



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y
Tecnologías Avanzadas

Estrategias de control basadas en esquemas de optimización
para seguidores solares

Tesis

Que para obtener el grado de
Maestro en Tecnología Avanzada

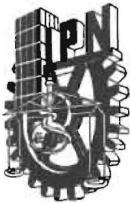
Presenta
Ing. Marco Antonio Peñaloza López

Directores de tesis

**Dr. Diego Alonso
Flores Hernández**

**Dr. Sergio Isai
Palomino Resendiz**

Ciudad de México, diciembre 2025.



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
Dirección de Posgrado

SIP-13
REP 2017

**ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS
Y DESIGNACIÓN DE DIRECTOR DE TESIS**

Ciudad de México, a 7 de febrero del 2025

El Colegio de Profesores de Posgrado de Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas en su Sesión

(Unidad Académica)

Ordinaria No. 6 celebrada el día 20 del mes junio de 2024 conoció la solicitud presentada por el (la) alumno (a):

Apellido Paterno:	Peñaloza	Apellido Materno:	López	Nombre (s):	Marco Antonio
-------------------	----------	-------------------	-------	-------------	---------------

Número de boleta: A | 2 | 4 | 0 | 0 | 2 | 3

del Programa Académico de Posgrado: MAESTRÍA EN TECNOLOGÍA AVANZADA

Referente al registro de su tema de tesis

1.- Se acordó aprobar el tema de tesis:

Estrategias de control basadas en esquemas de optimización para seguidores solares

Objetivo general del trabajo de tesis:

Reducir el consumo energético y el error de seguimiento en sistemas de seguimiento solar de forma simultánea mediante la implementación de estrategias de control basadas en filosofías mecatrónicas y de optimización para garantizar su rentabilidad en términos de producción de energía

2.- Se designa como Directores de Tesis a los profesores:

Director: Dr. Diego Alonso Flores Hernández

Director: Dr. Sergio Isai Palomino Resendiz

No aplica:

3.- El Trabajo de investigación base para el desarrollo de la tesis será elaborado por el alumno en:

Laboratorio de Sistemas Dinámicos Aplicados

que cuenta con los recursos e infraestructura necesarios.

4.- El interesado deberá asistir a los seminarios desarrollados en el área de adscripción del trabajo desde la fecha en que se suscribe la presente, hasta la aprobación de la versión completa de la tesis por parte de la Comisión Revisora correspondiente.

Director(a) de Tesis

Dr. Diego Alonso Flores Hernández

Alumno

Marco Antonio Peñaloza López

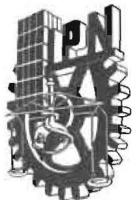
Director de Tesis (en su caso)

Dr. Sergio Isai Palomino Resendiz

Presidente del Colegio

Ing. Israel Vazquez Olvera





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
Dirección de Posgrado

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 10:00 horas del día 12 del mes de noviembre del 2025 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Posgrado de La Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas para examinar la tesis titulada:

Estrategias de control basadas en esquemas de optimización para seguidores solares del (la) alumno (a):

Apellido Paterno:	PEÑALOZA	Apellido Materno:	LÓPEZ	Nombre (s):	MARCO ANTONIO
-------------------	----------	-------------------	-------	-------------	---------------

Número de boleta: A 2 4 0 0 2 3

Alumno del Programa Académico de Posgrado:

MAESTRÍA EN TECNOLOGÍA AVANZADA

Una vez que se realizó un análisis de similitud de texto, utilizando el software antiplagio, se encontró que el trabajo de tesis tiene 14 % de similitud. **Se adjunta reporte de software utilizado.**

Después que esta Comisión revisó exhaustivamente el contenido, estructura, intención y ubicación de los textos de la tesis identificados como coincidentes con otros documentos, concluyó que en el presente trabajo **SI NO SE CONSTITUYE UN POSIBLE PLAGIO.**

JUSTIFICACIÓN DE LA CONCLUSIÓN:

Las coincidencias del documento se encuentran principalmente en las referencias debidamente citadas

Finalmente y posterior a la lectura, revisión individual, así como el análisis e intercambio de opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR SUSPENDER NO APROBAR** la tesis por **UNANIMIDAD o MAYORÍA** en virtud de los motivos siguientes:

El trabajo escrito cumple con los requisitos establecidos en el Reglamento de Estudios de Posgrado

COMISIÓN REVISORA DE TESIS

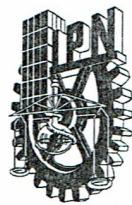
Dr. Diego Alonso Flores Hernández

Dr. Alberto Luviano Juárez

Dr. Sergio Isai Palomino Resendiz

Dr. Oscar Octavio Gutiérrez Fries





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA DE AUTORIZACIÓN DE USO DE OBRA PARA DIFUSIÓN

En la Ciudad de México el día 02 del mes de diciembre del año 2025, el que suscribe **Marco Antonio Peñaloza López** alumno del programa Maestría en Tecnología Avanzada con número de registro A240023, adscrito a la Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de tesis bajo la dirección del Dr. Diego Alonso Flores Hernández y el Dr. Sergio Isai Palomino Resendiz y cede los derechos del trabajo intitulado **Estrategias de control basadas en esquemas de optimización para seguidores solares**, al Instituto Politécnico Nacional, para su difusión con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expresado del autor y/o directores. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones de correo mpenaloza1500@alumno.ipn.mx y/o mpenaloza1500@gmail.com . Si el permiso se otorga, al usuario deberá dar agradecimiento correspondiente y citar la fuente de este.



Marco Antonio Peñaloza López

*En memoria de
Nancy Lizbeth Tellez Martínez †
una gran mujer, madre y amiga.*

Agradecimientos

Recuerdo muy bien que mi padre siempre me dijo que diera mi mayor esfuerzo en todo lo que hiciera, sin embargo, sinceramente hoy puedo decir que ni el más hercúleo de mis empeños habría bastado para llegar hasta este momento si no hubiera contado con el apoyo de todas las buenas personas que aquí menciono. Indudablemente, han sido una parte integral de mi vida y ahora, con una dicha que no me cabe en el pecho y un tanto más de humildad, quiero dedicarles algunas breves palabras, las cuales, si bien no están en proporción con la gratitud que les profeso, provienen de mi más profundo sentir.

A mi madre, Ludivina, mi primer y más lindo amor, gracias por ser mi fuente de tranquilidad y entendimiento, gracias por estar a mi lado aun cuando más me he equivocado, gracias por el plato de comida y la taza de café que siempre tienes para mí, gracias porque aun sin estar, siempre estuviste, y gracias, en verdad muchas gracias, por ser mi mamá.

A mi padre, el M. en T. A. José Juan Peñaloza Soto, quiero decirte que lo logramos, valieron la pena tantos años de amor y esfuerzo. Gracias, papá, por ser la mano dura que marcó las directrices de mi camino y, al mismo tiempo, la mano amiga que se me extendió en cada paso que di. Llegar hasta este momento es un logro más tuyo que mío y espero que te llene de orgullo tal como a mí me llena el decir que tengo un padre como tú.

A mi hermana, Diana, quiero usar estas líneas para expresarte lo mucho que te amo y lo importante que eres para mí. Te conozco desde el día en que naciste y hasta la fecha he sido bendecido con tu compañía, lo cual también me ha permitido ser testigo de cómo poco a poco te has convertido en una mujer capaz, buena e inteligente. Te agradezco inmensamente porque de ti he aprendido mucho más de lo que te imaginas y tu presencia en mi vida ha sido, es y será siempre una fuente de felicidad.

A mi Madrina, Tere, mi tío, Jesús, y mi primo, José María, les agradezco mucho por haberme recibido en su hogar. Ese tiempo que pasé con ustedes fue determinante para que ahora pueda decirles que todo el apoyo que me brindaron cumplió su cometido. A los tres los amo y los respeto mucho. Nuevamente, ¡muchas gracias!

A mi abuelita, Josefina, y mi abuelito, Lorenzo, lamento no poder abrazarlos y decirles que lo logramos, sin embargo, espero que desde donde sea que estén puedan verme y sentirse muy orgullosos. Los amo y los extraño mucho.

A mis asesores, el Dr. Sergio Isai Palomino Resendiz y el Dr. Diego Alonso Flores Hernández, no tengo palabras para expresarles cuánto ha cambiado mi vida desde que los conocí. Les agradezco infinitamente por todo el apoyo y confianza que me han brindado. Su conocimiento y experiencia me han guiado sabiamente para dirigir mis pasos en un buen camino y ahora, con el doctorado en puerta, me llena de gusto poder seguir contando con ustedes, así como pertenecer a este buen equipo de trabajo que hemos formado. En verdad, ¡muchas gracias!

A mi primo, el Ing. Erick López Hernández, porque tu colaboración en este proyecto llegó cuando más lo necesitaba y fue fundamental para llevarlo a buen puerto. No olvido todas las horas que tu buena voluntad te llevó a quedarte trabajando conmigo. Ten por seguro que valoro mucho tu esfuerzo y espero que estas líneas sirvan para expresarte cuanto te lo agradezco.

Al Laboratorio de Sistemas Dinámicos Aplicados de la UPIITA y el Laboratorio de Sistemas Dinámicos de la ESIME, así como a los buenos amigos que ahí conocí: Maximiliano, Alejandro, Julian, Emilio, Valeria, Eduardo, Ian, José Luis, Rafael, Aaron y Fernando. Muchas gracias por su valiosa amistad, apoyo y compañía.

A mi tío, Gerardo López, le agradezco porque de usted siempre ha provenido apoyo, empatía, respeto y cariño, tanto para mí como para mis padres y hermana. Lo considero un hombre admirable y me llena de gusto que forme parte de mi vida, así como de este logro.

A mi buen amigo, el Ing. Agustín Serrano Delgado, quien desafortunadamente la vida no le permitió acompañarme hasta este momento, lo extraño, lo recuerdo y le agradezco por haberme brindado su valioso afecto y amistad. Hasta donde sea que este, ¡muchas gracias y un fuerte abrazo!

Agradezco al Instituto Politécnico Nacional, a la Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas, y a la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica por abrirme las puertas al conocimiento y hacerme sentir orgulloso de pertenecer a tan magnífica institución.

Agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación por la beca proporcionada para la realización de mis estudios de maestría.

Este trabajo estuvo parcialmente financiado por el Instituto Politécnico Nacional - Secretaría de Investigación y Posgrado SIP-20241043, SIP-20241454, SIP-20251300, SIP-20250023, SIP-2025A365 y el Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT Convocatoria Ciencia de Frontera 2023 CF-2023-I-1635).

Índice general

Índice general	IX
Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XI
1 Introducción	1
1.1 Hipótesis	2
1.2 Objetivos	3
1.2.1 Objetivo general	3
1.2.2 Objetivos particulares	3
2 Marco referencial	5
2.1 Energía solar	5
2.2 Seguimiento de trayectoria	5
2.3 Aplicaciones y Estado del arte	8
2.4 Optimización	9
2.5 Controladores en tareas de seguimiento de la trayectoria solar	12
2.5.1 Control <i>On-Off</i>	13
2.5.2 Control PID	14
2.5.3 Control Predictivo basado en Modelo	15

2.5.4	Formulación del Control Predictivo basado en Modelo en espacio de estados	16
2.6	Modelado multivariable del seguidor solar	19
3	Metodología	23
3.1	Modelado por juntas independientes del seguidor solar	23
3.1.1	Representación en espacio de estado y modelo de juntas independientes en tiempo discreto	28
3.1.2	Identificación de parámetros	30
3.1.3	Análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad	34
3.1.4	Plataforma de pruebas	37
4	Resultados y análisis	41
4.1	Simulación de controladores	41
4.2	Experimentación en plataforma de pruebas	49
5	Discusión	59
6	Conclusiones	61
Apéndice A – Circuito electrónico de control para plataforma de pruebas		63
Referencias		64

Índice de figuras

2.1	Sistema de coordenadas para la ubicación del Sol en el cielo.	6
2.2	Esquemas de control para seguimiento solar.	7
2.3	Esquema generalizado de un SS.	8
2.4	Equivalencia e invariaciones de la minimización de una función objetivo.	10
2.5	Graficas del principio de funcionamiento del controlador <i>On-Off</i>	14
2.6	Estructura básica del MPC.	16
2.7	Ejemplos de funciones estrictamente convexas.	19
2.8	Equivalencia de un SS con un sistema robótico de 2 GDL.	19
3.1	Diagrama esquemático general de un MCDIP con una transmisión mecánica. . . .	23
3.2	Diagrama de inducción de voltaje en una espira.	24
3.3	Voltajes inducidos en un MCDIP.	25
3.4	Diagrama de bloques correspondiente a un MCDIP.	26
3.5	Respuesta de un actuador MCDIP con transmisión mecánica.	31
3.6	Diagrama de fase asociado al modelo dinámico de la plataforma de 1 GDL. . . .	36
3.7	Fotografía de la plataforma de pruebas de 1 GDL	38
3.8	Diagrama de plataforma de 1 GDL.	39
3.9	Muestreo de la respuesta al escalón y resultado de aproximación con modelo dinámico para plataforma de 1 GDL.	40
4.1	Diseño de un SS de dos ejes.	42

4.2	Respuesta a la rampa del controlador PID.	43
4.3	Simulación de seguimiento de trayectoria con controlador <i>On-Off</i> . Prueba 1.	45
4.4	Simulación de seguimiento de trayectoria con controlador <i>On-Off</i> . Prueba 2.	46
4.5	Simulación de seguimiento de trayectoria con controlador PID.	47
4.6	Simulación de seguimiento de trayectoria con controlador MPC.	48
4.7	Distribución de la ventana de control.	50
4.8	Interfaz de monitoreo y registro de datos.	54
4.9	Resultados de seguimiento de trayectoria con controlador <i>On-Off</i>	55
4.10	Resultados de seguimiento de trayectoria con controlador PID.	56
4.11	Simulación de seguimiento de trayectoria con controlador MPC y algoritmo ED. . .	57
4.12	Resultados de seguimiento de trayectoria con controlador MPC y algoritmo PSO. .	58
1	Diagrama esquemático para circuito de control de plataforma de 1 GDL.	63

Índice de tablas

3.1	Especificaciones del actuador y la transmisión mecánica en plataforma de 1 GDL	37
3.2	Especificaciones del <i>encoder</i> en plataforma de 1 GDL	38
3.3	Resultados de identificación de parámetros en plataforma de 1 GDL	39
3.4	Parámetros del modelo dinámico para plataforma de 1 GDL	39
4.1	Parámetros de sintonización de los controladores.	43
4.2	Resultados numéricos de simulación.	44
4.3	Configuración de los algoritmos de optimización metaheurísticos	49
4.4	Resultados numéricos de experimentación.	54

Glosario

En el siguiente apartado se describen con detalle los significados de los acrónimos (con mayor número de veces de aparición) en el desarrollo de este trabajo.

Acrónimos

- PV: Panel fotovoltaico (Convencionalismo usado en la literatura).
- SS: Seguidor Solar.
- GDL: Grados De Libertad.
- MPC: Control predictivo basado en modelo, del término en inglés *Model Predictive Control*.
- MCDIP: Motor de Corriente Directa de Imán Permanente.
- MSE: Error cuadrático medio, del término en inglés *Mean Squared Error*.
- MAE: Error absoluto medio, del término en inglés *Mean Absolute Error*.
- ECT: Esfuerzo de Control Total.

Resumen

En el presente trabajo se muestra la implementación de estrategias de control de seguimiento de trayectoria para su aplicación en sistemas seguidores solares de dos ejes con configuración acimutal-elevación. Para esto, en primera instancia se desarrolla el modelado multivariable del seguidor solar entendiéndolo como un equivalente a un sistema robótico de dos grados de libertad en configuración revoluta-revoluta. Se considera que cada una de las juntas de este sistema dispone de un mecanismo motor-transmisión cuyas características, en conjunto con la naturaleza propia del problema de seguimiento solar, permiten obtener un modelo de juntas independientes bajo el cual los efectos dinámicos asociados con las fuerzas de Coriolis y de gravedad presentan magnitudes tales que pueden asumirse como perturbaciones. Así, la dinámica predominante para cada una de las juntas queda descrita a través de una ecuación diferencial lineal.

A su vez, el modelo de juntas independientes justifica el análisis y diseño de controladores de manera individual para cada componente de la trayectoria solar (acimutal y elevación). En este sentido, se plantean como controladores convencionales al *On-Off* y al Proporcional-Integral-Derivativo, mientras que el Control Predictivo basado en Modelo se considera un controlador no convencional y que está basado en un esquema de optimización. La selección de estos controladores se fundamenta en la satisfacción de criterios preestablecidos para la viabilidad de controladores en aplicaciones de seguimiento solar.

Para la verificación del desempeño de cada controlador, se construye una plataforma de pruebas de 1 grado de libertad, la cual cuenta con las capacidades de hardware para establecer un lazo de control simple retroalimentado, así como de procesamiento para la ejecución de métodos numéricos de optimización. Su dinámica se describe mediante el modelo de juntas independientes por lo que se desarrolla una metodología de identificación de parámetros para definirlo en su totalidad.

El modelo dinámico de la plataforma permite realizar simulaciones para generar una primera aproximación a los parámetros de configuración de los controladores, así como validar su viabilidad para la aplicación y evaluar su desempeño a través de índices formulados en términos del error de seguimiento de trayectoria y del consumo energético asociado al esfuerzo de control. Posteriormente, la configuración experimental se preserva para las pruebas en la plataforma física. No obstante, en la etapa de optimización inherente del controlador MPC, se integran algoritmos meta-heurísticos de Evolución Diferencial y Optimización de Enjambre de Partículas. Finalmente, se realiza un análisis comparativo de los resultados de cada controlador señalando las características que favorecen su aplicación para sistemas de captación y transformación de la energía solar.

Abstract

In this work, the implementation of trajectory-tracking control strategies is presented for their application in two-axis solar tracking systems with an azimuthelevation configuration. To this end, the multivariable modeling of the solar tracker is first developed, considering it as equivalent to a robotic system with two degrees of freedom in a revoluterevolute configuration. It is assumed that each joint of this system includes a motortransmission mechanism whose characteristics, together with the inherent nature of the solar-tracking problem, allow obtaining an independent-joint model under which the dynamic effects associated with Coriolis and gravitational forces have magnitudes that can be considered as disturbances. Thus, the predominant dynamics of each joint are described by a linear differential equation.

In turn, the independent-joint model justifies the individual analysis and design of controllers for each component of the solar trajectory (azimuth and elevation). In this sense, OnOff and ProportionalIntegralDerivative controllers are proposed as conventional controllers, while Model Predictive Control is considered a non-conventional controller based on an optimization scheme. The selection of these controllers is grounded in meeting predefined criteria for the feasibility of controllers in solar-tracking applications.

To verify the performance of each controller, a one-degree-of-freedom test platform is built. This platform has the hardware capabilities to establish a simple feedback control loop, as well as the processing capabilities required for executing numerical optimization methods. Its dynamics are described by the independent-joint model; therefore, a parameter identification methodology is developed to define it completely.

The dynamic model of the platform allows performing simulations to obtain a first approximation of the configuration parameters of the controllers, as well as to validate their feasibility for the application and evaluate their performance through indices formulated in terms of trajectory-tracking error and the energy consumption associated with the control effort. Subsequently, the experimental configuration is preserved for the tests on the physical platform. However, in the optimization stage inherent to the MPC controller, metaheuristic algorithms of Differential Evolution and Particle Swarm Optimization are integrated. Finally, a comparative analysis of the results of each controller is conducted, highlighting the characteristics that favor their application in systems for capturing and transforming solar energy.

Capítulo 1

Introducción

La energía eléctrica es fundamental para una gran cantidad de actividades y procesos. Está presente en la operación de sectores tan importantes en la sociedad actual como el transporte, las comunicaciones y los procesos industriales. Para el año 2022, el consumo mundial de energía eléctrica representó el 20.96 % del consumo energético total, equivalente a 2,4561,475 GWh [1], una cifra que, desde hace más de un siglo, prevalece en aumento debido al continuo crecimiento de la población mundial, así como al desarrollo tecnológico para la generación, transmisión y uso de la energía eléctrica [2].

En la actualidad, la mayor parte de la energía eléctrica aún se obtiene a partir de combustibles fósiles. En el año 2024 el 22.39 % se obtuvo a partir de gas natural, mientras que el carbón contribuyó con el 33.95 %, lo cual, en conjunto, representa más de la mitad de la producción de energía eléctrica a nivel mundial [3]. Los gases de efecto invernadero emitidos por la quema de estos combustibles están directamente relacionados con el calentamiento global y el cambio climático, problemáticas ambientales que han causado mucha preocupación debido a sus efectos devastadores que ponen en riesgo la sostenibilidad del planeta. Además, la dependencia de ellos para producir energía vuelve susceptible el desarrollo económico, social y ambiental de los países ante el eventual agotamiento de las reservas globales, o bien, frente a circunstancias geopolíticas, por ejemplo, el conflicto bélico entre Rusia y Ucrania que ha ocasionado interrupciones en el suministro, principalmente de gas natural y petróleo, a Europa, además de importantes modificaciones en los mercados energéticos, dando lugar a una crisis energética global de una magnitud sin precedentes [1, 4].

Por lo anterior, las fuentes de energía renovable han ganado mucha atención en los últimos años. Según las estimaciones realizadas por la Agencia Internacional de Energía (IEA, por sus siglas en inglés) el incremento en la capacidad instalada de energías renovables pronosticado para el periodo entre 2022 y 2027 es de 2400 GW [5], lo que equivale a aproximadamente 25 veces la capacidad instalada total de la industria eléctrica en México. Dentro de este crecimiento la energía solar presenta una importante participación, por ejemplo, en México, la aportación a la red eléctrica por parte de la energía solar fotovoltaica incrementó más de 8 veces en solo 5 años pasando de 2,176 GWh en 2018 a 18,6147 GWh en 2023 [1]. Es importante mencionar que este crecimiento se ha visto favorecido por el continuo desarrollo de la tecnología para la captación y transformación de la radiación solar en las últimas 2 décadas, lo que ha permitido disminuir los costos de fabricación e incrementar su eficiencia de conversión de energía [6].

Los métodos mediante los cuales se transforma la energía solar se clasifican en dos grandes grupos: térmicos y fotovoltaicos. Para la generación de energía térmica se utilizan dispositivos ópticos, como lentes o espejos, que concentran los rayos solares en un receptor consiguiendo elevar su temperatura. Esto puede aprovecharse, por ejemplo, para procesos de destilación, o bien, para la generación indirecta de energía eléctrica a través de vapor, como ocurre en los procesos de las plantas termosolares. Los dispositivos fotovoltaicos, en cambio, transforman directamente la radiación solar en energía eléctrica. En general, un panel fotovoltaico (PV) es capaz de operar bajo una configuración en la que su orientación es fija, no obstante, debido a su principio de funcionamiento, la potencia eléctrica que desarrolla solo puede ser máxima si los rayos solares inciden en una dirección normal a su superficie (formando un ángulo de 90°). No así con los dispositivos de concentración, los cuales requieren un ángulo de incidencia específico de los rayos solares sobre su superficie para funcionar adecuadamente. Por ello, con el objetivo de garantizar las condiciones mínimas de operación de dispositivos ópticos, o bien, incrementar la producción energética de un PV, se han desarrollado dispositivos electromecánicos, conocidos como Seguidores Solares (SS), que ejecutan movimientos controlados para mantener una superficie de interés con una orientación específica respecto a la dirección del Sol.

En el desarrollo de la tarea de seguimiento, un SS consume cierta cantidad de energía, la cual, si es excesiva, puede comprometer su rentabilidad. Un porcentaje considerable de esa energía se debe a los actuadores eléctricos que desarrollan los movimientos del SS y que, a su vez, son gobernados por un controlador. Así, su desempeño se encuentra fuertemente relacionado con la estrategia de control utilizada para realizar el seguimiento de la trayectoria solar, la cual determina la frecuencia, intensidad y sentido de los esfuerzos de control aplicados a los actuadores y, en consecuencia, es responsable de replicar la trayectoria solar con precisión, pero consumiendo para ello la menor cantidad de energía posible.

1.1 Hipótesis

En la literatura puede encontrarse una amplia variedad de estrategias de control con aplicación para el seguimiento de trayectoria en SS, desde controladores simples que operan a través de circuitos de electrónica analógica y/o operacional, hasta aquellos que aprovechan el poder computacional de dispositivos digitales, como microcontroladores o computadoras, para realizar cálculos más complejos. En cualquier caso, se preserva el objetivo de replicar la trayectoria solar con suficiente precisión, pero sin comprometer la rentabilidad a causa de un consumo de energía excesivo. La precisión deseada depende de las características específicas de cada aplicación. En lo general, la tecnología fotovoltaica convencional desarrolla un régimen de producción alto con una tolerancia de error de apuntamiento de $\pm 2^\circ$, sin embargo, su operación no se compromete drásticamente fuera de este intervalo. En contraste, las aplicaciones de concentración presentan restricciones más estrictas, no solo porque la tolerancia al error de apuntamiento se reduce hasta $\pm 0.5^\circ$, sino porque también es indispensable como parte de las condiciones mínimas de operación. Así, garantizar un error de seguimiento de trayectoria acotado (tanto como sea necesario) es un requerimiento fundamental que debe satisfacer cualquier sistema de control para un SS. Por otro lado, no debe perderse de vista la cantidad de energía que un SS necesita para su operación. Principalmente, este consumo se encuentra asociado al esfuerzo de control que ocasiona el movimiento de cada uno de

sus ejes, comúnmente a través de algún tipo de motor eléctrico. En consecuencia, la estrategia de control de seguimiento de trayectoria resulta de gran importancia para el desempeño del sistema, ya que simultáneamente debe satisfacer objetivos en términos de precisión y de consumo energético, es decir, debe replicar la trayectoria solar empleando la menor cantidad de energía posible. En este sentido, los controladores como el Proporcional-Integral-Derivativo, el *On-off* y los basados en lógica difusa, que cuentan con una amplia aplicación para el control de SS, emplean principios de funcionamiento que no consideran explícitamente el consumo energético, o bien, lo contemplan a través de metodologías que no necesariamente satisfacen una optimalidad. Por lo anterior, las estrategias de control basadas en esquemas de optimización destacan por su capacidad para considerar de forma simultánea ambos objetivos (error de seguimiento y consumo energético), además, debido a la naturaleza de su funcionamiento, la búsqueda de la operación óptima se aborda de forma sistemática. Adicionalmente, la integración de estas estrategias de control con algoritmos de optimización permite trabajar con sistemas que son descritos a través de dinámicas no lineales o que están sujetos a restricciones. Con esto en mente, la hipótesis planteada para este trabajo en particular es la siguiente:

Las estrategias de control basadas en esquemas de optimización son una alternativa que puede presentar ventajas al implementarse para sistemas que replican la trayectoria solar con el objetivo de aprovechar alguna de las componentes energéticas de la radiación solar (energía eléctrica o térmica). Esto debido a que su principio de funcionamiento es capaz de calcular acciones de control que atienden simultáneamente criterios de desempeño en términos de la minimización del error de seguimiento de trayectoria y del consumo energético por parte de los actuadores. Lo cual, se traduce positivamente en el total de energía neta disponible proporcionada por dispositivos de captación y conversión de la radiación solar. Además, al emplear algoritmos de optimización basados en métodos numéricos, sería posible abordar este enfoque incluso para sistemas no lineales, así como plantear restricciones en las condiciones de operación, por ejemplo, para acotar el error de seguimiento máximo, o bien, para evitar acciones de control que comprometan la integridad de los actuadores.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Reducir el consumo energético y el error de seguimiento en sistemas de seguimiento solar de forma simultánea mediante la implementación de estrategias de control basadas en filosofías mecatrónicas y de optimización para garantizar su rentabilidad en términos de producción energética.

1.2.2 Objetivos particulares

- Diseñar y construir una plataforma de pruebas que permita verificar el funcionamiento de estrategias de control de seguimiento de trayectoria basadas en esquemas de optimización.
- Establecer una metodología de caracterización e identificación de parámetros del actuador

de la plataforma de pruebas.

- Obtener el modelo dinámico del actuador de la plataforma de pruebas en términos de su posición y velocidad angulares.
- Implementar y validar en entorno de simulación una estrategia de control para seguimiento de trayectoria empleando algoritmos de optimización basados en soluciones analíticas, o bien, en métodos numéricos preestablecidos, para minimizar de forma simultánea el error de seguimiento y el esfuerzo de control asociados.
- Establecer restricciones en el proceso de optimización y comparar con los resultados obtenidos en entorno de simulación del problema libre de restricciones.
- Desarrollar algoritmos de optimización basados en métodos numéricos aptos para su integración dentro de un esquema de control de seguimiento de trayectoria.
- Integrar los algoritmos de optimización dentro de un esquema de control en lazo cerrado para el control de seguimiento de trayectoria de la plataforma de pruebas.
- Verificar en la plataforma de pruebas el desempeño de la estrategia de control propuesta para el seguimiento de la trayectoria solar, mediante la evaluación de indicadores asociados al consumo energético del actuador y al error de seguimiento de trayectoria.

