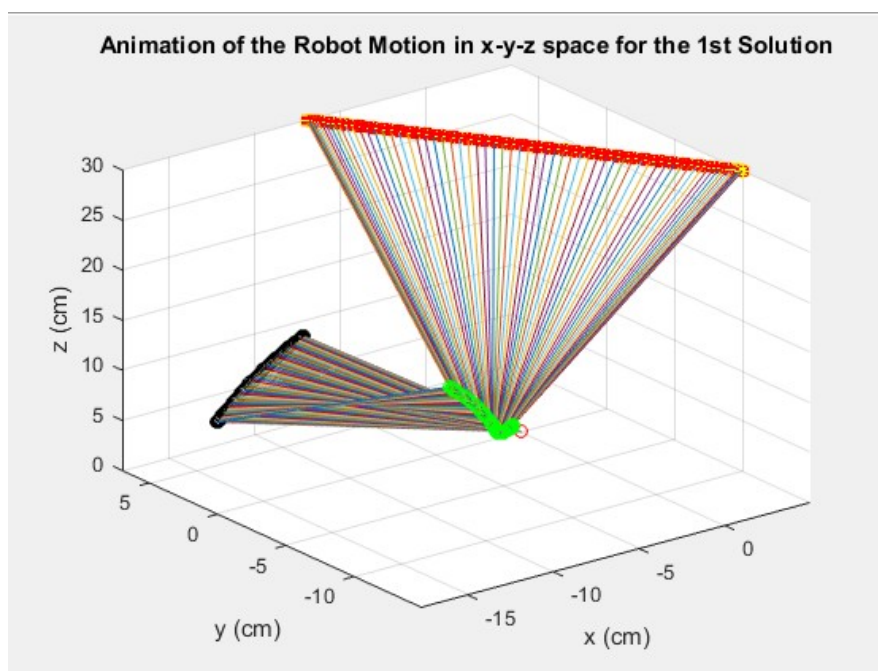
- Οι ταχύτητες ξεκινούν από το μηδέν, όπως αναμενόταν, καθώς η ρομποτική διάταξη βρίσκεται σε ακινησία.
- Η κυματομορφή είναι συνεχής, αλλά όχι περιοδική.

γ)

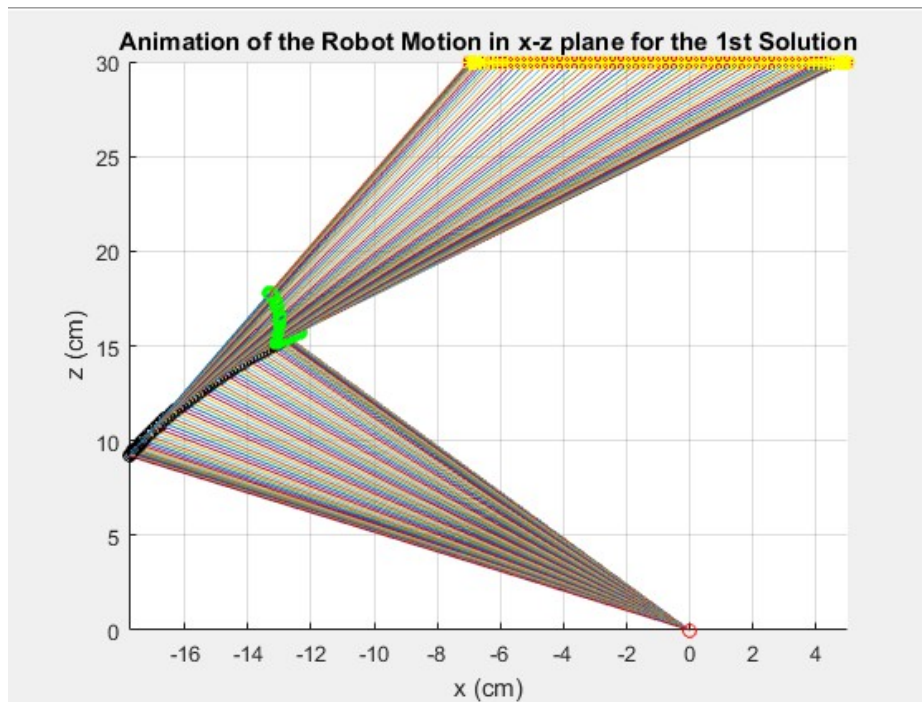
Για την κινηματική προσομοίωση παράχθηκαν “animations” κάθε προσέγγισης του προβλήματος, για όλους τους πιθανούς(γνωστούς)χώρους με τη βοήθεια του script **animation.m**. Πιο αναλυτικά:

1.Για την 1η λύση:

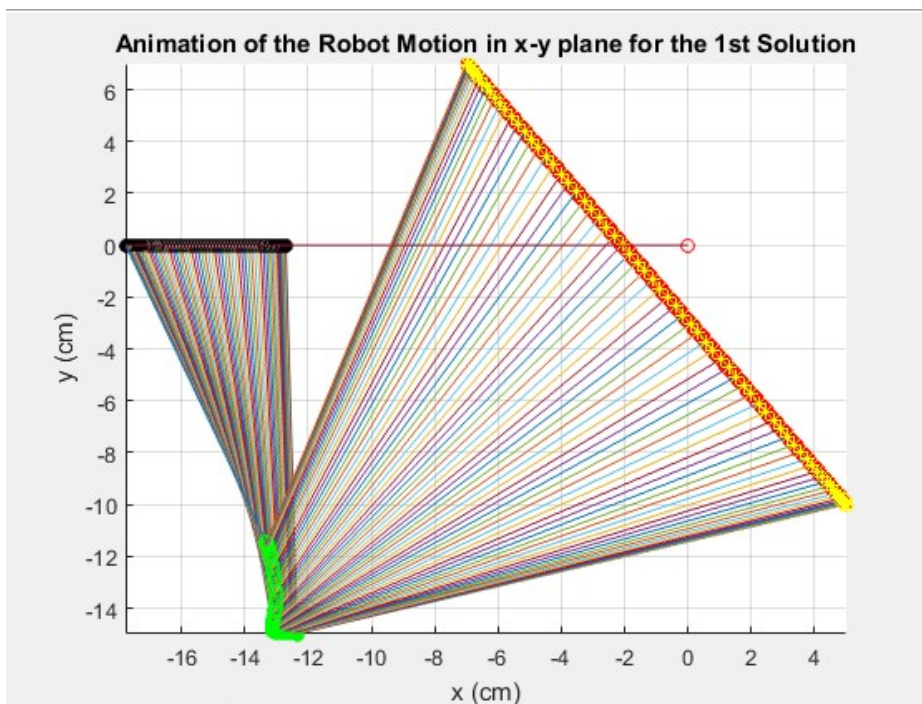
α)Η κίνηση στο χώρο xyz:



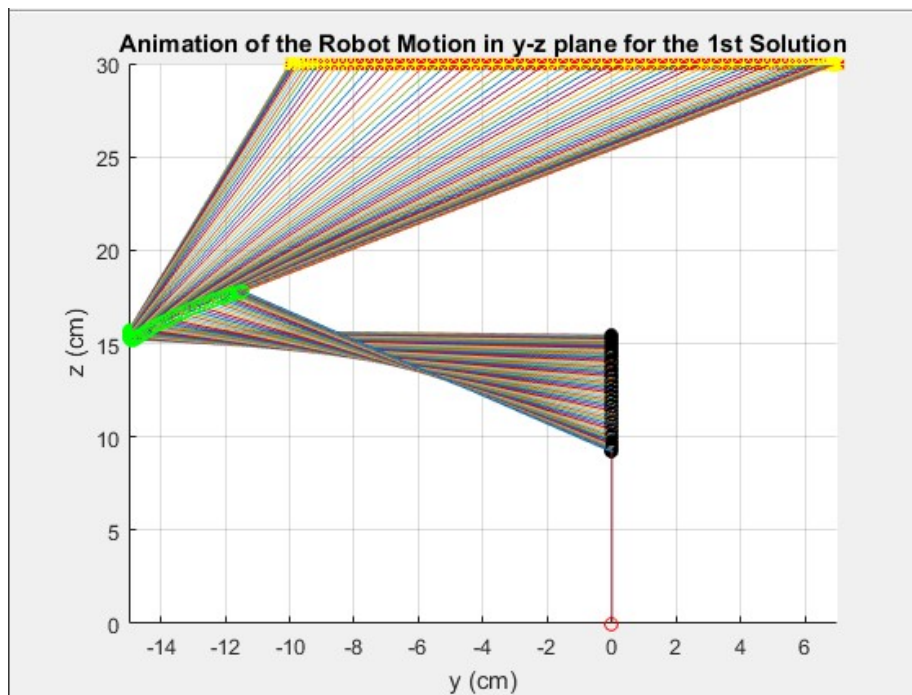
β)Προβολή στο xz επίπεδο:



γ)Προβολή στο xy επίπεδο:

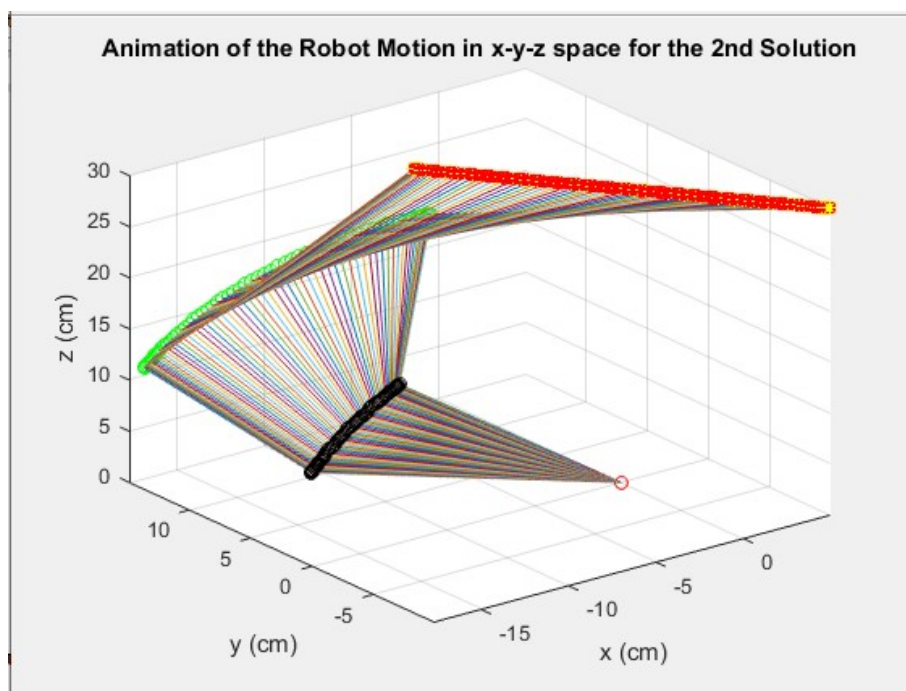


δ)Προβολή στο yz επίπεδο:

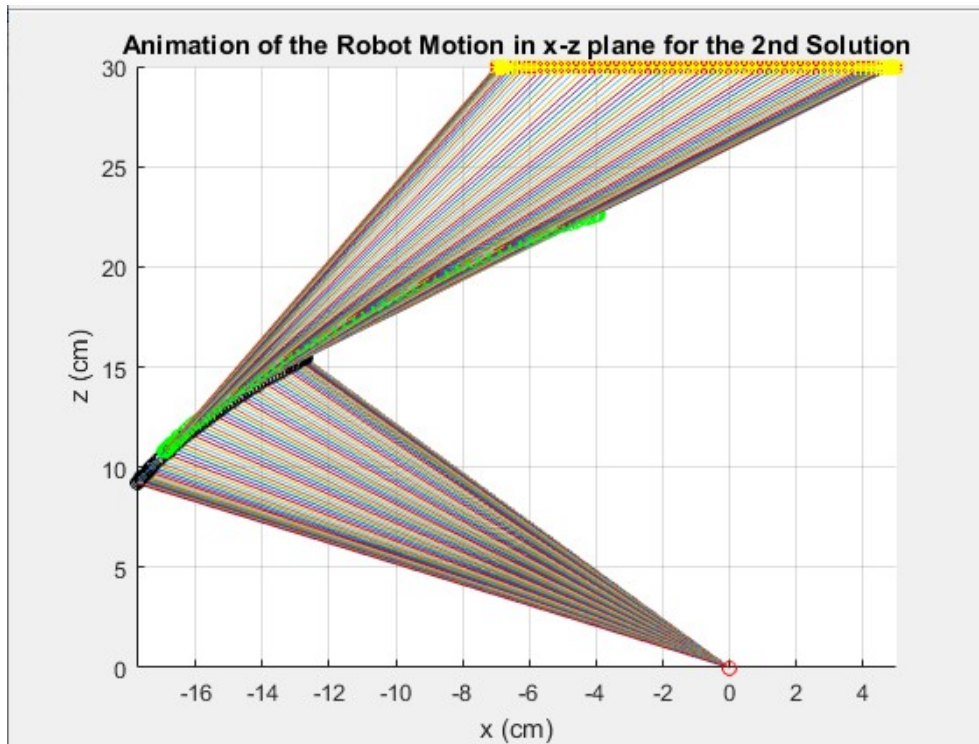


2.Για την 2η λύση:

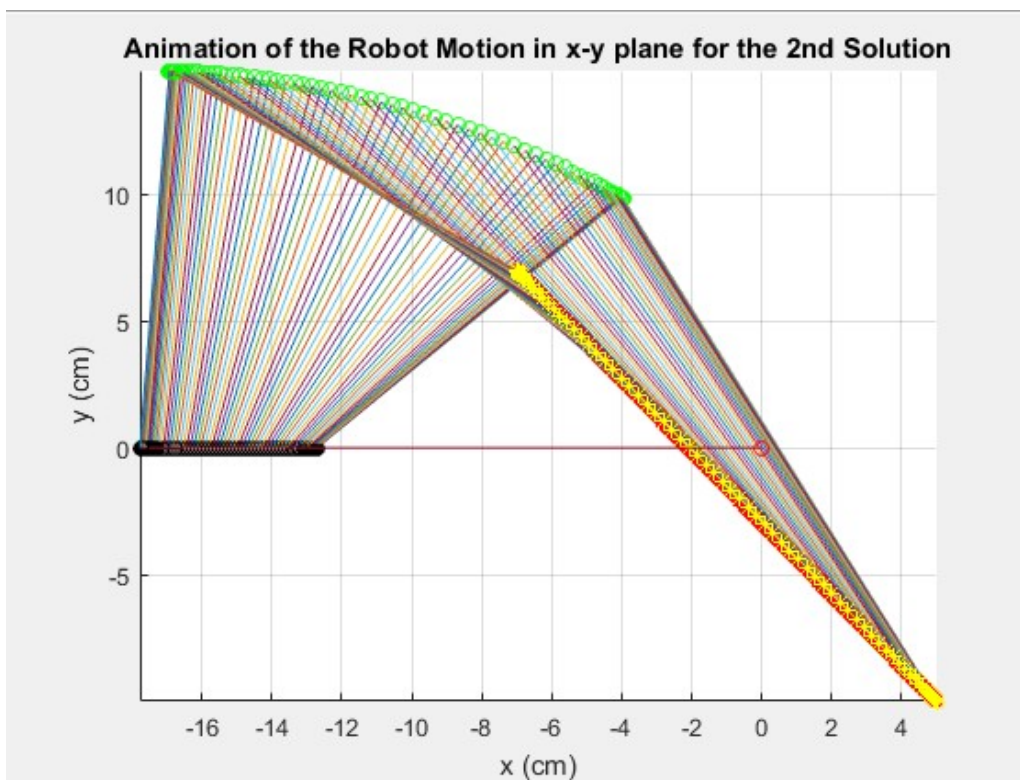
α)Η κίνηση στο χώρο xyz:



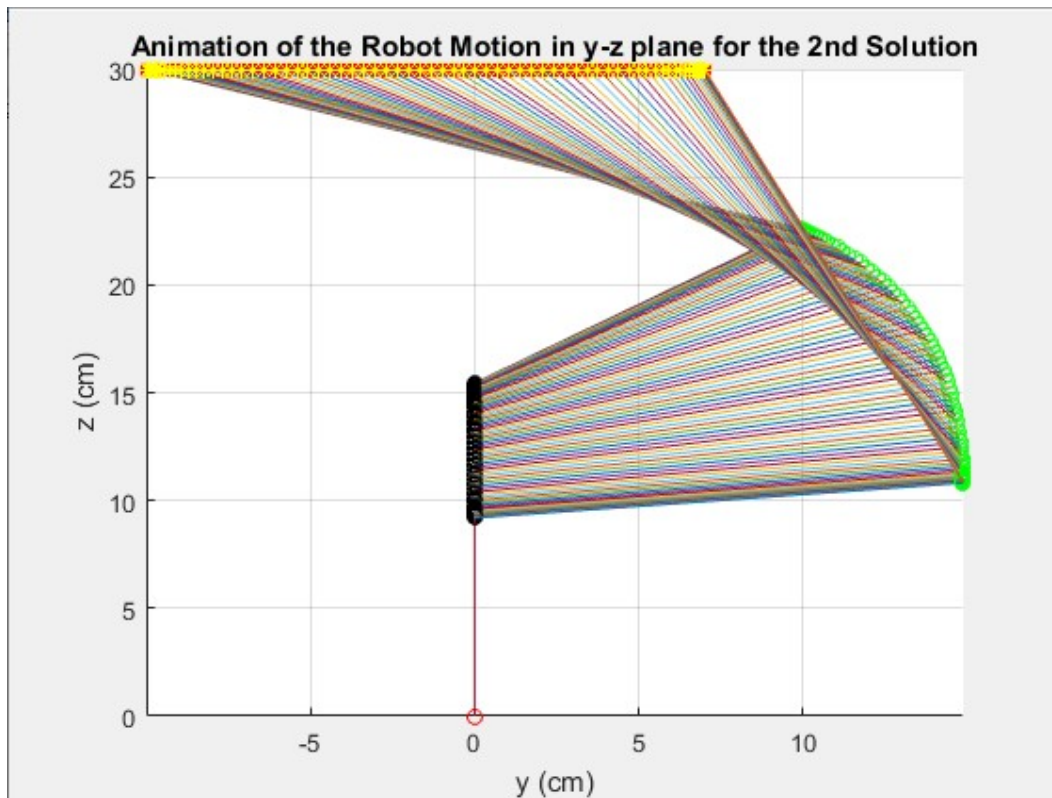
β) Προβολή στο xz επίπεδο:



γ) Προβολή στο xy επίπεδο:

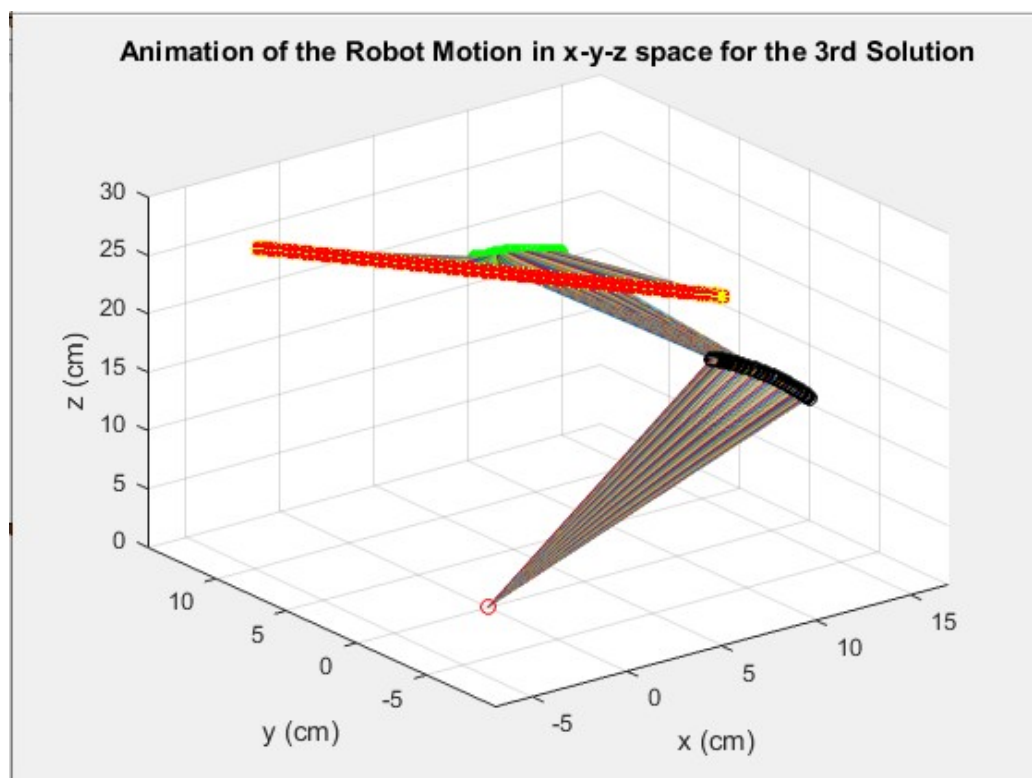


δ)Προβολή στο yz επίπεδο:

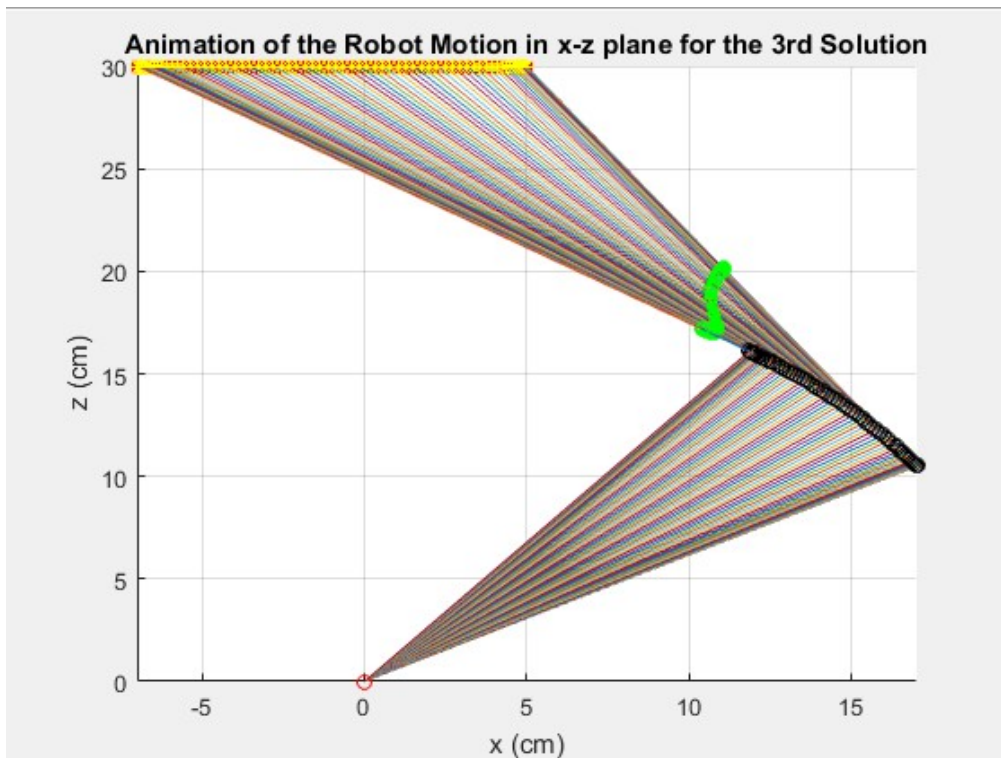


3.Για την 3η λύση:

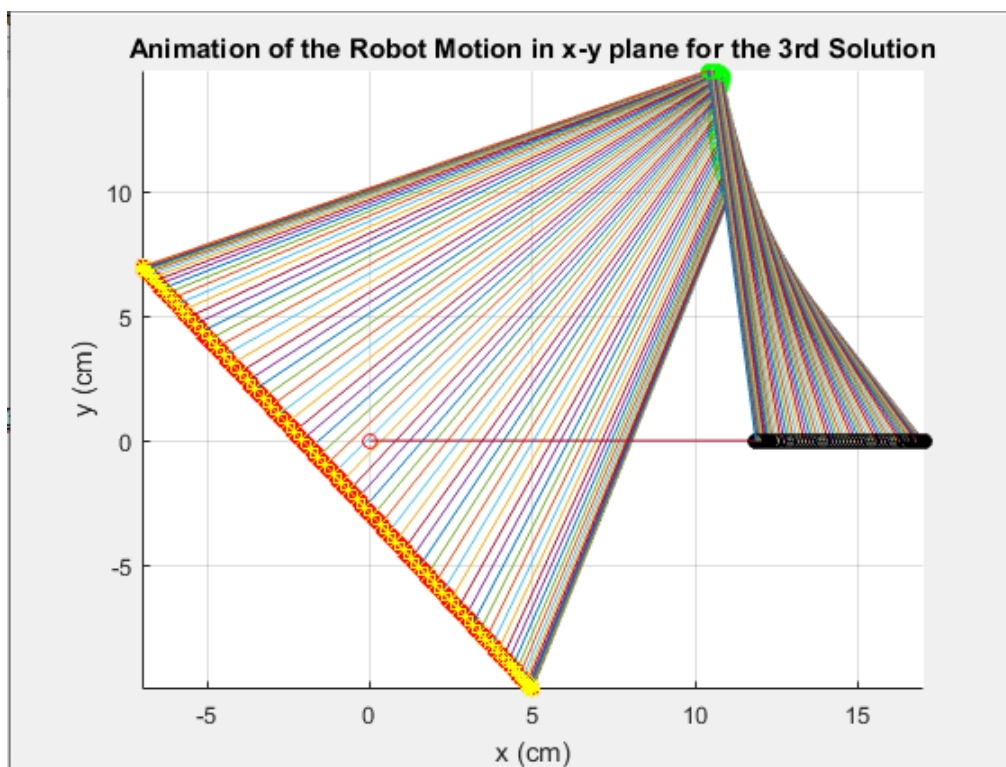
α)Η κίνηση στο χώρο xyz:



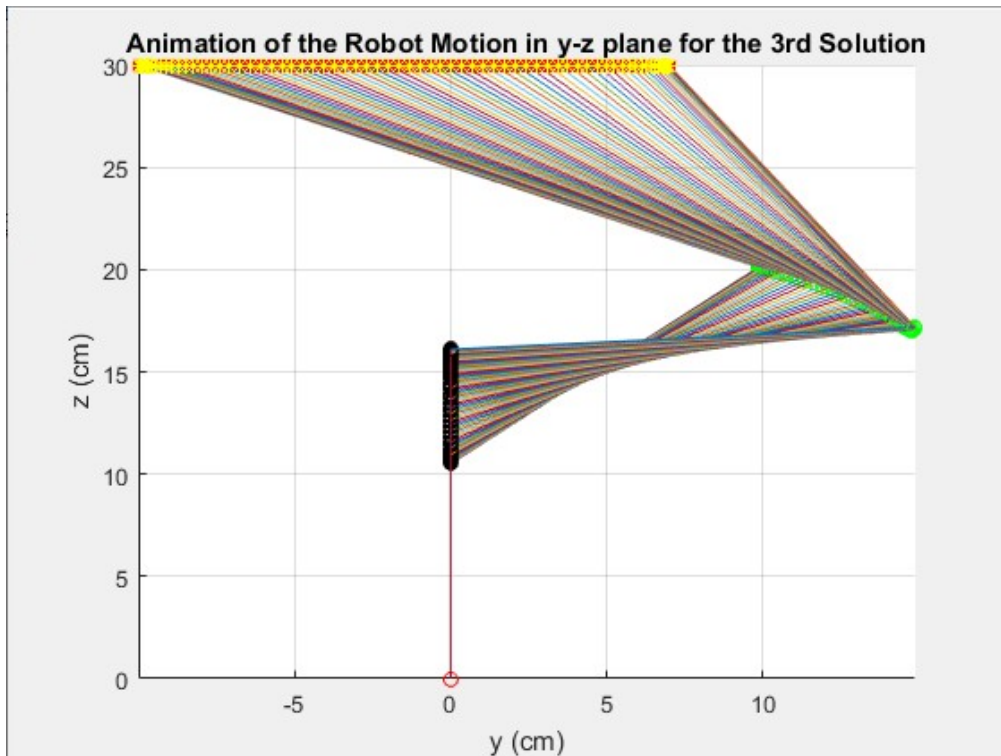
β) Προβολή στο xz επίπεδο:



γ) Προβολή στο xy επίπεδο:

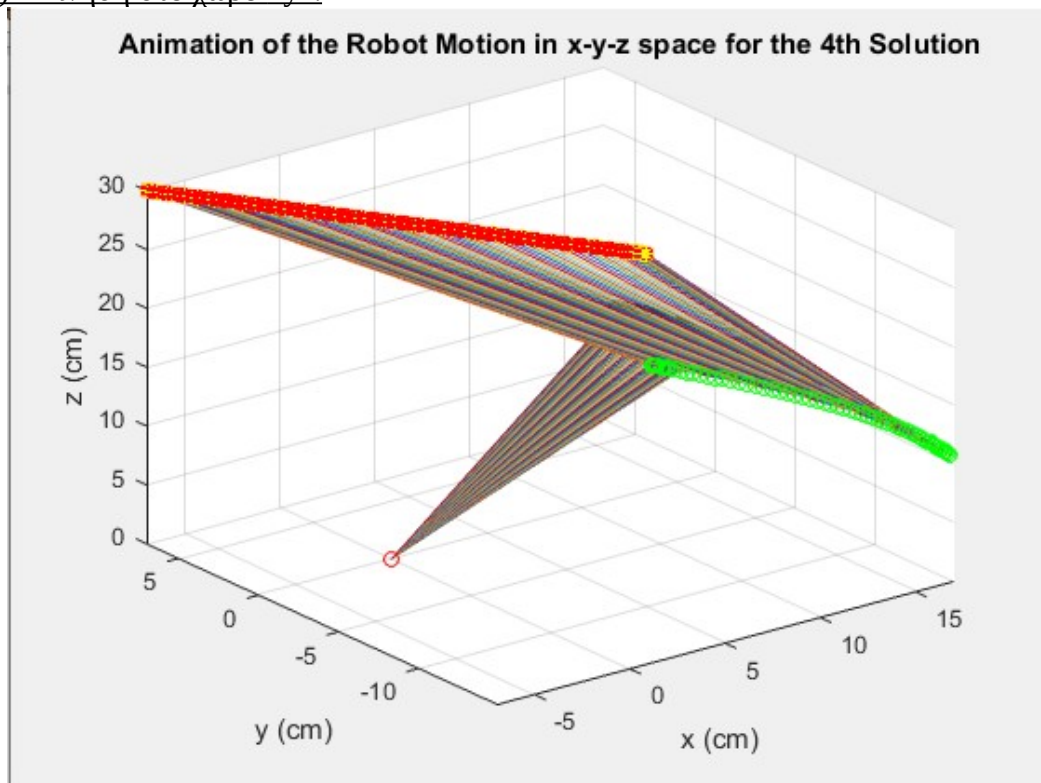


δ)Προβολή στο yz επίπεδο:

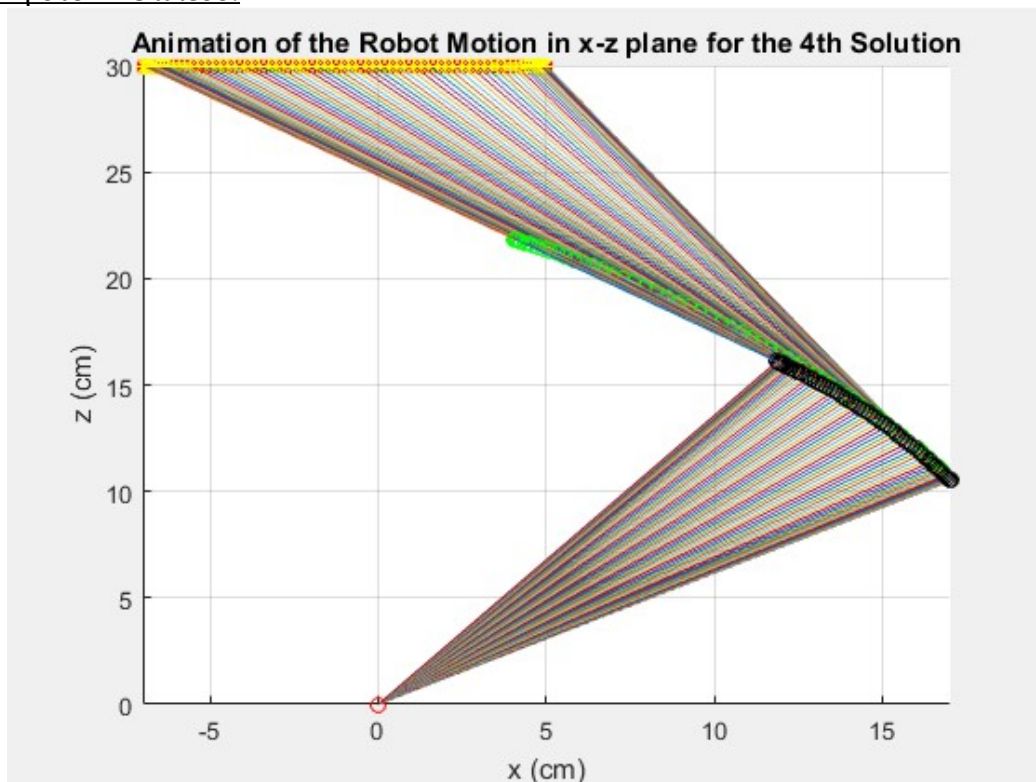


4.Για την 4η λύση:

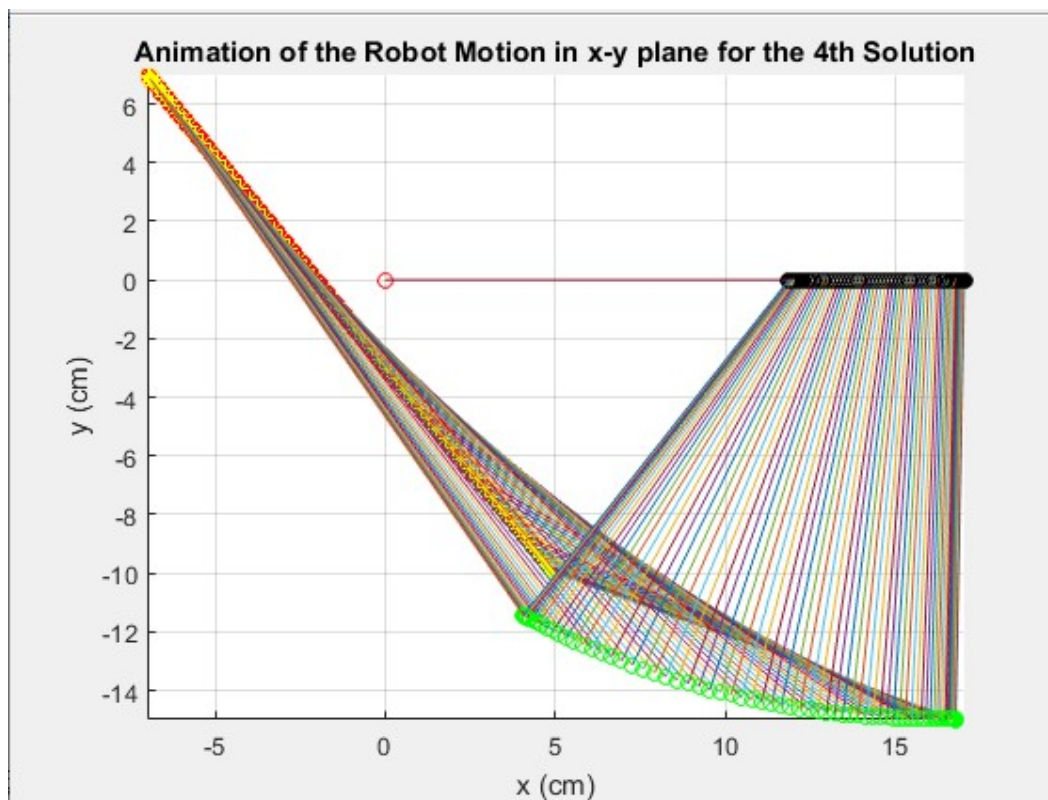
α)Η κίνηση στο χώρο xyz:



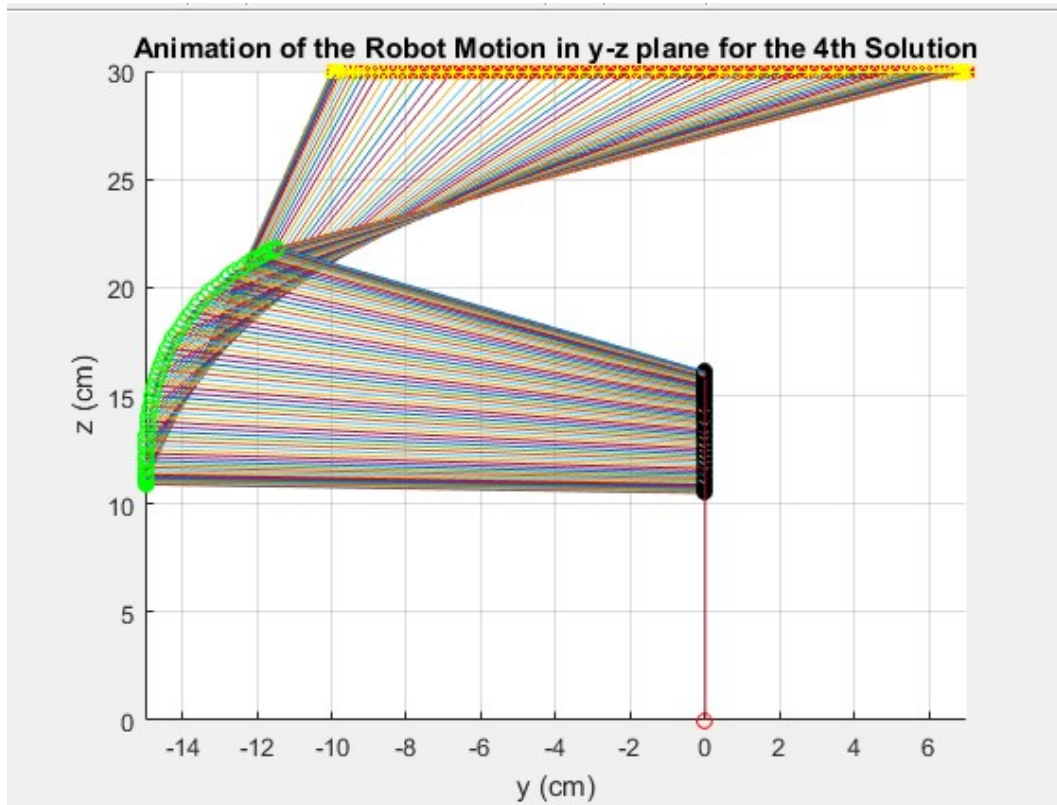
β) Προβολή στο xz επίπεδο:



γ) Προβολή στο xy επίπεδο:



δ)Προβολή στο yz επίπεδο:



Παρατηρήσεις:

1. Μπορεί να διακρίνει κανείς ότι, τα links είναι σταθερά αμετάβλητα, γεγονός το οποίο ενισχύει την αξιοπιστία των παραπάνω προσομοιώσεων.
2. Οι 3D-προσομοιώσεις δείχνουν, πως περίπου θα έμοιαζε η κίνηση του ρομπότ στο χώρο αλλά και την αρμονική συνεργασία των αρθρώσεων για την επίτευξη του στόχου.

Σχόλια:

1. Πρώτα εκτελείται το script **trajectory.m**(μέσα στο οποίο γίνεται κλήση της function **parameters.m**) για τα διαγράμματα κίνησης και ταχύτητας και στη συνέχεια το script **animation.m**, για την κινηματική προσομοίωση της ρομποτικής διάταξης.

ΤΕΛΟΣ