Capítulo 2

Marco referencial

2.1 Energía solar

El Sol es la mayor fuente de energía inagotable que tiene la Tierra. De él se derivan todos los tipos de energía renovable ya sea de forma directa o indirecta [7]. Las aplicaciones directas de la radiación solar implican su transformación en energía eléctrica a través de PV [8], o bien, el uso de dispositivos ópticos de concentración, como lentes y espejos, para la generación de calor [9]. También, existe una configuración particular denominada energía solar fotovoltaica de concentración (CPV, del término en inglés *Concentrated Photovoltaic*) en la que se combinan dispositivos ópticos con PV de concentración para obtener una eficiencia de transformación mayor [10]. Además, la componente térmica de la radiación solar también puede aprovecharse para la generación de vapor y este, a su vez, para obtener energía eléctrica, un proceso que se desarrolla en las denominadas plantas termosolares [11].

Dentro del marco de transición energética mundial, la energía solar tiene un papel fundamental. En conjunto con la hidráulica y la eólica, encabezan la producción de energía renovable siendo responsables del 91 % del total a nivel mundial. No obstante, en términos de su tendencia de crecimiento, la energía solar es considerablemente superior reportando una tasa de aumento del 27.6 % en 2024, frente al 7.8 % y 4.2 % de la eólica e hidráulica, respectivamente [3].

2.2 Seguimiento de trayectoria

Del total de la capacidad instalada a nivel mundial para la generación de energía eléctrica a partir de la solar, más del 99 % utiliza tecnología fotovoltaica [3]. Un PV funciona siguiendo el principio fotovoltaico [12], por ello, al exponerse a la radiación solar es capaz de transformar un porcentaje de la energía de las ondas electromagnéticas en electricidad. Su eficiencia de transformación depende directamente de las propiedades del material que lo componen, sin embargo, también existe una importante dependencia en el ángulo de incidencia de los rayos solares sobre su superficie [13]. En consecuencia, un clima soleado y despejado, en conjunto con una orientación directa del PV

hacia el Sol, constituyen las condiciones de operación necesarias para un régimen de producción de energía alto. Esto puede expresarse de forma precisa considerando un tipo de coordenadas polares que se adaptan a referencias geográficas para describir la ubicación de cualquier objeto en el cielo a través de un ángulo acimutal, α , y un ángulo de elevación, β . En la Figura 2.1 puede observarse que el ángulo acimutal se mide sobre un plano horizontal, el sentido positivo es hacia el este y el cero su ubica en la dirección sur. Por otro lado, el ángulo de elevación se mide desde el horizonte y sobre un plano vertical, considerando como ascendente el sentido positivo. De esta manera, el vector solar, $v_s = [\alpha_0 \ \beta_0]$, describe la dirección en la que se encuentra el Sol en un momento determinado. Con esto en mente, un PV puede experimentar un régimen de producción alto si su orientación, dada por el vector $v = [\alpha \ \beta]$, se mantiene dentro de un ángulo sólido de 2° centrado en v_s . Fuera de ese intervalo, los ángulos de aceptancia para un régimen de producción medio o bajo quedan delimitados en 90° para el eje acimutal y hasta 45° para el de elevación [14].

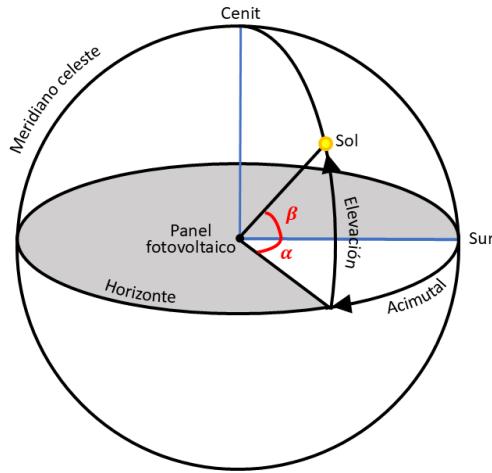


Figura 2.1: Sistema de coordenadas para la ubicación del Sol en el cielo.

Por lo anterior, puede entenderse que un sistema de generación de energía eléctrica a través de PV necesita asistirse de algún tipo de mecanismo para replicar la trayectoria solar y garantizar las condiciones mínimas de operación para un régimen de producción energética alto. Los SS son sistemas robóticos que tienen la capacidad de ejecutar tareas de apuntamiento hacia el Sol de forma automática. Para ello, cuentan con un sistema de control de seguimiento de trayectoria que se encarga de determinar y ejecutar los movimientos necesarios para orientar una superficie de interés en la dirección del Sol. La literatura reporta al menos 5 tipos de seguimiento solar: activo, cronológico, pasivo, semipasivo y manual. Sin embargo, los dos primeros son los más estudiados y utilizados [15]. El seguimiento solar activo se caracteriza por la integración de sensores (o arreglos de sensores) asociados a alguna magnitud directamente relacionada con la irradiación solar (temperatura, luminosidad, potencia eléctrica de un PV, etc.) para determinar el ángulo de desviación entre la orientación de la superficie del sensor y la posición real del Sol. Debido a esta característica de retroalimentación, el seguimiento solar activo corresponde con un esquema de control en lazo cerrado. Por otro lado, el seguimiento solar cronológico utiliza referencias geográficas y algoritmos preestablecidos como [16, 17] para calcular la trayectoria solar en función del día del año y de la ubicación geográfica, luego se ejecuta un lazo de control de posición para ubicar

la superficie de interés en la dirección precalculada. Es importante mencionar que la referencia de posición local del lazo de control puede no coincidir con las referencias geográficas usadas en los algoritmos de cálculo de trayectoria (principalmente a causa de errores de calibración). Finalmente, al no contar con una señal de retroalimentación sobre la posición real del Sol, se considera que este tipo de seguimiento solar cuenta con un esquema de control en lazo abierto. Esta diferencia entre los 2 tipos de seguimiento puede observarse en la Figura 2.2 donde se muestran los esquemas de control correspondientes a cada uno.

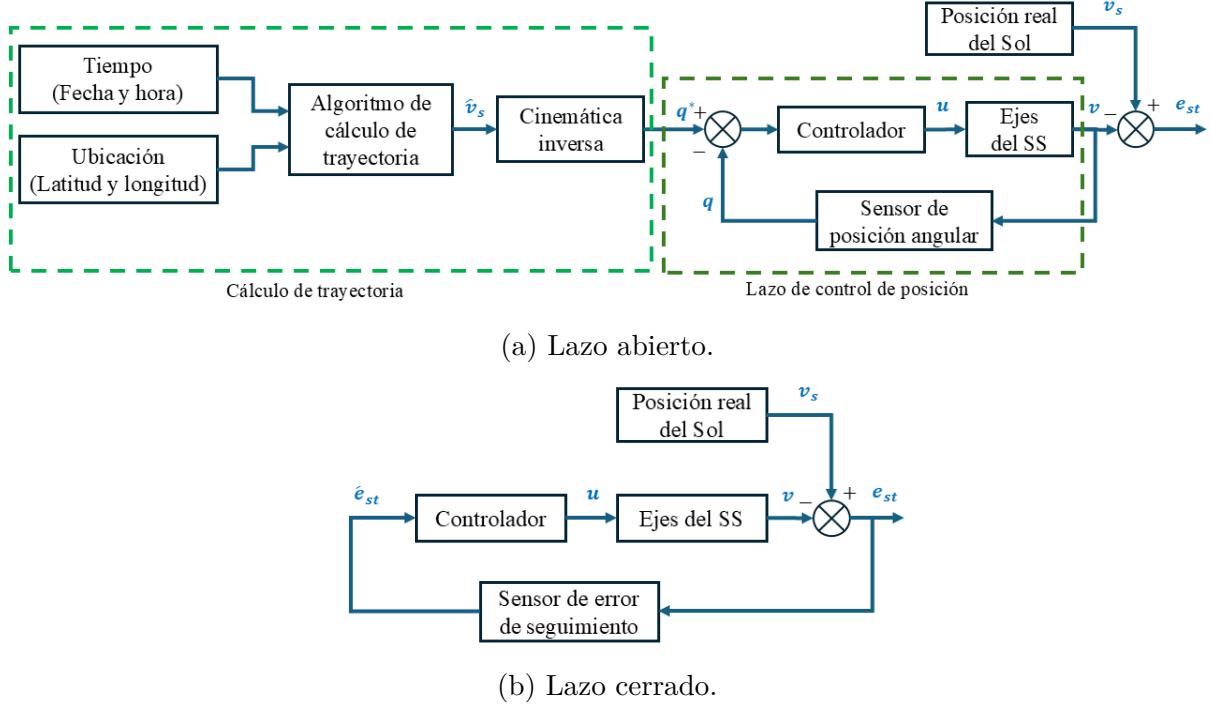


Figura 2.2: Esquemas de control para seguimiento solar. En la figura u es señal de control, e_{st} es error de seguimiento y el acento $\hat{\cdot}$ indica aproximación o estimación.

Otra forma de clasificar los SS es considerando el número de ejes o Grados De Libertad (GDL) que tienen. En su configuración más simple disponen de 1 GDL [18–20], por lo que su capacidad para replicar la trayectoria solar está limitada a las variaciones debidas al movimiento de rotación de la Tierra. Por otro lado, los SS de 2 GDL [20–22] pueden replicar la trayectoria completa, ya que consideran las variaciones estacionales derivadas del movimiento de traslación. La Figura 2.3 muestra la estructura general de un SS de dos ejes. Su disposición coincide con el sistema de coordenadas formado por un ángulo acimutal y uno de elevación, por lo tanto, el problema de seguimiento de trayectoria puede abordarse considerando que el vector de variables de juntas $q = [q_1 \ q_2]^T$ debe aproximarse al vector $q^* = [q_1^* \ q_2^*]^T$ que está asociado con la dirección del Sol en un momento determinado, es decir, el vector solar $v_s = [\alpha_0 \ \beta_0]$. La precisión de la aproximación está definida por el tipo de aplicación.

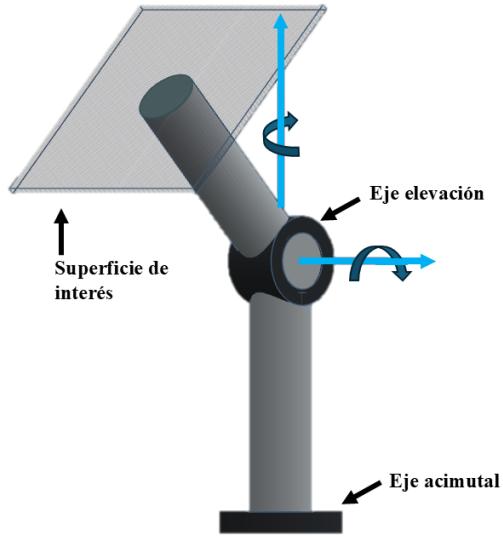


Figura 2.3: Esquema generalizado de un SS.

2.3 Aplicaciones y Estado del arte

Las alternativas disponibles en la literatura para controlar un SS ya sea de forma activa, o bien, cronológica es muy amplia, tanto en términos de estrategias de control como de los dispositivos involucrados en la integración del lazo. De acuerdo con [23], los algoritmos de control más utilizados para seguimiento solar activo son el *On-Off*, la lógica difusa (FLC, del término en inglés *Fuzzy Logic Control*) y el control Proporcional - Integral - Derivativo (PID). Sin embargo, con una participación menor se menciona también la aplicación de Redes Neuronales Artificiales (RNA), modos deslizantes (*Sliding modes*) y controladores predictivos.

En [21] se presenta un SS en 2 configuraciones diferentes: acimutal-elevación y declinación-reloj. El control del movimiento para el primer caso consiste en una esquema híbrido que integra el precálculo de la trayectoria solar con un lazo de control retroalimentado por un sensor de posición solar, mientras que para la configuración declinación-reloj se emplea un seguimiento completamente cronológico y con movimientos en pasos discretos de 0.5° cada 2 minutos (velocidad angular promedio de $15^\circ/h$). En [20] se presenta el desarrollo de un controlador bajo una configuración de seguimiento en 5 posiciones. Para esto se emplean arreglos de fotorresistores (LDR, del término en inglés *Light Dependent Resistor*) que operan bajo un esquema de control On-Off y permiten el planteamiento de una disposición combinatoria para determinar la posición del Sol. De forma similar, los trabajos de [18, 19] también presentan esquemas de control de seguimiento activo usando LDR's, así como una propuesta cronológica basada en un reloj de tiempo real (RTC, del término en inglés *Real Time Clock*).

Por otro lado, en [24] se plantea un análisis comparativo para controladores PID y FLC probando su desempeño en un SS de un solo eje y dentro de un lazo retroalimentado a través de LDR's. La implementación utiliza una placa Arduino UNO como unidad de control, así como un motor de corriente directa (CD) conectado con un *driver* de tipo puente H. En este contexto,

los controladores basados en lógica difusa se presentan como una alternativa que busca emular el comportamiento humano interpretando las condiciones de un sistema (entradas y salidas) como variables lingüísticas, las cuales se relacionan entre sí a través de un conjunto de reglas de inferencia. La construcción de estas reglas depende directamente de la experiencia y conocimiento del diseñador. Además, al describir la dinámica en términos conceptuales es posible prescindir de desarrollos matemáticos complejos para el diseño del controlador [25–27]. Por su parte, los controladores PID destacan por su simplicidad y amplio uso particularmente para sistemas con requerimientos de alta precisión de apuntamiento [28, 29]. Su principio de funcionamiento se basa en la suma ponderada del error de seguimiento, (e_{st}), su integral y su derivada respecto al tiempo. La selección adecuada de los coeficientes de cada término puede garantizar la estabilidad del sistema, así como una tendencia hacia la disminución del error $e_{st} \rightarrow 0$. Lo que lo convierte en una alternativa viable (y la más utilizada) para el control de sistemas robóticos con aplicaciones para control de posición, así como para seguimiento de trayectorias [14, 30].

2.4 Optimización

En términos generales, la optimización puede definirse como el procedimiento a través del cual se busca obtener la mejor solución ante una determinada situación o problema. Particularmente, cuando se trata de un problema de ingeniería, es común que se exprese a través de un lenguaje matemático, por ejemplo, en términos de los costos implicados para el desarrollo de un proyecto, o bien, el beneficio económico esperado con su realización. De esta manera, resulta natural pensar en la optimización como un proceso en el que se minimiza o maximiza algún objetivo particular, el cual está determinado por las características de cada situación.

De manera formal, la formulación de un problema de optimización comienza con la definición de una función objetivo, $f(x)$, cuyo valor está determinado por un número finito de características o decisiones representadas por el vector $x \in \mathbb{R}^n$, conocido como vector de variables de diseño. El planteamiento puede hacerse como un problema de minimización, en el cual se busca algún punto x^* que satisfaga

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall \quad x \in \text{Dom}(f(x))$$

o bien, como un problema de maximización en el que se cumple

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \forall \quad x \in \text{Dom}(f(x))$$

En ambos casos, x^* corresponde con un punto extremo (mínimo o máximo) global, ya que las desigualdades se cumplen en todo el dominio. No obstante, si solo se considera una vecindad, entonces x^* es un punto mínimo local si existe un δ tal que

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall \quad x : \|x - x^*\| < \delta$$

o para un máximo local:

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \forall \quad x : \|x - x^*\| < \delta$$

La nomenclatura para referirse a estos dos problemas de optimización cuando no están sujetos a restricciones es la siguiente:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad \max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{2.1}$$

En general, cualquier problema de optimización puede abordarse desde ambos planteamientos, ya que existe una equivalencia entre ellos, dada por

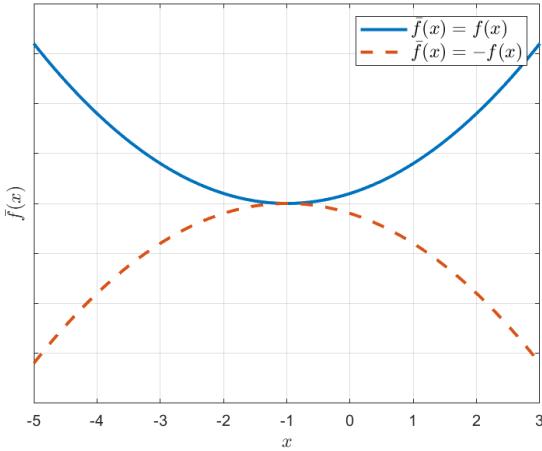
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \equiv \max_{x \in \mathbb{R}^n} -f(x) \quad (2.2)$$

Así, el punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ que minimiza $f(x)$, al mismo tiempo también maximiza $-f(x)$. Por ello, en adelante, solo se hará referencia a la optimización desde el enfoque de un problema de minimización.

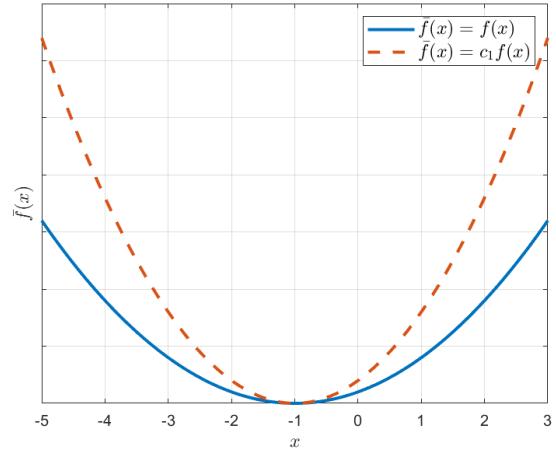
Además de esta propiedad, la minimización de f satisface lo siguiente: Sea x^* el vector en \mathbb{R}^n que minimiza $f(x)$. Entonces x^* también minimiza las funciones

$$\bar{f}(x) = c_1 f(x) \quad \text{y} \quad \bar{f}(x) = f(x) + c_2 \quad \text{con} \quad c_1 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

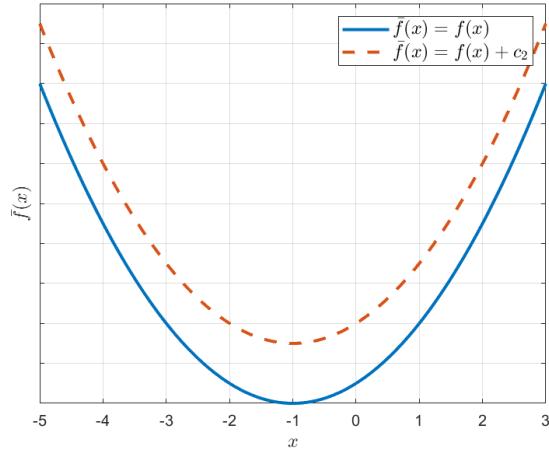
Es decir, el mínimo de una función prevalece aun cuando esta se multiplica por un escalar positivo, o bien, se le adiciona cualquier número real. Estas propiedades se ejemplifican para una función de una sola variable en las gráficas de la Figura 2.4.



(a) Equivalencia de $f(x)$ con su negativo.



(b) Invariancia al escalamiento.



(c) Invariancia al desplazamiento.

Figura 2.4: Equivalencia e invariasiones de la minimización de una función objetivo.

La solución para un problema de minimización consiste en encontrar el vector x^* que minimiza la función objetivo. Para esto existen diferentes métodos, cuya viabilidad depende de las características propias del problema. En primera instancia, puede buscarse una solución analítica, siempre que f sea doblemente continuamente diferenciable. Para ello, se considera el Teorema 1:

Teorema 1. Condición necesaria. *Si $f(x)$ tiene un punto extremo (máximo o mínimo) en $x = x^*$ y si las primeras derivadas parciales existen en x^* , entonces*

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} = 0 \quad (2.3)$$

La Ecuación (2.3) puede reescribirse en términos del vector gradiente, $\nabla f(x)$, de esta manera, si existen puntos que satisfacen

$$\nabla f(x)|_{x=x^*} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T |_{x=x^*} = 0 \quad (2.4)$$

se denominan puntos críticos y pueden corresponder con mínimos, o bien, con máximos. Su existencia es una condición necesaria, pero no suficiente, para que el problema de minimización tenga solución analítica. Por ello, es necesario evaluarlos siguiendo lo que indica el Teorema 2:

Teorema 2. Condición suficiente. *Una condición de suficiencia para que un punto crítico x^* sea un punto extremo es que la matriz de segundas derivadas parciales (matriz Hessiana) de $f(x)$ evaluada en x^* sea positiva cuando x^* es un mínimo local, y negativa cuando x^* es un máximo local.*

La matriz Hessiana, $H(x)$, está definida como

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Así, al evaluar cada punto crítico en la matriz Hessiana, pueden encontrarse los mínimos locales de $f(x)$. Este procedimiento es útil particularmente cuando la solución de la Ecuación (2.4) puede calcularse sin dificultad. En caso contrario, también existe la alternativa de emplear algoritmos de optimización basados en métodos numéricos, los cuales convergen a soluciones aproximadas a través de un proceso iterativo. No obstante, su uso conlleva un cierto costo computacional, además de una susceptibilidad al estancamiento en mínimos locales. Por ello, al optar por este tipo de métodos, resulta importante verificar la convexidad de la función objetivo. Esto se puede determinar siguiendo el Teorema 3:

Teorema 3. *Una función f es convexa si su matriz Hessiana $H(x)$ es semidefinida positiva para todo x que pertenece al dominio de la función.*

Al mismo tiempo, si una función es convexa se cumple lo que indica el Teorema 4:

Teorema 4. *Cualquier mínimo local de una función convexa es un mínimo global.*

Por lo tanto, para un problema de minimización cuya función objetivo es convexa, la convergencia de un método numérico hacia la solución depende solamente del ajuste adecuado de sus parámetros de operación, por ejemplo, la dirección de búsqueda o el tamaño de paso, pero, en lo general, para cualquier punto inicial $x_0 \in \text{Dom}(f)$, $x_0 \neq x^*$ es posible encontrar una dirección de búsqueda estrictamente decreciente que conduzca al mínimo global. Lo cual también implica que se descarta el estancamiento en un mínimo local.

2.5 Controladores en tareas de seguimiento de la trayectoria solar

Dada la posibilidad de analizar un SS como un sistema robótico de 2 GDL, el problema de seguimiento de la trayectoria solar puede entenderse como equivalente al seguimiento de una trayectoria predefinida donde para cada instante de tiempo, t , se tiene un estado deseado del sistema en términos de la posición y velocidad angular de sus juntas, el cual se expresa a través de los vectores

$$q^*(t) = \begin{bmatrix} q_1^*(t) \\ q_2^*(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \dot{q}^*(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^*(t) \\ \dot{q}_2^*(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Si la posición del Sol en un momento determinado y la posición de una superficie de interés, acoplada como efecto final del sistema robótico, están dadas respectivamente por

$$v_s^*(t) = \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \beta_0(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

entonces, para cada instante, el estado deseado del sistema en términos de su posición angular se determina como

$$q^*(t) \quad \text{tal que} \quad v(t) = v_s(t) \quad (2.8)$$

En el caso de la velocidad angular, el estado deseado resulta una consecuencia de satisfacer la Ecuación 2.8 para todo t , lo cual es equivalente a desarrollar una velocidad angular que reproduzca la velocidad aparente del Sol en el cielo, aproximadamente 1° cada 4 minutos en uno o ambos ejes. Así, para cualquier controlador de seguimiento de trayectoria solar, su objetivo de control fundamental se centra en ocasional que

$$q(t) \rightarrow q^*(t) \quad \forall t \quad (2.9)$$

La diferencia entre la orientación de la superficie de interés y el vector solar se conoce como error de seguimiento de trayectoria, es decir

$$e_{st}(t) = v_s(t) - v(t) \quad (2.10)$$

no obstante, es necesario tener en cuenta que, en lo general

$$e_{st}(t) \neq q^*(t) - q(t) \quad (2.11)$$

ya que $q^*(t) = v_s(t)$ y $q(t) = v(t)$ solo si las referencias locales del sistema robótico coinciden exactamente con las referencias geográficas que definen la posición del Sol.

Entre las alternativas más utilizadas para controladores de seguimiento de trayectoria se encuentran el *On-Off* y el PID, los cuales son controladores convencionales y con una amplia gama de aplicaciones. Por otro lado, el Control Predictivo basado en Modelo (MPC, del término en inglés *Model Predictive Control*) es un controlador cuyo principio de funcionamiento se basa en un esquema de optimización. Aunque este último carece de un respaldo tan amplio en la literatura como el de los dos primeros, ya que se trata de un controlador no convencional. Todos presentan un conjunto de características como precisión de seguimiento, bajo consumo energético, diseño con base en un modelo dinámico, facilidad de configuración y sintonización, etc. que los vuelven aptos para desempeñar tareas de seguimiento solar [31]. Particularmente, el MPC presenta también la posibilidad de abordar el problema de seguimiento a través de ventanas de control de duración finita mediante un concepto que se conoce como horizonte de predicción, además, intrínsecamente su formulación se realiza en tiempo discreto por lo que su aplicabilidad con dispositivos de control digitales es directa. Finalmente, su esquema de control tiene propiedades de modularidad por lo que puede integrarse fácilmente con algoritmos de optimización que facilitan el manejo de restricciones y permiten la operación con sistemas no lineales. Por lo anterior, el MPC resulta un candidato adecuado para evaluar el potencial que tienen las estrategias de control basadas en esquemas de optimización en aplicaciones de seguimiento solar.

2.5.1 Control *On-Off*

El controlador *On-Off* opera a través de un lazo de control simple retroalimentado, ya que se basa en una señal de error (definido como la diferencia entre una referencia y su correspondiente variable de proceso) para generar una acción de control. En términos del error de seguimiento de trayectoria, la acción de control se calcula como [31, 32]

$$u(t) = \begin{cases} u_{OO}, & e_{st}(t) > 0 \\ 0, & e_{st}(t) \leq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

donde $u_{OO} \in \mathbb{R}$ es la magnitud de la señal de control en el estado *On*. La gráfica asociada a esta Ecuación puede observarse en la Figura 2.5a. No obstante, el principio de funcionamiento de este controlador se encuentra limitado para la corrección del error en un solo sentido, ya que si el error de seguimiento es negativo, la señal de control permanece en estado *Off*. Por ello, puede ser modificado para incluir una acción de control en ambos sentidos [33], de modo que toma la forma de la Ecuación 2.13:

$$u(t) = \begin{cases} u_{OO}, & e_{st}(t) > E_{st} \\ 0, & |e_{st}(t)| \leq E_{st} \\ -u_{OO}, & e_{st}(t) < -E_{st} \end{cases} \quad (2.13)$$

donde $E_{st} \in \mathbb{R}^+$ se denomina umbral de activación y determina una región alrededor de $e_{st} = 0$ en la que se evita la comutación del controlador con lo que se puede reducir su frecuencia de comutación. La Figura 2.5b muestra la gráfica del funcionamiento de este controlador modificado. Finalmente, es importante mencionar que este controlador es no lineal en cualquiera de las dos versiones presentadas.

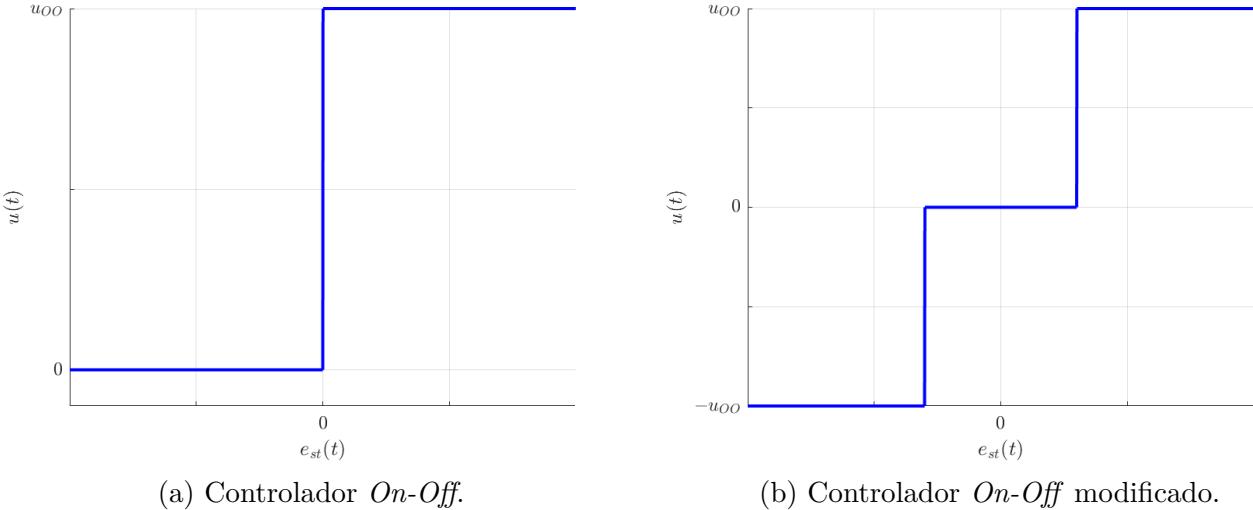


Figura 2.5: Graficas del principio de funcionamiento del controlador *On-Off*.

2.5.2 Control PID

El controlador PID (de forma similar al *On-Off*) opera a través de un lazo simple retroalimentado en el cual cada una de sus componentes se calcula con base en una señal de error. Es uno de los controladores más importantes y utilizados sobre todo dentro del ámbito industrial [34]. Su formulación incluye operaciones que son lineales y de fácil implementación. Para cada instante, t , la acción de control se calcula a través de la expresión:

$$u(t) = k_p e_{st}(t) + k_i \int_0^t e_{st}(\tau) d\tau + k_d \frac{de_{st}(t)}{dt} \quad (2.14)$$

donde $k_p, k_i, k_d \in \mathbb{R}$ son respectivamente las ganancias proporcional, integral y derivativa. Para obtener su equivalencia en tiempo discreto, la operación de integración, $I[k]$, puede aproximarse mediante

$$\int_0^t e_{st}(\tau) d\tau \approx I[k] = I[k-1] + T_s \frac{e_{st}[k] - e_{st}[k-1]}{2} \quad (2.15)$$

donde T_s es el tiempo de muestreo, mientras que la derivada, $D[k]$, se obtiene como

$$\frac{e_{st}(t)}{dt} \approx D[k] = \frac{e_{st}[k] - e_{st}[k-1]}{T_s} \quad (2.16)$$

Es importante mencionar que existen diferentes maneras de aproximar las operaciones de integración y derivación, las cuales pueden tener una mayor precisión si es necesario [35]. Por lo anterior, el equivalente en tiempo discreto para el controlador PID está dado como lo indica la Ecuación 2.17

$$u[k] = k_p e_{st}[k] + k_i T_s \frac{e_{st}[k] + e_{st}[k-1]}{2} + k_d \frac{e_{st}[k] - e_{st}[k-1]}{T_s} \quad (2.17)$$

a su vez, su función de transferencia en el dominio de la variable z está dada por [36]:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\left(k_p + \frac{T_s}{2}k_i + \frac{1}{T_s}k_d \right) z^2 + \left(-k_p + \frac{T_s}{2}k_i - \frac{2}{T_s}k_d \right) z + \frac{1}{T_s}k_d}{z^2 - z} \quad (2.18)$$

2.5.3 Control Predictivo basado en Modelo

El Control Predictivo corresponde con un conjunto de métodos de control cuyo desarrollo proviene desde finales de la década de 1970. En general, su principio de funcionamiento se basa en el uso explícito de un modelo matemático que permite estimar la evolución temporal del estado de un sistema dentro de un horizonte de predicción. Así, el seguimiento de una referencia o de una trayectoria puede evaluarse dentro de este horizonte en términos de índices de desempeño y ajustar las acciones de control para mejorar la respuesta dinámica. Este procedimiento se vuelve sistemático al plantear la selección de la mejor acción de control como un problema de optimización. Si la dinámica del sistema se describe a través de ecuaciones diferenciales lineales, es posible obtener una solución de forma analítica. Por otro lado, la integración de algoritmos de optimización permite resolver problemas que presentan no linealidades, ya sea de forma inherente a las ecuaciones que describen su comportamiento, o bien, porque están sujetos a restricciones, las cuales, en algunos casos, pueden excluir a la solución analítica. No obstante, para este caso es importante considerar el costo computacional implicado en la solución numérica del problema de optimización, lo cual puede requerir hardware de mayor capacidad, así como un considerable tiempo de cálculo, limitando su aplicabilidad para sistemas con dinámicas rápidas.

El control predictivo presenta algunas ventajas respectos a otras leyes de control, entre las cuales pueden mencionarse:

- Es una técnica simple en términos de su sintonización, ya que los parámetros involucrados presentan un efecto muy intuitivo sobre el desempeño del controlador. Asimismo, la optimalidad de la respuesta del sistema se considera de manera intrínseca, por lo que el procedimiento de sintonización está dirigido al ajuste de los criterios de optimalidad, más que a la corrección de la dinámica.
- Se puede utilizar para controlar una gran variedad de procesos, desde aquellos que son muy simples hasta los que involucran dinámicas complejas, por ejemplo, con grandes tiempos muertos, procesos de fase no mínima, procesos inestables o procesos multivariados. No obstante, su utilidad es particularmente relevante en aplicaciones de seguimiento de trayectoria, ya que el controlador conoce de antemano las referencias futuras del sistema, lo que le permite considerarlas en el cálculo de la acción de control y, de esta manera, anticiparse a la evolución de la trayectoria.
- La ley de control resultante no es significativamente más compleja con respecto a controladores convencionales.
- Permite tratar las restricciones de una forma sistemática y conceptualmente muy simple durante la fase de diseño.

El control predictivo ha demostrado ser en la práctica una estrategia razonable de control y ha sido aplicado con éxito a numerosos procesos industriales [37].

La Figura 2.6 muestra un diagrama a bloques que describe la operación básica del Control Predictivo Basado en Modelo (MPC). Este puede ser formulado de distintas maneras, las cuales

difieren en la forma de plantear el modelo del sistema, sin embargo, preservan la misma metodología general compuesta por los siguientes pasos:

1. Se calcula la salida del sistema en tiempo discreto para todo un horizonte de predicción, $N_h \in \mathbb{Z}^+$, y se construye la matriz de predicción $Y[k] = [y[k+1] \ y[k+2] \ \dots \ y[k+N_h]]$ considerando una secuencia inicial de acciones de control $U = [u[k] \ u[k+1] \ \dots \ u[k+N_h-1]]$.
2. Se modifica la secuencia de acciones de control, U , mediante un proceso de optimización. Para esto se considera una función objetivo construida a partir de índices de desempeño y que debe ser minimizada o maximizada, según sea el caso.
3. Se aplica la secuencia de control calculada en cada instante de muestreo hasta alcanzar el horizonte de predicción y, posteriormente, repetir todo el procedimiento.

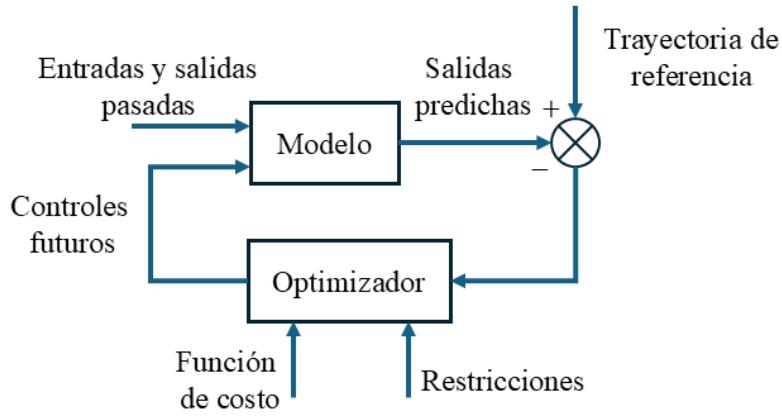


Figura 2.6: Estructura básica del MPC.

2.5.4 Formulación del Control Predictivo basado en Modelo en espacio de estados

Los diferentes controladores predictivos que existen difieren por la forma en que se representa un sistema dinámico a través de un modelo matemático. En esta sección se analiza la formulación del MPC utilizando una representación en espacio de estado. Para ello, se considera como punto de partida el sistema en tiempo discreto mostrado por la Ecuación (3.32). El estado de este sistema puede calcularse para cualquier número de instantes de muestreo futuros al evaluarlo de forma

recursiva, es decir, a través del siguiente procedimiento:

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k]$$

$$\begin{aligned} x[k+2] &= A_d x[k+1] + B_d u[k+1] = A_d(A_d x[k] + B_d u[k]) + B_d u[k+1] \\ x[k+2] &= A_d^2 x[k] + A_d B_d u[k] + B_d u[k+1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[k+3] &= A_d x[k+2] + B_d u[k+2] = A_d(A_d^2 x[k] + A_d B_d u[k] + B_d u[k+1]) + B_d u[k+2] \\ x[k+3] &= A_d^3 x[k] + A_d^2 B_d u[k] + A_d B_d u[k+1] + B_d u[k+2] \\ &\vdots \\ x[k+N_h] &= A_d^{N_h} x[k] + A_d^{N_h-1} B_d u[k] + A_d^{N_h-2} B_d u[k+1] + \cdots + B_d u[k+N_h-1] \end{aligned}$$

Si se introduce el concepto de horizonte de control, N_c , para limitar el número de acciones de control que pueden realizarse en cada horizonte de predicción, entonces se tiene que

$$u[k+N] = \begin{cases} u_N, & 0 \leq N < N_c \\ 0, & N_c \leq N < N_h \end{cases} \quad \text{con } u_N \in \mathbb{R} \quad y \quad N = 0, 1, 2, \dots, N_h - 1$$

y la predicción del estado se convierte en

$$x[k+N_h] = A_d^{N_h} x[k] + A_d^{N_h-1} B_d u[k] + A_d^{N_h-2} B_d u[k+1] + \cdots + A_d^{N_h-N_c} B_d u[k+N_c-1] \quad (2.19)$$

La salida del sistema se obtiene multiplicando la Ecuación (2.19) por la matriz C :

$$y[k+N_h] = C A_d^{N_h} x_d[k] + C A_d^{N_h-1} B_d u[k] + C A_d^{N_h-2} B_d u[k+1] + \cdots + C A_d^{N_h-N_c} B_d u[k+N_c-1] \quad (2.20)$$

Por lo anterior, la matriz de predicciones de la salida del sistema puede calcularse con la expresión

$$Y = F x[k] + G U \quad (2.21)$$

donde los sumandos corresponden con la respuesta libre y la respuesta forzada, respectivamente. Asimismo, las matrices F y G se construyen como

$$F = [C A_d \quad C A_d^2 \quad C A_d^3 \quad \cdots \quad C A_d^{N_h}]^T \quad (2.22)$$

$$G = \begin{bmatrix} C B_d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C A_d B_d & C B_d & 0 & \cdots & 0 \\ C A_d^2 B_d & C A_d B_d & C B_d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C A_d^{N_h-1} B_d & C A_d^{N_h-2} B_d & C A_d^{N_h-3} B_d & \cdots & C B_d \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

y el vector U (limitado por el horizonte de control) está dado por

$$U = [u[k] \quad u[k+1] \quad u[k+2] \quad \cdots \quad u[k+N_c-1]]^T \quad (2.24)$$

2.5.4.1 Solución analítica del problema de minimización

Para abordar el problema de minimización, se plantea una función de costo en la que se ponderan los índices de desempeño relacionados con el seguimiento de trayectoria y el consumo energético. La forma de esta función de costo viene dada por:

$$J(U) = (Y^* - Y)^T R(Y^* - Y) + U^T Q U \quad (2.25)$$

donde $Y^* \in \mathbb{R}^{N_h}$ es el vector de referencia para la salida y $R \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$ y $Q \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}$ son las matrices de ponderación asociadas a cada índice de desempeño y que, además, se consideran como matrices diagonales dadas por

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{N_h} \end{bmatrix} \quad \text{con } r_i > 0, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{N_c} \end{bmatrix} \quad \text{con } q_i > 0$$

así, es fácil verificar que ambas matrices son definidas positivas, ya que para cualesquiera vectores de prueba $p = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_{N_h}]^T \neq 0$ y $v = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_{N_c}]^T \neq 0$ se cumple que

$$p^T R p = p_1^2 r_1 + p_2^2 r_2 + \cdots + p_{N_h}^2 r_{N_h} > 0, \quad v^T Q v = v_1^2 q_1 + v_2^2 q_2 + \cdots + v_{N_c}^2 q_{N_c} > 0$$

Ahora, retomando la Ecuación (2.21) se tiene que

$$\begin{aligned} J(U) &= (Y^* - Fx[k] - GU)^T R(Y^* - Fx[k] - GU) + U^T Q U \\ J(U) &= U^T (G^T RG + Q) U - 2U^T G^T R(Y^* - Fx[k]) + (Y^* - Fx[k])^T R(Y^* - Fx[k]) \end{aligned} \quad (2.26)$$

La secuencia de control, U^* , que minimiza la función objetivo se obtiene al resolver la expresión planteada por

$$\begin{aligned} \nabla J|_{U=U^*} &= \frac{\partial J}{\partial U}|_{U=U^*} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial U}|_{U=U^*} &= 2(G^T RG + Q)U^* - 2G^T R(Y^* - Fx[k]) = 0 \\ U^* &= (G^T RG + Q)^{-1} G^T R(Y^* - Fx[k]) \end{aligned} \quad (2.27)$$

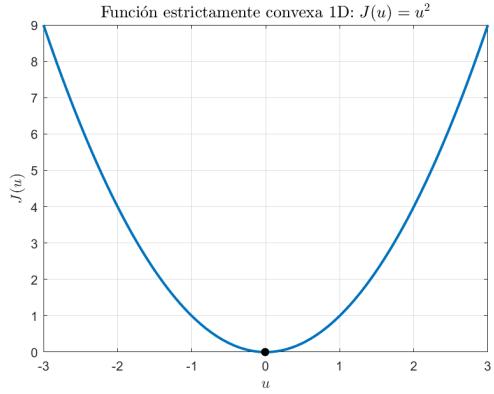
donde ∇J es el vector de primeras derivadas conocido como vector gradiente. Para comprobar que U^* es un punto crítico asociado a un mínimo de la función objetivo se considera el criterio de la matriz de segundas derivadas (matriz Hessiana):

$$\frac{\partial^2 J}{\partial U^2} = H(U) = 2(G^T RG + Q) \quad (2.29)$$

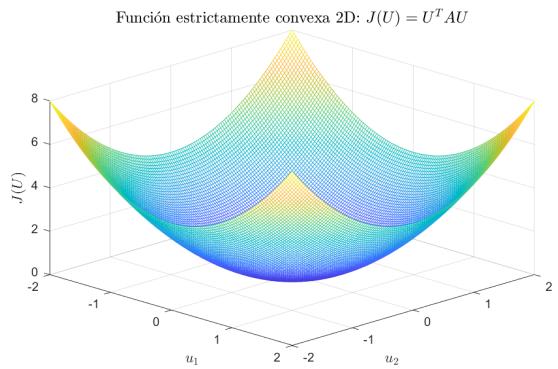
Como R es definida positiva, entonces $G^T RG$ también lo es, ya que satisface

$$\begin{aligned} &v^T (G^T RG) v \\ &(Gv)^T R (Gv) \\ \hat{v}^T R \hat{v} &> 0 \quad \forall \quad \hat{v} \neq 0 \quad \text{con} \quad \hat{v} = Gv \quad y \quad v \in \mathbb{R}^{N_c} \end{aligned}$$

Así, al evaluar la matriz Hessiana en el punto crítico $H(U^*) = 2(G^T RG + Q)$ se tiene que es definida positiva si R y Q son definidas positivas (condición suficiente) y, en consecuencia, U^* es un mínimo local de $J(U)$. Más aun, dado que $H(U)$ es definida positiva para todo U , se puede concluir que $J(U)$ es una función estrictamente convexa (ver Figura 2.7) y, por lo tanto, U^* es el mínimo global.



(a) Función estrictamente convexa en un dominio de una variable.



(b) Función estrictamente convexa en un dominio de dos variables.

Figura 2.7: Ejemplos de funciones estrictamente convexas.

2.6 Modelado multivariable del seguidor solar

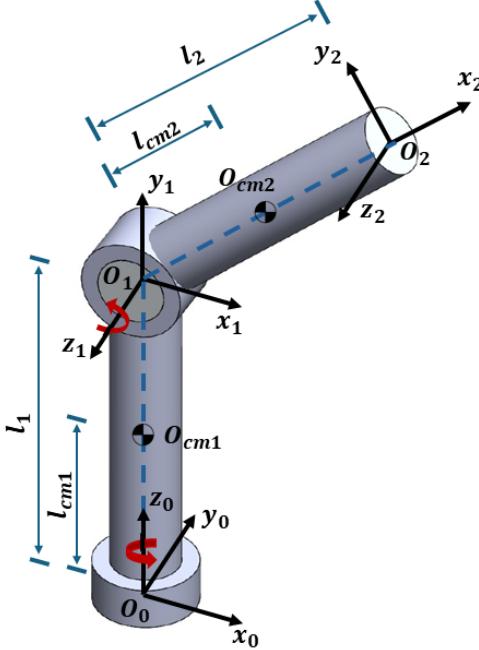


Figura 2.8: Equivalencia de un SS con un sistema robótico de 2 GDL.

En su configuración acimutal-elevación, un SS puede analizarse considerando que cada uno de sus ejes corresponde con una junta de tipo revoluta de un sistema robótico de 2 GDL en cadena cinemática abierta. Al plantear un conjunto de marcos de referencia como se muestra en la Figura 2.8, puede observarse que el eje acimutal gira entorno al eje z_0 , mientras que el eje de elevación lo hace entorno al eje z_1 del sistema robótico equivalente. Este, a su vez, cuenta con 2 eslabones contenidos entre los marcos de referencia $O_0 - O_1$ y $O_1 - O_2$, respectivamente. Se considera que la masa de los eslabones, m_1 y m_2 , está distribuida de manera uniforme y simétrica alrededor de

los centros de masa, O_{cm1} y O_{cm2} , por lo que sus respectivos tensores de inercia tienen la forma:

$$I_i = \begin{bmatrix} I_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zi} \end{bmatrix} \quad \text{con } i = 1, 2 \quad (2.30)$$

Para modelar la dinámica de su movimiento se emplea el método de Euler-Lagrange, a partir del cual se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales. En su forma matricial, este sistema se expresa como

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (2.31)$$

donde el $q = [q_1 \ q_2]^T$ corresponde con el vector de variables de junta, $D(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz de Coriolis, $g(q) \in \mathbb{R}^2$ es el vector de gravedad y $\tau \in \mathbb{R}^2$ representa el par aplicado a cada junta.

La matriz de inercia $D(q)$ está relacionada con la energía cinética, K , del sistema robótico a través de la expresión

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q) q \quad (2.32)$$

por lo tanto, satisface ser definida positiva. Además, también presenta la propiedad de simetría. Su expresión se determina a partir de la Ecuación (2.33)

$$D(q) = \sum_{i=1}^2 m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{wi}^T R_i I_i R_i^T J_{wi} \quad \text{con } i = 1, 2 \quad (2.33)$$

donde

- $J_{vi}, J_{wi} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ son los Jacobianos geométricos de velocidad linear y angular, respectivamente, asociados al centro de masa de cada eslabón. Se calculan a través del siguiente procedimiento: para el primer eslabón ($i = 1$)

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{v1} \\ J_{\omega 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \times (O_{cm1} - O_0) \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$O_0 = [0 \ 0 \ 0]^T, \quad O_{cm1} = [0 \ 0 \ l_{cm1}]^T,$$

$$z_0 = [0 \ 0 \ 1]$$

$$\therefore J_{v1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para el segundo eslabón ($i = 2$)

$$J_2 = \begin{bmatrix} J_{v2} \\ J_{\omega 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \times (O_{cm2} - O_0) \\ z_1 \times (O_{cm2} - O_1) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$O_{cm2} = [c_1 c_2 l_{cm2} \ s_1 c_2 l_{cm2} \ l_1 + l_{cm2}]^T, \quad O_1 = [0 \ 0 \ l_1]^T$$

$$z_1 = [s_1 \ -c_1 \ 0]$$

$$\therefore J_{v2} = \begin{bmatrix} -s_1 c_2 l_{cm2} & -c_1 s_2 l_{cm2} \\ c_1 c_2 l_{cm2} & -s_1 s_2 l_{cm2} \\ 0 & c_2 l_{cm2} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & -c_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con $s_1 = \sin q_1$, $s_2 = \sin q_2$, $c_1 = \cos q_1$, y $c_2 = \cos q_2$

- $R_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son las matrices de rotación que relacionan el marco coordenado asociado al i -ésimo eslabón y el marco inercial. Para el primer eslabón R_1^0 está dada por

$$R_1^0 = Rot_{z,q_1} Rot_{x,90^\circ} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

con las matrices de rotación definidas como

$$Rot_{z,q_1} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Big|_{\theta=q_1} \quad y \quad Rot_{x,90^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \Big|_{\theta=90^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Para el segundo eslabón R_2^0 toma la forma

$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1 = R_1^0 Rot_{z,q_2} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz de inercia para el caso de estudio de este trabajo queda definida como:

$$D(q) = \begin{bmatrix} c_2^2(m_2 l_{cm2}^2 + I_{y2}) + I_{x2}s_2^2 + I_{y1} & 0 \\ 0 & m_2 l_{cm2}^2 + I_{z2} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Por otro lado, la matriz $C(q, \dot{q})$ contiene términos asociados con las fuerzas centrífugas y de Coriolis. Se construye como lo expresa la Ecuación (2.39)

$$C_{kj}(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q) \dot{q}_i \quad \text{con } i, j, k = 1, 2 \quad y \quad n = 2 \quad (2.39)$$

donde c_{ijk} son los símbolos de Christoffel de primera clase, los cuales se calculan siguiendo la expresión

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right] \quad (2.40)$$

donde d_{nm} es el elemento de la matriz de inercia $D(q)$ en la n -ésima fila y la m -ésima columna. Además, para una k fija se tiene que $c_{ijk} = c_{jik}$, lo que reduce el número de cálculos necesarios para obtener los símbolos de Christoffel.

Para el caso de estudio de este trabajo, la matriz $C(q, \dot{q})$ se obtiene de la siguiente manera:

$$c_{111} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} \right] = 0$$

$$c_{211} = c_{121} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial d_{21}}{\partial q_1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} \right] = I_{x2}s_2c_2 - s_2c_2(m_2 l_{cm2}^2 + I_{y2})$$

$$\begin{aligned}
c_{112} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} \right] = -I_{x2}s_2c_2 + s_2c_2(m_2l_{cm2}^2 + I_{y2}) \\
c_{212} = c_{122} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial d_{21}}{\partial q_2} \right] = 0 \\
c_{221} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} \right] = 0 \\
c_{222} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} \right] = 0
\end{aligned}$$

Los elementos de la matriz de Coriolis se calculan a partir de los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
C_{11}(q, \dot{q}) &= c_{111}\dot{q}_1 + c_{211}\dot{q}_2 = s_2c_2(I_{x2} - m_2l_{cm2}^2 - I_{y2})\dot{q}_2 \\
C_{12}(q, \dot{q}) &= c_{121}\dot{q}_1 + c_{221}\dot{q}_2 = s_2c_2(I_{x2} - m_2l_{cm2}^2 - I_{y2})\dot{q}_1 \\
C_{21}(q, \dot{q}) &= c_{112}\dot{q}_1 + c_{212}\dot{q}_2 = -s_2c_2(I_{x2} - m_2l_{cm2}^2 - I_{y2})\dot{q}_1 \\
C_{22}(q, \dot{q}) &= c_{122}\dot{q}_1 + c_{222}\dot{q}_2 = 0
\end{aligned}$$

Así, al organizarlos en forma matricial se obtiene

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} s_2c_2(I_{x2} - m_2l_{cm2}^2 - I_{y2})\dot{q}_2 & s_2c_2(I_{x2} - m_2l_{cm2}^2 - I_{y2})\dot{q}_1 \\ -s_2c_2(I_{x2} - m_2l_{cm2}^2 - I_{y2})\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Ahora bien, en lo que respecta al vector de gravedad, $g(q)$, este se obtiene a partir de la energía potencial. Para el caso particular de este trabajo, los eslabones y juntas no presentan deformaciones por lo que no se considera la existencia de energía potencial elástica, sino solo gravitatoria, la cual está definida como

$$P = \sum_{i=1}^n m_i \bar{g} h_i \quad \text{con } n = 2 \quad (2.42)$$

donde $\bar{g} = 9.81 \frac{m}{s^2}$ es la magnitud de la gravedad en la Tierra y h_i es la altura del centro de masa de cada uno de los eslabones respecto a una altura de referencia. Al observar la Figura 2.8 puede notarse que el movimiento de la junta q_1 no afecta la altura de ninguno de los eslabones. En cambio, la junta q_2 es responsable del desplazamiento vertical que desarrolla el centro de masa del segundo eslabón, por lo tanto, la energía potencial puede definirse en términos de esta junta tomando como referencia la posición horizontal ($q_2 = 0$). De esta manera se obtiene que

$$P = m_2 \bar{g} l_{cm2} s_2 \quad (2.43)$$

y el vector de gravedad se obtiene siguiendo la Ecuación (2.44)

$$g(q) = \frac{\partial P}{\partial q} \quad (2.44)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 \bar{g} l_{cm2} c_2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Capítulo 3

Metodología

3.1 Modelado por juntas independientes del seguidor solar

El movimiento de cada una de las juntas de un sistema robótico se debe a la integración de actuadores que son accionados de forma controlada, o bien, que ejecutan una trayectoria para desempeñar tareas específicas. Estos actuadores pueden ser neumáticos, hidráulicos o eléctricos. Sin embargo, el tipo de actuador más simple, así como el más utilizado para este tipo de aplicaciones, es el Motor de Corriente Directa con Imán Permanente (MCDIP). Su principio de funcionamiento lo convierte en una muy buena alternativa para aplicaciones de bajo par y alta precisión, ya que su velocidad puede controlarse de forma simple y disponiendo de una amplia gama de posibilidades [38, 39]. Adicionalmente, es común que este tipo de dispositivos se encuentren acoplados con un sistema de engranajes (transmisión) que reduce la velocidad de rotación al tiempo que incrementa el par mecánico disponible. En esta sección se analiza el modelo dinámico del MCDIP considerándolo como la interacción de un subsistema eléctrico con un subsistema mecánico. Además, se muestra cómo la configuración motor-transmisión, bajo condiciones específicas, puede disminuir los efectos de las no linealidades presentes en el modelo dinámico de la Ecuación (2.31), de tal manera que puede formularse un modelo lineal aproximado basado en un esquema de juntas independientes. La Figura 3.1 muestra un diagrama esquemático que describe en términos generales el

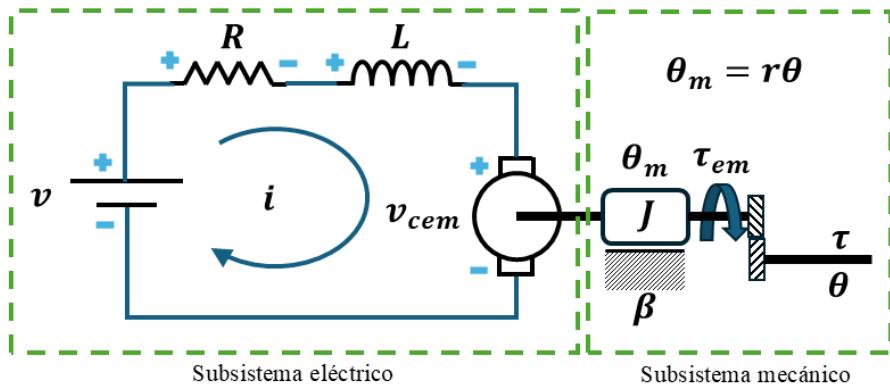


Figura 3.1: Diagrama esquemático general de un MCDIP con una transmisión mecánica.

funcionamiento de un MCDIP acoplado en su eje con una transmisión mecánica. A partir de este diagrama es posible obtener el modelo dinámico tanto del subsistema eléctrico como del mecánico. Así, para el primero de estos se plantea la Ecuación (3.1) siguiendo la ley de Kirchhoff de voltaje

$$v = v_R + v_L + v_{cem} \quad (3.1)$$

donde v_R , v_L son las caídas de voltaje en los elementos resistivo e inductivo, respectivamente, v es el voltaje de alimentación y v_{cem} es un voltaje contraelectromotriz que se induce en el MCDIP a consecuencia de su rotación. Considerando que circula una corriente, i , por todos los elementos del circuito eléctrico, la Ecuación (3.1) puede reescribirse como

$$v = iR + L \frac{di}{dt} + v_{cem} \quad (3.2)$$

El voltaje inducido v_{cem} puede calcularse considerando el diagrama de la Figura 3.2, donde se muestra el principio de funcionamiento simplificado de un MCDIP. Esto es una espira conductora rotando dentro de un campo magnético uniforme, el cual es producido por un imán permanente. Según la ley de inducción de Faraday, el voltaje inducido en la espira está dado por:

$$v_{cem} = AB\dot{\theta}_m \sin(\theta_m) \quad (3.3)$$

donde A es el área de la espira, $\dot{\theta}_m$ es su velocidad de rotación y B es la magnitud del campo magnético. Así, el voltaje inducido en la espira toma la forma de una onda senoidal cuya amplitud es $AB\dot{\theta}$. No obstante, la adición del conmutador provoca un efecto de rectificación, de tal manera que la Ecuación (3.3) se convierte en

$$v_{cem} = AB\dot{\theta}_m |\sin(\theta_m)| \quad (3.4)$$

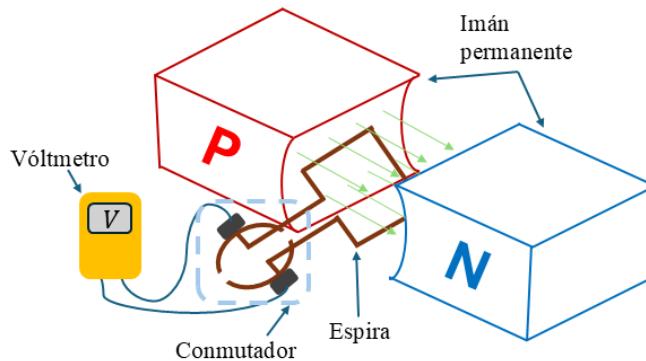


Figura 3.2: Diagrama de inducción de voltaje en una espira.

La Figura 3.3a muestra la forma de onda (resaltada en color azul) del voltaje inducido para una espira conductora simple. En el caso de un MCDIP, el rotor incorpora múltiples bobinas dispuestas con un ángulo de desfase entre sí. En consecuencia, el voltaje inducido en cada bobina se encuentra igualmente desfasado respecto al de las demás. La misma Figura 3.3a muestra este desfase en las formas de onda dibujadas con líneas discontinuas. Finalmente, la acción del conmutador operando con múltiples bobinas ocasiona que en sus terminales se obtenga un voltaje contraelectromotriz

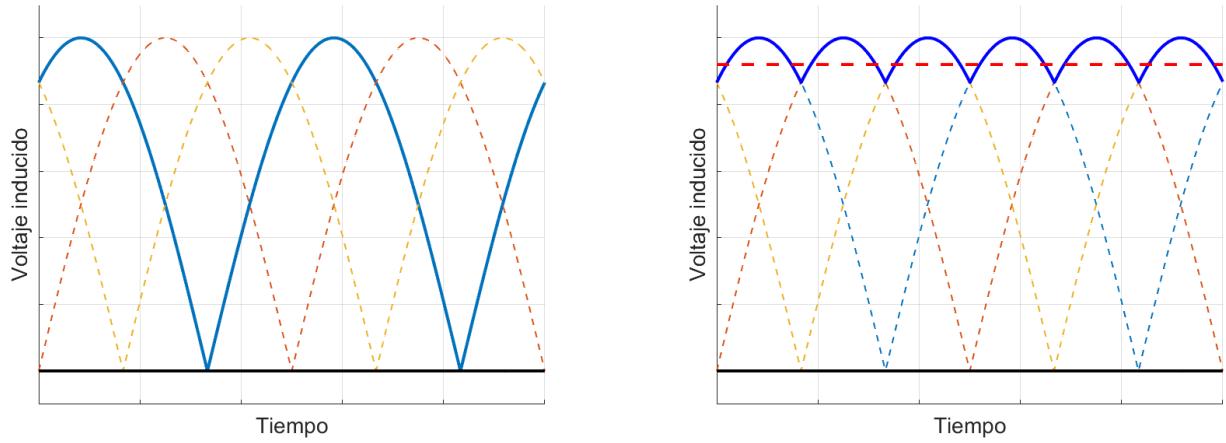
con la forma de onda que se muestra en la Figura 3.3b (resaltada en azul). Es importante notar que el rizado de la forma onda disminuye conforme aumenta el número de bobinas en el rotor. Así, v_{cem} puede aproximarse a un voltaje efectivo constante, tal como se muestra en la Ecuación (3.5)

$$\begin{aligned} v_{cem} &\approx AB\dot{\theta}_m \\ v_{cem} &\approx k_m\dot{\theta}_m \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde k_m es una constante de proporcionalidad entre la velocidad angular y el voltaje contraelectromotriz. Por lo anterior, al sustituir la Ecuación (3.5) en la (3.1) se obtiene el modelo dinámico del subsistema eléctrico de un MCDIP, el cual se muestra en la Ecuación (3.6)

$$v = iR + L\frac{di}{dt} + k_m\dot{\theta}_m \quad (3.6)$$

Por otro lado, el subsistema mecánico se modela siguiendo la segunda ley de Newton para



(a) Voltaje inducido en las bobinas del rotor. (b) Voltaje contraelectromotriz en las terminales.

Figura 3.3: Voltajes inducidos en un MCDIP.

movimiento rotacional considerando una fuerza de fricción viscosa, esto es

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_m &= \frac{\sum \tau}{J} \\ \ddot{\theta}_m &= \frac{\tau_{em} - \beta\dot{\theta}_m + \tau/r}{J} \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde τ_{em} es el par electromagnético producido por el MCDIP, J es el momento de inercia del rotor y los engranajes de la transmisión, β es el coeficiente de fricción viscosa y τ es el par aplicado al eje de salida de la transmisión. Para esta última la relación entre la posición de sus ejes de entrada y salida está dada por $r = \theta_m/\theta$. Particularmente, el par electromagnético, τ_{em} , puede ser relacionado con la corriente eléctrica i de forma directamente proporcional [40], esto siguiendo un principio físico similar al abordado para obtener la aproximación mostrada en la Ecuación (3.5). De esta manera, puede obtenerse la expresión

$$\tau_{em} \approx k_a i \quad (3.8)$$

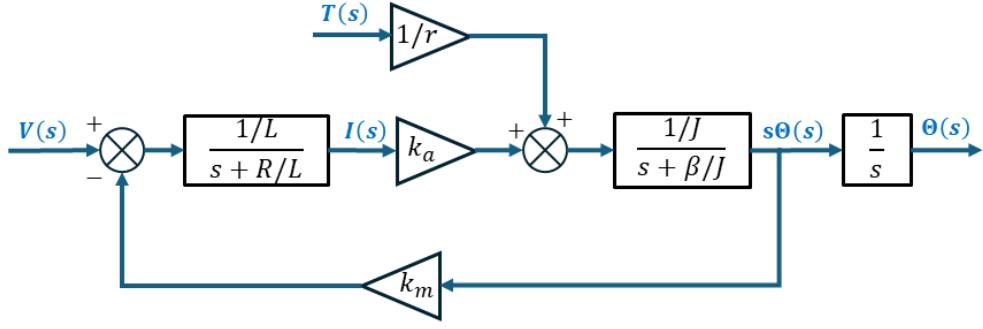


Figura 3.4: Diagrama de bloques correspondiente a un MCDIP.

donde k_a es una constante de proporcionalidad entre la corriente eléctrica y el par electromagnético. En consecuencia, la Ecuación (3.7) puede reescribirse como

$$\ddot{\theta}_m = \frac{1}{Jr}\tau - \frac{\beta}{J}\dot{\theta}_m + \frac{k_a}{J}i \quad (3.9)$$

Las Ecuaciones (3.6) y (3.9) describen la dinámica completa del MCDIP a través de dos subsistemas acoplados. Este acoplamiento se produce mediante las variables i y θ . Las respectivas transformadas de Laplace para estas Ecuaciones son

$$\left(s + \frac{R}{L}\right)I(s) = \frac{1}{L}V(s) - \frac{k_m}{L}\Theta(s)s \quad (3.10)$$

$$s\left(s + \frac{\beta}{J}\right)\Theta(s) = \frac{1}{Jr}T(s) + \frac{k_a}{J}I(s) \quad (3.11)$$

La Figura 3.4 muestra el diagrama a bloques correspondiente a este sistema de ecuaciones. Es importante notar el voltaje aplicado $V(s)$ se considera como la entrada, mientras que la salida está dada como la posición angular $\Theta(s)$. Asimismo, pueden observarse los bloques $G_e(s)$ y $G_m(s)$ asociados a los subsistemas eléctrico y mecánico, respectivamente. En ambos casos, se trata de un sistema de primer orden cuya respuesta individual al escalón es asintóticamente estable (esto con parámetros positivos) y con tiempo de respuesta $t_{re} = L/R$ para el subsistema eléctrico y $t_{rm} = J/\beta$ para el mecánico. Comúnmente, el tiempo de respuesta t_{re} es mucho menor que t_{rm} debido al orden de magnitud de los parámetros L , R , J y β . En consecuencia, la influencia del subsistema eléctrico en la respuesta global desaparece rápidamente, lo que permite la predominación de la dinámica asociada al subsistema mecánico. A partir de esta afirmación, la representación matemática del MCDIP puede aproximarse a través de un modelo simplificado. Para esto, en primera instancia se considera la función de transferencia $\frac{\Theta(s)}{V(s)}$ con $T(s) = 0$, entonces se tiene que

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{k_a/R\beta}{s[(s(L/R) + 1)(s(J/\beta) + 1) + k_m k_a / R\beta]} \quad (3.12)$$

Ahora se calcula $\frac{\Theta(s)}{T(s)}$ con $V(s) = 0$

$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{(s(L/R) + 1)/\beta r}{s[(s(L/R) + 1)(s(J/\beta) + 1) + k_m k_a / R\beta]} \quad (3.13)$$

Puede asumirse que el cociente L/R es mucho más pequeño que J/β . Más aun, $L/R \approx 0$. Estas afirmaciones son razonables para sistemas electromecánicos en lo general [30]. De esta manera, se reduce el orden de las Ecuaciones (3.12) y (3.13) quedando como

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{k_a/R}{Js^2 + (\beta + k_m k_a/R)s} \quad (3.14)$$

$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1/r}{Js^2 + (\beta + k_m k_a/R)s} \quad (3.15)$$

Finalmente, al obtener la transformada inversa de Laplace y aplicar el teorema de la superposición se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$J\ddot{\theta}_m + (\beta + k_m k_a/R)\dot{\theta}_m = \frac{k_a}{R}v + \frac{1}{r}\tau \quad (3.16)$$

que representa la dinámica predominante del MCDIP.

Como se mencionó en la sección 2.6, un SS puede analizarse como un sistema robótico. En este, los actuadores de sus juntas (MCDIP) pueden modelarse como lo indica la Ecuación (3.16). Además, el movimiento de sus eslabones puede describirse mediante de la Ecuación (2.31). Así, al combinar estas dos expresiones se obtiene que para la i -ésima junta del SS su modelo dinámico completo está dado por

$$J_i\ddot{\theta}_{mi} + (\beta_i + k_{mi}k_{ai}/R_i)\dot{\theta}_{mi} = \frac{k_{ai}}{R_i}v_i + \frac{1}{r_i} \left[\sum_{j=1}^2 d_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^2 C_{ij}\dot{q}_j + g_i \right] \quad (3.17)$$

La relación entre las posiciones angulares de las juntas, q , y los MCDIP, θ_m , está determinada por la transmisión mecánica. Matemáticamente se expresa como

$$q = \frac{\theta_m}{r}$$

Al considerar esto, la Ecuación (3.17) se convierte en

$$J_i\ddot{\theta}_{mi} + (\beta_i + k_{mi}k_{ai}/R_i)\dot{\theta}_{mi} = \frac{k_{ai}}{R_i}v_i + \frac{1}{r_i} \left[\sum_{j=1}^2 d_{ij}\frac{\ddot{\theta}_{mj}}{r_j} + \sum_{j=1}^2 C_{ij}\frac{\dot{\theta}_{mj}}{r_j} + g_i \right] \quad (3.18)$$

En esta última expresión es importante notar que el efecto de las no linealidades asociadas al modelo dinámico del movimiento de los eslabones disminuye en un factor de $1/r_i^2$ para los términos de las matrices de inercia y Coriolis, así como en un factor de $1/r_i$ para los términos del vector de gravedad. Además, la naturaleza de la aplicación del SS conlleva desplazamientos tan lentos como el movimiento aparente del Sol en el cielo (1° cada 4 minutos en uno o ambos ejes), de esta manera, los términos de fuerzas centrífugas y de Coriolis presentan magnitudes que pueden despreciarse. Más aun, si la transmisión incorpora mecanismos de autobloqueo (por ejemplo un tornillo sinfín con una corona) los efectos descritos por el vector de gravedad también pueden omitirse. Por ello, bajo estas condiciones, es posible optar por un esquema de juntas independientes sin comprometer el desempeño del sistema [41]. Así, cada una de las juntas se modela y controla asumiendo que su dinámica puede describirse a través de la expresión

$$J_{eff}\ddot{\theta}_{mi} + \beta_{eff}\dot{\theta}_{mi} = \frac{k_{ai}v_i}{R_i}u_i + \xi_i \quad \text{con } i = 1, 2 \quad (3.19)$$

donde $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $\xi \in \mathbb{R}$ es una perturbación, y los parámetros efectivos de momento de inercia, J_{eff} , y coeficiente de fricción viscosa, β_{eff} , están dados por

$$J_{eff} = J_i \approx \left(J_i + \frac{d_{ii}}{r_i^2} \right), \quad \beta_{eff} = \beta_i + k_{mi}k_{ai}/R_i$$

3.1.1 Representación en espacio de estado y modelo de juntas independientes en tiempo discreto

El modelo de juntas independientes mostrado en la Ecuación (3.19) corresponde a una ecuación diferencial lineal de segundo orden con dominio en una variable continua (tiempo continuo). A partir de esta expresión puede obtenerse su representación en espacio de estado y, posteriormente, el modelo equivalente con dominio en tiempo discreto. Para esto, en primera instancia se considera una ecuación diferencial de la forma

$$\alpha_2 \ddot{y}(t) + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) = \beta_1 u(t) \quad (3.20)$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Es importante mencionar que el procedimiento presentado a continuación se aborda a partir de esta ecuación diferencial general, sin embargo, debe entenderse que puede ser aplicado al caso particular del modelo de juntas independientes al considerar $\alpha_2 = J_{eff}$, $\alpha_1 = \beta_{eff}$, $\alpha_0 = 0$ y $\beta_1 = \frac{k_a v}{R}$.

La representación es espacio de estado de la Ecuación (3.20) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ se denomina matriz de estado, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ matriz de entrada, $C \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ matriz de salida y $D \in \mathbb{R}$ matriz de transmisión directa, además, $x(t)$ es el vector de estado dado por

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

en el que las variables de estado se relacionan con la variable de salida $y(t)$ y sus derivadas siguiendo las expresiones:

$$\begin{aligned} x_1 &= y(t) \\ x_2 &= \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \end{aligned}$$

De esta manera, las matrices de estado y de entrada se construyen usando los coeficientes de la ecuación diferencial y la Ecuación 3.21 puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_2} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

La solución a la Ecuación de estado (3.21) partiendo de $t = 0$ con condiciones iniciales $x(0)$ está dada por [42]

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.24)$$

donde e^{At} se conoce como matriz exponencial o matriz de transición de estados. Esta expresión permite generar el modelo equivalente en tiempo discreto al calcular el estado del sistema para dos instantes de muestreo separados por un intervalo de tiempo $T_s \in \mathbb{R}^+$, ya que, si el estado del sistema en el k -ésimo instante de muestreo ($k \in \mathbb{N}$) está dado por

$$x[k] = x(kT_s) = e^{AkT_s}x(0) + e^{AkT_s} \int_0^{kT_s} e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau \quad (3.25)$$

y en el siguiente instante de muestreo, $t = (k+1)T_s$, el estado se calcula como

$$x[k+1] = x((k+1)T_s) = e^{A(k+1)T_s}x(0) + e^{A(k+1)T_s} \int_0^{(k+1)T_s} e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau \quad (3.26)$$

entonces, al multiplicar la Ecuación (3.26) por e^{At} y restarla de la Ecuación (3.25), se puede calcular $x[k+1]$ en términos de $x[k]$ a través de la expresión

$$x[k+1] = e^{AT_s}x[k] + e^{A(k+1)T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau \quad (3.27)$$

Si se asume que la entrada del sistema es proporcionada a través de un retenedor de orden 0, entonces $u(t)$ es constante entre dos instantes de muestreo consecutivos, es decir

$$u(t) = u[k] \quad \text{con} \quad kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$$

así, la integral en la Ecuación (3.27) puede reescribirse, quedando como

$$x[k+1] = e^{AT_s}x[k] + \int_0^{T_s} e^{A(T_s-t)} Bu[k]dt \quad (3.28)$$

que a su vez puede expresarse en la forma matricial

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k] \quad (3.29)$$

donde

$$A_d(T_s) = e^{AT_s} \quad (3.30)$$

$$B_d(T) = \left(\int_0^{T_s} e^{A(T_s-t)} dt \right) B \quad (3.31)$$

De esta manera se obtiene un modelo equivalente para el estado del sistema en tiempo discreto. Es importante notar que las matrices C y D prevalecen independientemente del modelo que se utilice, por lo tanto, la representación en espacio de estado del sistema en tiempo discreto está dada por

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k] \\ y[k] &= C x[k] + D u[k] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ahora bien, suponiendo que se conocen todas las matrices de la Ecuación (3.32) y que sus elementos están dados por

$$A_d = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = 0$$

entonces, es posible obtener una ecuación en diferencias que corresponda con el modelo en tiempo discreto de la Ecuación diferencial mostrada en (3.20). Para esto, en primera instancia se desarrollan las operaciones matriciales de la Ecuación (3.29), con lo cual se obtienen las siguientes expresiones para cada una de las variables de estado:

$$x_1[k+1] = a_{11}x_1[k] + a_{12}x_2[k] + b_{11}u[k] \quad (3.33)$$

$$x_2[k+1] = a_{21}x_1[k] + a_{22}x_2[k] + b_{22}u[k] \quad (3.34)$$

Se despeja $x_2[k]$ de la Ecuación 3.33 obteniendo

$$x_2[k] = \frac{x_1[k+1] - a_{11}x_1[k] - b_{11}u[k]}{a_{12}} \quad (3.35)$$

y ahora, para el siguiente instante de muestreo, $k+2$, la variable de estado x_1 está dada por

$$x_1[k+2] = a_{11}x_1[k+1] + a_{12}x_2[k+1] + b_{11}u[k+1] \quad (3.36)$$

Al sustituir las Ecuaciones (3.34) y (3.35) en la Ecuación (3.36) y organizar los términos, se obtiene la expresión:

$$x_1[k+2] = (a_{11} + a_{22})x_1[k+1] + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})x_1[k] + b_{11}u[k+1] + (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{11})u[k]$$

o bien,

$$x_1[k] = a_1x_1[k-1] + a_2x_1[k-2] + b_1u[k-1] + b_2u[k-2] \quad (3.37)$$

con

$$a_1 = (a_{11} + a_{22}), \quad a_2 = (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11}), \quad b_1 = b_{11}, \quad y \quad b_2 = (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{11})$$

Esta última expresión se trata de una ecuación en diferencias, la cual permite calcular el estado del sistema en el k -ésimo instante de muestreo a partir de la información del estado y la entrada en los 2 instantes anteriores. Al considerar la salida del sistema como $y[k] = c_{11}x_1[k]$ y reorganizar los términos, la Ecuación (3.37) se reescribe como

$$y[k] - a_1y[k-1] - a_2y[k-2] = c_{11}b_1u[k-1] + c_{11}b_2u[k-2] \quad (3.38)$$

lo que permite observar con mayor claridad su equivalencia con la Ecuación (3.20).

Finalmente, al calcular la transformada z de $y[k]$ se obtiene la expresión

$$\mathcal{Z}\{y[k]\} = Y(z) = \frac{c_{11}b_1z^{-1} + c_{11}b_2z^{-2}}{1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2}}U(z) = \frac{c_{11}b_1z + c_{11}b_2}{z^2 - a_1z - a_2}U(z) \quad (3.39)$$

3.1.2 Identificación de parámetros

Una actuador compuesto por un MCDIP y una transmisión mecánica presenta una dinámica que puede describirse como se analizó en la Sección 3.1. Retomando la Ecuación (3.19), si se consideran condiciones iniciales nulas, así como la ausencia de perturbaciones, su transformada de Laplace está dada por:

$$s^2J_{eff}\Theta(s) + s\beta_{eff}\Theta(s) = U(s) \quad (3.40)$$

Para una entrada escalón definida como

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ A, & t > 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad A = (k_a/R)v$$

y cuya transformada de Laplace es

$$L\{u(t)\} = \frac{A}{s}$$

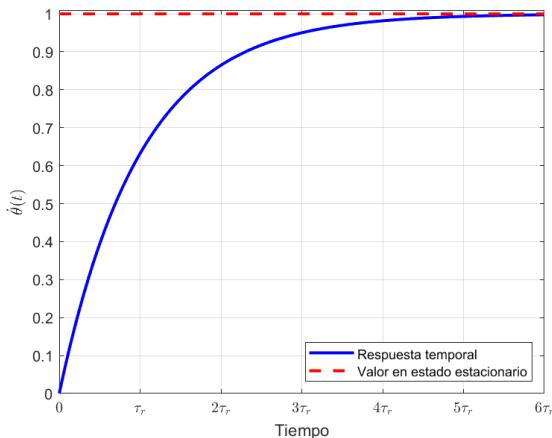
la respuesta temporal del actuador en términos de su posición angular está dada por:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/J_{eff}}{s(s + \beta_{eff}/J_{eff})} \frac{A}{s} \right\} \\ \theta(t) &= A \left[\frac{1}{\beta_{eff}} t - \frac{J_{eff}}{\beta_{eff}^2} \left(1 - e^{-\frac{\beta_{eff}}{J_{eff}}t} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

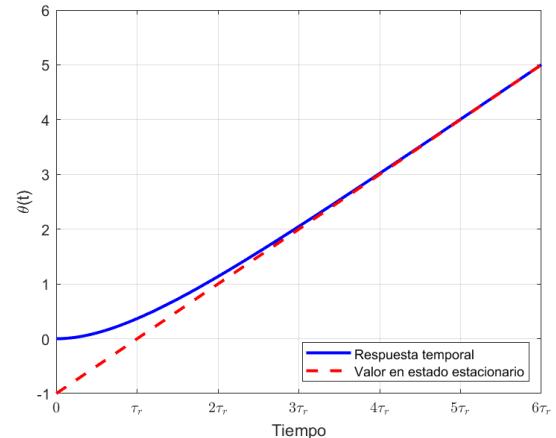
El valor en estado estacionario se obtiene calculando el límite cuando $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} A \left[\frac{1}{\beta_{eff}} t - \frac{J_{eff}}{\beta_{eff}^2} \left(1 - e^{-\frac{\beta_{eff}}{J_{eff}}t} \right) \right] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{At}{\beta_{eff}} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{AJ_{eff}}{\beta_{eff}^2} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{AJ_{eff}}{\beta_{eff}^2} e^{-\frac{\beta_{eff}}{J_{eff}}t} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{At}{\beta_{eff}} &= \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{AJ_{eff}}{\beta_{eff}^2} = \frac{AJ_{eff}}{\beta_{eff}^2}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{AJ_{eff}}{\beta_{eff}^2} e^{-\frac{\beta_{eff}}{J_{eff}}t} = 0 \\ \therefore \theta_{mss}(t) &= \frac{A}{\beta_{eff}} t - \frac{AJ_{eff}}{\beta_{eff}^2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde $\theta_{mss}(t)$ es la posición angular en estado estacionario (*Steady State*) del MCDIP. De esta expresión puede observarse que la respuesta temporal presenta un término exponencial correspondiente al estado transitorio, cuya constante de tiempo asociada es $\tau_r = \beta_{eff}/J_{eff}$. El estado estacionario se alcanza aproximadamente después de un tiempo $t = 4\tau_r$ donde $\dot{\theta}_m(4\tau_r)$ alcanza el 98% de su valor en estado estacionario. Esto puede observarse en Figura 3.5 donde se muestran las curvas de respuesta características tanto de posición como de velocidad angulares. Es importante considerar que este análisis es válido considerando que J_{eff} y β_{eff} son estrictamente positivos, lo cual corresponde con la interpretación física del sistema y, al mismo tiempo, asegura que el polo que está fuera del origen se ubique en el semiplano izquierdo del plano complejo.



(a) Respuesta en posición.



(b) Respuesta en velocidad.

Figura 3.5: Respuesta de un actuador MCDIP con transmisión mecánica.

Como puede observarse en la Figura 3.5b, la respuesta al escalón en términos de velocidad angular toma la forma de una línea recta una vez que se alcanza el estado estacionario. Esto se debe a que eventualmente el par asociado a la fuerza de fricción viscosa iguala al par electromagnético, ocasionando una rotación a velocidad constante. Con base en esto, la Ecuación (3.42) puede reescribirse como la ecuación de una recta con ordenada al origen:

$$\theta_{mss}(t) = mt + b \quad (3.43)$$

donde $m = A/\beta_{eff}$ y $b = -AJ_{eff}/\beta_{eff}^2$. Así, el procedimiento de identificación de parámetros consiste en encontrar los valores adecuados para m y b tales que, al muestrear la respuesta al escalón de un actuador físico, la diferencia entre la respuesta teórica calculada y la obtenida de forma experimental sea mínima. Posteriormente, estos valores son usados para calcular los parámetros del modelo de juntas independientes a través de las Ecuaciones

$$\beta_{eff} = A/m \quad (3.44)$$

$$J_{eff} = -\frac{b\beta_{eff}^2}{A} \quad (3.45)$$

$$A = \frac{k_a}{R}v \quad \text{con} \quad k_a = \frac{T_n}{I_n r} \quad (3.46)$$

donde R , que es la resistencia de armadura, puede medirse directamente a través de un óhmetro, mientras que la constante k_a se obtiene a partir de los datos de corriente, I_n , y par, T_n , nominales del MCDIP (datos comúnmente proporcionados por el fabricante). Es importante notar que en el cálculo se incluye el término r que debe ser considerado cuando el MCDIP cuenta con un sistema de engranajes integrado (siendo r la relación de transmisión), ya que el valor de par reportado por los fabricantes usualmente corresponde al desarrollado en el eje final, después de los engranajes.

De manera natural, este procedimiento de identificación de parámetros puede abordarse como un problema de minimización a través del siguiente planteamiento:

Sea $\bar{\theta}_m(t)$ la respuesta al escalón en posición angular de un MCDIP en tiempo continuo, y sea

$$\bar{\theta}_m[k] = \bar{\theta}_m(kT_s), \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, \dots, K$$

su versión en tiempo discreto donde T_s es el periodo de muestreo. Entonces, para cada par coordenado $(kT_s, \bar{\theta}_m[k])$ obtenido experimentalmente, y dados los parámetros m y b , corresponde un error respecto a la respuesta teórica dado por

$$e(m, b) = \bar{\theta}_m[k] - (m(kT_s) + b)$$

Al considerar esta expresión para los $K + 1$ puntos muestreados y elevar al cuadrado para eliminar los valores negativos, la expresión toma la forma de una función de costo que representa el error de aproximación global de la respuesta teórica a la respuesta real:

$$E(m, b) = \sum_{k=0}^K (\bar{\theta}_m[k] - mkT_s - b)^2 \quad (3.47)$$

así, el objetivo del proceso de identificación de parámetros queda acotado a encontrar los valores de m y b que minimizan la función de costo. La existencia y unicidad de la solución para este

problema puede demostrarse al verificar que $E(m, b)$ posee un mínimo y, además, es convexa. Para esto, en primera instancia se asume que el mínimo se ubica en el punto crítico del dominio (m^*, b^*) , el cual satisface

$$\nabla E(m, b)|_{m^*, b^*} = 0 \quad (3.48)$$

desarrollando el gradiente se tiene

$$\nabla E(m, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial m} \\ \frac{\partial E}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^K -2kT_s(\bar{\theta}_m[k] - mkT_s - b) \\ \sum_{k=0}^K -2(\bar{\theta}_m[k] - mkT_s - b) \end{bmatrix}$$

Al evaluar la expresión anterior en (m^*, b^*) se plantea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} -2Ts [(\bar{\theta}_m[1] - m^*T_s - b^*) + 2(\bar{\theta}_m[2] - 2m^*T_s - b^*) + \cdots + K(\bar{\theta}_m[K] - Km^*T_s - b^*)] &= 0 \\ -2 [(\bar{\theta}_m[0] - b^*) + (\bar{\theta}_m[1] - m^*T_s - b^*) + \cdots + (\bar{\theta}_m[K] - Km^*T_s - b^*)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Definiendo

$$v = [(\bar{\theta}_m[0] - b^*) \quad (\bar{\theta}_m[1] - m^*T_s - b^*) \quad (\bar{\theta}_m[2] - 2m^*T_s - b^*) \quad \cdots \quad (\bar{\theta}_m[K] - Km^*T_s - b^*)]$$

el sistema de ecuaciones puede reescribirse como

$$\begin{aligned} -2Ts v [0 \ 1 \ 2 \ \cdots \ K]^T &= 0 \\ -2v [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T &= 0 \end{aligned}$$

Al combinar linealmente las dos ecuaciones se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} c_1 v [0 \ 1 \ 2 \ \cdots \ K]^T + c_2 v [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T &= 0, \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ c_1 [0 \ 1 \ 2 \ \cdots \ K]^T &= c_2 [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T \end{aligned}$$

Evaluando esta expresión en cada componente, la igualdad se satisface si

$$c_2 = 0, \quad c_1 = c_2, \quad 2c_1 = c_2, \quad \cdots$$

Esto se cumple si y solo si $c_1 = c_2 = 0$, por lo tanto, las ecuaciones son linealmente independientes, lo cual implica que existe al menos una solución para el sistema planteado por (3.48).

Por otro lado, la convexidad se verifica usando el criterio de la matriz Hessiana, la cual está definida como

$$H(m, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial m^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial m \partial b} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial b \partial m} & \frac{\partial^2 E}{\partial b^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^K 2k^2 T_s^2 & \sum_{k=0}^K 2k T_s \\ \sum_{k=0}^K 2k T_s & \sum_{k=0}^K 2 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

El primer menor principal de $H(m, b)$ es

$$M_1 = \left| \sum_{k=0}^K 2k^2 T_s^2 \right| = \sum_{k=0}^K 2k^2 T_s^2$$

mientras que el segundo menor principal esta dado por

$$M_2 = |H(m, b)| = 4T_s^2(K + 1) \left(\sum_{n=0}^K k^2 \right) - 4T_s^2 \left(\sum_{k=0}^K k \right)^2$$

sustituyendo las identidades

$$\sum_{k=0}^K k = \frac{K(K + 1)}{2} \quad y \quad \sum_{k=0}^K k^2 = \frac{K(K + 1)(2K + 1)}{6}$$

se tiene

$$M_1 = T_s^2 \left[\frac{K(K + 1)(2K + 1)}{3} \right]$$

$$M_2 = T_s^2 \left[\frac{K(K + 1)^2(K + 2)}{3} \right]$$

Así, para $K > 0$, ambos menores principales son positivos y constantes, por lo que la matriz $H(m, b)$ es definida positiva para todo par (m, b) , incluido el punto crítico. En consecuencia, la función $E(m, b)$ es estrictamente convexa y puede concluirse que el punto crítico (m^*, b^*) es el mínimo global.

Del análisis anterior puede entenderse que la solución analítica de la Ecuación (3.48) existe, es única y representa un mínimo global. No obstante, su cálculo implica desarrollar una importante cantidad de sumas relacionada directamente con el número de muestras que se obtengan. Por ello, la utilización de un método numérico para aproximarse a la solución analítica es una alternativa viable, tomando en cuenta que, por la naturaleza del problema, no existe el riesgo de estancarse en un mínimo local. Además, la convergencia hacia la solución analítica está prácticamente garantizada siempre que se realice un ajuste adecuado de los parámetros del método numérico.

3.1.3 Análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad

3.1.3.1 Estabilidad interna y estabilidad BIBO

Si la Ecuación (3.19) se escribe en términos de la velocidad angular (representada con $\omega_m = \dot{\theta}_m$), se obtiene la expresión

$$J_{eff}\dot{\omega}_m + \beta_{eff}\omega_m = u \tag{3.51}$$

su función de transferencia correspondiente está dada por

$$\frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1/J_{eff}}{s + \beta_{eff}/J_{eff}} \tag{3.52}$$

la cual posee un único polo ($p = -\beta/J$) que está ubicado en el semiplano izquierdo del plano complejo. Esto siempre y cuando $J_{eff}, \beta_{eff} > 0$, lo que coincide con la interpretación física de estos parámetros. En consecuencia, el sistema es asintóticamente estable en términos de velocidad, por lo que, para cualquier condición inicial, la respuesta natural del sistema (sin excitación externa)

converge al punto de equilibrio $\bar{\omega}_m$, el cual se calcula igualando a 0 la Ecuación (3.51) y resolviendo para ω_m :

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_m &= \frac{-\beta_{eff}}{J_{eff}}\bar{\omega}_m = 0 \\ \bar{\omega}_m &= 0\end{aligned}$$

Asimismo, la estabilidad asintótica implica estabilidad Entrada Acotada - Salida Acotada (BIBO, del término en inglés *Bounded Input - Bounded Output*), lo que significa que para cualquier entrada con amplitud finita ($|u| < \epsilon$, con $\epsilon \in \mathbb{R}^+$) el sistema alcanza su estado estacionario, en el que desarrolla una velocidad constante, es decir:

$$\left| \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_m \right| < \delta, \text{ con } \delta \in \mathbb{R}^+$$

No obstante, el análisis en términos de posición angular incorpora un integrador que se traduce como un polo simple en el origen del plano complejo. En consecuencia, el sistema se vuelve marginalmente estable o estable en el sentido de Lyapunov. Además, se pierde la estabilidad BIBO. De esta manera, en ausencia de excitaciones externas, cualquier condición inicial ocasiona el desarrollo de una trayectoria acotada, pero que no converge al origen del espacio de estado. Esto puede verificarse al analizar la representación en espacio de estado de la Ecuación (3.19):

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \ddot{\theta}_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\beta_{eff}/J_{eff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_{eff} \end{bmatrix} u \\ \theta &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} \theta_m \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix} + [0] u\end{aligned}\tag{3.53}$$

donde la correspondencia con las matrices A , B , C y D y el vector de estados, x , de una representación en espacio de estado general está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\beta_{eff}/J_{eff} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_{eff} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad D = [0], \quad x = \begin{bmatrix} \theta_m \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix}$$

Así, al obtener el polinomio característico de la matriz A

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + \frac{\beta_{eff}}{J_{eff}}\lambda = \lambda \left(\lambda + \frac{\beta_{eff}}{J_{eff}} \right) = 0$$

se observa que sus valores propios son

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{\beta_{eff}}{J_{eff}}$$

Finalmente, como el polinomio mínimo coincide con el polinomio característico, se verifica que el sistema es marginalmente estable. La Figura 3.6 muestra el diagrama de fase correspondiente, donde puede observarse que todas las trayectorias tienden en dirección al eje horizontal, en el cual se encuentran todos los estados $[\theta_m \ \omega_m]^T$ en los que $\omega_m = 0$.

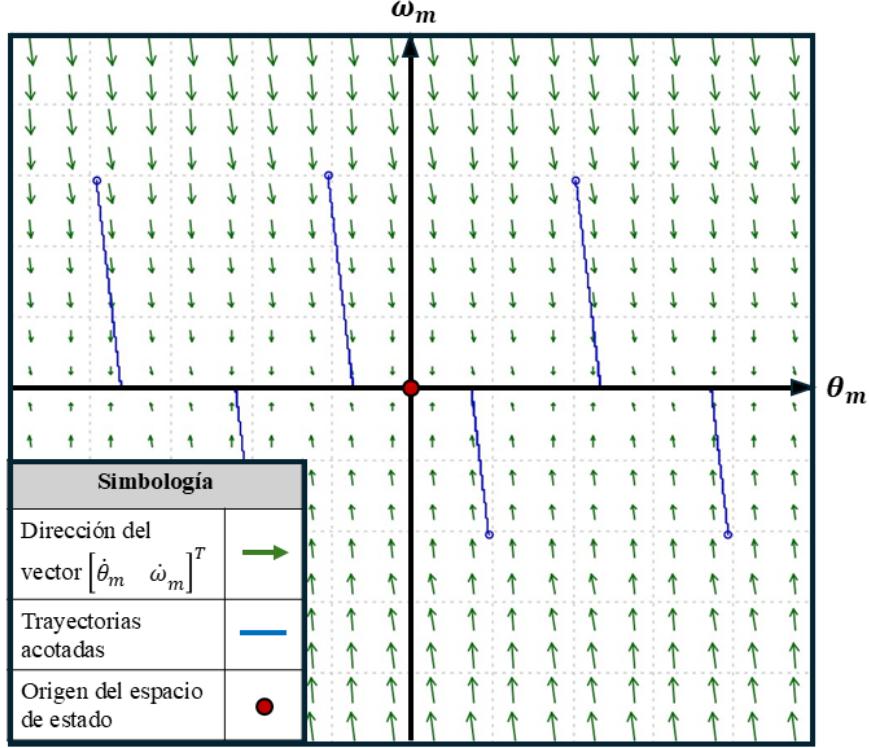


Figura 3.6: Diagrama de fase asociado al modelo dinámico de la plataforma de 1 GDL.

3.1.3.2 Controlabilidad y Observabilidad

La controlabilidad del modelo de juntas independientes se evalúa a través de la representación en espacio de estado mostrada en la Ecuación (3.53). Para esto, se construye la matriz de controlabilidad, \mathcal{C} , a partir de las matrices A y B , obteniendo

$$\mathcal{C} = [B \mid AB]$$

$$\mathcal{C} = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eff}} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta_{eff}}{J_{eff}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eff}} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_{eff}} \\ \frac{1}{J_{eff}} & -\frac{\beta_{eff}}{J_{eff}^2} \end{bmatrix}$$

su determinante está dado por

$$|\mathcal{C}| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{J_{eff}} \\ \frac{1}{J_{eff}} & -\frac{\beta_{eff}}{J_{eff}^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{J_{eff}^2} \neq 0 \quad \forall J_{eff}, \beta_{eff}$$

por lo tanto, el rango de la matriz de controlabilidad es igual al número de variables de estado y puede concluirse que el sistema es de estado completamente controlable.

De forma similar, se construye la matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \hline [1 & 0] & \left[\begin{array}{cc} 0 & -\frac{\beta_{eff}}{J_{eff}} \end{array} \right] & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Nuevamente, el rango es completo debido a que $|\mathcal{O}| \neq 0 \quad \forall J_{eff}, \beta_{eff}$, por lo tanto, el sistema es de estado completamente observable.

3.1.4 Plataforma de pruebas

El enfoque de este trabajo se encuentra dirigido para aplicaciones de seguimiento solar en SS de dos ejes, sin embargo, el procedimiento de modelado y caracterización abordado hasta este punto se encuentra limitado para un sistema de un solo GDL. Esto es posible gracias a que, como se demostró en la Sección 3.1, el tipo de actuadores y mecanismos involucrados en el movimiento de cada una de las juntas de un SS, así como las características propias de su aplicación, permiten desarrollar un análisis de forma individual mediante un esquema de juntas independientes sin comprometer la fiabilidad de los resultados. Por ello, en esta sección se describen las características de una plataforma de pruebas experimental de 1 GDL diseñada con el objetivo de proporcionar resultados experimentales, tanto para la metodología de identificación de parámetros (presentada en la Sección 3.1.2), como para la verificación de estrategias de control de seguimiento de trayectoria. En este sentido, la Figura 3.7 muestra una fotografía de la plataforma de pruebas construida, mientras que la Figura 3.8, presenta un diagrama de los dispositivos que la integran, así como la forma en que se interconectan. Cuenta con un actuador de tipo MCDIP, el cual posee internamente un sistema de engranajes para la reducción de velocidad. Dicho actuador se encuentra acoplado con una transmisión mecánica, la cual, además de contribuir a la reducción de velocidad, incorpora un mecanismo de tornillo sínfin-corona que se comporta como un sistema de autobloqueo. Las especificaciones tanto del actuador como de la transmisión mecánica pueden observarse en la Tabla 3.1. Para medir la posición de junta (posición angular del eje de salida de la transmisión mecánica) también se incluye un *encoder* con las características mostradas en la Tabla 3.2.

Tabla 3.1: Especificaciones del actuador y la transmisión mecánica en plataforma de 1 GDL.

Parámetro	Actuador	Transmisión mecánica
Tipo	MCDIP	Tornillo sínfin - corona
Modelo	MTGP-P20-1J026	WGA-63M-100-H1
Relación de transmisión	69 : 1	100 : 1
Par nominal	31.63 Nm	112.08 Nm
Velocidad nominal	26 RPM	–
Corriente nominal	12 A	–
Voltaje nominal	12 VCD	–
Potencia nominal	1/8 HP	0.51 HP

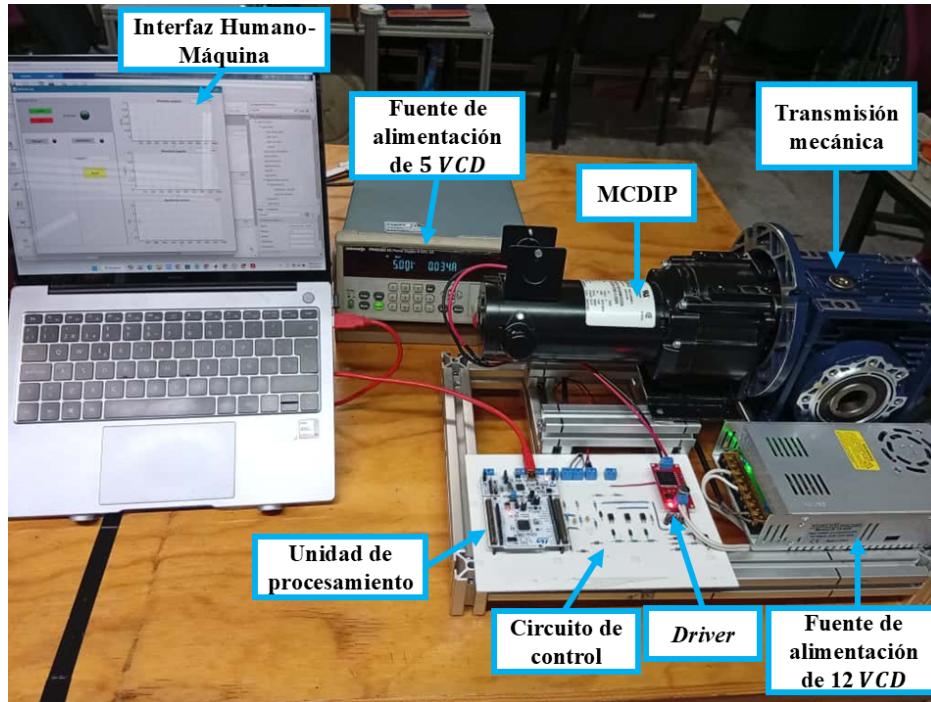


Figura 3.7: Fotografía de la plataforma de pruebas de 1 GDL

Tabla 3.2: Especificaciones del *encoder* en plataforma de 1 GDL.

Parámetro	Valor
Modelo	TRD-N5000-RZWD
Tipo	Incremental (cuadratura)
Pulsos por revolución	5000
Voltaje de operación	5 – 30 VCD

Según las indicaciones del fabricante, el MCDIP seleccionado como actuador tiene la capacidad para operar con velocidad variable a través de una Modulación por Ancho de Pulso (PWM, del término en inglés *Pulse Width Modulation*). Por ello, se establece un lazo de control simple retroalimentado a través de un circuito electrónico. Como unidad de procesamiento se cuenta con una tarjeta de desarrollo NUCLEO-64 F446RE; el *driver* es un módulo VNH2SP30 que tiene un sensor de corriente integrado; como optoacoplador se tiene el PC817; y, finalmente, los dispositivos de acondicionamiento se conforman por divisores de tensión, Filtros Pasa Bajas (FPB) con diferentes frecuencias de corte y, en el caso de la medición de voltaje, un diodo supresor de voltaje transitorio (TVS, del término en inglés *Transient Voltage Suppression*). El diagrama esquemático del circuito electrónico de control puede observarse en el Apéndice A.

Los parámetros del modelo de juntas independientes correspondiente a la plataforma se obtienen siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 3.1.2, es decir, mediante un análisis de su respuesta al escalón. Esta prueba fue llevada a cabo de forma experimental en 10 ocasiones con el objetivo de calcular valores promedio para los parámetros J_{eff} y β_{eff} . Los resultados obtenidos para estos parámetros se observan en la Tabla 3.3, mientras que en la Tabla 3.4 se enlistan todos los parámetros involucrados en el modelo dinámico. Finalmente, la comparación entre la respuesta

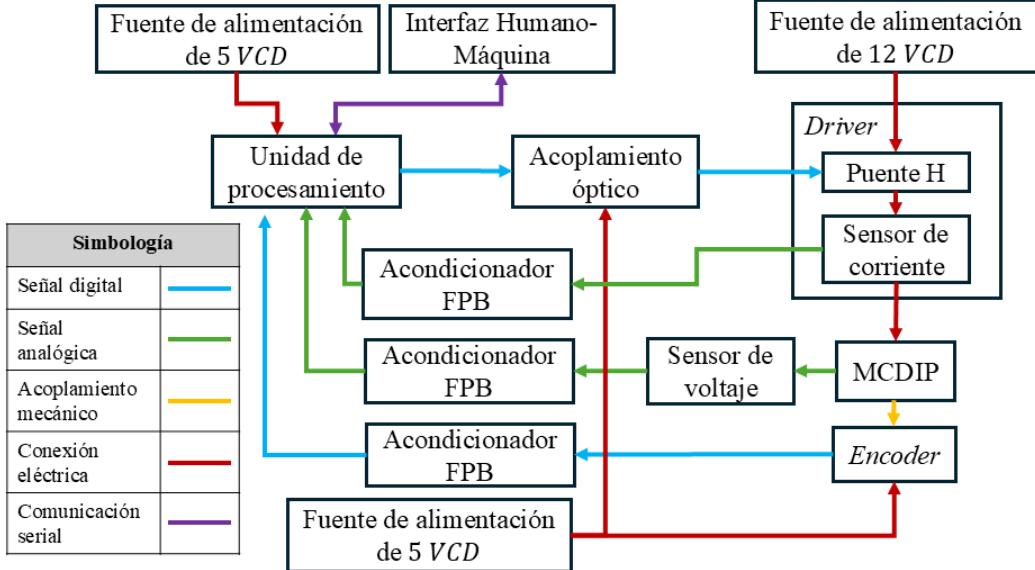


Figura 3.8: Diagrama de plataforma de 1 GDL.

teórica, obtenida después del proceso de identificación de parámetros, y la respuesta experimental de la plataforma se observan en la Figura 3.9.

Tabla 3.3: Resultados de identificación de parámetros en plataforma de 1 GDL.

Experimento	J_{eff}	β_{eff}
1	4.5669×10^{-4}	38.8774×10^{-4}
2	3.7353×10^{-4}	39.6305×10^{-4}
3	10.5649×10^{-4}	39.5874×10^{-4}
4	7.5772×10^{-4}	38.8622×10^{-4}
5	5.7582×10^{-4}	37.9993×10^{-4}
6	2.3592×10^{-4}	38.0623×10^{-4}
7	7.3108×10^{-4}	36.9814×10^{-4}
8	1.7367×10^{-4}	38.8702×10^{-4}
9	6.5331×10^{-4}	38.2023×10^{-4}
10	1.1377×10^{-4}	39.6009×10^{-4}
Promedio	5.1279×10^{-4}	38.6673×10^{-4}

Tabla 3.4: Parámetros del modelo dinámico para plataforma de 1 GDL.

Parámetro	Valor
J_{eff}	5.1279×10^{-4}
β_{eff}	38.6673×10^{-4}
R	0.6454
k_a	0.0382

Al sustituir los valores de la Tabla 3.4 en la Ecuación (3.19) y calcular las matrices de su

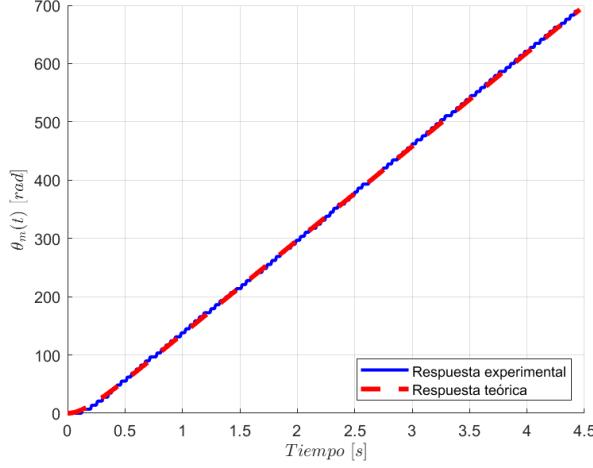


Figura 3.9: Muestreo de la respuesta al escalón y resultado de aproximación con modelo dinámico para plataforma de 1 GDL.

representación en espacio de estado, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \ddot{\theta}_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7.5406 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \dot{\theta}_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1385.0839 \end{bmatrix} u(t) \\ q(t) &= [0.0083 \ 0] \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \dot{\theta}_m(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.54)$$

para la cual es importante notar que el coeficiente que multiplica a θ_m en la matriz de salida representa la relación de transmisión entre el rotor del MCDIP y el eje de salida de la transmisión mecánica, así como la conversión de radianes a grados, es decir, $\frac{180}{\pi r} = \frac{180}{\pi(69)(100)} = 0.0083$.

El modelo equivalente en tiempo discreto se obtiene siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 3.1.1, dando como resultado

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_m[k+1] \\ \dot{\theta}_m[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1325 \\ 0 & 0.00053 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m[k] \\ \dot{\theta}_m[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 159.3377 \\ 183.5866 \end{bmatrix} u[k] \\ q[k] &= [0.0083 \ 0] \begin{bmatrix} \theta_m[k] \\ \dot{\theta}_m[k] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.55)$$

para un tiempo de muestreo $T_s = 1 \text{ s}$. En este mismo sentido, la ecuación en diferencias correspondiente, así como su transformada z , están dadas respectivamente por

$$q[k] - (1.0005)q[k-1] + (5.3109 \times 10^{-4})q[k-2] = (1.3230)u[k-1] + (0.2013)u[k-2] \quad (3.56)$$

y

$$\mathcal{Z}\{q[k]\} = Q(z) = \frac{(1.3230)z + (0.2013)}{z^2 - (1.0005)z + (5.3109 \times 10^{-4})} U(z) \quad (3.57)$$

Capítulo 4

Resultados y análisis

4.1 Simulación de controladores

La Figura 4.1 muestra el diseño de un SS de dos ejes, cada uno de los cuales cuenta con un MCDIP y una transmisión mecánica idénticos a los que integran la plataforma de pruebas descrita en la Sección 3.1.4. Por ello, al considerar un esquema de juntas independientes, puede evaluarse el seguimiento de la trayectoria solar de manera individual para cada una de sus componentes (acimutal y elevación). Para más detalle respecto al diseño consultar [43]. En este sentido, la dinámica que presenta cada uno de los ejes de este SS queda descrita a través de la Ecuación 3.55. La disponibilidad de este modelo dinámico permite el diseño, prueba y validación de controladores para ejecutar la tarea de seguimiento, así, en esta sección se presenta el planteamiento de los controladores *On-Off*, PID y MPC considerando la configuración descrita a continuación:

La trayectoria de referencia se obtiene siguiendo el Algoritmo 1 y considerando los siguientes parámetros:

- **Latitud** 40.48° .
- **Longitud:** -3.68° .
- **Día del año:** 93 (3 de abril).
- **Hora del mediodía solar:** 12:00.

Algoritmo 1: Cálculo de trayectoria solar

Require: Tiempo t , eje $axis$

Ensure: Ángulo de elevación (si $axis = 0$) o acimutal (si $axis = 1$)

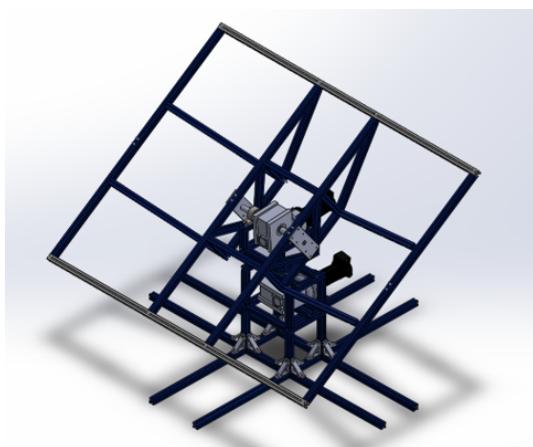
1: $N = 93$

% Número de día

```

2:  $\lambda = 40.48 \cdot \frac{\pi}{180}$  % Latitud
3:  $L = -3.68 \cdot \frac{\pi}{180}$  % Longitud
4:  $sn = 12$  % Mediodía solar
5:  $\delta = 23.45 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{284+N}{365}\right)$  % Declinación
6:  $\tau_\omega = (sn - t) \cdot 15 \cdot \frac{\pi}{180}$  % Ángulo horario
7:  $\sinh1 = \cos(\lambda) \cos(\delta) \cos(\tau_\omega) + \sin(\lambda) \sin(\delta)$ 
8:  $h = \arcsin(\sinh1)$  % Elevación
9:  $\cosz1 = \frac{\sin(h) \sin(\lambda) - \sin(\delta)}{\cos(h) \cos(\lambda)}$ 
10:  $z = \arccos(\cosz1)$  % Acimutal
11: if  $t > sn$  then
12:    $z = -z$ 
13: end if
14: if  $axis = 0$  then
15:   return  $h$  % Devolver elevación
16: else if  $axis = 1$  then
17:   return  $z$  % Devolver acimutal
18: end if

```



(a) Vista isométrica.



(b) Vista lateral.

Figura 4.1: Diseño de un SS de dos ejes.

Todos los controladores operan con un tiempo de muestreo $T_s = 1s$, además, para cada caso, sus parámetros de sintonización son los que se muestran en la Tabla 4.1. Cabe mencionar que la sintonización del control *On-Off* fue realizada de forma heurística, por ello, en dicha Tabla se muestran la primera y última configuración utilizada para este controlador. Por otro lado las ganancias del controlador PID fueron seleccionadas tal que su función de transferencia está dada por la expresión

$$G_{PID} = \frac{1.4z^2 - z + 0.1}{z^2 - z} \quad (4.1)$$

lo cual, a su vez, ocasiona que al considerar la función de transferencia del sistema, G_{OL} , dada por

la Ecuación (3.57), la función de transferencia en lazo cerrado está dada por

$$G_{CL} = \frac{G_{PID}(z)G_{OL}(z)}{1 + G_{PID}(z)G_{OL}(z)} = \frac{1.852z^3 - 1.041z^2 - 0.06905z + 0.02014}{z^4 - 0.1482z^3 - 0.04014z^2 - 0.06958z + 0.02014} \quad (4.2)$$

cuyos polos son:

$$p_{1,2} = -0.2549 \pm 0.3515i \quad p_3 = 0.3667 \quad y \quad p_4 = 0.2913$$

los cuales satisfacen $|p_j| < 1$ con $j = 1, 2, 3, 4$, es decir, todos se encuentran dentro del círculo unitario y por lo tanto, el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable. Además, al evaluar su respuesta ante una señal de prueba de tipo rampa con tasa de cambio de $0.004^\circ/s$ (similar a la de la posición del Sol en el cielo: $0.25^\circ/min$) se observa un error en estado estable que tiende a 0, así como pequeñas oscilaciones que desaparecen sin ocasionar un sobretiro (ver Figura 4.2).

Por su parte, en el controlador MPC los horizontes de control y predicción se seleccionan tomando en cuenta criterios asociados al tiempo de cómputo de la secuencia de control cuya longitud es N_c , de forma que la diferencia de duración entre ambos horizontes pueda usarse para realizar los cálculos necesarios de la secuencia de control siguiente. Esto con el objetivo de permitir la integración de métodos numéricos para el desarrollo de la etapa de optimización. Lo anterior sin comprometer el tiempo de respuesta del controlador.

Tabla 4.1: Parámetros de sintonización de los controladores.

Controlador	Parámetros de sintonización
On-Off Prueba 1	$E_{st} = 0.5^\circ$ $u_{OO} = 1$
On-Off Prueba 2	$E_{st} = 0.5^\circ$ $ u_{OO} = 0.3$
PID	$k_p = 1.05$ $k_i = 0.5$ $k_d = 0.1$
MPC	$N_h = 10$ $N_c = 5$

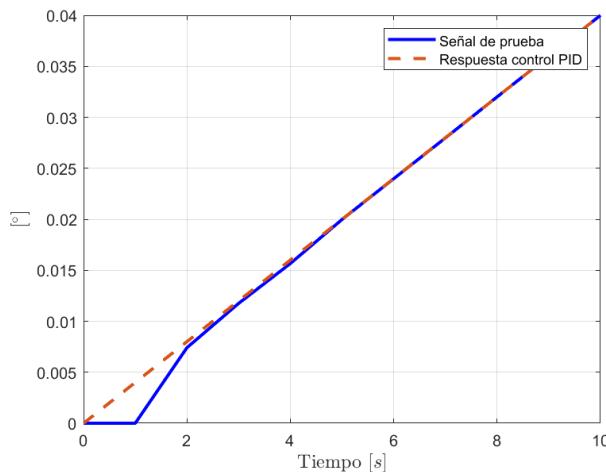


Figura 4.2: Respuesta a la rampa del controlador PID.

El desempeño de cada controlador se evalúa mediante los siguientes índices calculados en términos del error de seguimiento de trayectoria y del esfuerzo de control:

- Error cuadrático medio (MSE, del término en inglés *Mean Squared Error*)

$$MSE = \frac{\sum_{k=0}^K (e_{st}[k])^2}{K + 1} \quad (4.3)$$

- Error absoluto medio (MAE, del término en inglés *Mean Absolute Error*)

$$MAE = \frac{\sum_{k=0}^K |e_{st}[k]|}{K + 1} \quad (4.4)$$

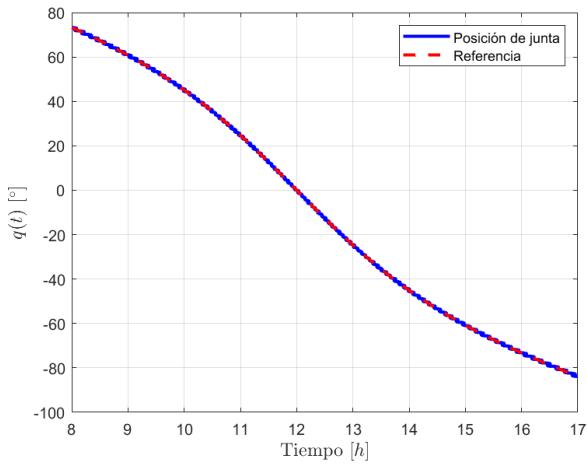
- Esfuerzo de Control Total (ECT)

$$ECT = \sum_{k=0}^K |u[k]| \quad (4.5)$$

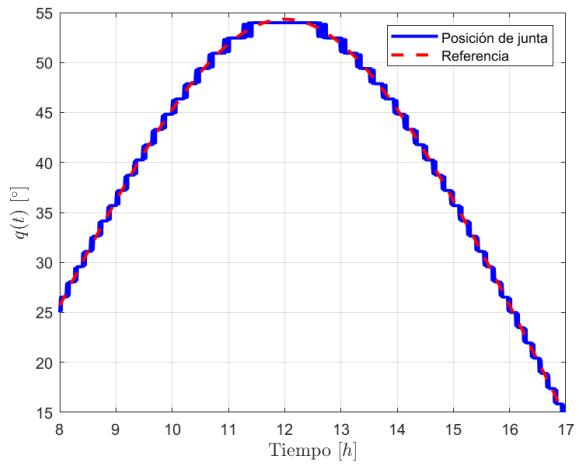
La Tabla 4.2 presenta los resultados numéricos obtenidos en simulación para cada controlador. De forma similar, las Figuras 4.3 a 4.6 presentan las gráficas asociadas a estos resultados. El código de **MATLAB 2024®** empleado para realizar esta simulación puede encontrarse en el [repositorio](#). A partir de esta información puede apreciarse que, en términos de error de seguimiento, el controlador PID tienen un desempeño excelente; mientras que para el controlador *On-Off* la mala sintonización seleccionada en la primera prueba ocasiona una respuesta que, si bien es estable, es muy agresiva y presenta fuertes oscilaciones, lo cual se refleja en un valor muy elevado del índice ECT, el cual está directamente asociado con el consumo energético; finalmente, el controlador MPC presenta en todos los casos el menor valor de ECT, aunque al mismo tiempo también cuenta con el mayor error de seguimiento en lo general.

Tabla 4.2: Resultados numéricos de simulación.

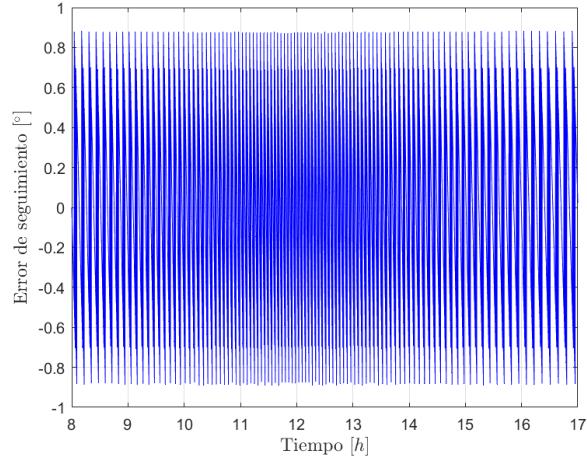
Controlador	MSE [°]		MAE [°]		ECT	
	Acimutal	Elevación	Acimutal	Elevación	Acimutal	Elevación
On-Off Prueba 1	0.1338	0.1276	0.3115	0.3043	83490	75910
On-Off Prueba 2	0.0230	0.0219	0.1262	0.1223	1029	453
PID	2.12×10^{-10}	1.99×10^{-10}	4.60×10^{-7}	3.71×10^{-7}	1029.9	448.65
MPC	2.7448	0.5637	1.5850	0.6906	1023.7	446.0343



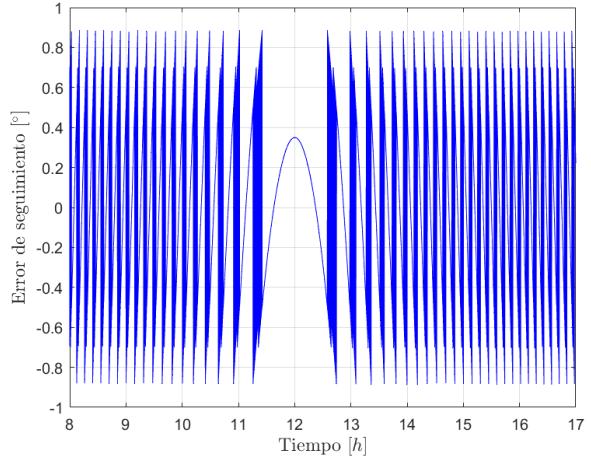
(a) Posición de junta. Eje acimutal.



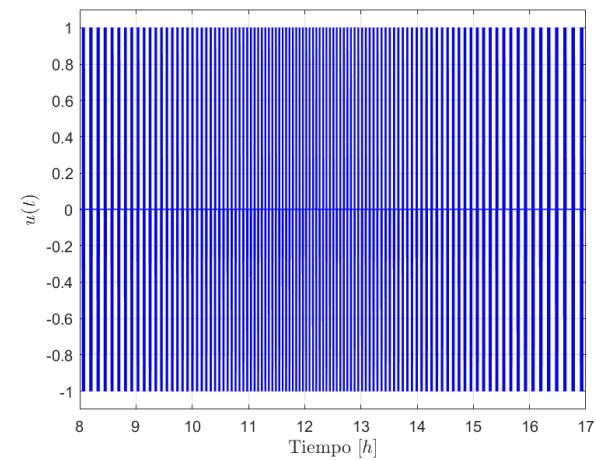
(b) Posición de junta. Eje de elevación.



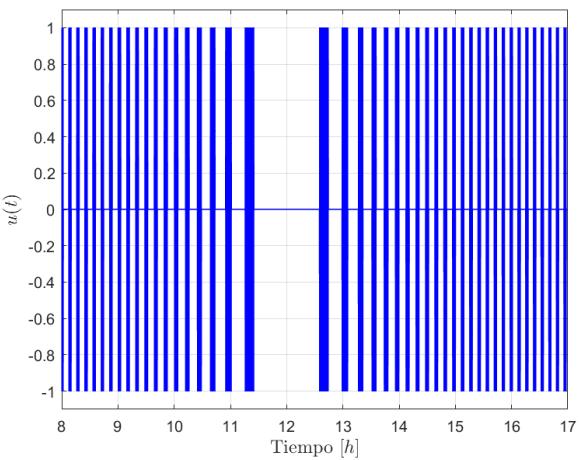
(c) Error de seguimiento. Eje acimutal.



(d) Error de seguimiento. Eje de elevación.

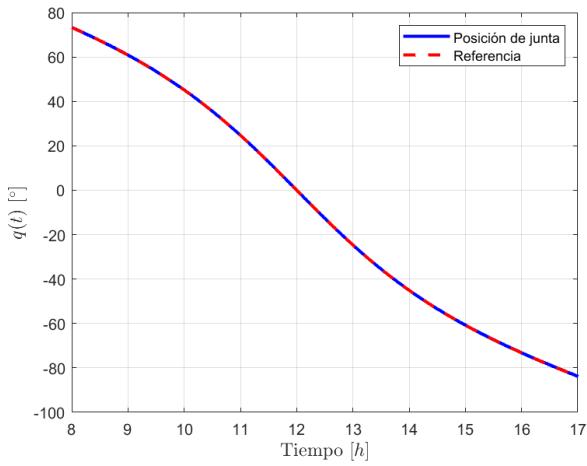


(e) Señal de control. Eje acimutal.

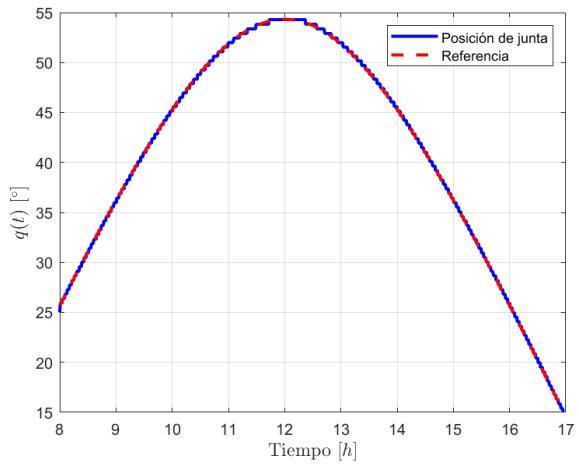


(f) Señal de control. Eje de elevación.

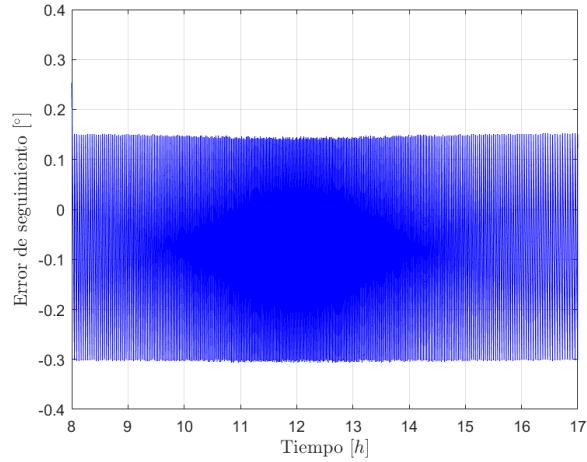
Figura 4.3: Simulación de seguimiento de trayectoria con controlador *On-Off*. Prueba 1.



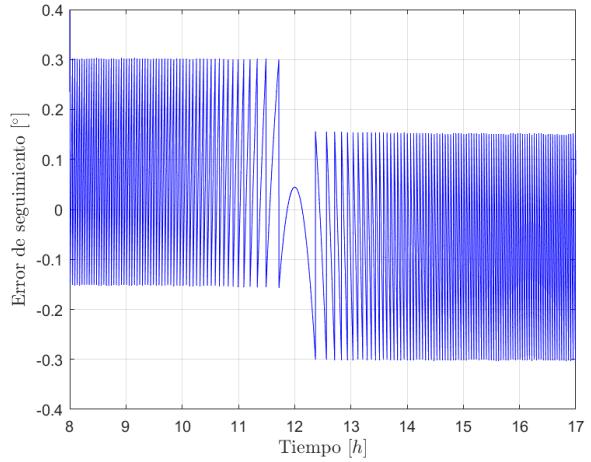
(a) Posición de junta. Eje acimutal.



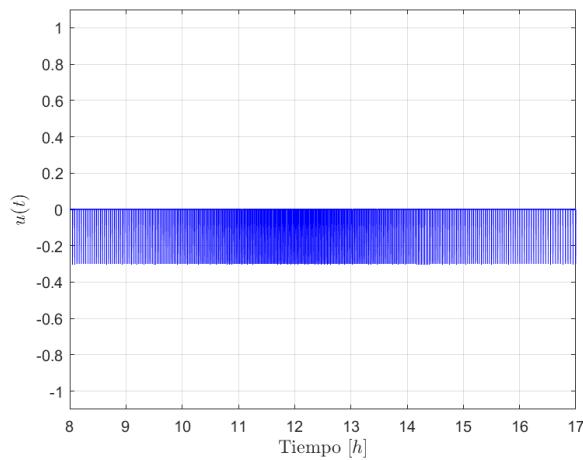
(b) Posición de junta. Eje de elevación.



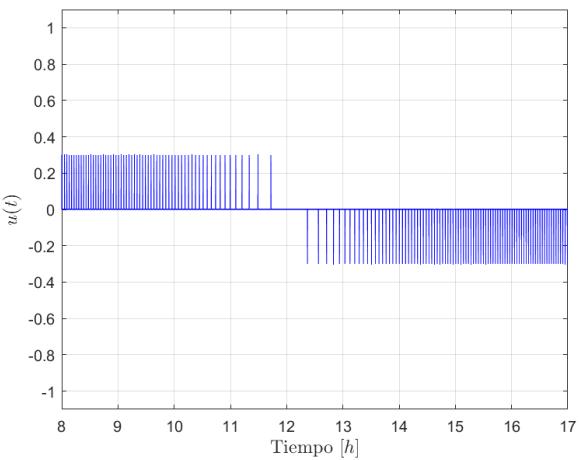
(c) Error de seguimiento. Eje acimutal.



(d) Error de seguimiento. Eje de elevación.

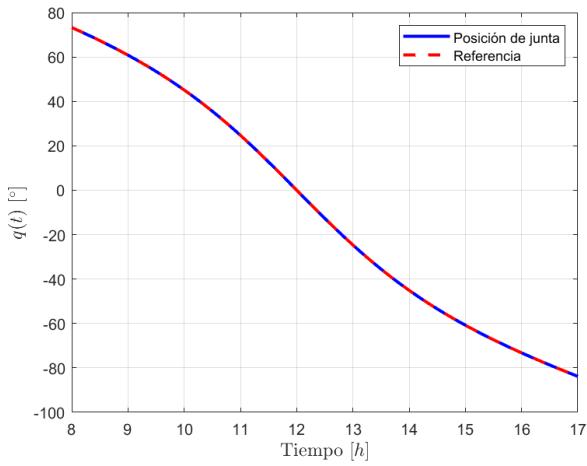


(e) Señal de control. Eje acimutal.

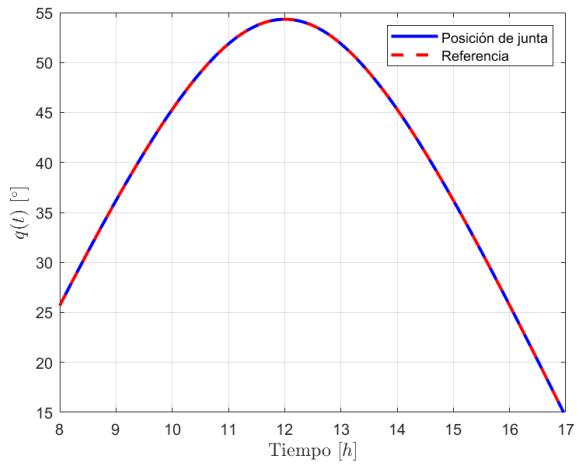


(f) Señal de control. Eje de elevación.

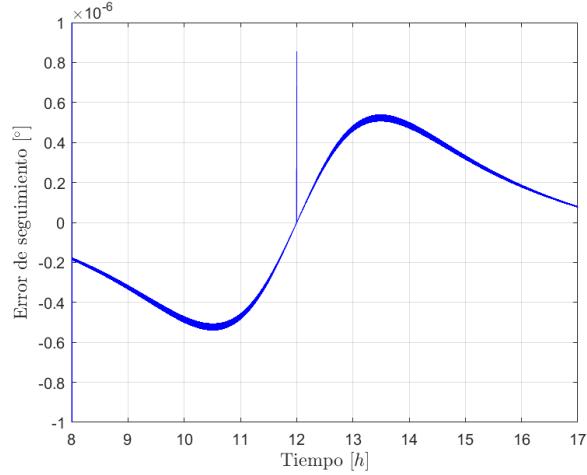
Figura 4.4: Simulación de seguimiento de trayectoria con controlador *On-Off*. Prueba 2.



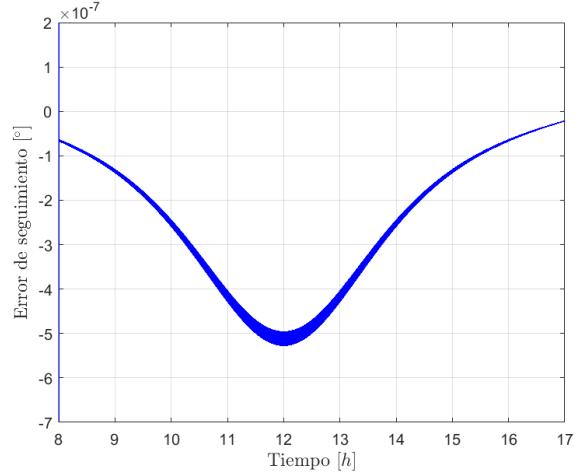
(a) Posición de junta. Eje acimutal.



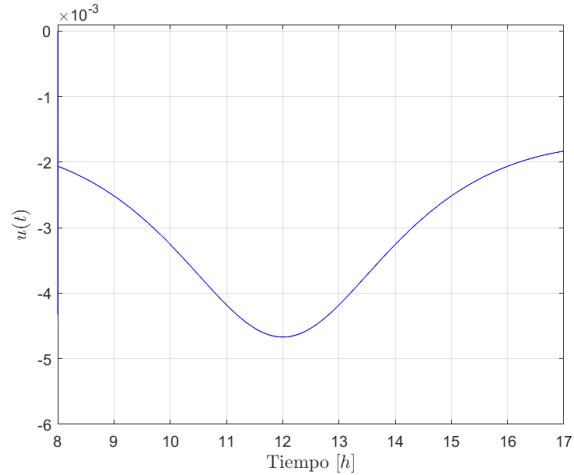
(b) Posición de junta. Eje de elevación.



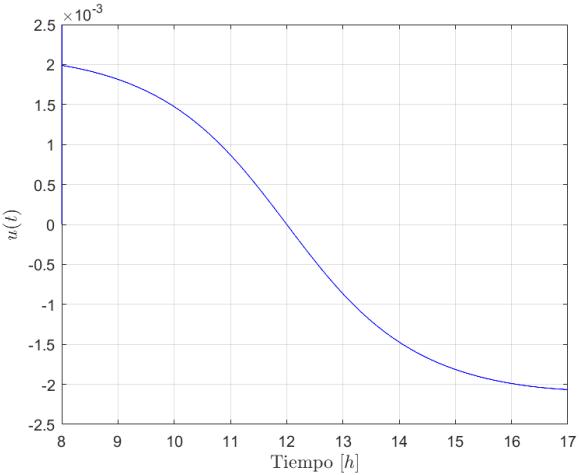
(c) Error de seguimiento. Eje acimutal.



(d) Error de seguimiento. Eje de elevación.

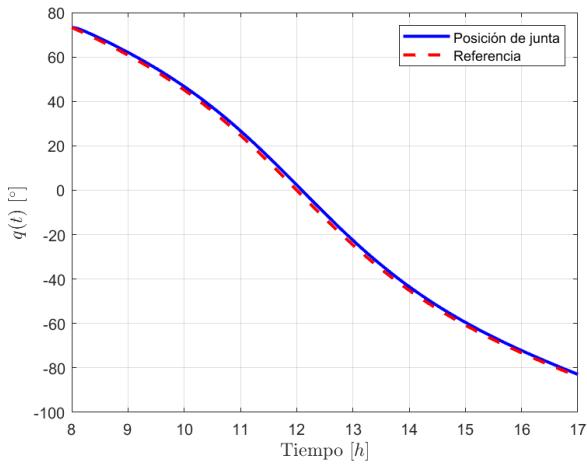


(e) Señal de control. Eje acimutal.

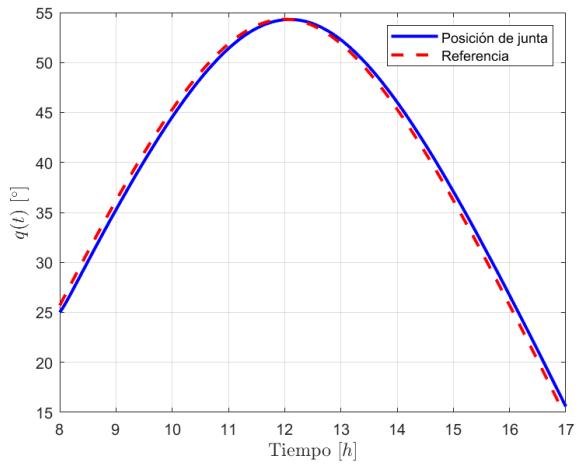


(f) Señal de control. Eje de elevación.

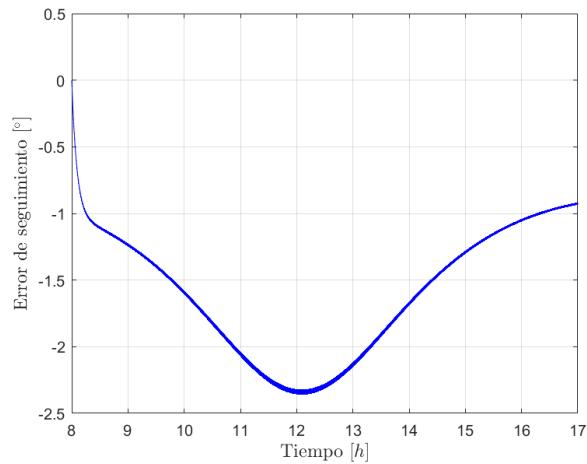
Figura 4.5: Simulación de seguimiento de trayectoria con controlador PID.



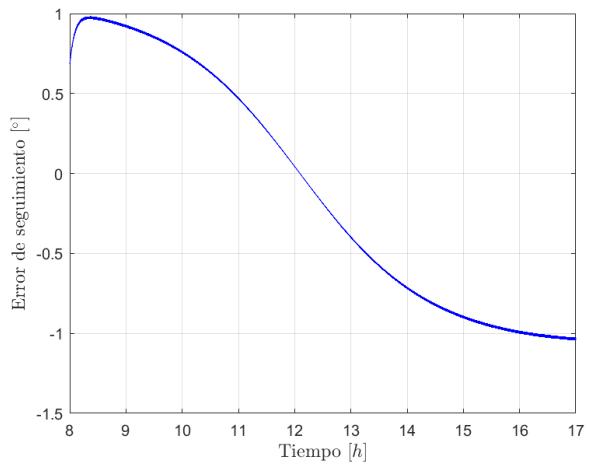
(a) Posición de junta. Eje acimutal.



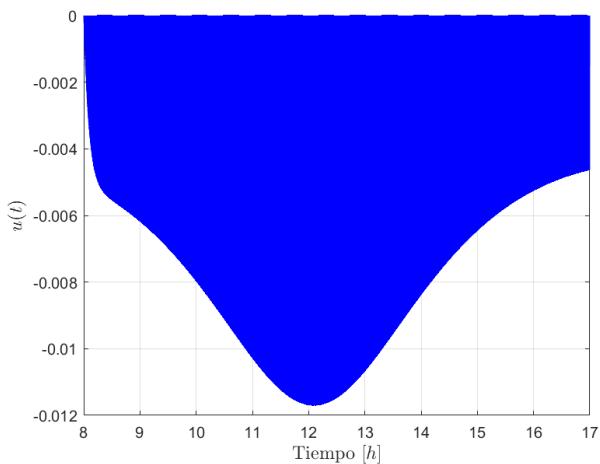
(b) Posición de junta. Eje de elevación.



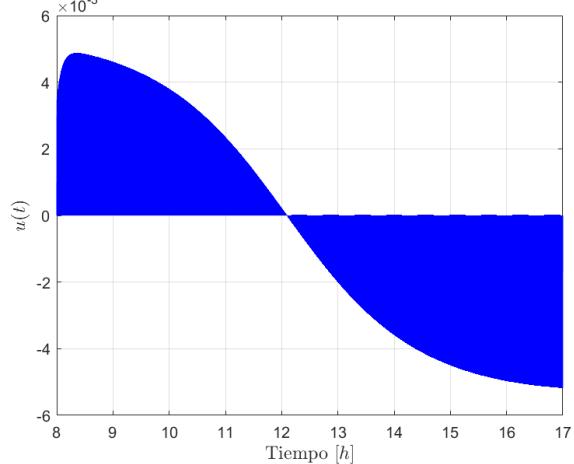
(c) Error de seguimiento. Eje acimutal.



(d) Error de seguimiento. Eje de elevación.



(e) Señal de control. Eje acimutal.



(f) Señal de control. Eje de elevación.

Figura 4.6: Simulación de seguimiento de trayectoria con controlador MPC.

4.2 Experimentación en plataforma de pruebas

La configuración experimental descrita para evaluar el desempeño de los controladores en entorno de simulación se preserva fundamentalmente para la realización de las pruebas en la plataforma física. No obstante, debe mencionarse que se considera una trayectoria solar con una evolución más rápida con el objetivo de reducir la duración de las pruebas hasta aproximadamente 2 horas. Adicionalmente, en el caso del controlador MPC, se integran algoritmos metaheurísticos para desarrollar la etapa de optimización. Particularmente se tiene el algoritmo de Evolución Diferencial (ED) y optimización por enjambre de partículas (PSO, del término en inglés *Particle Swarm Optimization*). Los Algoritmos 2 y 3 presentan el pseudocódigo para la versión con ED y con PSO, respectivamente. Además, la Tabla 4.3 muestra los parámetros de configuración usados para cada algoritmo de optimización.

Tabla 4.3: Configuración de los algoritmos de optimización metaheurísticos

Parámetro	Algoritmo ED	Algoritmo PSO
Coeficiente de ponderación para error de seguimiento (r)	0.1	0.1
Coeficiente de ponderación para consumo energético (q)	1	1
Número de características de cada individuo/partícula	$N_c = 5$	$N_c = 5$
Número de individuos/partículas	50	50
Factor de ponderación para la mutación	0.7	—
Coeficiente de crusa	0.3	—
Coeficiente de aprendizaje cognitivo	—	2.0
Coeficiente de aprendizaje social	—	2.0
Factor de inercia (α)	—	$\alpha_{min} = 0.1, \alpha_{max} = 1$
Criterio de paro	500 iteraciones	500 iteraciones

Por otro lado, debido a las limitaciones propias del MCDIP, así como de la aplicabilidad que se considera para este trabajo, se plantean las siguientes restricciones

$$|e_{st}[k]| \leq 0.5^\circ$$

$$|v[k]| \in \{0\} \cup [3, 12] \quad V$$

la primera de ellas está asociada con el error de seguimiento permitido máximo, mientras que la segunda restringe la operación del actuador dentro de los intervalos de voltaje $(0, 3)$ V y $(-3, 0)$ V debido a que es una región de operación ineficiente e impredecible relacionada con la zona muerta del MCDIP.

El seguimiento de trayectoria se aborda a través de ventanas de control con duración igual al horizonte de predicción N_h . En cada ventana de control la diferencia temporal entre los horizontes de control y predicción se utiliza para ejecutar el algoritmo de optimización y calcular las acciones de control de la ventana siguiente, por ello debe cumplirse la desigualdad estricta $N_c < N_h$. En

este caso, al igual que para las pruebas en simulación, se considera $N_h = 10$ y $N_c = 5$. La Figura 4.7 muestra la distribución de esta ventana de control.



Figura 4.7: Distribución de la ventana de control.

Algoritmo 2: Control MPC con ED para Seguimiento Solar

Parámetros:

```

1:  $N_h, N_c$  % Horizontes de predicción y de control,  $N_h, N_c \in \mathbb{Z}^+$ ,  $N_h > N_c$ 
2:  $u_{\min} \in \mathbb{R}^{N_c}, u_{\max} \in \mathbb{R}^{N_c}$  % Cotas de acción de control,  $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}^{N_c}$ 
3:  $r, q$  % Coeficientes de ponderación,  $r, q \in \mathbb{R}^+$ 
4:  $NP$  % Tamaño de población,  $NP \in \mathbb{Z}^+$ 
5:  $iter_{\max}$  % Iteraciones máximas,  $iter_{\max} \in \mathbb{Z}^+$ 
6:  $F$  % Factor de mutación,  $F \in [0, 2]$ 
7:  $CR$  % Factor de crusa,  $CR \in [0, 1]$ 

8: function LEERESTADO % Obtener el vector de estado
9:    $x[0] = \theta$  %  $\theta$  : Posición angular del rotor
10:   $x[1] = 0$  % Velocidad al inicio de la ventana de control
11: end function

12: function GENERARTRAYECTORIA % Calcular trayectoria de referencia
13:    $Y^* = [y^*[k+1] \ y^*[k+2] \ \dots \ y^*[k+N_h]]$  % Trayectoria solar
14: end function

15: function OPTIMIZADOR

16:   function INICIALIZACION % Inicialización de la matriz de población
17:      $X = \text{Matriz aleatoria}$  %  $X \in \mathbb{R}^{NP \times N_c}$ ,  $u_{\min} \leq X[i][j] \leq u_{\max}$ 
18:   end function

19:   for  $iter = 1 \rightarrow iter_{\max}$  do

20:     function MUTACION % Creación de la matriz de mutación,  $V \in \mathbb{R}^{NP \times N_c}$ 
21:       for  $i = 0 \rightarrow NP$  do %  $r_1, r_2, r_3 \in \{0, 1, \dots, N_c - 1\}$  aleatorios
22:          $V[i][:] = X[r_1][:] + F(X[r_2][:] - X[r_3][:])$ 

```

```

23:         end for
24:     end function

25:     function CRUZA      % Creación de la matriz de candidatos,  $U_{trial} \in \mathbb{R}^{NP \times Nc}$ 
26:         for  $i = 0 \rightarrow NP$  do
27:             for  $j = 0 \rightarrow N_c$  do
28:                 if  $r_{CR} \leq CR$  o  $j = r_{ix}$  then      %  $r_{CR} \in \mathbb{R}$ ,  $r_{ix} \in \{0, 1, \dots, N_c - 1\}$ 
29:                      $U_{trial}[i][j] = V[i][j]$           %  $r_{CR}$  distinto para cada elemento
30:                 end if                      %  $r_{ix}$  distinto para cada fila
31:                 if  $r_{CR} > CR$  y  $j \neq r_{ix}$  then
32:                      $U_{trial}[i][j] = X[i][j]$ 
33:                 end if
34:             end for
35:         end for
36:     end function

37:     function SELECCION
38:         for  $i = 1 \rightarrow NP$  do

39:             function EVALUARRESTRICCIONES %  $g(\cdot)$ : Restricciones de desigualdad
40:                  $V_X = g(X[i][:]) + h(X[i][:])$         %  $h(\cdot)$ : Restricciones de igualdad
41:                  $V_U = g(U_{trial}[i][:]) + h(U_{trial}[i][:])$ 
42:             end function

43:             function EVALUARFUNCIONCOSTO
44:                  $Y_X = [y_X[k+1] \ y_X[k+2] \ \dots \ y_X[k+N_h]]$ 
45:                  $F_{ssX} = r(Y^* - Y_X)^T(Y^* - Y_X) + q(X[i][:])^T(X[i][:])$ 
46:                  $Y_U = [y_U[k+1] \ y_U[k+2] \ \dots \ y_U[k+N_h]]$ 
47:                  $F_{ssU} = r(Y^* - Y_U)^T(Y^* - Y_U) + q(U_{trial}[i][:])^T(U_{trial}[i][:])$ 
48:             end function

49:             Mejor = ReglaDEB( $V_X, V_U, F_{ssX}, F_{ssU}$ )
50:             if Mejor =  $U_{trial}[i][:]$  then
51:                  $X[i][:] = U_{trial}[i][:]$ 
52:             end if
53:         end for
54:     end function

55: end for
56:  $U = X[0][:]$           % Se usa la primera fila de X como secuencia de control,  $U \in \mathbb{R}^{N_c}$ 
57: end function

```

Algoritmo 3: Control MPC con PSO para Seguimiento Solar

Parámetros:

```

1:  $N_h, N_c$  % Horizontes de predicción y de control,  $N_h, N_c \in \mathbb{Z}^+$ ,  $N_h > N_c$ 
2:  $u_{\min} \in \mathbb{R}^{N_c}, u_{\max} \in \mathbb{R}^{N_c}$  % Cotas de acción de control,  $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}^{N_c}$ 
3:  $r, q$  % Coeficientes de ponderación,  $r, q \in \mathbb{R}^+$ 
4:  $NP$  % Tamaño de población,  $NP \in \mathbb{Z}^+$ 
5:  $iter_{\max}$  % Iteraciones máximas,  $iter_{\max} \in \mathbb{Z}^+$ 
6:  $c_1$  % Coeficiente de aprendizaje cognitivo,  $c_1 \in [0, 2]$ 
7:  $c_2$  % Coeficiente de aprendizaje social,  $c_2 \in [0, 2]$ 
8:  $\alpha_{\max}$  % Coeficiente de inercia máximo,  $\alpha_{\max} \in [0, 1]$ 
9:  $\alpha_{\min}$  % Coeficiente de inercia mínimo,  $\alpha_{\min} \in [0, \alpha_{\max}]$ 

10: function LEERESTADO % Obtener el vector de estado
11:    $x[0] = \theta$  %  $\theta$  : Posición angular del rotor
12:    $x[1] = 0$  % Velocidad al inicio de la ventana de control
13: end function

14: function GENERARTRAYECTORIA % Calcular trayectoria de referencia
15:    $Y^* = [y^*[k + 1] \ y^*[k + 2] \ \dots \ y^*[k + N_h]]$  % Trayectoria solar
16: end function

17: function OPTIMIZADOR

18:   function INICIALIZACION %  $X$  : Partículas,  $V$  : Velocidades
19:      $X =$  Matriz aleatoria %  $X \in \mathbb{R}^{NP \times N_c}$ ,  $u_{\min} \leq X[i][j] \leq u_{\max}$ 
20:      $X_{best} = X$  % Inicialización de matriz de "Mejores",  $X_{best} \in \mathbb{R}^{NP \times N_c}$ 
21:      $V =$  Matriz aleatoria %  $V \in \mathbb{R}^{NP \times N_c}$ ,  $u_{\min} \leq V[i][j] \leq u_{\max}$ 
22:      $g_{best} = X[0][:]$  % Inicialización del "mejor global",  $g_{best} \in \mathbb{R}^{N_c}$ 
23:   end function

24:   for  $iter = 1 \rightarrow iter_{\max}$  do

25:     function DESPLAZARPARTICULAS
26:        $\alpha = \alpha_{\max} - (\alpha_{\max} - \alpha_{\min})(i/iter_{\max})$ 
27:       for  $i = 0 \rightarrow NP - 1$  do
28:          $X[i][:] = \alpha V[i][:] + c_1 r_1 (X_{best}[i][:] - X[i][:]) + c_2 r_2 (g_{best} - X[i][:])$ 
29:       end for
30:     end function

31:   function ACTUALIZARBEST
32:     for  $i = 0 \rightarrow NP - 1$  do

33:       function EVALUARRESTRICCIONES %  $g(\cdot)$ : Restricciones de desigualdad
34:          $V_X = g(X[i][:]) + h(X[i][:])$  %  $h(\cdot)$ : Restricciones de igualdad
35:          $V_{X_{best}} = g(X_{best}[i][:]) + h(X_{best}[i][:])$ 
36:          $V_{best} = g(g_{best}) + h(g_{best})$ 

```

```

37:         end function

38:     function EVALUARFUNCIONCOSTO
39:         
$$Y_X = [y_X[k+1] \ y_X[k+2] \ \dots \ y_X[k+N_h]]$$

40:         
$$F_{ssX} = r(Y^* - Y_X)^T(Y^* - Y_X) + q(X[i][:])^T(X[i][:])$$

41:         
$$Y_{X_{best}} = [y_{X_{best}}[k+1] \ y_{X_{best}}[k+2] \ \dots \ y_{X_{best}}[k+N_h]]$$

42:         
$$F_{ssX_{best}} = r(Y^* - Y_{X_{best}})^T(Y^* - Y_{X_{best}}) + q(X_{best}[i][:])^T(X_{best}[i][:])$$

43:         
$$Y_{best} = [y_{best}[k+1] \ y_{best}[k+2] \ \dots \ y_{best}[k+N_h]]$$

44:         
$$F_{ssbest} = r(Y^* - Y_{best})^T(Y^* - Y_{best}) + q(g_{best})^T(g_{best})$$

45:     end function

46:     Mejor = ReglaDEB(V_X, V_{X_{best}}, F_{ssX}, F_{ssX_{best}})
47:     if Mejor = X[i][:] then
48:         X_{best}[i][:] = X[i][:]
49:         Mejor = ReglaDEB(V_X, V_{best}, F_{ssX}, F_{ssbest})
50:         if Mejor = X[i][:] then
51:             g_{best} = X[i][:]
52:         end if
53:     end if
54: end for
55: end function

56: end for
57: U = g_{best} % Se usa el mejor global como secuencia de control,  $U \in \mathbb{R}^{N_c}$ 
58: end function

```

El temporizador interno de la tarjeta NUCLEO-64 F446RE en conjunto con el Algoritmo 1 se usan para calcular la evolución temporal de la trayectoria de referencia. El registro de los datos de cada prueba se realiza mediante una interfaz creada con el *App Designer* de **MATLAB 2024®**. La pantalla de esta interfaz puede observarse en la Figura 4.8. La adquisición se consigue mediante comunicación serial por protocolo UART a una velocidad de 115200 *Bd*.

Todos los controladores son programados y cargados en la tarjeta de desarrollo a través del entorno de desarrollo integrado de Arduino. Los códigos correspondientes pueden encontrarse al consultar el [repositorio](#).

La Tabla 4.4 muestra los resultados numéricos obtenidos durante las pruebas experimentales. En esta se puede observar que el controlador MPC con algoritmo ED presenta el menor consumo energético para ambos ejes, además, a diferencia de los resultados obtenidos en simulación, su desempeño en términos del error de seguimiento es mejor que el del controlador *On-Off*. Adicionalmente, también es importante notar que para cualquiera de los controladores la restricción planteada por el ángulo de aceptancia de $|e_{st}[k]| \leq 0.5^\circ$ se satisface en todo momento. Finalmente, aunque el controlador PID presenta el mayor consumo energético y su acción de control se presenta principalmente en la región de operación restringida para los otros dos controladores, sus índices asociados al error de seguimiento presentan valores que reflejan una precisión excelente que supera por mucho tanto al *On-Off* como al MPC. Lo anterior puede verificarse al observar las Figuras 4.9 a 4.12 que presentan las gráficas asociadas a cada prueba experimental.

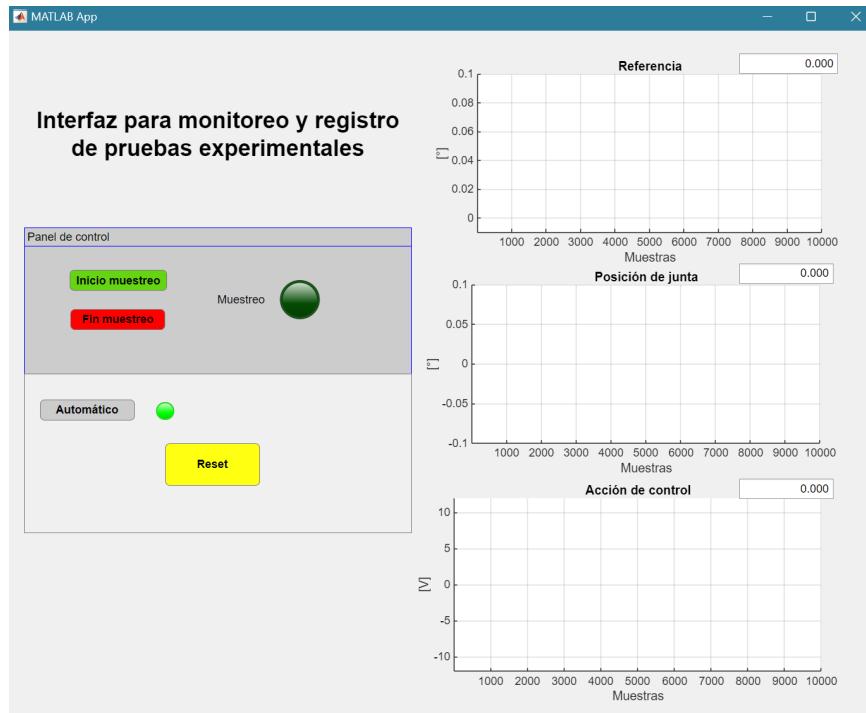
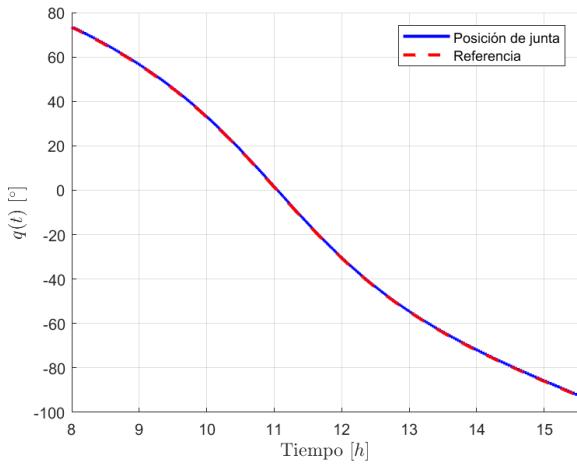


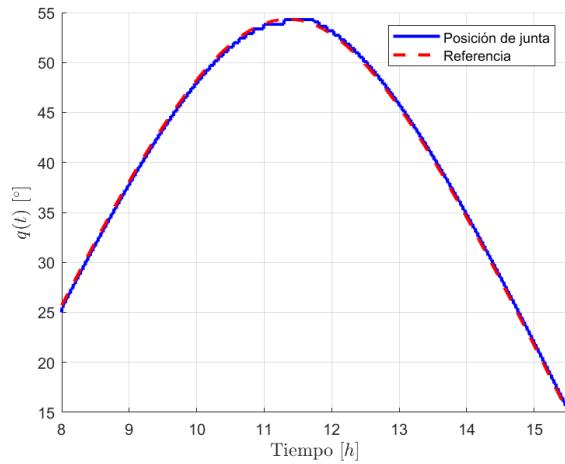
Figura 4.8: Interfaz de monitoreo y registro de datos.

Tabla 4.4: Resultados numéricos de experimentación.

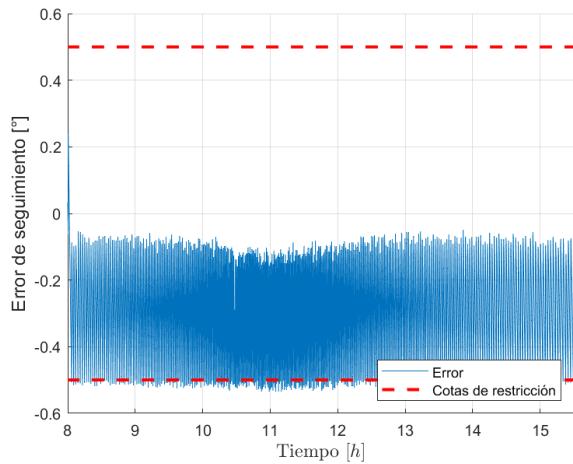
Controlador	MSE [°]		MAE [°]		Energía [Wh]	
	Acimutal	Elevación	Acimutal	Elevación	Acimutal	Elevación
On-Off	0.0990	0.0971	0.2852	0.2813	0.5321	0.2356
PID	0.000237	0.000309	0.0121	0.011	0.8970	0.6876
MPC ED	0.0728	0.0768	0.2330	0.2422	0.5212	0.2249
MPC PSO	0.0988	0.0814	0.2782	0.2511	0.5792	0.32230



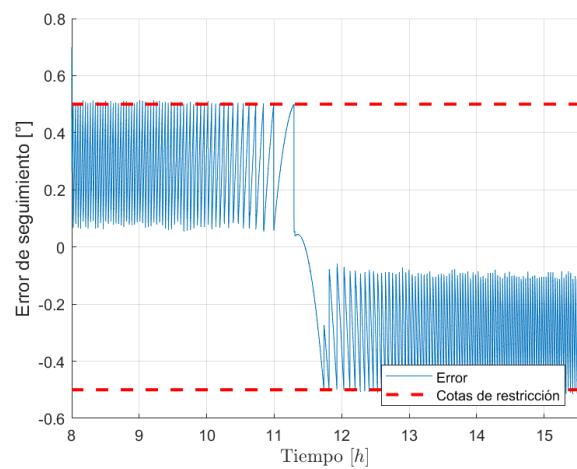
(a) Posición de junta. Eje acimutal.



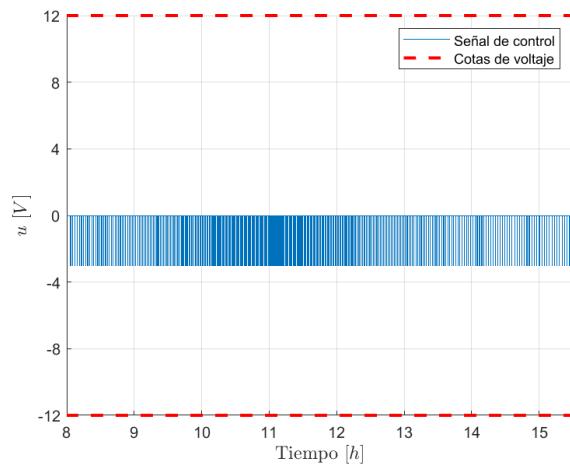
(b) Posición de junta. Eje de elevación.



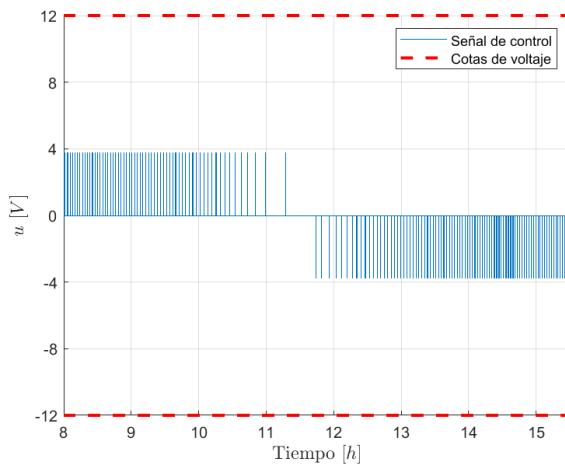
(c) Error de seguimiento. Eje acimutal.



(d) Error de seguimiento. Eje de elevación.

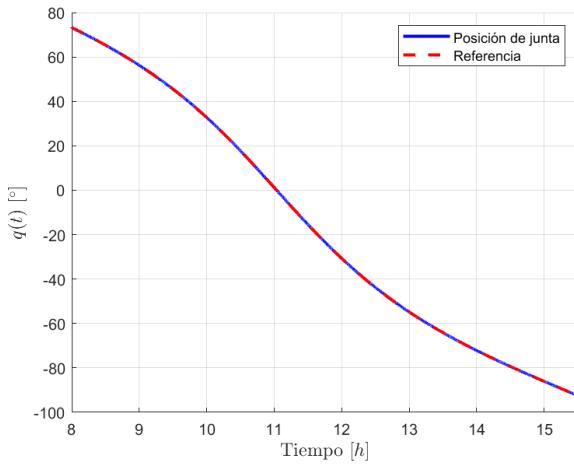


(e) Señal de control. Eje acimutal.

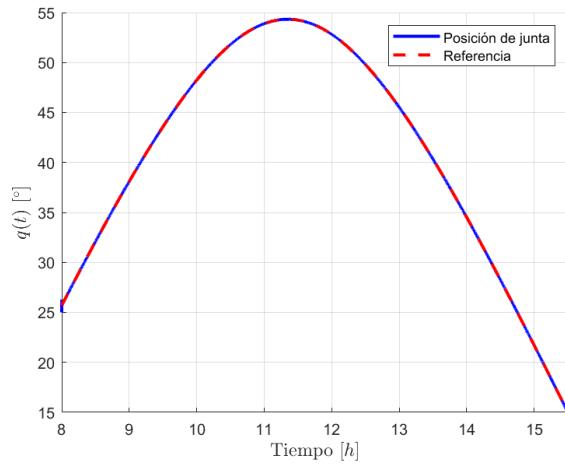


(f) Señal de control. Eje de elevación.

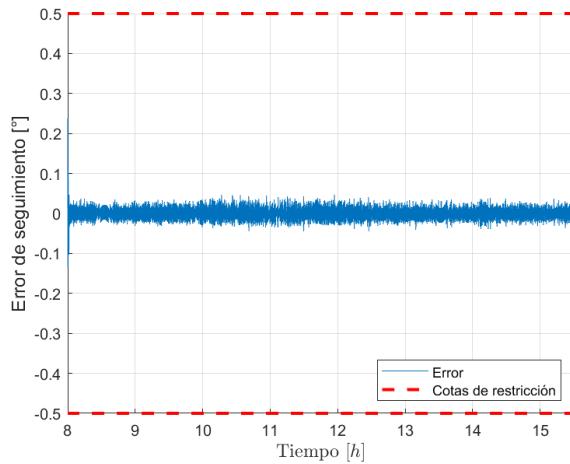
Figura 4.9: Resultados de seguimiento de trayectoria con controlador *On-Off*.



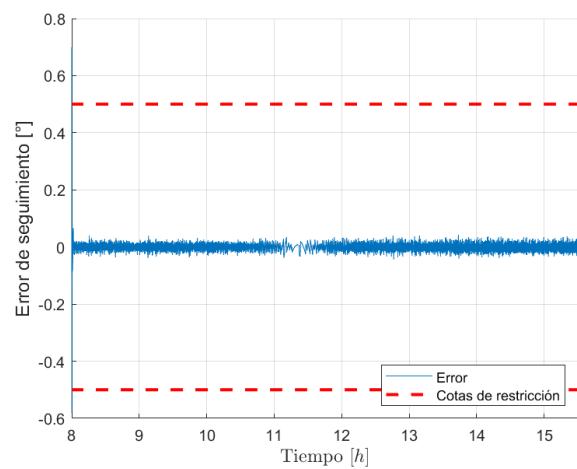
(a) Posición de junta. Eje acimutal.



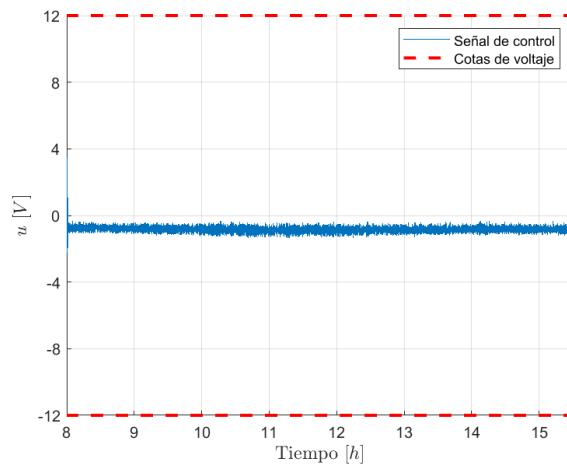
(b) Posición de junta. Eje de elevación.



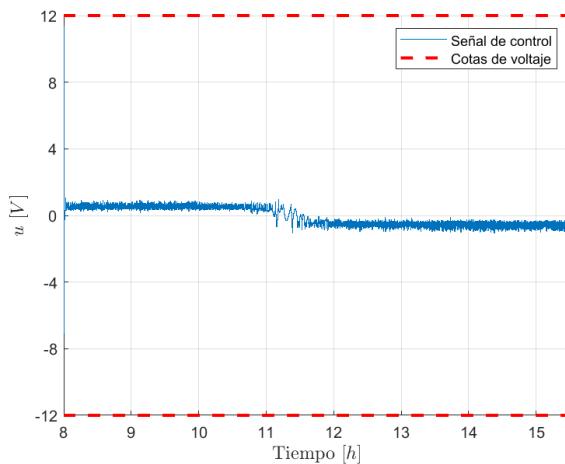
(c) Error de seguimiento. Eje acimutal.



(d) Error de seguimiento. Eje de elevación.

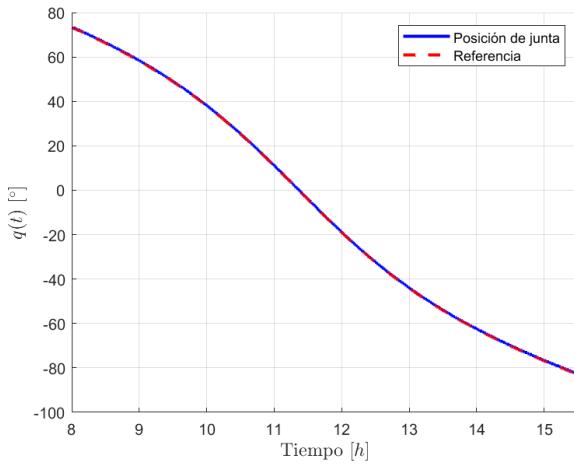


(e) Señal de control. Eje acimutal.

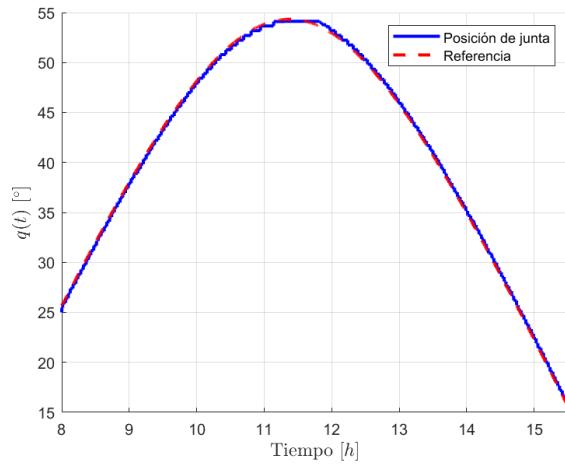


(f) Señal de control. Eje de elevación

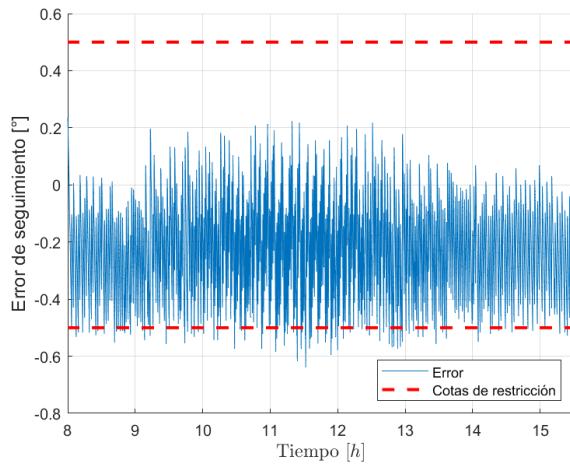
Figura 4.10: Resultados de seguimiento de trayectoria con controlador PID.



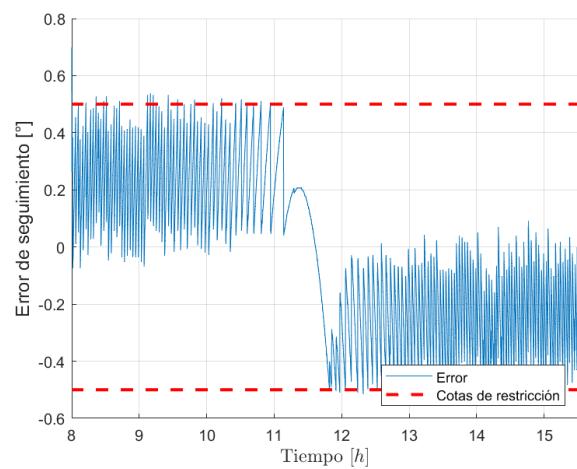
(a) Posición de junta. Eje acimutal.



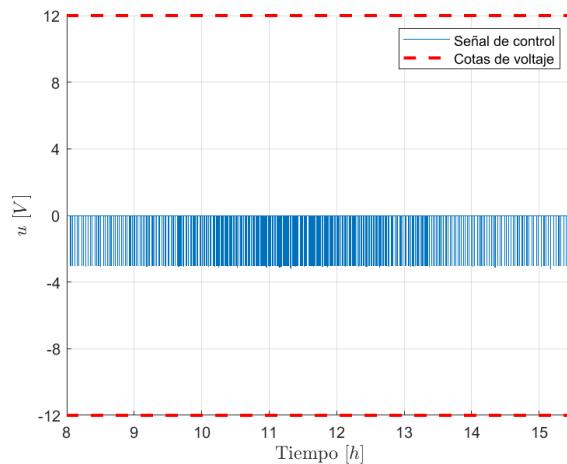
(b) Posición de junta. Eje de elevación.



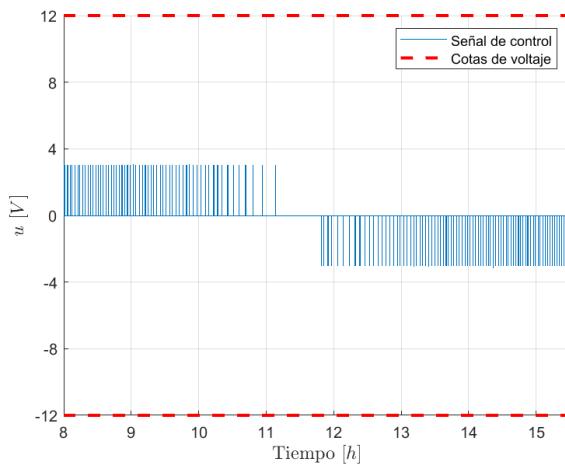
(c) Error de seguimiento. Eje acimutal.



(d) Error de seguimiento. Eje de elevación.

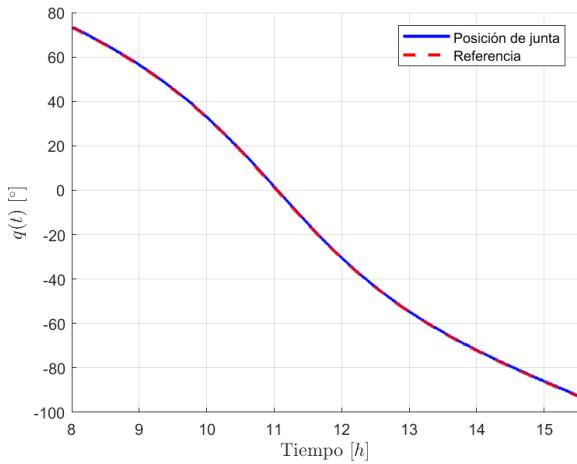


(e) Señal de control. Eje acimutal.

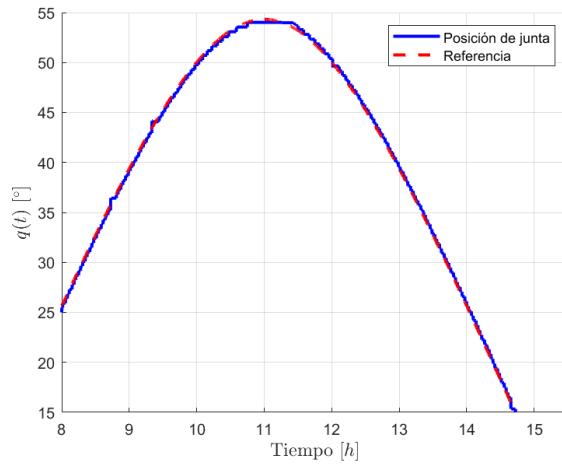


(f) Señal de control. Eje de elevación

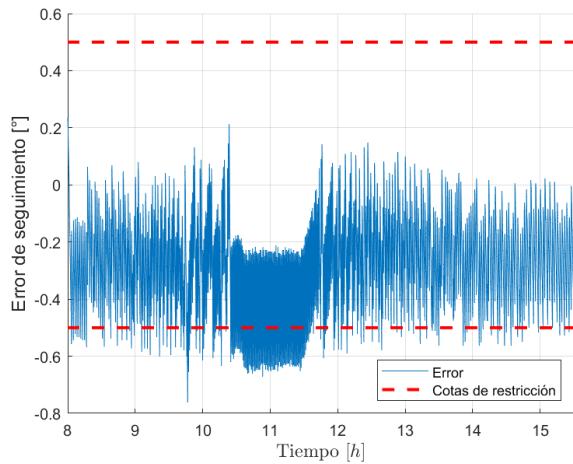
Figura 4.11: Simulación de seguimiento de trayectoria con controlador MPC y algoritmo ED.



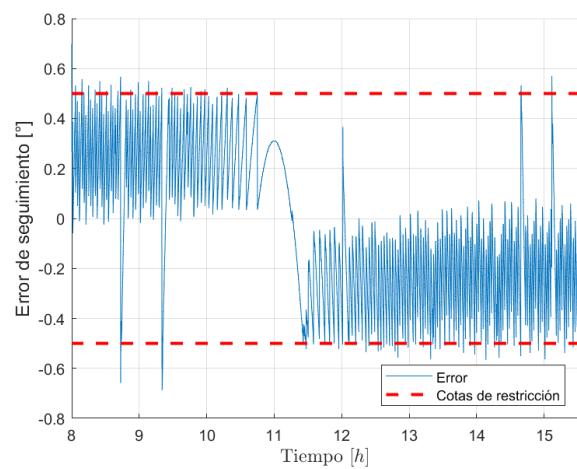
(a) Posición de junta. Eje acimutal.



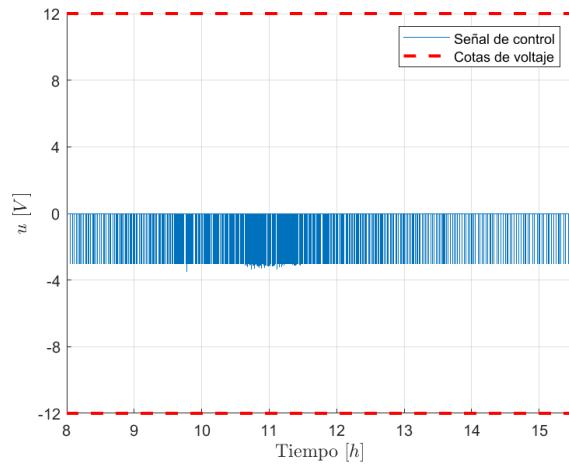
(b) Posición de junta. Eje de elevación.



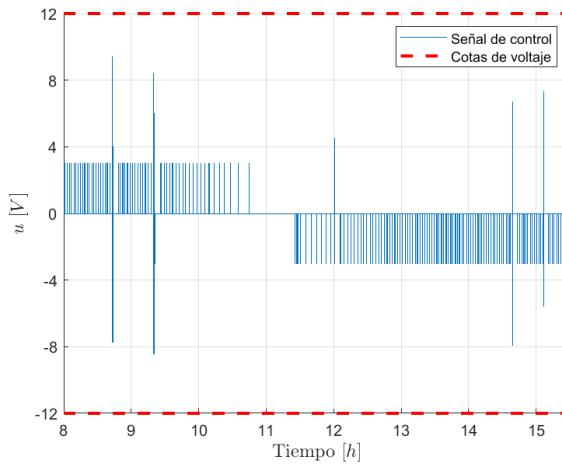
(c) Error de seguimiento. Eje acimutal.



(d) Error de seguimiento. Eje de elevación.



(e) Señal de control. Eje acimutal.



(f) Señal de control. Eje de elevación

Figura 4.12: Resultados de seguimiento de trayectoria con controlador MPC y algoritmo PSO.

Capítulo 5

Discusión

Los resultados experimentales obtenidos señalan que el control MPC (que es una estrategia de control basada en esquema de optimización) tiene la capacidad de desarrollar un seguimiento de la trayectoria solar preciso sin comprometer la rentabilidad en términos de producción. Su principio de funcionamiento permite atender de forma simultánea criterios de desempeño en términos seguimiento de trayectoria y consumo energético, ya sea a través de la ponderación de los índices correspondientes, o bien, mediante el planteamiento de restricciones en el proceso de optimización asociadas, por ejemplo, al error de seguimiento máximo permisible.

La integración del MPC en un esquema de control en lazo cerrado con la retroalimentación de un sensor de posición le proporciona robustez ante perturbaciones y dinámicas no modeladas. Esto permite eliminar, en cierta medida, la relación entre la exactitud del modelo matemático y el desempeño del controlador, de modo que pueden emplearse representaciones simplificadas, por ejemplo, el modelo de juntas independientes. No obstante, al desarrollar el proceso de optimización a través de métodos numéricos y que, además, están basados en técnicas metaheurísticas, el controlador desarrollado tiene la capacidad de operar con modelos dinámicos más complejos, o bien, no lineales. Asimismo, esta característica facilita el manejo de las restricciones y permite considerarlas desde la etapa de diseño, lo que evita realizar ajustes excesivos de sintonización durante la puesta en marcha.

Por otro lado, debe tenerse en cuenta que el algoritmo de optimización desarrollado en cada ventana de control consume un tiempo significativo y mucho más grande con respecto a controladores convencionales. En consecuencia, la implementación de esta estrategia de control exige un costo computacional elevado y presenta limitaciones para sistemas con dinámicas rápidas. Además, si no se cuenta con un procesamiento paralelo del algoritmo de optimización y las instrucciones operativas del controlador, el sistema se vuelve susceptible a perturbaciones durante el tiempo de cómputo.

Las pruebas desarrolladas no involucran un seguimiento de la trayectoria solar en estricto sentido, ya que, en su lugar, generan de manera local una trayectoria de referencia preestablecida cuyo seguimiento se verifica con un elemento sensor que también es local, por lo que el tipo de seguimiento correspondiente es cronológico, pero no activo. No obstante, debido a la flexibilidad proporcionada por el enfoque de ventanas de control que subdividen a la trayectoria completa,

los resultados pueden ser extrapolables para un esquema de seguimiento activo con algunas consideraciones adicionales como la integración de un sensor de seguimiento solar, así como de un módulo de reloj en tiempo real. Adicionalmente, los resultados que se obtienen en este trabajo provienen de una experimentación en una plataforma de pruebas de un GDL, la cual preserva una equivalencia con un SS de dos ejes bajo un esquema de juntas independientes. Esto gracias a la robustez mecánica que proporcionan los actuadores utilizados, así como a la naturaleza propia de la aplicación, es decir, la evolución temporal de la trayectoria solar.

Finalmente, el análisis comparativo del MPC con controladores convencionales muestra que, si bien estos últimos pueden tener un desempeño adecuado, al mismo tiempo presentan un compromiso importante con su proceso de sintonización. Por un lado, para el controlador *On-Off* sus índices de desempeño puede aproximarse al del MPC en términos de consumo energético, sin embargo, para esto es necesario desarrollar un proceso de sintonización en el cual se busca la optimalidad de manera heurística y por lo tanto no está garantizada. Mas aun, incluso después de este procedimiento, las pruebas experimentales muestran que su desempeño es superado por el del MPC tanto en términos de consumo energético como de error de seguimiento. Por su parte, el controlador PID presenta una precisión de seguimiento excelente que se respalda por los resultados tanto a nivel simulación como en las pruebas experimentales. Sin embargo, para aplicaciones de captación y transformación de la energía solar, el ángulo de aceptancia permitido para un régimen de producción alto tanto para dispositivos fotovoltaicos ($\pm 2^\circ$) como de concentración ($\pm 0.5^\circ$) se encuentra muy por encima de la precisión que presenta este controlador, por lo tanto esto no representa un ventaja significativa en términos de producción energética. En contraste, al mismo tiempo presenta el mayor consumo de energía asociado a la tarea de seguimiento.

Capítulo 6

Conclusiones

A partir de la metodología desarrollada y de los resultados alcanzados, las conclusiones correspondientes a este trabajo se presentan a continuación:

- Se diseñó y construyó una plataforma de pruebas de 1 GDL habilitada para la implementación y verificación de controladores de posición y seguimiento de trayectoria. La plataforma cuenta con una unidad de procesamiento con capacidad para ejecutar algoritmos de optimización metaheurísticos y fue integrada con una interfaz de monitoreo y registro de datos desarrollada en una computadora personal.
- Se desarrolló una metodología para la caracterización e identificación basada en la respuesta al escalón de actuadores de tipo MCDIP bajo un modelo de juntas independientes. Asimismo, se demostró la existencia y unicidad de la solución al plantear el problema como la minimización del error cuadrático entre la respuesta teórica y la experimental, verificando además su viabilidad mediante métodos de solución tanto analíticos como aproximados.
- Se planteó un esquema de control MPC en lazo cerrado para el control de la plataforma de pruebas y se verificó su viabilidad en términos de estabilidad asintótica, controlabilidad y observabilidad.
- Se implementaron dos algoritmos de optimización metaheurísticos (ED y PSO) que fueron integrados en el controlador MPC para ejecutar el proceso de minimización sujeto a restricciones necesario para el cálculo de las acciones de control para el seguimiento de la trayectoria solar.
- Se verificó el desempeño del controlador MPC al someterlo a pruebas de seguimiento de la trayectoria solar en cada una de sus componentes (ángulo acimutal y de elevación), obteniendo en promedio los siguientes índices de desempeño: $MSE = 0.08245^\circ$ y $MAE = 0.2511$, así como un consumo de energía promedio asociado al esfuerzo de control del actuador de 0.82415 Wh . Esta precisión de apuntamiento es suficiente incluso para su aplicación en tecnología de concentración (acotada entre $\pm 0.5^\circ$). Asimismo, el consumo energético reportado es significativamente reducido considerando la potencia nominal del actuador.

Aportaciones

Derivado del trabajo realizado durante el desarrollo de este documento de tesis se obtuvieron las siguientes aportaciones:

Artículos Científicos

- Solís-Cervantes, C. U., Palomino-Resendiz, S. I., Flores-Hernández, D. A., Peñaloza-López, M. A., & Montelongo-Vazquez, C. M. (2024). Design and Implementation of Extremum-Seeking Control Based on MPPT for Dual-Axis Solar Tracker. *Mathematics*, 12(12), 1913. <https://doi.org/10.3390/math12121913>.
- Palomino-Resendiz, S. I., Peñaloza-López, M. A., Flores-Hernández, D. A., Solís-Cervantes, C. U., & Palomino-Resendiz, R. L. (2025). Model Reference Adaptive Control (MRAC) for dual-axis solar tracker applied in CPV. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 279, 113225. <https://doi.org/10.1016/j.solmat.2024.113225>
- Peñaloza-López, M. A., Palomino-Resendiz, S. I., & Flores-Hernández, D. A. Control y monitoreo de desempeño de sistemas seguidores solares bajo software embebido (2025). *Revista Elektron*, 9(1). <https://doi.org/10.37537/rev.elektron.9.1.199.2025>
- Peñaloza-Lopez, M. A., Palomino-Resendiz, S. I., Flores-Hernández, D. A., Solís-Cervantes, C. U., & Palomino-Resendiz, R. L. (2024). Diseño de un sistema de gestión operación de seguidores solares basado en un clasificador difuso de parámetros ambientales. *Pádi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 12, 323-331. <https://doi.org/10.29057/icbi.v12iEspecial4.13283>
- Peñaloza-López, M. A., Palomino-Resendiz, S. I., Flores-Hernández, D. A., Chicaiza, W. D., & Escaño, J. M. (2025). Clasificador borroso de condiciones ambientales para la operación de seguidores solares. *Simposios del Comité Español de Automática (CEA)*, 1(2).

Presentación de trabajos en congresos

- Peñaloza-Lopez, M. A., Palomino-Resendiz, S. I., Flores-Hernández, D. A., Solís-Cervantes, C. U., & Palomino-Resendiz, R. L. (2024). Diseño de un sistema de gestión operación de seguidores solares basado en un clasificador difuso de parámetros ambientales. Congreso Nacional Multidisciplinario de Innovación Ciencia y Tecnología (CoNMICyT). Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Hidalgo, 25, 26 y 27 de septiembre de 2024.
- Peñaloza-López, M. A., Palomino-Resendiz, S. I., & Flores-Hernández, D. A. (2024). Control y monitoreo de desempeño de sistemas seguidores solares bajo software embebido. Congreso Argentino de Sistemas Embebidos (CASE 2024). Universidad Nacional de Tucumán, San Miguel de Tucumán Argentina, 8 y 9 de agosto de 2024.
- Peñaloza-López, M. A., Palomino-Resendiz, S. I., Flores-Hernández, D. A., Chicaiza, W. D., & Escaño, J. M. (2025). Clasificador borroso de condiciones ambientales para la operación de seguidores solares. XX Simposio CEA de Control Inteligente. Universidad de Huelva, Huelva, España, 25,26 y 27 de junio de 2025.

Apéndice A – Circuito electrónico de control para plataforma de pruebas

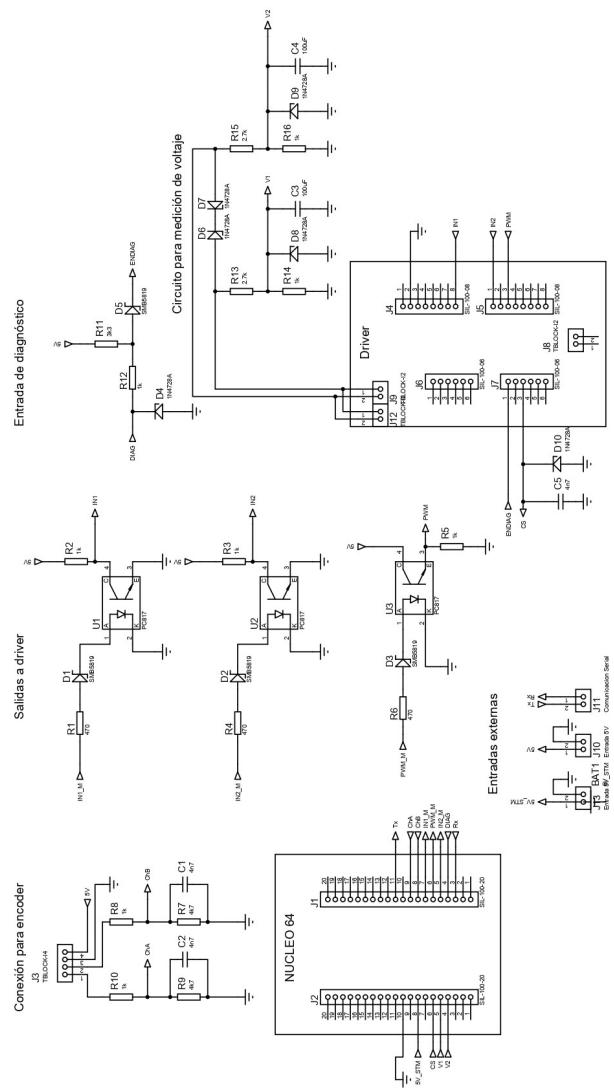


Figura 1: Diagrama esquemático para circuito de control de plataforma de 1 GDL.

Referencias

- [1] Secretaría de Energía. *Balance Nacional de Energía*. gob.mx. URL: <http://www.gob.mx/sener/articulos/balance-nacional-de-energia-296106> (visited on 12/09/2024).
- [2] Luis Vargas et al. *Generación de energía eléctrica con fuentes renovables*. Editorial Universitaria de Chile, 2020.
- [3] Energy Institute. *2025 Statistical Review of World Energy*. URL: <https://www.energyinst.org/statistical-review> (visited on 07/19/2025).
- [4] Javid Mohtasham. “Review Article-Renewable Energies.” In: *Energy Procedia* 74 (2015). The International Conference on Technologies and Materials for Renewable Energy, Environment and Sustainability TMREES15, pp. 1289–1297. ISSN: 1876-6102. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2015.07.774>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1876610215015428>.
- [5] IEA. *Renewables 2022*. <https://www.iea.org/reports/renewables-2022>. IEA, Paris. Licence: CC BY 4.0. 2022.
- [6] Michael Schmela et al. “Advancements in solar technology, markets, and investments A summary of the 2022 ISA World Solar Reports.” In: *Solar Compass* 6 (2023), p. 100045. ISSN: 2772-9400. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.solcom.2023.100045>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2772940023000139>.
- [7] Dieter H Otterbach. *Energía y Calentamiento Global: ¿ Cómo asegurar la supervivencia de la humanidad?* Grupo Editorial Patria, 2014.
- [8] Priscila Gonçalves Vasconcelos Sampaio and Mario Orestes Aguirre González. “Photovoltaic solar energy: Conceptual framework.” In: *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 74 (2017), pp. 590–601. ISSN: 1364-0321. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.02.081>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032117303076>.
- [9] S.I. Palomino-Resendiz et al. “Design and implementation of a robotic active solar distiller based on a Fresnel concentrator and a photovoltaic system.” In: *Energy Conversion and Management* 166 (2018), pp. 637–647. ISSN: 0196-8904. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2018.04.069>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196890418304175>.
- [10] Gang Wang et al. “Novel design and analysis of a solar PVT system using LFR concentrator and nano-fluids optical filter.” In: *Case Studies in Thermal Engineering* 27 (2021), p. 101328. ISSN: 2214-157X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.csite.2021.101328>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214157X21004913>.

- [11] Paula Roldán Millanes and Elisa Alonso Romero. “Diseño y análisis de una central termosolar de torre central.” Trabajo de fin de grado. Universidad Politécnica de Madrid, 2024.
- [12] Tomás Díaz Corcobado and Guadalupe Carmona Rubio. *Instalaciones solares fotovoltaicas: Ciclo formativo de grado medio*. McGraw Hill, 2010.
- [13] Cesar Ulises Solís-Cervantes et al. “Design and Implementation of Extremum-Seeking Control Based on MPPT for Dual-Axis Solar Tracker.” In: *Mathematics* 12.12 (2024). ISSN: 2227-7390. DOI: [10.3390/math12121913](https://doi.org/10.3390/math12121913). URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/12/12/1913>.
- [14] SI Palomino-Resendiz. *Generación y control de trayectorias para sistemas robóticos de seguimiento solar*. 2021.
- [15] A.Z. Hafez, A.M. Yousef, and N.M. Harag. “Solar tracking systems: Technologies and trackers drive types A review.” In: *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 91 (2018), pp. 754–782. ISSN: 1364-0321. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rser.2018.03.094>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032118301886>.
- [16] P.I. Cooper. “The absorption of radiation in solar stills.” In: *Solar Energy* 12.3 (1969), pp. 333–346. ISSN: 0038-092X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0038-092X\(69\)90047-4](https://doi.org/10.1016/0038-092X(69)90047-4). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0038092X69900474>.
- [17] Joseph J. Michalsky. “The Astronomical Almanac’s algorithm for approximate solar position (19502050).” In: *Solar Energy* 40.3 (1988), pp. 227–235. ISSN: 0038-092X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0038-092X\(88\)90045-X](https://doi.org/10.1016/0038-092X(88)90045-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0038092X8890045X>.
- [18] Nurzhigit Kuttybay et al. “Optimized Single-Axis Schedule Solar Tracker in Different Weather Conditions.” In: *Energies* 13.19 (2020). ISSN: 1996-1073. DOI: [10.3390/en13195226](https://doi.org/10.3390/en13195226). URL: <https://www.mdpi.com/1996-1073/13/19/5226>.
- [19] Nedyalko Todorov Katrandzhiev and Nikolay Nenkov Karnobatev. “Algorithm for Single Axis Solar Tracker.” In: *2018 IEEE XXVII International Scientific Conference Electronics - ET*. 2018, pp. 1–4. DOI: [10.1109/ET.2018.8549644](https://doi.org/10.1109/ET.2018.8549644).
- [20] Nuttee Thungsuk et al. “Performance Analysis of Solar Tracking Systems by Five-Position Angles with a Single Axis and Dual Axis.” In: *Energies* 16.16 (2023). ISSN: 1996-1073. DOI: [10.3390/en16165869](https://doi.org/10.3390/en16165869). URL: <https://www.mdpi.com/1996-1073/16/16/5869>.
- [21] Yingxue Yao et al. “A multipurpose dual-axis solar tracker with two tracking strategies.” In: *Renewable Energy* 72 (2014), pp. 88–98. ISSN: 0960-1481. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2014.07.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148114003887>.
- [22] Cemil Sungur. “Multi-axes sun-tracking system with PLC control for photovoltaic panels in Turkey.” In: *Renewable Energy* 34.4 (2009), pp. 1119–1125. ISSN: 0960-1481. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2008.06.020>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148108002656>.
- [23] Rosa F. Fuentes-Morales et al. “Control algorithms applied to active solar tracking systems: A review.” In: *Solar Energy* 212 (2020), pp. 203–219. ISSN: 0038-092X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.solener.2020.10.071>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0038092X20311300>.

- [24] Emre Kiyak and Gokhan Gol. “A comparison of fuzzy logic and PID controller for a single-axis solar tracking system.” In: *Renewables: Wind, Water, and Solar* 3.1 (Feb. 25, 2016), p. 7. ISSN: 2198-994X. DOI: [10.1186/s40807-016-0023-7](https://doi.org/10.1186/s40807-016-0023-7). URL: <https://doi.org/10.1186/s40807-016-0023-7>.
- [25] Iulia Stamatescu et al. “Fuzzy decision support system for solar tracking optimization.” In: *2014 International Conference on Development and Application Systems (DAS)*. 2014, pp. 16–20. DOI: [10.1109/DAAS.2014.6842420](https://doi.org/10.1109/DAAS.2014.6842420).
- [26] Azwaan Zakariah, Jasrul Jamani Jamian, and Mohd Amri Md Yunus. “Dual-axis solar tracking system based on fuzzy logic control and Light Dependent Resistors as feedback path elements.” In: *2015 IEEE Student Conference on Research and Development (SCoReD)*. 2015, pp. 139–144. DOI: [10.1109/SCoReD.2015.7449311](https://doi.org/10.1109/SCoReD.2015.7449311).
- [27] A Yazidi et al. “Low cost two-axis solar tracker with high precision positioning.” In: *2006 first international symposium on environment identities and Mediterranean area*. IEEE. 2006, pp. 211–216.
- [28] Jose A. Carballo et al. “New low-cost solar tracking system based on open source hardware for educational purposes.” In: *Solar Energy* 174 (2018), pp. 826–836. ISSN: 0038-092X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.solener.2018.09.064>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0038092X18309587>.
- [29] Kang Mao, Fuxiang Liu, and I Ruijing Ji. “Design of ARM-Based Solar Tracking System.” In: *2018 37th Chinese Control Conference (CCC)*. 2018, pp. 7394–7398. DOI: [10.23919/ChiCC.2018.8483773](https://doi.org/10.23919/ChiCC.2018.8483773).
- [30] Mark W Spong, Seth Hutchinson, and M Vidyasagar. “Robot modeling and control.” In: *John Wiley &* (2020).
- [31] Sergio I. Palomino-Resendiz et al. “Optimal Selection of the Control Strategy for Dual-Axis Solar Tracking Systems.” In: *IEEE Access* 11 (2023), pp. 56561–56573. DOI: [10.1109/ACCESS.2023.3283336](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3283336).
- [32] Hassan Fathabadi. “Comparative study between two novel sensorless and sensor based dual-axis solar trackers.” In: *Solar Energy* 138 (2016), pp. 67–76. ISSN: 0038-092X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.solener.2016.09.009>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0038092X16304042>.
- [33] Carlos Morón et al. “New Prototype of Photovoltaic Solar Tracker Based on Arduino.” In: *Energies* 10.9 (2017). ISSN: 1996-1073. DOI: [10.3390/en10091298](https://doi.org/10.3390/en10091298). URL: <https://www.mdpi.com/1996-1073/10/9/1298>.
- [34] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson educación, 2010.
- [35] Steven C Chapra et al. *Métodos numéricos para ingenieros*. Vol. 5. McGraw-Hill New York, NY, USA, 2011.
- [36] Hwei P. Hsu. *Señales y sistemas*. McGraw Hill, 2011.
- [37] Eduardo Camacho and Carlos Bordons. “Control Predictivo: Pasado, Presente y Futuro.” In: *ResearchGate* 1 (Oct. 22, 2024). DOI: [10.4995/riai.v1i3.10587](https://doi.org/10.4995/riai.v1i3.10587). URL: https://www.researchgate.net/publication/28141992_Control_Predictivo_Pasado_Presente_y_Futuro (visited on 12/10/2024).
- [38] Stephen Chapman. *Máquinas eléctricas*. Mc Graw Hill, 2012.

- [39] Mohamad Farid Fazdi and Po-Wen Hsueh. "Parameters Identification of a Permanent Magnet DC Motor: A Review." In: *Electronics* 12.12 (2023). ISSN: 2079-9292. DOI: [10.3390/electronics12122559](https://doi.org/10.3390/electronics12122559). URL: <https://www.mdpi.com/2079-9292/12/12/2559>.
- [40] Raymond A Serway and Robert J Beichner. *Física para ciencias e ingeniería*. Vol. 1. McGraw-Hill Mexico City, Mexico, 2002.
- [41] S.I. Palomino-Resendiz et al. "Design and implementation of Model-Based Predictive Control for two-axis Solar Tracker." In: *Solar Energy* 265 (2023), p. 112080. ISSN: 0038-092X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.solener.2023.112080>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0038092X23007144>.
- [42] Katsuhiko Ogata. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Google-Books-ID: aYFUs17m0YQC. PRENTICE HALL, 1996. 762 pp. ISBN: 978-968-880-539-8.
- [43] C.R Martinez-Ipiña, E.J. Rodriguez-Simón, and H. Zamora-Zuñiga. *Propuesta de diseño y control de seguidor solar con capacidad de producción de baja tensión*. 2024.